

Title	有限要素法
Author(s)	矢尾, 哲也
Citation	大阪大学大型計算機センターニュース. 1977, 27, p. 25-42
Version Type	VoR
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/65362">https://hdl.handle.net/11094/65362</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

# 有 限 要 素 法

溶接工学研究所 矢 尾 哲 也

## 1. はじめに

現在、工学のあらゆる分野に於て電子計算機は広く利用されている。構造解析の分野もその例外では無く、様々な解析手法に電子計算機が用いられている。中でも有限要素法は、その出現の始めから電子計算機の使用を前提としており、電子計算機と共に発展してきたと言っても過言ではない。本稿ではまず始めに、構造解析法と電子計算機のかゝり合いの概略を述べる。そして、種々のエネルギー原理に基づく有限要素法の定式化について、そのいくつかの例を示す。さらに、現在筆者が研究している問題に関連して、弾塑性大たわみ問題の解析法の有限要素法を用いた定式化の手法を示し、いくつかの解析例を紹介する。

## 2. 構造解析法と電子計算機

電子計算機が出現してからしばらくたった1954年、Turner, Clough, Martin およびToppがアメリカ航空学会にひとつの論文“Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structure”を発表した。<sup>1)</sup>これが構造解析法が電子計算機と具体的なかゝり合いを持った最初である。

彼らの解析手法の基礎となる骨組構造解析法は、1800年代後半にMaxwell<sup>2)</sup>, Castigliano<sup>3)</sup>,あるいはMohr<sup>4)</sup>らにより確立されている。しかしながら、それ以後、数個以上の未知数を有する連立方程式を解くことが実際上不可能であるため、実構造物の解析上に於てはあまり進歩が見られなかった。ところで、この解析法では、始め、力のパラメータを未知量とする応力仮定の方法が主として用いられていたが、1920年頃、Maney<sup>5)</sup>やOstenfeld<sup>6)</sup>により、変位パラメータを未知量とする変位仮定の方法に従う骨組構造解析法の基本概念が形成された。しかしながら、変位あるいは力のパラメータを未知量とするいずれの方法に於ても、取り扱い得る構造の規模は制限されていた。

1932年、Hardy Cross<sup>7)</sup>がモーメント分配法を提案したが、その方法の出現により取り扱い得る構造規模は従来に比較して一桁複雑となった。以後、電子計算機の実用化が始まる1950年代までの約20年間、モーメント分配法は構造解析を行う場合の主要な方法となっていた。

1950年代初期の航空工学の分野に於ては、航空機が音速の壁を破ることが主要な目標のひとつであった。その為に、航空機の形状が従来のもものと異なるようになり、構造も複雑化していった。そして、より複雑な構造をより精密に解く必要を生じたが、従来の方法では現実にはもはや解析不可能となり、新しい解析法の開発が求められるようになってきた。

このような環境のもとで構造工学、数学および計算機の技術者が協力して開発された解析法がマトリックス法あるいは有限要素法と呼ばれる解析法で、その初めての試みが冒頭に述べた文献1)の研究である。この方法はその後次第に改良され、現在では統一理論が確立されている。そして構造解析以外の分野でも、多くの分野で応用され始めている。

ところで、構造解析の分野に於ける電子計算機の利用は、以上に述べたマトリックス法あるいは有限要素法の他にもいくつかある。本来、構造解析法には解析的手法と数値的手法の2つがある。前者は解が Closed form で求められると云う利点があるが、解が得られるのは特別な場合に限られている。この方法では、電子計算機の使用を特に必要としない。これに対して後者の解析法は、電子計算機の使用を前提としているもので、微分方程式の解を求めるものと、エネルギー原理に基いて解を求めるものの2つに分けることができる。微分方程式の解を求める方法で最も一般的な方法のひとつは差分法である。また、エネルギー原理に基礎を置くものひとつがマトリックス法あるいは有限要素法であり、他のひとつが例えば Galerkin 法等の近似解析法である。以上をまとめると、図1のように表現できる。

