OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	ライブラリー精度テスト ： 代数方程式
Author(s)	大中, 幸三郎
Citation	大阪大学大型計算機センターニュース. 1977, 26, p. 117-134
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/65356
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

資　　料

ライブラリー精度テスト

—代数方程式—

大阪大学大型計算機センター
研究開発部　大中幸三郎

1. はじめに

電子計算機は近年，ますます利用分野が広がり，計算機センターに準備されているライブラリー・プログラムも多種多様となっている。しかしながら，我々大型計算機センターにおいて，現在，最も利用度の高いと思われる数値計算関係のものでさえ，ライブラリー・プログラムの精度，信頼性等の検査は充分に行われているとは言えない。

大阪大学大型計算機センターでは，ACOS77−NEAC SYSTEM700（以下S700と略す）の設置により，NEAC2200−MODEL700（以下M700と略す）に登録されているライブラリー・プログラムのS700への移行の実施に際し，数値計算ライブラリーの精度，信頼性等が問題となっている。数値計算ライブラリーと言えども，多種類にわたっており，すべてのサブ・プログラムのテストを行うには長い期間が必要であり，その上，数値解析，数値計算の立場から考えると，完璧なテストは不可能であることが予想される。しかしながら，テストの結果はライブラリー・プログラムを利用する場合の有用な資料と思われるので，必ずしも充分とは言えないが，資料として役立つようなテストを順次，実施する予定にある。[1)]

ここでは第一段階として，代数方程式の根を求めるいくつかのサブ・プログラムのテストを行ったので以下に示す。なお，テストとしては21題の問題をえらび，計算機はS700を用いている。

2. テストしたライブラリー・プログラム

大阪大学大型計算機センターのライブラリー・プログラムにはセンター・ライブラリー（利用者又はセンター内部の作成したものとM700用の日本電気提供のもの）とMATHLIB−6と称するS700用の日本電気提供のものの二種類がある。その中で代数方程式の根を求めるサブ・プログラムをとり上げると次のようなものがある。

センター・ライブラリー[2)]

RPEQ

DRPEQ

SALEQ1：ベアストウ法

SALEQ2：マコーレー法

MATHLIB−6[3)]

SDBAIR：ベアストウ法

SDNWTN：ニュートン法

SDQDM　：QD法

SDQDRT：二次方程式の解析解（根の公式）

SDCRDN：三次方程式の解析解（カルダーノ法）

SDFERR：四次方程式の解析解（フェラーリ法）

上記のサブ・プログラム中でRPEQ，DRPEQはS700への書換えを作成者に依頼中であり，テスト対象から除外した。またSDNWTNはSDBAIRの中で呼び出されており，間接的なテストとなっているので除外した。したがってテストの対象としたサブ・プログラムはSALEQ1，SALEQ2，SDBAIR，SDQDM，SDQDRT，SDCRDN，SDFERRの7個のサブ・プログラム（すべてサブルーチン形式）である。

3. テスト問題

テスト問題としては，重根，近接根，オーダーの異なる根等を含み，通常ill−conditionとされている代表的な問題を中心として21題（2〜12次式）を採用した。テスト問題の内容は次の通りである。

問題　2−1　（共役複素根）

$x^2+1=0$

問題　2−2　（近接根）

$x^2+2.000001x+1.000001=(x+1)(x+1.000001)=0$

問題　2−3　（二重根）

$x^2-4x+4=(x-2)^2=0$

問題　2−4　（オーダーの異なる根）

$x^2+10000001x+10000000=(x+1)(x+10000000)=0$

問題　3−1　（オーダーの異なる根）

$x^3-10000x^2+x-10000=(x^2+1)(x-10000)=0$

問題　3−2　（近接根）

$x^3-3x^2+3.000001x-1.000001=(x-1)\{(x-1)^2+10^{-6}\}=0$

問題　3－3[4)]　（二重根）

$$x^3+8x^2+21x+18=(x+3)^2(x+2)=0$$

問題　3－4[5)]　（三重根）

$$x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3=0$$

問題　4－1　　（オーダーの異なる根）

$$x^4+10100x^3+1000001x^2+10100x+1000000$$
$$=(x^2+1)(x+100)(x+10000)=0$$

問題　4－2[4), 6), 7)]　（二重根）

$$x^4-6x^3+9x^2+4x-12=(x+1)(x-2)^2(x-3)=0$$

問題　4－3[4)]　（三重根）

$$x^4-5x^3+6x^2+4x-8=(x-2)^3(x+1)=0$$

問題　4－4[4), 8)]（四重根）

$$x^4-8x^3+24x^2-32x+16=(x-2)^4=0$$

問題　5－1[9)]　（二組の共役複素根）

$$x^5-10x^4+43x^3-104x^2+150x-100$$
$$=(x-2)\{(x-1)^2+4\}\{(x-3)^2+1\}=0$$

問題　5－2[5)]　（二重根と共役複素根）

$$x^5-x^4+x^3-x^2-2x-2=(x-1)^2(x+1)(x^2+2)=0$$

問題　6－1[7)]　（根が等間隔に分布）

$$x^6+21x^5+175x^4+735x^3+1624x^2+1764x+720$$
$$=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)=0$$

問題　6－2[9)]　（二重根と二組の共役複素根）

$$x^6-12x^5+63x^4-190x^3+358x^2-400x+200$$
$$=(x-2)^2\{(x-1)^2+4\}\{(x-3)^2+1\}=0$$

問題　7－1[9)]　（三重根と二組の共役複素根）

$$x^7-14x^6+87x^5-316x^4+738x^3-1116x^2+1000x-400$$
$$=(x-2)^3\{(x-1)^2+4\}\{(x-3)^2+1\}=0$$

問題　7－2[6), 7)]（二組の共役複素根）

$$x^7-4.87x^6-0.67x^5-0.15430003x^4-0.4265x^3$$
$$-1.02113x^2-2.48608x-6.2771496=0$$

根（小数点以下11桁目切り捨て）

-0.9999999861
1.1299999936
-4.9999999988
$0.4999999929\pm0.9219544386i$
$-0.4999999973\pm0.8717797753i$

問題　8－1[5)]　　（共役複素三重根）

$$x^8-x^7+7x^6-6x^5+18x^4-12x^3+20x^2-8x+8$$
$$=(x^2+2)^3\{(x-0.5)^2+0.75\}=0$$

問題　8－2[5)]　　（共役複素二重根）

$$x^8-x^7+6x^6-5x^5+13x^4-8x^3+12x^2-4x+4$$
$$=(x^2+2)^2(x^2+1)\{(x-0.5)^2+0.75\}=0$$

