力学モデルと計算機

工学部　橘　英三郎

はじめに

力学のモデルには質点系をはじめとして，流体や，弾性体などの多くのモデルがある。そして実際の解析にあたっては，現象のどの側面を重要視するかによって，それらをあらわすのに最も都合のよいモデルが選ばれることになる。いうまでもなく，これらのモデルは，今日あるような大型のDigital計算機を用いて解析されることを予想して組み立てられたわけではない。あくまで現象を簡単な形式で，しかもできるだけ矛盾なくあらわそうとして，できたモデルであろう。したがって，微分法則は，コンパクトに現象を表現することはできるが，いざ解析しようとすると，厳密な解を得ることは，なかなか困難である場合が多い。ところで，少し本末てん倒の話に聞こえるかもしれないが，Digital計算機に適合しやすいように既応の力学モデルの表現を変えてみたらどうであろうか？，"これは力学上の問題であり，これは計算機上の問題である"と全てを分けて考えずに，2つの間に何か互に影響しあうものがあっても良いのではなかろうか？

以下ではDigital 計算機用に考えられた力学モデルを2つ紹介する。この2つのモデルは種々の問題も含んではいるが，一つの試みとして，読んでいただきたい。

1. Discrete Model

D.Greenspan[1)]は，Digital計算機用の力学モデルとして"Discrete Model"を組みたてゝいる。この内容は差分形式を用いて，質点系の力学を書き改めたものである。差分形式を単なる微分形式の近似表現としてみるのではなく，ひらきなおって，徹底的に差分で力学を見直すと，又一味変わった興味あることが分る。このことをのべるため，少しこまかい話に立ち入らなければならない。

まず，$\Delta t>0$として離散的な時間$t_k=k\Delta t$; $k=1,\cdots,n$を考える。t_k時間における質量m_iを有する質点iのxy平面上での位置，速度，加速度をそれぞれベクトル

$$\mathbf{X}_{i,k}=(x_{i,k},y_{i,k}),\ \mathbf{V}_{i,k}=(v_{i,k,x},v_{i,k,y})$$

$$\mathbf{A}_{i,k}=(a_{i,k,x},a_{i,k,y})$$，であらわす。

又そのとき，質点iに作用している力を

$$\mathbf{F}_{i,k}=(F_{i,k,x},F_{i,k,y})$$であらわす。

これらのベクトルの間につぎの関係があるものとする。

（変位と速度）　$\mathbf{X}_{i,k+1} = \mathbf{X}_{i,k} + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{V}_{i,k+1} + \mathbf{V}_{i,k})$ ············（1）

（速度と加速度）　$\mathbf{V}_{i,k+1} = \mathbf{V}_{i,k} + \Delta t\, \mathbf{A}_{i,k}$ ···········（2）

（力と加速度）　$\mathbf{F}_{i,k} = m_i\, \mathbf{A}_{i,k}$ ············（3）

(1)，(2)の関係は，数値計算法ではよく知られた漸化式であるが，Discrete Model はこの(1)(2)(3)式が基本となっている。

仕事に関する法則は次のように説明されている。

まず系になされる仕事Wを定義する。

$$W = \sum_{i=1}^{q} W_i \qquad (4)$$

但し

$$W_i = \sum_{k=1}^{n-1} (\mathbf{X}_{i,k+1} - \mathbf{X}_{i,k}) \cdot \mathbf{F}_{i,k} \qquad (5)$$

であり q は質点の数とする。

(5)は(1)(2)(3)より以下のように変形できる。

$$W_i = \sum_{k=o}^{n-1} (\mathbf{X}_{i,k+1} - \mathbf{X}_{i,x}) \cdot m_i \mathbf{A}_{i,k}$$

$$= \sum_{k=o}^{n-1} \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{V}_{i,k+1} + \mathbf{V}_{i,k}) \cdot \frac{m_i}{\Delta t} (\mathbf{V}_{i,k+1} - \mathbf{V}_{i,k})$$

$$= \frac{m_i}{2} \left(\left| \mathbf{V}_{i,n} \right|^2 - \left| \mathbf{V}_{i,o} \right|^2 \right)$$

質点 i の　$\Delta t \times k$ 時間の運動エネルギー$K_{i,k}$ を

$$K_{i,k} = \frac{m_i}{2} \left| \mathbf{V}_{i,k} \right|^2 \qquad (6)$$

とすると

$$W_{i,k} = K_{i,n} - K_{i,o}$$

となり，系全体の運動エネルギK_kを

$$K_k = \sum_{i=1}^{q} K_{i,k}$$

とすると，結局

$$W = K_n - K_o \tag{7}$$

となり，よく見なれた形となる。
このことから，$\mathbf{F}_{i,k}$ がどのような形式で与えられようと，このモデルにおける仕事Wは，
（終りの状態をあらわす量）－（初めの状態をあらわす量）
の形式で与えられることになり，仕事Wを，(4)で定義することの妥当性を示している。
次にエネルギー保存則の説明であるが，具体的な力の形式としてたとえば引力を想定した場合は，次のように説明されている。