以下に於ては、電子計算機と不可分の関係にある有限要素法に焦点をしばって話を進める。

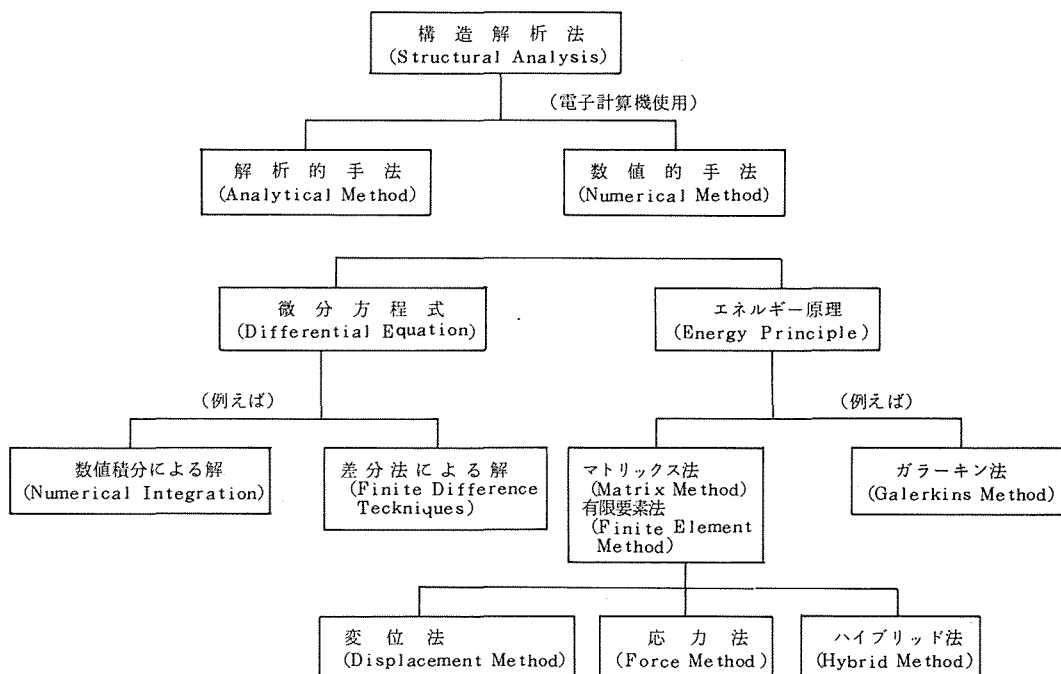


図1 構造解析法の分類

### 3. 有限要素法の基礎

#### 3.1 微小弾性問題の基礎

一般に弾性体に力が加わると変形を生ずるが、その時の弾性体内のひずみ  $\{\epsilon\}$ 、応力  $\{\sigma\}$  および変位  $\{u\}$  は、次の3つの条件により一義的に定まる。8)

(1) 平衡条件式

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = 0$$

または

$$[G] \{\sigma\} + \{\bar{F}\} = 0 \quad (3.1)$$

ここで  $\{\bar{F}\} = \{X, Y, Z\}^T$  は体積力の項である。

(2) ひずみ—変位関係

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

または

$$[B] \{u\} = \{\epsilon\} \quad (3.2)$$

(3) 応力-ひずみ関係

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\nu}{1-2\nu} & & & & & \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & 1 + \frac{\nu}{1-2\nu} & & & & \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 1 + \frac{\nu}{1-2\nu} & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

または

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (3.3)$$

これら3つの条件式を、下記の2つの境界条件を満足するように解けば、微小弾性問題の解が得られる。

(4) 力学的境界条件

表面力  $\{F\}$  が与えられている境界  $S_\sigma$  上での境界条件は次式で表わせる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_\nu \\ \bar{Y}_\nu \\ \bar{Z}_\nu \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

または

$$\{\bar{T}\} = [\sigma] \{L\} \quad (3.4)$$

ここに  $\{L\} = \{l, m, n\}^T$  は  $x, y, z$  方向の方向余弦である。

(5) 幾何学的境界条件

変位  $\{\bar{u}\}$  が与えられている境界  $S_u$  上での境界条件は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

または

$$\{\bar{u}\} = \{u\} \quad (3.5)$$

以上、未知数は  $\{u\}$ ,  $\{\varepsilon\}$  および  $\{\sigma\}$  の各成分で合計15個、解くべき方程式の数は (2, 1) ~ (2, 3) 式に含まれる15個で、原理的には解が得られるはずである。しかしながら現実には正解が得られるのはごく一部の簡単な問題に限られており、

一般には、種々の近似解法にたよらざるを得ない。このような近似解法の中で、エネルギー原理に基礎を置く解法のひとつが有限要素法である。

### 3.2 有限要素法とエネルギー原理<sup>9)</sup>

有限要素法には、変位のパラメータを未知数とする変位法 (displacement method) と応力のパラメータを未知数とする応力法 (force method) の2つの方法がある。どちらの方法も、連続体を有限個の要素の集合体とするところから始まる。変位法では、弾性体内の変位を、ひずみの適合条件を考慮しながら仮定し、ひずみ-変位関係からひずみを、さらに応力-ひずみ関係から応力を求め、最後に仮想仕事の原理あるいは最小ポテンシャルエネルギーの原理を用いて、平衡条件式を近似的に満足するように未知変位を求める。これに対して応力法では、平衡方程式を満足するように弾性体内の応力分布を仮定し、ひずみ-応力関係を用いて要素の変形状態を外力と未知内力の関数として表わす。そして、補仮想仕事の原理あるいは最小コンプリメンタリエネルギーの原理を適用して未知内力を求める。この他にも、両者の中間とも云うべきハイブリッド法 (Hybrid Method) がある。