問題　12－1[8), 10)]　（特定の区間で関数値が近似的に零となる）

$$x^{12}-78x^{11}+1001x^{10}-5005x^9+12870x^8-19448x^7+18564x^6$$
$$-11628x^5+4845x^4-1330x^3+231x^2-23x+1$$
$$=\prod_{k=1}^{12}\left\{x-\frac{1}{2\left(1-\cos\frac{2k-1}{25}\pi\right)}\right\}=0$$

根（小数点以下11桁目切り捨て）

0.2539897779	0.6152947366
0.2664809571	0.8707453295
0.2891897470	1.3790211869
0.3255575444	2.6180339887
0.3819660112	7.1201221745
0.4704595974	63.4091389484

上記の問題で因数分解の容易な19題は因数分解を行った形を併記した。残る2題（問題7－2，12－1）の根はセンター・ライブラリーに登録されている「誤差評価の可能な多重精度演算（Q2/I－TYPE）[7), 11)]」を用いて，小数点以下42桁桁目まで正しい根を求めた。

4. テスト問題の実行

2.に示した問題をS700により実行する場合の係数以外の入力パラメータは，可能な限り各サブ・プログラムで同一条件となるように次のように定めた。

SALEQ1[2)]

収束判定常数	$\varepsilon=10^{-5}$

SALEQ2[2)]

収束判定常数	$\varepsilon=10^{-5}$
最大反復回数	100
εをゆるめる限度	0（εは10^{-5}に固定）

SDBAIR、SDQDM[3)]

収束判定常数	$\varepsilon=10^{-5}$
最大反復回数	100

SDQDRT, SDCRDN, SDFERR[3)]

解析解の数値計算であるから，入力パラメータはない。

入力パラメータで特異なものはSALEQ1に最大反復回数がないこと，SALEQ2にεを自動的に大きくする機能が用意されていることである。すなわち，SALEQ1では収束条件を満足するまで反復を繰返し，エンドレスループにおちいる可能性がある。また，SALEQ2ではεを10^{-5}に固定して用い，他のサブ・プログラムと条件をそろえた。

S700を用いて実行した結果と真の根の相対誤差をεとの大小関係で類別し，表1に示す。実際にはS700の内部表現が符号を含めて指数部8ビット，仮数部28ビットのために，[12)]与えた問題の係数自身に誤差がはいる場合（最大相対誤差2^{-27}）も考えられるが，係数の誤差の影響は小さいものと考えて真の根と比較した。また，SDQDRT, SDCRDN, SDFERRはεに無関係であるが，参考のためにやはりεを基準として類別を行った。

表1の記号

○　：相対誤差ε以内で全根が求められた場合。

$\times_1$　：全根10ε以内。

$\times_2$　：単根ε以内，n重根$\varepsilon^{1/n}$以内（相対誤差$\varepsilon^{1/n}$以内にn個の近接根が存在すればn重根として扱う）。

$\times_3$　：単根10ε以内，n重根$\varepsilon^{1/n}$以内（同上）。

$\times_4$　：単根100ε以内，n重根$\varepsilon^{1/n}$以内（同上）。

$\times_5$　：○，$\times_1$～$\times_4$以外。

error：エラー・インディケータがセットされた場合。
ただし，SALEQ1，SDQDRT，SDCRDN，SDFERRにはエラー・インディケータの機能はない。したがって表2～9の対応欄は空白となる。

DIV　：零で除算を行った場合（システムのメッセージ）。

EXP　：指数部アンダーフローの場合（システムのメッセージ）。

実行結果の誤差の概要は表1で充分であるが，詳細（数値解，CPU時間，エラー・インディケータ）については表2～9に示す。

表 1　数値解の相対誤差の類別

	SALEQ1	SALEQ2	SDBAIR	SDQDM	SDQDRT	SDCRDN	SDFERR
2 − 1	○	○	○	○	○		
2 − 2	$\times_2$	$\times_2$	$\times_2$	$\times_2$	$\times_2$		
2 − 3	○	○	○	○	○		
2 − 4	○	○	○	○	○		
3 − 1	○	○	○	$\times_5$		$\times_5$	
3 − 2	$\times_2$	$\times_2$	$\times_2$	error		$\times_2$	
3 − 3	$\times_1$	○	○	$\times_2$		○	
3 − 4	$\times_2$	DIV	$\times_2$	error		○	
4 − 1	○	○	○	○			$\times_5$
4 − 2	$\times_1$	○	$\times_1$	$\times_2$			○
4 − 3	$\times_2$	$\times_2$	$\times_2$	error			○
4 − 4	$\times_2$	error	$\times_2$	error			○
5 − 1	○	○	○	○			
5 − 2	○	○	○	$\times_2$			
6 − 1	○	○	○	○			
6 − 2	$\times_2$	$\times_2$	$\times_2$	$\times_4$			
7 − 1	$\times_2$	$\times_2$	error	error			
7 − 2	○	○	○	EXP			
8 − 1	$\times_2$	error	error	error			
8 − 2	$\times_2$	$\times_2$	$\times_2$	error			
12 − 1	$\times_5$	$\times_5$	$\times_5$	EXP			

表2　実 行 結 果（２次式）

PROBLEM NUMBER 2-1

	***** SALEQ1 *****	***** SQLEQ2 *****	***** SDBAIR *****	***** SDQDM *****	***** SDQDRT *****
CPU TIME (MSEC.)	0.6	0.7	0.7	1.0	0.5
ERROR INDICATOR		0	0	0	
ROOT (REAL PART)	0.	0.	0.	0.	0.
(IMAGINARY PART)	1.41421357E+00	-1.41421357E+00	1.41421357E+00	1.41421357E+00	1.41421357E+00
ROOT (REAL PART)	0.	0.	0.	0.	0.
(IMAGINARY PART)	-1.41421357E+00	1.41421357E+00	-1.41421357E+00	-1.41421357E+00	-1.41421357E+00

PROBLEM NUMBER 2-2

	***** SALEQ1 *****	***** SQLEQ2 *****	***** SDBAIR *****	***** SDQDM *****	***** SDQDRT *****
CPU TIME (MSEC.)	0.7	0.7	0.8	0.9	0.6
ERROR INDICATOR		0	0	0	
ROOT (REAL PART)	-9.99878437E-01	-9.99878437E-01	-9.99878437E-01	-1.00015001E+00	-9.99878437E-01
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	0.	0.
ROOT (REAL PART)	-1.00012258E+00	-1.00012258E+00	-1.00012258E+00	-9.99851011E-01	-1.00012258E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	0.	0.