質点 i が他の全ての質点から受ける引力は，一般的には

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)}{r_{ij}} \qquad \left(\text{但し，Gは重力係数で，又} \; r_{ij} = \left| \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j \right| \right)$$

で与えられるが，これをDiscrete Modelでは，次のように与えることを提案している。

$$\mathbf{F}_{i,k} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q} \frac{G m_i m_j \{ (\mathbf{X}_{i,k} + \mathbf{X}_{i,k+1}) - (\mathbf{X}_{j,k} + \mathbf{X}_{j,k+1}) \}}{r_{ij,k} r_{ij,k+1} (r_{ij,k} + r_{ij,k+1})} \tag{8}$$

但し

$$r_{ij,k} = \left| \mathbf{X}_{i,k} - \mathbf{X}_{j,k} \right|$$

(8)を(5)に代入して $W_i + W_j$ を求めると式の変形により次のように整理される。

$$W_i + W_j = \frac{G m_i m_j}{r_{ij,n}} - \frac{G m_i m_j}{r_{ij,o}} \tag{9}$$

系のポテンシャルエネルギUを次のように定義すると

$$U_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{q} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q} U_{ij,k} \qquad \text{但し} \quad U_{ij,k} = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij,k}} \tag{10}$$

(4)(9)(10)より

$$W = U_o - U_n \tag{11}$$

となり，結局，(7)(11)より　エネルギー保存則

$$K_n + U_n = K_o + U_o \tag{12}$$

が得られる。ここで注意すべきは，(6)，(10) の運動エネルギー，及び，ポテンシャルエネルギーの定義は，一般的な定義と一致している。即ち，(12)式により，"時間きざみΔtの大小に関係せず，このモデルの全エネルギーは 保存される"ことになる。このことは少し不思ぎに思えるかもしれない。我々は微分を差分であらわすと，全ての結果に誤差が当然含まれているものと考えるからである。実はこのカラクリは (8)の形にある。もし(8)のかわりに次のような式を考えると

$$\mathbf{F}_{i,k} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q} \frac{G m_i m_j (\mathbf{X}_{i,k} - \mathbf{X}_{j,k})}{r_{ij,k}^2 \quad r_{ij,k}}$$

もはや(9)のようにΣの消えた形に整理することができない。このようにはじめの(1)(2)(3)を数値計算法の一種を見なすと，力の形式(8)とは互に何ら制限はないが，力学の中において考えると各式の間に密接な関係が生じてくる。これがDiscrete Modelの特徴となっている。

次にこのモデルを用いて解いた例を示す。

50行ぐらいのプログラムで，解けるので，プログラムの演習用には丁度良いかもしれない。

例 (3体問題)

互に(8)で与えられる引力が作用している3質点 m_1, m_2, m_3 の運動を次の初期値を用いて(1)(2)(3)により漸化的に解く。

$$G = 6.67 \times 10^{-8},\ m_1 = \frac{1}{6.67} \times 10^8,\ m_2 = \frac{1}{6.67} \times 10^6,\ m_3 = \frac{1}{6.67} \times 10^5$$

$$\Delta t = 0.0005$$

$$\mathbf{X}_{1,0} = (0, 0),\ \mathbf{X}_{2,0} = (0.5, 0),\ \mathbf{X}_{3,0} = (0, -8)$$

$$\mathbf{V}_{1,0} = (0, 0),\ \mathbf{V}_{2,0} = (0, 1.63),\ \mathbf{V}_{3,0} = (0, -3.75)$$

この結果をFig.1に示す。これは質点1を基準にして，質点2を……で，又質点3を1点鎖線で描いたものである。又破線は，質点3を無視した場合であり，質点3の接近により，質点2の軌道が変わっていることが分かる。