### 3.3 変位法

#### 3.3.1 最小ポテンシャルエネルギーの原理を用いる方法

物体を  $n$  個の有限な大きさの要素  $V_1, V_2, \dots, V_n$  に仮想的に分割し、任意の要素を  $V_i$  とする。  $V_i$  内の変形状態を決める変位関数を、変位が

- (1)  $V_i$  内で一価連続、
- (2)  $S_i$  上で、隣接する要素の変位関数と連続、
- (3)  $S_{ui}$  上で、幾何学的境界条件を満足する、

ように仮定する。ここで

$S_i$  :  $V_i$  が隣接する要素と接している境界面

$S_{ui}$  :  $V_i$  要素に含まれる  $S_u$  部分 ( $S_u$  は変位で境界条件が与えられている物体表面)

つぎに、要素の節点における変位を  $\{q\}$  とすると  $V_i$  内の  $\{u\}$  は仮定した変位関数より

$$\{u\} = [N] \{q\} \quad (3.6)$$

また  $V_i$  要素内のひずみ  $\{\epsilon\}$  は (3.2) 式より

$$\{\epsilon\} = [B] \{u\} = [B] [N] \{q\} \quad (3.7)$$

さらに、  $V_i$  要素内の応力  $\{\sigma\}$  は (3.3) 式より

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} = [D] [B] [N] \{q\} \quad (3.8)$$

$V_i$  要素内のひずみエネルギー  $A$  は次式で表わせる。

$$A = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} \quad (3.9)$$

一般に、弾性体の総ポテンシャルエネルギーは次式の形で表わせる。

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \left( \int_{V_i} A(u) dV - \int_{V_i} \{\bar{F}\}^T \{u\} dV \right) - \int_{S_o} \{\bar{T}\}^T \{u\} dS \quad (3.10)$$

ここで、 $S_o$ は力で境界条件が与えられている物体表面を表わす。

さきに述べた仮定に基く変位関数は(3.10)式で表わせる汎関数 $\Pi$ を最小にする正解の許容関数と見なせる。

(3.10)式に(3.6)～(3.9)式を代入すると、総ポテンシャルエネルギーは次式となる。

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{i=1}^n \left( \int_{V_i} \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV - \int_{V_i} \{\bar{F}\}^T \{u\} dV \right) - \int_{S_o} \{\bar{T}\}^T \{u\} dS \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} - \{F\}^T \{q\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

ここに

$$[K] = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} [N]^T [B]^T [D] [B] [N] dV \quad (3.12)$$

$$\{F\} = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} [N]^T \{\bar{F}\} dV + \int_{S_o} [N]^T \{\bar{T}\} dS \quad (3.13)$$

$\{q\}$ に関する $\Pi$ の停留条件(総ポテンシャルエネルギー最小)より

$$\sum_{i=1}^n [K] \{q\} - \{F\} = 0 \quad (3.14)$$

ここで $[K]$ および $\{F\}$ はそれぞれ要素の剛性マトリックスおよび節点の等価節点力と呼ばれるものである。

結局、最終的には(3.14)式で表わせる連立一次方程式を節点変位 $\{q\}$ に関して解けばよいことになる。節点変位 $\{q\}$ が求まれば、(3.7)式および(3.8)式を用いてひずみ $\{\varepsilon\}$ および応力 $\{\sigma\}$ が求まるが、このようにして求められた応力は、平衡条件式を少なくとも局部的には満たさないことに注意せねばならない。また、最小ポテンシャルエネルギーの原理に基く解は、正解より高めの解を与えることが知られている。

### 3.3.2 仮想仕事の原理を用いる方法

仮想仕事の原理は次式で表わせる。

$$\sum_{i=1}^n \left( \int_{V_i} \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} dV - \int_{V_i} \{\bar{F}\}^T \{\delta u\} dV \right) - \int_{S_o} \{\bar{T}\}^T \{\delta u\} dS = 0 \quad (3.15)$$

(3.6)、(3.7)式より

$$\{\delta u\} = [N] \{\delta q\} \quad (3.16)$$

$$\{\delta\varepsilon\} = [B] [N] \{\delta q\} \quad (3.17)$$

(3.16)、(3.17)式および応力・ひずみ関係を表わす(3.8)式を用いると(3.15)式は次式の形となる。

$$\sum_{i=1}^n \{q\}^T [K] \{\delta q\} - \{F\}^T \{\delta q\} = 0 \quad (3.18)$$

ここで $[K]$ および $\{F\}$ は(3.12)、(3.13)式で表わされているものと同じである。

(3.18) 式は結局

$$\sum_{i=1}^n [K] \{a\} - \{F\} = 0 \quad (3.19)$$

となり、(3.14) 式と一致する。

このように、仮想仕事の原理を用いた結果は最小ポテンシャルエネルギーの原理を用いた結果と同一になる。しかしながら、仮想仕事の原理は応力-ひずみ関係と無関係に成立する為、この方法による定式化は材料非線形挙動の解析にも適用できる利点がある。