PROBLEM NUMBER 2-3

	***** SALEQ1 *****	***** SQLEQ2 *****	***** SDBAIR *****	***** SDQDM *****	***** SDQDRT *****
CPU TIME (MSEC.)	0.5	0.7	0.7	0.9	0.5
ERROR INDICATOR		0	0	0	
ROOT (REAL PART)	2.00000000E+00	2.00000000E+00	2.00000000E+00	2.00000000E+00	2.00000000E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	0.	0.
ROOT (REAL PART)	2.00000000E+00	2.00000000E+00	2.00000000E+00	2.00000000E+00	2.00000000E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	0.	0.

PROBLEM NUMBER 2-4

	***** SALEQ1 *****	***** SQLEQ2 *****	***** SDBAIR *****	***** SDQDM *****	***** SDQDRT *****
CPU TIME (MSEC.)	0.7	0.7	0.8	0.9	0.6
ERROR INDICATOR		0	0	0	
ROOT (REAL PART)	-1.00000000E+00	-1.00000000E+00	-1.00000000E+00	-1.00000000E+07	-1.00000000E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	0.	0.
ROOT (REAL PART)	-1.00000000E+07	-1.00000000E+07	-1.00000000E+07	-1.00000000E+00	-1.00000000E+07
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	0.	0.

表3　実行結果（3次式）

```
PROBLEM NUMBER  3-1
                          ***** SALEQ1 *****    ***** SQLEQ2 *****    ***** SDBAIR *****    ***** SDQDM *****    ***** SDCRDN *****
CPU TIME (MSEC.)                 1.1                   1.1                   1.1                   1.7                   1.1
ERROR INDICATOR                                        0                     0                     0
ROOT (REAL PART)                  0.                    1.00000000E+04        1.00000000E+04        1.00000000E+04        1.00000000E+04
     (IMAGINARY PART)                1.00000000E+00        0.                    0.                    0.                    0.
ROOT (REAL PART)                  0.                    0.                    0.                    0.                    0.
     (IMAGINARY PART)               -1.00000000E+00       -1.00000000E+00        1.00000000E+00        1.01675625E+00        9.74542871E-01
ROOT (REAL PART)                  1.00000000E+04        0.                    0.                    0.                    0.
     (IMAGINARY PART)             0.                    1.00000000E+00       -1.00000000E+00       -1.01675625E+00       -9.74542871E-01

PROBLEM NUMBER  3-2
                          ***** SALEQ1 *****    ***** SQLEQ2 *****    ***** SDBAIR *****    ***** SDQDM *****    ***** SDCRDN *****
CPU TIME (MSEC.)                 7.3                   5.3                  35.8                  40.6                   1.1
ERROR INDICATOR                                        0                     0                     5
ROOT (REAL PART)                  1.00109208E+00        9.97552529E-01        1.00112887E+00        1.00000000E+00        9.98143613E-01
     (IMAGINARY PART)                2.13884466E-03        0.                    2.18870540E-03        5.09933159E-01        0.
ROOT (REAL PART)                  1.00109208E+00        1.00122373E+00        1.00112887E+00        0.                    1.00092819E+00
     (IMAGINARY PART)               -2.13884466E-03       -2.34966734E-03       -2.18870540E-03        4.99968026E-01       -1.89681245E-03
ROOT (REAL PART)                  9.97815847E-01        1.00122373E+00        9.97742265E-01        1.01327896E-06        1.00092819E+00
     (IMAGINARY PART)             0.                    2.34966734E-03        0.                    4.90098856E-01        1.89681245E-03

PROBLEM NUMBER  3-3
                          ***** SALEQ1 *****    ***** SQLEQ2 *****    ***** SDBAIR *****    ***** SDQDM *****    ***** SDCRDN *****
CPU TIME (MSEC.)                 7.2                   4.8                   1.5                   5.5                   1.3
ERROR INDICATOR                                        0                     0                     0
ROOT (REAL PART)                 -1.99999998E+00       -2.99999755E+00       -2.00000000E+00       -3.00000277E+00       -2.00000000E+00
     (IMAGINARY PART)             0.                    0.                    0.                    7.90040787E-04        0.
ROOT (REAL PART)                 -2.99975631E+00       -2.00000000E+00       -3.00000000E+00       -3.00000277E+00       -3.00001982E+00
     (IMAGINARY PART)             0.                    0.                    0.                   -7.90040787E-04        0.
ROOT (REAL PART)                 -3.00024372E+00       -3.00000244E+00       -3.00000000E+00       -1.99999449E+00       -2.99998018E+00
     (IMAGINARY PART)             0.                    0.                    0.                    0.                    0.

PROBLEM NUMBER  3-4
ERROR #071   DIV CHECK    AT LOCATION    006434   <-- SALEQ2の実行途中で初めて発生したエラー
ERROR #071   DIV CHECK    AT LOCATION    006445
ERROR #067   EXP UNDERFLO AT LOCATION    006323
ERROR #071   DIV CHECK    AT LOCATION    006313
ERROR #071   DIV CHECK    AT LOCATION    006323
ERROR #069   EXP OVERFLO  AT LOCATION    006421
ERROR #069   EXP OVERFLO  AT LOCATION    006437
ERROR #071   DIV CHECK    AT LOCATION    006434   } 第1行を原因とした副作用
ERROR #071   DIV CHECK    AT LOCATION    006445
ERROR #067   EXP UNDERFLO AT LOCATION    006323
ERROR #071   DIV CHECK    AT LOCATION    006313
ERROR #071   DIV CHECK    AT LOCATION    006323
ERROR #069   EXP OVERFLO  AT LOCATION    006421
ERROR #069   EXP OVERFLO  AT LOCATION    006437
                          ***** SALEQ1 *****    ***** SQLEQ2 *****    ***** SDBAIR *****    ***** SDQDM *****    ***** SDCRDN *****
CPU TIME (MSEC.)                245.1                  51.0                  11.0                  54.3                   1.0
ERROR INDICATOR                                        2                     0                     5
ROOT (REAL PART)                 -9.98889036E-01       -2.99999755E+00       -9.99023438E-01        0.                   -1.00000000E+00
     (IMAGINARY PART)             0.                    0.                    0.                   -2.03999177E+00        0.
ROOT (REAL PART)                 -1.00111327E+00       -2.00000000E+00       -1.00097656E+00        3.88438147E-04       -1.00000000E+00
     (IMAGINARY PART)             0.                    0.                    0.                   -1.99961990E+00        0.
ROOT (REAL PART)                 -9.99997706E-01       -3.00000244E+00       -1.00000000E+00        3.80577574E-04       -1.00000000E+00
     (IMAGINARY PART)             0.                    0.                    0.                   -1.96038846E+00        0.
```