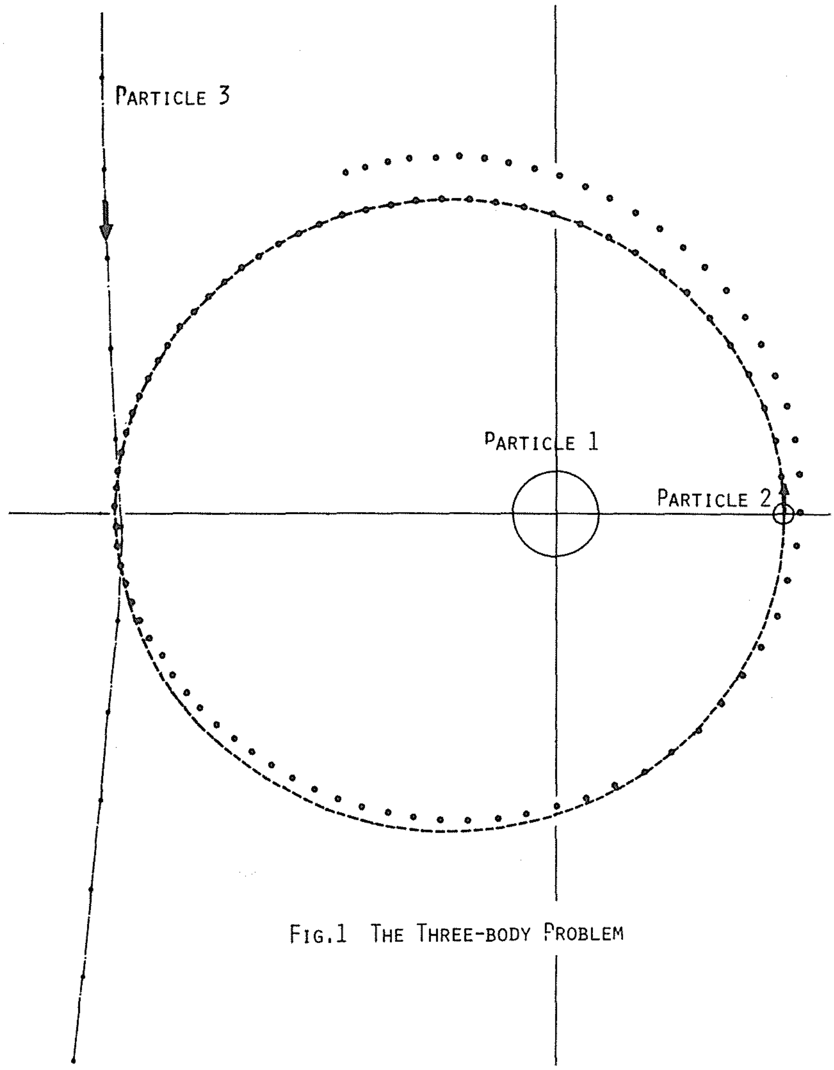


FIG.1 THE THREE-BODY PROBLEM

2. 離散体モデル

前述のＤｉｓｃｒｅｔｅ Ｍｏｄｅｌ では，質点系をさらに時間に関して離散化しようと試みたものであったが，この節で紹介する"離散体"は，質点系に部分領域とか境界，内部といった構造的（位相的）概念を導入したモデルである。

通常，我々が構造解析に用いる質点系や，一般座標によりあらわされた多自由度系は，次の性質を有する。

ｏ相互作用の希薄性（Ｓｐａｒｃｅ性）── たとえばある質点に相互作用を及ぼす質点の数は全体の内のごくわずかな質点にすぎないような場合に相当し，引力のように全ての質点間で作用する場は該当しない。──

これは，質点系の力学や解析力学にとっては興味のない性質である。はじめに全ての質点間で相互作用が働らくと考えて 一般式をつくれば，ある力がたまたま０であったとしてもその一般性がくずれることはない。しかし計算機にとっては，この性質は興味あるものとなる。

いうまでもなく，計算機の場合には，0を数値として考えるか，はじめから無視するかは，記憶容量を有効に使う立場からは重要なことである。（たとえば，自由度が10000程度の系になると，その動連成項や，バネ連成項よりなる係数行列の要素数は，それぞれ，1×10^8 となりそれだけの記憶容量を必要とするが，その内のほとんどが0の値であれば情報量からすると非常に効率の悪いものとなる。）したがって，この相互作用のSparce 性を積極的に利用すべきであるが，既応の質点係の力学や，解析力学で用意されている言葉だけでは十分とはいえない。

筆者はこの性質を利用する目的で一般座標であらわされた多自由度系を，グラフ理論でいうところの抽象グラフに埋め込んだモデルを考えて，それを“離散体”と呼んでいる。[2)]そしてこのモデルの“部分領域”や，その“境界”，“内部”といった言葉をグラフ理論の言葉を借りて定義している。