### 3.4 応力法

ここでは、最小コンプリメンタリエネルギーの原理を用いる方法についてのみ述べる。この場合の汎関数は総コンプリメンタリエネルギー  $\Pi_C$  で、次式で表わせる。

$$\Pi_C = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} B(\theta) dV - \int_{S_u} \{\bar{u}\}^T \{T\} dS \quad (3.20)$$

ここで、 $B(\theta)$  はコンプリメンタリエネルギーを表わす。

まず始めに、 $V_i$  要素内で平衡条件 (3.1) 式を満足する応力を求め、これを

$$\{\sigma\} = [P] \{\beta\} + \{\sigma_p\} \quad (3.21)$$

とおく。ここに

$\{\sigma_p\}$  : 特解 (体積力が零の時は零)

$[P] \{\beta\}$  : 平衡方程式を満足する同次方程式の解で、一般に応力関数を用いて表わすと便利

要素境界  $S_{ui}$  上では

$$\{T\} = [R] \{\beta\} + \{T_p\} \quad (3.22)$$

(3.21) 式が (3.20) 式で表わされる汎関数  $\Pi_C$  を最小にする正解の許容関数である為には、(3.22) 式の  $\{T\}$  が要素境界上で平衡条件式を満足せねばならない。このことは  $\{\beta\}$  の成分の間に拘束条件を課することになるが、この拘束条件より、全要素の  $\{\beta\}$  の中から独立なパラメータ (不静定量) を適当に選び、これを  $\{\beta^*\}$  とすると

$$\{\beta\} = [J] \{\beta^*\} \quad (3.23)$$

$V_i$  要素内のひずみ  $\{\epsilon\}$  は (3.3) 式より

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= [D]^{-1} \{\sigma\} \\ &= [D]^{-1} [P] [J] \{\beta^*\} + [D]^{-1} \{\sigma_p\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

従って、総コンプリメンタリエネルギーは次式となる。

$$\begin{aligned} \Pi_C &= \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [D]^{-1} \{\sigma\} dV - \int_{S_u} \{\bar{u}\}^T \{T\} dS \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} \{\beta^*\}^T [K_1] \{\beta^*\} + \{\beta^*\}^T [K_2] \{\sigma_p\} + \frac{1}{2} \{\sigma_p\}^T [K_3] \{\sigma_p\} \right) \\ &\quad - \{F_1\}^T \{\beta^*\} - \{F_2\}^T \{T_p\} \end{aligned} \quad (3.25)$$



ここに、

$$[K_1] = \int_{V_i} (J)^T (P)^T (D)^{-1} (P) (J) dV \quad (3.26)$$

$$[K_2] = \int_{V_i} (J)^T (P)^T (D)^{-1} dV \quad (3.27)$$

$$[K_3] = \int_{V_i} (D)^{-1} dV \quad (3.28)$$

$$\{F_1\} = \int_{S_u} (J)^T (R)^T \{\bar{u}\} dS \quad (3.29)$$

$$\{F_2\} = \int_{S_u} \{\bar{u}\} dS \quad (3.30)$$

$\{\sigma_p\}$ に関する停留条件は

$$[K_2] \{\beta^*\} + [K_3] \{\sigma_p\} = 0 \quad (3.31)$$

これより

$$\{\sigma_p\} = - [K_3]^{-1} [K_2] \{\beta^*\} \quad (3.32)$$

したがって  $\Pi_C$  は次式となる。

$$\Pi_C = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \{\beta^*\}^T [K'] \{\beta^*\} - \{F_1\}^T \{\beta^*\} - \{F_2\}^T \{\sigma_p\} \quad (3.33)$$

$\{\beta^*\}$ に関する停留条件より

$$\sum_{i=1}^n [K'] \{\beta^*\} - \{F_1\} = 0 \quad (3.34)$$

ここに

$$[K'] = \int_{V_i} ([K_1] - 2 [K_2] [K_3]^{-1} [K_2] - [K_2]^T [K_3]^{-1} [K_2]) dV \quad (3.35)$$

結局、(3.34)式で与えられる連立一次方程式を未知内力  $\{\beta^*\}$  について解けばよい。 $\{\beta^*\}$  が求まると (3.32) 式より  $\{\sigma_p\}$  が求まり、(3.23)、(3.21) 式より  $\{\sigma\}$  が求まる。さらに、(3.24) 式より  $\{\varepsilon\}$  が求まるが、このひずみは一般に適合条件を満足していないことに注意すべきである。なお、この方法による解は正解よりも低めの解を与えることが知られている。