表4　実行結果（4次式）

PROBLEM NUMBER 4-1

	***** SALEQ1 *****	***** SQLEQ2 *****	***** SDBAIR *****	***** SDQDM *****	***** SDFERR *****
CPU TIME (MSEC.)	1.3	2.5	1.5	2.1	1.8
ERROR INDICATOR		0	0	0	
ROOT (REAL PART)	-5.05598985E-09	-1.00000025E+02	5.52157872E-07	-1.00000000E+04	-3.20434570E-03
(IMAGINARY PART)	9.99999500E-01	0.	1.00000052E+00	0.	5.00000000E-01
ROOT (REAL PART)	-5.05598985E-09	-9.99999792E+03	5.52157872E-07	-1.00000000E+02	-3.20434570E-03
(IMAGINARY PART)	-9.99999500E-01	0.	-1.00000052E+00	0.	-5.00000000E-01
ROOT (REAL PART)	-1.00000000E+02	-1.21946186E-09	-1.00000001E+02	5.82076609E-11	-9.99935608E+01
(IMAGINARY PART)	0.	-9.99999978E-01	0.	9.99996200E-01	0.
ROOT (REAL PART)	-1.00000000E+04	-1.21946186E-09	-1.00000000E+04	5.82076609E-11	-1.00000000E+04
(IMAGINARY PART)	0.	9.99999978E-01	0.	-9.99996200E-01	0.

PROBLEM NUMBER 4-2

	***** SALEQ1 *****	***** SQLEQ2 *****	***** SDBAIR *****	***** SDQDM *****	***** SDFERR *****
CPU TIME (MSEC.)	5.6	20.5	6.9	7.2	1.9
ERROR INDICATOR		0	0	0	
ROOT (REAL PART)	2.00016636E+00	-1.00000000E+00	-1.00000000E+00	3.00000513E+00	3.00000000E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	0.	0.
ROOT (REAL PART)	-1.00000000E+00	2.00000161E+00	1.99982553E+00	2.00203663E+00	2.00000000E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	0.	0.
ROOT (REAL PART)	2.99999997E+00	1.99999840E+00	2.00017452E+00	1.99795842E+00	2.00000000E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	0.	0.
ROOT (REAL PART)	1.99983368E+00	3.00000000E+00	2.99999994E+00	-9.99999955E-01	-1.00000000E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	0.	0.

PROBLEM NUMBER 4-3

	***** SALEQ1 *****	***** SQLEQ2 *****	***** SDBAIR *****	***** SDQDM *****	***** SDFERR *****
CPU TIME (MSEC.)	57.0	5.5	6.8	55.2	1.6
ERROR INDICATOR		0	0	5	
ROOT (REAL PART)	1.99783242E+00	-9.99999664E-01	-1.00000000E+00	0.	2.00000000E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	-2.00000107E+00	0.
ROOT (REAL PART)	-1.00000000E+00	1.99999778E+00	2.00126943E+00	-2.11311142E-26	2.00000000E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	1.01995340E+00	0.
ROOT (REAL PART)	2.00108379E+00	1.99800408E+00	1.99936528E+00	-1.92503473E-04	2.00000000E+00
(IMAGINARY PART)	1.87527971E-03	0.	1.09839079E-03	9.99774009E-01	0.
ROOT (REAL PART)	2.00108379E+00	2.00200081E+00	1.99936528E+00	-1.89407549E-04	-1.00000000E+00
(IMAGINARY PART)	-1.87527971E-03	0.	-1.09839079E-03	9.80273612E-01	0.

PROBLEM NUMBER 4-4

	***** SALEQ1 *****	***** SQLEQ2 *****	***** SDBAIR *****	***** SDQDM *****	***** SDFERR *****
CPU TIME (MSEC.)	20.7	43.8	55.9	72.9	0.7
ERROR INDICATOR		2	0	5	
ROOT (REAL PART)	1.99990392E+00	-9.99999664E-01	1.99990392E+00	0.	2.00000000E+00
(IMAGINARY PART)	1.96771892E-02	0.	1.96769544E-02	1.02993882E+00	0.
ROOT (REAL PART)	1.99990392E+00	1.99999778E+00	1.99990392E+00	-2.93064463E-04	2.00000000E+00
(IMAGINARY PART)	-1.96771892E-02	0.	-1.96769544E-02	1.00978383E+00	0.
ROOT (REAL PART)	2.01977327E+00	1.99800408E+00	1.98041866E+00	-3.77117616E-04	2.00000000E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	9.89631578E-01	0.
ROOT (REAL PART)	1.98041889E+00	2.00200081E+00	2.01977351E+00	-2.81845591E-04	2.00000000E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	9.70645845E-01	0.

表5　実 行 結 果（5次式）

PROBLEM NUMBER 5-1

	***** SALEQ1 *****	***** SQLEQ2 *****	***** SDBAIR *****	***** SDQDM *****
CPU TIME (MSEC.)	4.2	8.1	3.3	38.3
ERROR INDICATOR		0	0	0
ROOT (REAL PART)	2.99999880E+00	1.99999952E+00	1.99999979E+00	3.00000045E+00
(IMAGINARY PART)	9.99998510E-01	0.	0.	9.99999240E-01
ROOT (REAL PART)	2.99999880E+00	2.99999887E+00	1.00000003E+00	3.00000045E+00
(IMAGINARY PART)	-9.99998510E-01	-1.00000364E+00	2.00000003E+00	-9.99999240E-01
ROOT (REAL PART)	1.00000069E+00	2.99999887E+00	1.00000003E+00	1.00000203E+00
(IMAGINARY PART)	1.99999980E+00	1.00000364E+00	-2.00000003E+00	2.00000393E+00
ROOT (REAL PART)	1.00000069E+00	1.00000054E+00	3.00000009E+00	1.00000203E+00
(IMAGINARY PART)	-1.99999980E+00	-1.99999997E+00	9.99999851E-01	-2.00000393E+00
ROOT (REAL PART)	2.00000101E+00	1.00000054E+00	3.00000009E+00	1.99999632E+00
(IMAGINARY PART)	0.	1.99999997E+00	-9.99999851E-01	0.