実は離散的なモデルの欠点は，未知変数がやたらと多くなることと，この部分領域*注といった概念の定義のしにくさにある。

又逆に，連続体モデルではこの“部分領域”の取扱いは特にあらたまっていう必要もないほど楽に行なえる。それは時には一本の閉曲線でかこむだけで十分である。これは，連続体モデルのかくれた功労者である“近傍力”のおかげであろう。もし離散的なモデルのように“遠隔力”を連続体モデルに与えるとすれば想像もつかぬほど複雑なモデルとなる。又この離散体モデルで論じられていることを，逆にグラフ理論の側から見ると，グラフの点や辺に力学的な属性を与えて，それらを含めて考えるといった少しドロくさいものであるに違いない。

実は，これは，はじめに述べたように，“ここまでは力学の問題であり，ここから先は，グラフ理論の問題である”としない立場をとっていることによる。次にその1部を紹介する。

グラフGは，点の集合 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$，辺の集合 $E=\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$ 及び，VとEとを対応づける写像 Φ とにより $G=(V, E, \Phi)$ であらわされる。

又その部分グラフ $G_i=(V_i, E_i, \Phi)$ は $V_i\subset V$，$E_i\subset E$ なる性質を持つ。

このグラフの点と一般座標とを，又辺と一般座標間の連成項とを対応づけたものを，離散体と呼ぶ。この離散体では分割された部分領域はユニットとして次のように定義される。

定義　部分グラフの集まりよりなる　系 $\mathcal{G}=\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ において全ての G_i が次の1)，2)の条件をみたすとき，$\mathcal{G}$ をGの「ユニット系」といい，又 G_i をGの「ユニット」ということになる。

1）G_i はそれ自身で1つの連結グラフである。

2）E_i，$i=1, \cdots n$ は Eの直和分割である。

又ユニットの“内部 $\mathring{V}_i$”及び“境界 $\overline{V}_i$”は次のように定義される。

定義　内部　$\mathring{V}_i=\{v_j \mid j\in V_i, j\notin V_r \neq i\}$

境界　$\overline{V}_i=V_i-\mathring{V}_i$

---

*注　単なる距離的な意味ではなく，相互作用の関係の意味におけるもの。

グラフの点　　が一般座標に，又辺　　が連成項に対応していることから次に，系のポテンシャルエネルギーが，"ユニット"に関係したものの和としてあらわされる場合について考えてみる。

$$U = \sum_i U_i$$

但し　$U_i = U_i(v_j, e_j)$，$v_j \in V_i$，$e_j \in E_i$

もし静的に釣合っているなら，Lagrange の運動方程式と"内部"の定義より

$$v_r \in \mathring{V}_i \text{ に対し } \frac{\partial U_i}{\partial v_r} = 0$$

が容易に証明される。

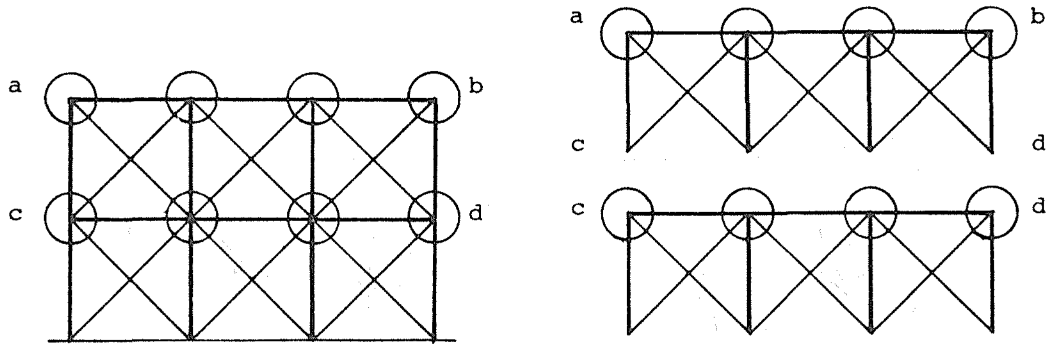
これが，力学モデルにおいては，sparce な大次元行列を処理するときに用いられるユニット分割法[3]や，ブロック消去法の基本となる定理であることが分かる。

又，"ユニット系"を連続体モデルにおける要素分割として考えると，離散体に対する有限要素法も適用することができる。

例　（トラス構造の単純化）

Fig.2（A）に示すようなトラス構造に ab，cdが変形後も直線上にあるものと考え，一層部分，2層部分をそれぞれを一種の有限要素として処理すると，Fig.2(C)のような簡単なモデルに置きかえることができる。Fig.3に，Model 1とModel 2の自由振動におけるa，cの水平変位の比較を示す。