### 3.5 ハイブリッド法

以上、有限要素法の定式化にエネルギー原理を適用する代表的な2つの方法について述べたが、この他に最近注目を集めているものとしてハイブリッド法 (Hybrid Method) がある。この方法で用いられるエネルギー原理には、例えばHu-Washizuの原理、あるいはHellinger-Reissnerの原理等があるが、これらはLagrangeの未定乗数を介して最小ポテンシャルエネルギーの原理あるいは最小コンプリメンタリエネルギーの原理と関係づけられるものである。これらについての説明は、鷲津教授による文献(9)を参照されたい。なお、本節を書くに当たってはこの文献に負うところが大きい。

#### 4. 弾塑性大たわみ問題解析法の有限要素法による定式化<sup>10)</sup>

ここでは、変位法に従って仮想仕事の原理を適用して、弾塑性大たわみ問題の解析に有限要素法を用いる解析法の定式化を示す。この問題は、金属材料が比例限を越えた場合に示す材料非線型、および構造要素の変形が大きくなって、生ずるひずみが幾何学的形状の変化の二次の項も含んで表わされるような幾何学的非線型の両非線型性を含んだ問題となっている。

一般に非線型問題の解析手法には

- (1) 荷重増分法
- (2) 反復法
- (3) (1)および(2)の混合法

の3つがあるが、ここでは荷重増分法に基いて定式化を行った。この方法は、変形の全過程をいくつかの段階に分け、全過程を通しては非線型な種々の関係式を、各段階内では線型であると仮定し、荷重が零の段階から最終荷重の段階まで、順次計算しながら得られた結果をたし合せてゆく方法である。以下に具体的な定式化の手順を示すが、体積力は無いものとしている。

##### 4.1 要素特性

用いた要素を図2に示すが、要素特性を導く際の座標系は要素に固定されたものを用いる。この要素は、面内変形、面外大たわみ変形および曲げ変形を考慮した三角形要素で、要素の応力状態は平面応力状態を仮定した。要素内の変位 $\{u^e\}$ および等価節点力 $\{F^e\}$ は次式で表せる。

$$\{u^e\} = \{s, w\}^T \quad (4.1)$$

$$\{F^e\} = \{X, M\}^T \quad (4.2)$$

ここで、 $\{s\} = \{u, v\}^T$  は面内変位、 $\{w\} = \{w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\}^T$  は面外たわみおよびたわみ角を表わす。また $\{X\} = \{F_x, F_y\}^T$  は面内力、 $\{M\} = \{F_z, M_x, M_y\}^T$  は面外方向の分布力および曲げモーメントを表わす。結局、ひとつの要素の未知変位量は15個となっている。

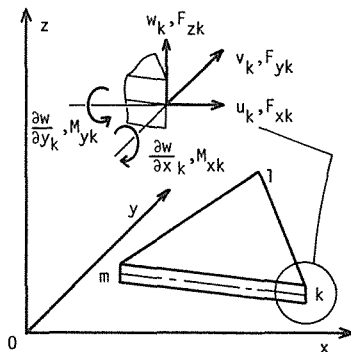


図2 大たわみ要素の節点変位および等価節点力

## 4.2 変位関数

面内変形に対しては一様ひずみとなる変位関数を採用した。すなわち

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (4.3)$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (4.4)$$

(4.3)、(4.4)式の $x$ 、 $y$ に3つの節点の座標を代入すると、節点変位を表わす式が6つできる。この式を解けば $\alpha_1 \sim \alpha_6$ が求まり、これを(4.3)、(4.4)式に代入すると $u$ 、 $v$ が節点の座標と節点変位 $\{u_n, v_n\}$ で表わせる。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [A_p] \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \end{Bmatrix}$$

または

$$\{s\} = [A_p] \{s_n\} \quad (4.5)$$

また、面外変形に対しては、Bazley等により提案されている不完全三次式<sup>11)</sup>を採用した。詳細は省略するが、上と同様の手法を用いて、面外変形に対しては次式が成立する。

$$\{w\} = [A_b] \{w_n\} \quad (4.6)$$

ここで、 $\{s_n\}$ および $\{w_n\}$ は面内および面外の節点変位を表わし、要素の全節点変位は $\{u_n\} = \{s_n, w_n\}^T$ となる。

ところで、ここで定義した変位場は要素に固定した局部座標系に関するものである。したがって、解析対象の全領域にわたっての平衡条件を考える際には、全要素について共通な座標系の変位場に変換する必要がある。座標変換マトリックスを $[A_i]$ とすると、局部座標系での変位 $\{u_n\}$ と全体座標系での変位 $\{u_g\}$ は次式で関係づけられる。

$$\{u_n\} = [A_i] \{u_g\} \quad (4.7)$$

なお、ここで採用した変位関数を用いた場合、要素境界に於て面内変位および面外たわみは連続となるが、たわみ角は連続でない。

## 4.3 ひずみ—変位関係

面外たわみを考慮したひずみ成分は次式で与えられる。<sup>12)</sup>

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ 2\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

$$= [G_1] \{s\} + \frac{1}{2} [C_0] [G_2] \{w\} - z [G_3] \{w\} \quad (4.8)$$

上式に(4.5)、(4.6)式を代入すると

$$\{\varepsilon\} = [B_p] \{s_n\} + \frac{1}{2} [C_0] [B_{b1}] \{w_n\} - z [B_{b2}] \{w_n\} \quad (4.9)$$