PROBLEM NUMBER 5-2

	***** SALEQ1 *****	***** SQLEQ2 *****	***** SDBAIR *****	***** SDQDM *****
CPU TIME (MSEC.)	2.9	3.1	1.7	21.0
ERROR INDICATOR		0	0	0
ROOT (REAL PART)	9.99997944E-01	-1.00000000E+00	1.00000000E+00	1.05425715E-06
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	1.41421129E+00
ROOT (REAL PART)	-1.00000000E+00	1.00000000E+00	-1.00000000E+00	1.05425715E-06
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	-1.41421129E+00
ROOT (REAL PART)	0.	1.00000000E+00	1.00000000E+00	-1.00000270E+00
(IMAGINARY PART)	1.41421357E+00	0.	0.	0.
ROOT (REAL PART)	0.	-1.00465058E-09	0.	9.99999978E-01
(IMAGINARY PART)	-1.41421357E+00	-1.41421357E+00	1.41421357E+00	9.68289424E-05
ROOT (REAL PART)	1.00000206E+00	-1.00465058E-09	0.	9.99999978E-01
(IMAGINARY PART)	0.	1.41421357E+00	-1.41421357E+00	-9.68289424E-05

表6　実　行　結　果（６次式）

PROBLEM NUMBER 6-1

	***** SALEQ1 *****	***** SQLEQ2 *****	***** SDBAIR *****	***** SDQDM *****
CPU TIME (MSEC.)	6.7	6.7	5.3	15.5
ERROR INDICATOR		0	0	0
ROOT (REAL PART)	-9.99999941E-01	-1.00000000E+00	-1.00000000E+00	-5.99999595E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	0.
ROOT (REAL PART)	-2.00000119E+00	-5.99999750E+00	-1.99999914E+00	-5.00002611E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	0.
ROOT (REAL PART)	-2.99999386E+00	-3.99999952E+00	-3.00000221E+00	-3.99997955E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	0.
ROOT (REAL PART)	-4.00001270E+00	-5.00000322E+00	-4.00000226E+00	-2.99999770E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	0.
ROOT (REAL PART)	-4.99998945E+00	-2.00000006E+00	-4.99999034E+00	-2.00000072E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	0.
ROOT (REAL PART)	-6.00000280E+00	-2.99999959E+00	-6.00000620E+00	-9.99999941E-01
(IMAGINARY PART)	0.	0.	0.	0.

PROBLEM NUMBER 6-2

	***** SALEQ1 *****	***** SQLEQ2 *****	***** SDBAIR *****	***** SDQDM *****
CPU TIME (MSEC.)	5.4	8.2	4.9	51.3
ERROR INDICATOR		0	0	0
ROOT (REAL PART)	2.00048873E+00	1.99890929E+00	1.99999998E+00	3.00000143E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	3.45266984E-04	1.00052994E+00
ROOT (REAL PART)	1.99951216E+00	2.00109297E+00	1.99999998E+00	3.00000143E+00
(IMAGINARY PART)	0.	0.	-3.45266984E-04	-1.00052994E+00
ROOT (REAL PART)	9.99999962E-01	2.99999887E+00	9.99999955E-01	1.00000140E+00
(IMAGINARY PART)	1.99999991E+00	-9.99999225E-01	1.99999994E+00	2.00000384E+00
ROOT (REAL PART)	9.99999962E-01	2.99999887E+00	9.99999955E-01	1.00000140E+00
(IMAGINARY PART)	-1.99999991E+00	9.99999225E-01	-1.99999994E+00	-2.00000384E+00
ROOT (REAL PART)	2.99999959E+00	1.00000001E+00	3.00000006E+00	1.99999818E+00
(IMAGINARY PART)	1.00000006E+00	-1.99999998E+00	1.00000030E+00	2.05368904E-03
ROOT (REAL PART)	2.99999959E+00	1.00000001E+00	3.00000006E+00	1.99999818E+00
(IMAGINARY PART)	-1.00000006E+00	1.99999998E+00	-1.00000030E+00	-2.05368904E-03

表7　実行結果（7次式）

```
PROBLEM NUMBER  7-1
                          ***** SALEQ1 *****      ***** SQLEQ2 *****      ***** SDRAIR *****      ***** SDQDM *****
CPU TIME (MSEC.)             2011.0                   18.0                    103.7                    131.0
ERROR INDICATOR                                        0                       3                        5
ROOT (REAL PART)          1.99561006E+00          2.01112962E+00          1.99122338E+00          0.
     (IMAGINARY PART)        7.35264667E-03          0.                      3.45266984E-04           1.74046220E+00
ROOT (REAL PART)          1.99561006E+00          1.99443567E+00          1.99999998E+00         -1.56287357E+00
     (IMAGINARY PART)       -7.35264667E-03         -9.52632632E-03         -3.45266984E-04           2.25952414E+00
ROOT (REAL PART)          2.99999896E+00          1.99443567E+00          9.99999955E-01         -6.78127293E-06
     (IMAGINARY PART)        1.00000107E+00          9.52632632E-03          1.99999994E+00           6.37067670E+00
ROOT (REAL PART)          2.99999896E+00          2.99999946E+00          9.99999955E-01          6.99836320E+00
     (IMAGINARY PART)       -1.00000107E+00         -1.00000113E+00         -1.99999994E+00          -6.37066203E+00
ROOT (REAL PART)          9.99999784E-01          2.99999946E+00          3.00000006E+00          1.69389886E-27
     (IMAGINARY PART)        2.00000000E+00          1.00000113E+00          1.00000030E+00           1.02013083E+00
ROOT (REAL PART)          9.99999784E-01          9.99999993E-01          3.00000006E+00         -1.96291549E-04
     (IMAGINARY PART)       -2.00000000E+00         -1.99999998E+00         -1.00000030E+00           9.99781125E-01
ROOT (REAL PART)          2.00878242E+00          9.99999993E-01          0.                     -1.92759248E-04
     (IMAGINARY PART)        0.                      1.99999998E+00          0.                       9.80087996E-01

PROBLEM NUMBER  7-2
ERROR #067  EXP UNDERFLO  AT LOCATION     005371 ←―― SDQDMの実行途中で初めて発生したエラー
ERROR #067  EXP UNDERFLO  AT LOCATION     005371 }
ERROR #067  EXP UNDERFLO  AT LOCATION     005371 }  第1行を原因とした副作用
                          ***** SALEQ1 *****      ***** SQLEQ2 *****      ***** SDRAIR *****      ***** SDQDM *****
CPU TIME (MSEC.)             11.5                     5.4                     5.3                      99.3
ERROR INDICATOR                                        0                       0                        0
ROOT (REAL PART)          1.13000001E+00          1.13000014E+00         -9.99999985E-01         -5.00000000E+00
     (IMAGINARY PART)        0.                      0.                      0.                       0.
ROOT (REAL PART)         -9.99999985E-01          4.99999970E-01         -5.00000440E-01         -1.00000402E+00
     (IMAGINARY PART)        0.                     -9.21954259E-01          8.71779673E-01           0.
ROOT (REAL PART)         -5.00000060E-01          4.99999970E-01         -5.00000440E-01         -4.99998391E-01
     (IMAGINARY PART)        8.71779755E-01          9.21954259E-01         -8.71779673E-01           8.71795237E-01
ROOT (REAL PART)         -5.00000060E-01         -9.99999925E-01          4.99998827E-01         -4.99998391E-01
     (IMAGINARY PART)       -8.71779755E-01          0.                      9.21954028E-01          -8.71795237E-01
ROOT (REAL PART)          5.00000045E-01         -5.00000125E+00          4.99998827E-01          5.00000432E-01
     (IMAGINARY PART)        9.21954512E-01          0.                     -9.21954028E-01           9.21955280E-01
ROOT (REAL PART)          5.00000045E-01         -5.00000060E-01          1.13000257E+00          5.00000432E-01
     (IMAGINARY PART)       -9.21954512E-01         -8.71779740E-01          0.                       -9.21955280E-01
ROOT (REAL PART)         -5.00000000E+00         -5.00000060E-01         -4.99999941E+00          1.13000008E+00
     (IMAGINARY PART)        0.                      8.71779740E-01          0.                       0.
```