又，Fig 4ではaに荷重を加えたときの変形図の比較を示す。いずれも実線が，Model 1破線がModel 2の場合である。



Model 1　　　　Discrete Finite Element

(A)　　　　(B)

FIG.2

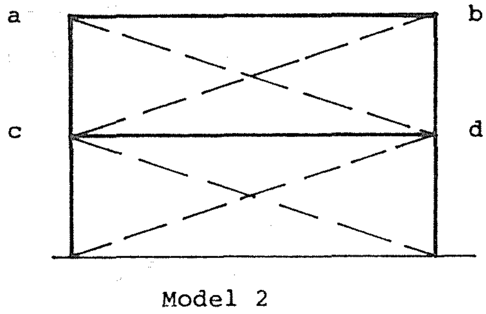


FIG.2 (c)

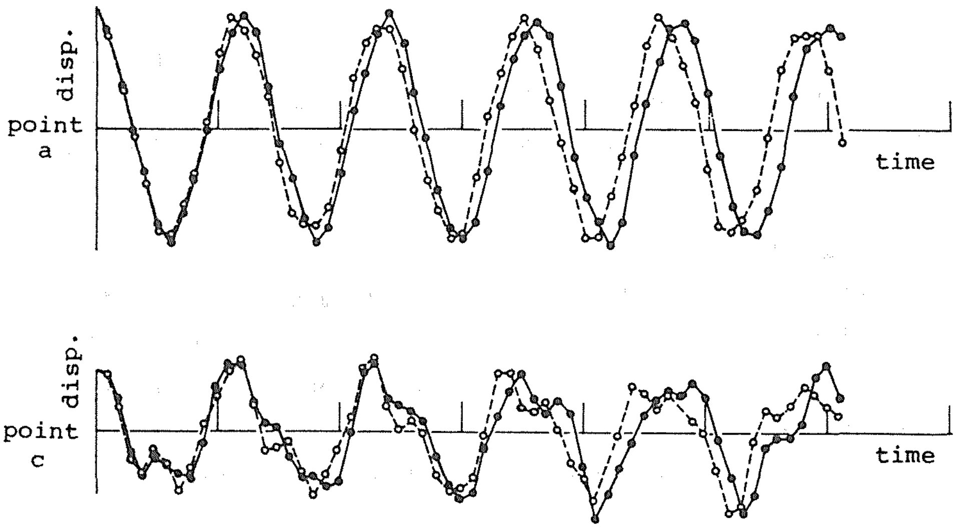


FIG.3

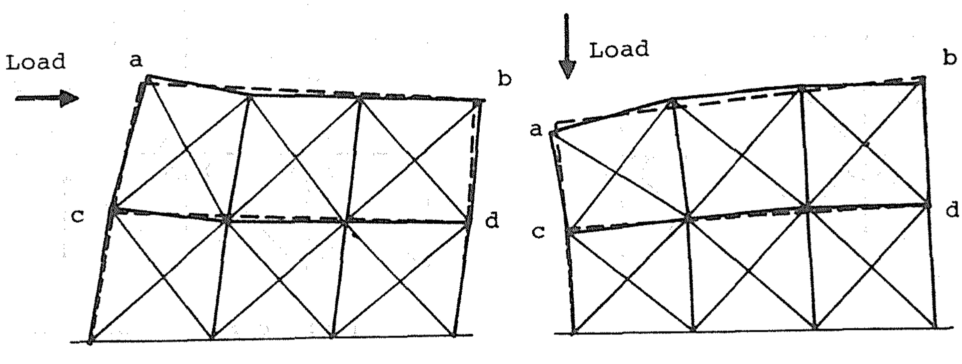


FIG.4

この程度の規模なら，わざわざ離散体等を考えずに，直接線図を用いることで十分である。しかし何百という節点からなる系であれば，もはや線図で処理することは困難となり，要素とか，その境界といった概念を数字上のことばで定義されたモデルの必要が生じるわけである。

おわりに

力学モデルといっても，広い範囲の研究分野にまたがっており，又，計算機といっても，その名前さえ変えるべき時代になりつつある時，ここでのべたことはあまりにも限定された分野に限られてしまっているものと思う。標題の"力学モデルと計算機"は，構造力学をかじっている者が，小さいフシ穴からのぞいたものであり，文中に多くの偏見や独断が含まれていることを，お許しいただきたい。

1) Donald Greenspan "Discrete Models" Addison-wesley Publishing Company 1973.
2) 橘英三郎"質点系における有限要素法について"J.S.S.C. マトリックス 構造解析法研究発表論文集 1975 P.21
3) 戸川隼人"マトリックスの数値計算" オーム社 1971. P.132