ここに

$$[B_b] = [G_1] [A_p]$$

$$[B_{b1}] = [G_2] [A_b]$$

$$[B_{b2}] = [G_3] [A_b]$$

また

$$[C_o] = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

いま、ある荷重段階が終了した時点でのひずみが(4.9)式で表わされていると仮定する。この段階で次の荷重増分が加えられるとひずみは $\{\varepsilon + d\varepsilon\}$ となるが、これは次式の形をとる。

$$\begin{aligned} \{\varepsilon + d\varepsilon\} &= [B_p] \{s_n + ds_n\} + \frac{1}{2} [C_o + dC_o] [B_{b1}] \{w_n + dw_n\} \\ &\quad - z [B_{b2}] \{w_n + dw_n\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

したがって、この間のひずみ増分 $\{d\varepsilon\}$ は(4.11)式と(4.9)式の差をとり次式で表わせる。

$$\begin{aligned} \{d\varepsilon\} &= [B_p] \{ds_n\} + [C_o] [B_{b1}] \{dw_n\} + \frac{1}{2} [dC_o] [B_{b1}] \{dw_n\} \\ &\quad - z [B_{b2}] \{dw_n\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

#### 4.4 応力-ひずみ関係

##### (a) 弾性域

材料が弾性状態にある場合、応力とひずみの間には(3.3)式で示される関係があるが、応力増分 $\{d\sigma\}$ とひずみ増分 $\{d\varepsilon\}$ の間にも同様の関係が成立する。すなわち

$$\{d\sigma\} = [D_e] \{d\varepsilon\} \quad (4.13)$$

平面応力状態の $[D_e]$ は次式の形をとる。

$$[D_e] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & & \\ \nu & 1 & \text{SYM} \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

##### (b) 塑性域

数理塑性学<sup>13)</sup>に従うと、材料が降伏した後の応力増分とひずみ増分の間には次式の関係が成立する。

$$\{d\sigma\} = [D_p] \{d\varepsilon\} \quad (4.15)$$

マトリックス表示された $[D_p]$ は山田教授により導かれたもので、次式の形を有する。<sup>14)</sup>

$$(D_p) = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{E}{1-\nu^2} - \frac{S_1^2}{S} & & \text{SYM} \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} - \frac{S_1 S_2}{S} & \frac{E}{1-\nu^2} - \frac{S_2^2}{S} & \\ -\frac{S_1 S_3}{S} & -\frac{S_2 S_3}{S} & \frac{E}{2(1+\nu)} - \frac{S_3^2}{S} \end{array} \right] \quad (4.16)$$

ここに

$$S = \frac{4}{9} \bar{\sigma}^2 H' + S_1 \sigma'_x + S_2 \sigma'_y + 2S_3 \tau_{xy}$$

$$S_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\sigma'_x + \nu \sigma'_y)$$

$$S_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \sigma'_x + \sigma'_y)$$

$$S_3 = \frac{E}{1+\nu} \tau_{xy}$$

$$\sigma'_x = \frac{1}{3} (\sigma_y - 2\sigma_x), \quad \sigma'_y = \frac{1}{3} (\sigma_x - 2\sigma_y)$$

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2$$

また  $H'$  は加工硬化率を表わす。

### (C) 弾性・塑性の判定

材料が弾性状態にあるか塑性状態にあるかの判定は、von Mises の降伏条件によつた。すなわち、三角形要素を板厚方向に20層に仮想的に分割し、それぞれの層の重心点での相当応力  $\bar{\sigma}$  と降伏応力  $\sigma_Y$  の大小関係より、各層ごとに弾性・塑性の判定を行った。

(1)  $\bar{\sigma} < \sigma_Y$  : 材料は弾性状態

(2)  $\bar{\sigma} = \sigma_Y$  : 材料は降伏

(3)  $\bar{\sigma} > \sigma_Y$  : 材料は塑性状態

(1)の場合には(4.13)式の応力-ひずみ関係を用いる。(2)および(3)の場合には、相当塑性ひずみ増分

$$d\bar{\varepsilon}_p = \frac{2}{3} \bar{\sigma} \frac{S_1 d\varepsilon_x + S_2 d\varepsilon_y + S_3 d\tau_{xy}}{S} \quad (4.17)$$

が零又は正の場合(4.15)式の応力-ひずみ関係を、負の場合は(4.13)式の応力-ひずみ関係を用いる。

### 3.5 仮想仕事の原理の適用

ある荷重段階の終了時に、荷重が  $\{F\}$ 、応力が  $\{\sigma\}$  で平衡状態にあるとする。この状態で荷重増分  $\{dF\}$  を与え、応力増分  $\{d\sigma\}$  が得られたとする。ここで仮想仕事の原理