表8　実行結果（8次式）

PROBLEM NUMBER 8-1

	***** SALEQ1 *****	***** SQLEQ2 *****	***** SDBAIR *****	***** SDQDM *****
CPU TIME (MSEC.)	4150.7	98.0	117.1	146.7
ERROR INDICATOR		2	3	5
ROOT (REAL PART)	4.99999557E-01	1.13000014E+00	-4.55396284E-01	0.
(IMAGINARY PART)	8.66024762E-01	0.	0.	7.08235431E+00
ROOT (REAL PART)	4.99999557E-01	4.99999970E-01	-5.00000440E-01	1.70147279E+00
(IMAGINARY PART)	-8.66024762E-01	-9.21954259E-01	8.71779673E-01	-9.12226129E+00
ROOT (REAL PART)	-4.81495023E-03	4.99999970E-01	-5.00000440E-01	8.28699813E-04
(IMAGINARY PART)	1.41016862E+00	9.21954259E-01	-8.71779673E-01	4.22454089E+00
ROOT (REAL PART)	-4.81495023E-03	-9.99999925E-01	4.99998827E-01	1.80971128E+00
(IMAGINARY PART)	-1.41016862E+00	0.	9.21954028E-01	-6.22359866E+00
ROOT (REAL PART)	5.93991769E-03	-5.00000125E+00	4.99998827E-01	9.31235627E-04
(IMAGINARY PART)	1.41210124E+00	0.	-9.21954028E-01	6.87283045E+00
ROOT (REAL PART)	5.93991769E-03	-5.00000060E-01	1.13000257E+00	1.63452897E+00
(IMAGINARY PART)	-1.41210124E+00	-8.71779740E-01	0.	-8.83386159E+00
ROOT (REAL PART)	-1.12452416E-03	5.00000000E-01	-4.99999941E+00	-2.87799240E-22
(IMAGINARY PART)	1.42037141E+00	-8.66025403E-01	0.	9.99828399E-01
ROOT (REAL PART)	-1.12452416E-03	5.00000000E-01	0.	1.50012818E+00
(IMAGINARY PART)	-1.42037141E+00	8.66025403E-01	0.	-1.99982927E+00

PROBLEM NUMBER 8-2

	***** SALEQ1 *****	***** SQLEQ2 *****	***** SDBAIR *****	***** SDQDM *****
CPU TIME (MSEC.)	17.0	46.8	23.6	146.8
ERROR INDICATOR		0	0	5
ROOT (REAL PART)	-1.34396032E-08	1.92891814E-09	2.99245358E-08	0.
(IMAGINARY PART)	9.99999985E-01	-1.41427718E+00	9.99999985E-01	3.57779786E-01
ROOT (REAL PART)	-1.34396032E-08	1.92891814E-09	2.99245358E-08	8.84371650E+00
(IMAGINARY PART)	-9.99999985E-01	1.41427718E+00	-9.99999985E-01	-2.37881318E+00
ROOT (REAL PART)	1.27199746E-04	8.84625706E-11	-6.92973236E-05	9.01740959E-05
(IMAGINARY PART)	1.41420598E+00	-1.00000001E+00	1.41405007E+00	2.17524514E-01
ROOT (REAL PART)	1.27199746E-04	8.84625706E-11	-6.92973236E-05	1.37028137E+01
(IMAGINARY PART)	-1.41420598E+00	1.00000001E+00	-1.41405007E+00	-2.19648823E+00
ROOT (REAL PART)	4.99999911E-01	-2.10548024E-09	5.00000052E-01	-1.03337391E-09
(IMAGINARY PART)	8.66025366E-01	-1.41414992E+00	8.66025448E-01	-1.36426580E+01
ROOT (REAL PART)	4.99999911E-01	-2.10548024E-09	5.00000052E-01	9.35180776E-01
(IMAGINARY PART)	-8.66025366E-01	1.41414992E+00	-8.66025448E-01	1.16426548E+01
ROOT (REAL PART)	-1.27095729E-04	5.00000000E-01	6.92158937E-05	5.46893989E-16
(IMAGINARY PART)	1.41422115E+00	-8.66025403E-01	1.41437708E+00	-8.77830535E-02
ROOT (REAL PART)	-1.27095729E-04	5.00000000E-01	6.92158937E-05	-1.14518912E+01
(IMAGINARY PART)	-1.41422115E+00	8.66025403E-01	-1.41437708E+00	-9.12210986E-01