を適用すると、(3.15)式に従い次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^n \int_{V_i} (\sigma + d\sigma)^T \{\delta d\varepsilon\} dV - \int_{S_\sigma} \{F + dF\}^T \{\delta du\} dS = 0$$

上式で $\{\delta d\varepsilon\}$ はひずみ増分 $\{d\varepsilon\}$ の変分で、(4.12)式より次式となる。

$$\{\delta d\varepsilon\} = [B_p] \{\delta ds_n\} + [C_o + dC_o] [B_{b1}] \{\delta dw_n\} - z [B_{b2}] \{\delta dw_n\} \quad (4.19)$$

(4.13)式あるいは(4.15)式および(4.19)式を(4.18)式に代入し、増分に関する三次以上の項を微小項として無視すると次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^n (\{du_n\}^T [K] \{\delta du_n\} + \{R\}^T \{\delta du_n\}) - \{F\}^T \{\delta du_n\} - \{dF\}^T \{\delta du_n\} = 0 \quad (4.20)$$

これより次式

$$[K_g] \{du_g\} + \{R_g\} - \{F_g\} - \{dF_g\} = 0 \quad (4.21)$$

ここに

$$\begin{aligned} [K_g] &= \sum_{i=1}^n [A_i]^T [K] [A_i] \\ \{R_g\} &= \sum_{i=1}^n [A_i]^T \{R\} \\ \{F_g\} &= \sum_{i=1}^n [A_i]^T \{F\} \quad , \quad \{dF_g\} = \sum_{i=1}^n [A_i]^T \{dF\} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} [K] &= \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pb} \\ K_{bp} & K_{bb} \end{bmatrix} \\ \{R\} &= \begin{Bmatrix} R_p \\ R_b \end{Bmatrix} \quad , \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_p \\ F_b \end{Bmatrix} \quad , \quad \{dF\} = \begin{Bmatrix} dF_p \\ dF_b \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned} [K_{pp}] &= \int_{V_i} [B_p]^T [D] [B_p] dV \\ [K_{pb}] &= [K_{bp}]^T = \int_{V_i} ([B_p]^T [D] [C_o] [B_{b1}] - z [B_p]^T [D] [B_{b2}]) dV \\ [K_{bb}] &= \int_{V_i} (z^2 [B_{b2}]^T [D] [B_{b2}] + [B_{b1}]^T [D] [B_{b1}] \\ &\quad + [B_{b1}]^T [C_o]^T [D] [C_o] [B_{b1}] - z [B_{b1}]^T [C_o]^T [D] [B_{b2}] \\ &\quad - z [B_{b2}]^T [D] [C_o] [B_{b1}]) dV \\ \{R_p\} &= \int_{V_i} [B_p]^T \{\sigma\} dV \\ \{R_b\} &= \int_{V_i} ([B_{b1}]^T [C_o]^T - z [B_{b2}]^T) \{\sigma\} dV \end{aligned}$$

$$[P] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{cases} [D_e] : & \text{弾性域} \\ [D_p] : & \text{塑性域} \end{cases}$$

(4.2.1) 式を変形すると次の2つの式が得られる。

$$[K_g] \{d u_g\} = \{d F_g\} + [L_g] \quad (4.2.2)$$

$$[L_g] = \{F_g\} - \{R_g\} \quad (4.2.3)$$

(4.2.2) 式を解けば、新しい荷重増分  $\{d F_g\}$  のもとでの変位増分  $\{d u_g\}$  が求まるが、この荷重増分の間では種々の関係式は線型近似されており、新しい変形状態での平衡条件は満足されていない。(4.2.2) 式で荷重増分  $\{d F_g\}$  を零とすると

$$[K_g] \{d u_g\} = [L_g] \quad (4.2.4)$$

となり、(4.2.3) 式に示される  $\{L_g\}$  が荷重項として残る。したがって、 $\{L_g\}$  は一段階前の荷重段階に於ける線型近似による誤差を修正する為の修正荷重項となっていることがわかる。

## 5. 解析例

ここでは、面外変形に対して周辺が単純支持されている正方形板が、面内方向の圧縮荷重を受ける場合をとり上げて、初期たわみの影響を明らかにする目的で行った解析の結果を示す。15), 16)

### 5.1 解析対象

解析対象は  $500 \text{ mm} \times 500 \text{ mm}$  の正方形板で、その板厚を  $3 \text{ mm}$  から  $50 \text{ mm}$  まで種々変化させて解析を行った。板は初期たわみを有しており、面外変形に対しては周辺単純支持の条件とした。荷重は、載荷辺が一様変位を保つような面内圧縮変位で与え、非載荷辺の面内変形は自由とした。