表9　実行結果（12次式）

```
PROBLEM NUMBER  12-1
ERROR #067  EXP UNDERFLO  AT LOCATION      005371 ←―― SDQDMの実行途中で初めて発生したエラー
                        ***** SALEQ1 *****     ***** SQLEQ2 *****     ***** SDRAIR *****      ***** SDQDM *****
CPU TIME (MSEC.)              103.7                  50.0                   95.6                    51.4
ERROR INDICATOR                                       0                      0                       0
ROOT (REAL PART)        2.66136676E-01         2.54668784E-01         2.88404074E-01          6.34091387E+01
     (IMAGINARY PART)          0.                     0.                     0.                      0.
ROOT (REAL PART)        2.54060194E-01         2.64873724E-01         3.26139379E-01          7.12012231E+00
     (IMAGINARY PART)          0.                     0.                     0.                      0.
ROOT (REAL PART)        3.25044207E-01         2.90922273E-01         2.53823548E-01          2.61803413E+00
     (IMAGINARY PART)          0.                     0.                     0.                      0.
ROOT (REAL PART)        2.89810054E-01         6.34091520E+01         2.67048575E-01          1.37902090E+00
     (IMAGINARY PART)          0.                     0.                     0.                      0.
ROOT (REAL PART)        4.70458068E-01         3.24419435E-01         3.81720405E-01          8.70741703E-01
     (IMAGINARY PART)          0.                     0.                     0.                      0.
ROOT (REAL PART)        3.82150725E-01         3.82376883E-01         4.70516909E-01          6.15340218E-01
     (IMAGINARY PART)          0.                     0.                     0.                      0.
ROOT (REAL PART)        8.70753608E-01         4.70379285E-01         6.15280025E-01          4.70209345E-01
     (IMAGINARY PART)          0.                     0.                     0.                      0.
ROOT (REAL PART)        6.15270801E-01         6.15295954E-01         8.70750003E-01          3.82771831E-01
     (IMAGINARY PART)          0.                     0.                     0.                      0.
ROOT (REAL PART)        2.61803323E+00         8.70747276E-01         1.37902311E+00          3.23811281E-01
     (IMAGINARY PART)          0.                     0.                     0.                      0.
ROOT (REAL PART)        1.37902112E+00         7.12012005E+00         2.61803264E+00          2.91549507E-01
     (IMAGINARY PART)          0.                     0.                     0.                      0.
ROOT (REAL PART)        6.34091396E+01         1.37902147E+00         7.12012267E+00          2.64666170E-01
     (IMAGINARY PART)          0.                     0.                     0.                      0.
ROOT (REAL PART)        7.12012220E+00         2.61803404E+00         6.34091382E+01          2.54593831E-01
     (IMAGINARY PART)          0.                     0.                     0.                      0.
```

5. 問題別の考察

3.に示した２１題の問題中で，すべてのサブ・プログラムにおいて根がε以内で求められなかったものは２－２，３－２，６－２，７－１，８－１，８－２，１２－１の７題である（表１参照）。一方，数値計算の立場から考えると，収束判定常数εの場合にｎ重根は$\varepsilon^{1/n}$の程度の誤差を含む値しか求められない。すなわち $\varepsilon^{1/n}$ 以内の近接根は分離できないとも言える。

このような立場で上記の７題を考えれば，問題６－２，７－１，８－１，８－２は重根を含み，表１において$\times_2$と判定されるのはしかたがないと言える。また，問題２－２，３－２では真の根が分離不能な程度に接近しているから，やはり$\times_2$と判定される。

次に問題１２－１について考える。この問題の左辺の絶対値は（0.25，0.4）の区間のほぼ全域にわたって10^{-5}以下の値となっている。とくに（0.25，0.3）の区間では大部分が10^{-6}以下である。したがって，関数値を計算する場合に桁落ちによる誤差が大きくて，影響を与える区間が非常に広く，各サブ・プログラムの数値解が大きな誤差を含むものと考えられる。

6. サブ・プログラムについての考察

◎ SALEQ1（ベアストウ法[10),13)]）

このプログラムは反復法を用いているにもかかわらず，入力パラメータに最大反復回数が指定できない。すなわち，収束判定条件を満足するまで反復を繰り返すから，問題によってはエンドレスループとなる可能性がある。問題７－１，８－１では$\varepsilon=10^{-5}$の場合に1000回以上も反復を繰り返しているものと考えられ，非常に危険である。また，表１－９には示していないが，$\varepsilon=10^{-7}$とすれば問題３－３では，CPU時間で３分以上計算しても収束せず，実用的にはエンドレスループと言ってもさしつかえない状態となった。１０進８桁強の計算機で$\varepsilon=10^{-7}$とするのはきびしすぎるが，どのようなパラメータを入力しても，実用性から考えた場合を含めて，エンドレスループとなることは絶対にさけるべきである。

◎ SALEQ2（マコーレー法[13)]）

このプログラムの最大の特徴はεを自動的にゆるめる機能をもっていることである。マコーレー法はベアストウ法の変形であり，二次因子x^2+px+qを反復法で求める方法の一つである。SALEQ2では初期値を$p=q=1$とし，収束しなければεを10εで置きかえる。限度までεを大きくしても収束しなければ$p=-1$，$q=1$と初期値を変更し，εを元にもどして反復を行い，収束しなければεを10εで置きかえる。εをゆるめる限度が２の場合の実行順序を次に示す。

①	②	③	④	⑤	⑥
p＝q＝1	p＝q＝1	p＝q＝1	p＝−1，q＝1	p＝−1，q＝1	p＝−1，q＝1
ε	10ε	100ε	ε	10ε	100ε

上記の実行順序は好ましいとは言えない。なぜならば，①で収束せず，④で収束する場合に②又は③で収束してしまう可能性がある。表1～9に示した結果はεをゆるめる機能を用いておらず，①→④の実行順序であるが，εをゆるめることを許せば，問題8－2，12－1において②の段階で収束することを確認した。好ましい実行順序の一例としては，①→④→②→⑤→③→⑥等が考えられるが，現時点（昭和52年7月末日）では改造は行っていない。

マコーレー法はベアストウ法と比較して，ill－condition の問題に強いと述べている文献[13]も見られるが，SALEQ1，SALEQ2，SDBAIR の実行結果では，問題4－2に差異が認められる程度である。

◎　SDBAIR（ベアストウ法）

解法としてはSALEQ1と同じものにもとづいているが，プログラムとして解法は次の三点でSALEQ1よりすぐれている。

1. 最大反復回数を入力すること。
2. 二次因子x^2+px+qを求めるためのp，qの初期値がSALEQ1では（0，0）であるが，SDBAIRでは（1，0），（0，1），（0，0）の三種類を用いていること。
3. 二次因子が収束しない場合にニュートン法を用いて一次因子を求める方法を併用していること。（SDNWTNを使用）

次に，ベアストウ法，マコーレー法のもつ性質であり，SALEQ1，SALEQ2，SDBAIR に共通の特徴として，同一の二次因子が存在する場合，すなわち，$(x^2+px+q)^2$の項を含むときに精度のよい解が得られないことがあげられる。例として，実根の四重根以上，共役複素二重根以上を含むような問題4－4，8－1，8－2では，SALEQ1，SALEQ2，SDBAIR のいずれの場合も根の精度は悪い。

◎　SDQDM（QD法[14]）

QD法（商差法とも言う）の特徴は方程式の係数に零が存在するときに成立しないことと，絶対値の等しい値は重根と同じ扱いを受けることである。したがって，SDQDMでは三種類の変数変換$x-0.25$，$x-0.5$，$x-1.0$を用いている。しかしながら，共役複素根はいずれの変数変換を行っても絶対値は等しいので，根の精度には充分に注意する必要がある。

次にライブラリー・プログラム作成上の問題点として絶対値の等しい根が複数個以上，特に三個以上存在する場合の処理が困難であることがあげられる。SDQDMにおいて，三種類の変数変換のいずれを用いても絶対値の等しい根が三個以上存在する場合には，対策を行っていない。すなわち，問題3－2，3－4，4－3，4－4，7－1，8－1，8－2の場合には，すべてエラー・インディケータがセットされていることに注意していただきたい。

◎　SDQDRT（二次方程式の解析解；根の公式）

二次方程式の根の公式を用いており，特に記すべき特徴はない。

◎　SDCRDN（三次方程式の解析解；カルダーノ法[10]）

カルダーノ法では最初に三次方程式を標準形 $x^3+3px+q=0$ に変換する。したがって，原方程式の根の誤差は変換誤差（p，qの計算誤差）と標準形の根の計算誤差から成立っている。原方程式の係数に比較してp，qのオーダーが非常に小さい場合には桁落ちによって変換誤差が大きくなる。p，qが正しく計算されたとしても，標準形の根を求める場合に，$|p| \ll |q|$ 又は $|p| \gg |q|$ のときに ill－condition となり，$q^2+4p^3 \simeq 0$ のときには重根，近接根となるから，誤差が大きくなる。p，qのオーダーが非常に小さくなる例として問題3－2，$|p| \ll |q|$ の例として問題3－1があげられる（表1，3参照）。また，標準形の根が三実根の場合には，虚数の立方根を求める必要があるが，SDCRDNでは極座標に変換しており（SDCRDNにかぎらず，カルダーノ法では極座標に変換することが多い），座標変換のための正弦，余弦，逆正接等の計算誤差も大きい。

いずれにしても，カルダーノ法は解析解を計算するアルゴリズムではあるが，二次方程式の根の公式とは比較にならないほど複雑であり，計算誤差が大きくなる点に留意すべきである。

◎　SDFERR（四次方程式の解析解；フェラーリ法[10]）

フェラーリ法は変数変換と数式変形を用いている。ところが，数式変形に使用する助変数の計算には，三次方程式を解く必要がある。すなわち，SDFERRでは変数変換の後にSDCRDNを呼び出しているから，カルダーノ法よりも一層複雑となり，計算誤差も大きい。たとえば，問題4－1では数回の変数変換によって原方程式の係数の下位ビットが無意味となり，数値解は真の根から大きくはずれている（表1，4参照）。この問題の場合はSALEQ1 SALEQ2，SDBAIR，SDQDMのいずれのサブ・プログラムも，ε 以内の誤差で全根を求めており，解析的解法が反復法よりも必ずしもすぐれているとは言えないことを示している。

7. まとめ

6.に示したサブ・プログラムの特徴は大部分が欠点である。これは主として，ill－conditionの問題を例題としたことにもよるが，本来，どのような代数方程式に対しても常に真の根をすべて求めるプログラムを作成することは，近い将来を含めて不可能であろう。また，一定の誤差以内で全根が得られることを保証する場合でさえ，プログラムでは長時間の計算と大容量の記憶が必要となる[11]。したがって，少しでも精度のよい解又は許容誤差以内にある解を高い確率で得るためには，問題の特徴を充分に考慮した解法やプログラムを選択する必要がある。特にライブラリー・プログラムは汎用性と利用の容易性を考えて，八方美人的に

作られているから，特殊目的のプログラムより，解の精度とCPU時間の関係で実用性が低下するのは当然と言える。

大阪大学の場合にかぎらず，計算機センターではいくつかの代表的な解法のライブラリー・プログラムを準備すること，利用者に選択のための情報を提供することが必要であろう。本稿に示したテストで充分とは言えないが，このような立場で，利用者の判断の手助けとなれば幸いである。

参考文献

1) ライブラリー・プログラム一覧，大阪大学大型計算機センター，1977.

2) ライブラリー・プログラム仕様書，大阪大学大型計算機センター，1976.

3) ACOS 6 数値計算ライブラリー説明書（概念/機能編，アルゴリズム編，例題編），日本電気（マニュアル），1976.

4) P. Henrici & B. O. Watkins; Finding Zeros of a Polynomial By the Q-D Algorithm, CACM, Vol.8, No. 9, pp. 570−574, 1965.

5) 石黒美佐子；高次代数方程式の多重根を求めるための解法，情報処理，Vol. 13, No. 1, pp. 2−7, 1972.

6) J. A. Grant & G. D. Hitchins; Tne Solution of polynomial equations in interval aritmetic, Computer J., Vol. 10, No. 1, pp. 69−72, 1973.

7) 大中幸三郎；誤差評価機能をもつ演算方式とその応用に関する研究，学位論文，1975.

8) 安井裕，若林堯雄；実係数代数方程式の実根を求める一方法について，NEAC J., No. 8, pp. 1−12, 1964.

9) 山本哲朗；ある代数方程式解法と解の事後評価法，数理科学，No. 157, pp. 52−57, 1976.

10) 宇野利雄；計算機のための数値計算法，朝倉書店，pp. 88−111, 1963.

11) 大中幸三郎，安井裕；誤差評価の可能な多重精度演算，情報処理，Vol. 15, No. 2, pp. 110−117, 1974.

12) ACOS FORTRAN プログラミング説明書，日本電気（マニュアル），1977.

13) 山内二郎，森口繁一，一松信；電子計算機のための数値計算法 I，培風館，pp. 38−63, 1965.

14) P. ヘンリッチ（一松，平本，本田訳）；数値解析の基礎，培風館，pp. 164−182, 1973.