### 5.2 解析結果と実験結果の比較

解析結果の妥当性を確める目的で、板厚が  $4.5 \text{ mm}$ 、 $9.0 \text{ mm}$  および  $12.7 \text{ mm}$  の場合について実験を行った。実験に当たってはなるべく解析対象に近い境界条件を得る為に、特別に製作した治具を使用した。

解析結果と実験結果の比較を図3に示す。同図は各板厚の中からそれぞれ一つづつ選んで、荷重と板中央部での横たわみの関係をそれぞれの無次元量を用いて表わしたものである。厚板の場合、両者は比較的良く一致していると云えるが、多少の差が見られる。この差は、解析対象が S I N 半波の初期たわみを仮定しているのに対して、試験体では必ずし

もそのような初期たわみにはなっておらず、両者の間の初期たわみ波形の差に起因すると考えられる。これに対して薄板の場合には、両者の間にかなりの差が見られる。これは、実験では周辺単純支持の条件を満たすための治具が薄板の場合十分に働かず、試験体端部に局部崩壊した為である。

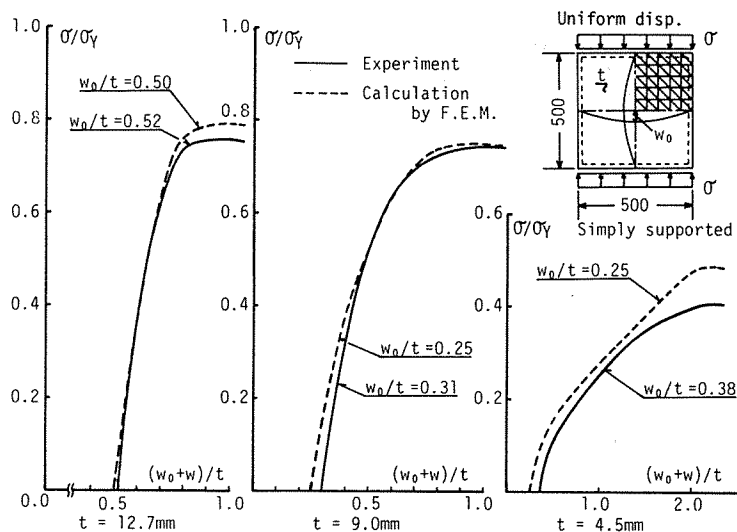
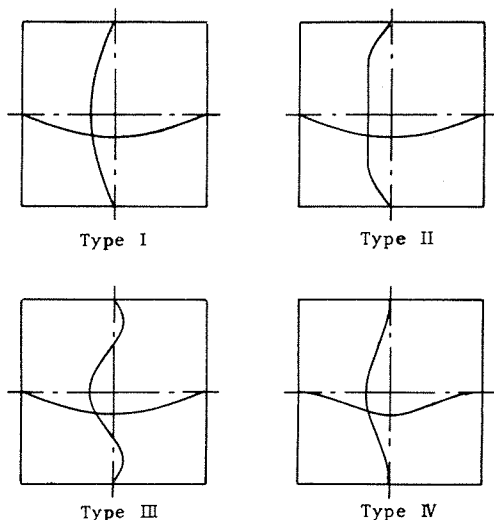


図3 解析結果と実験結果の比較

### 5.3 初期たわみ波形の影響

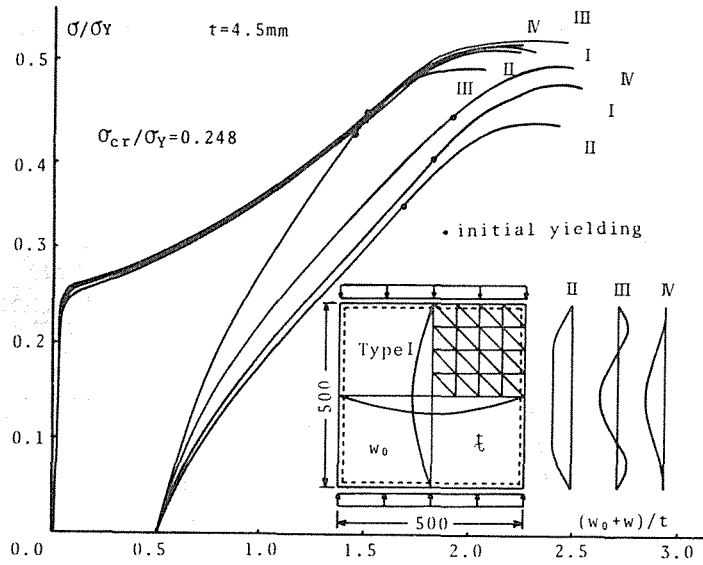
初期たわみ波形の影響を調べる目的で、図4(a)に示す4種類の初期たわみ波形を仮定して解析を行った。板厚が4.5mmの場合についての荷重と横たわみの関係を図4(b)に示す。



(a) 仮定した初期たわみ波形

図4 初期たわみ波形の影響





(b) 荷重～横たわみ曲線

図4 初期たわみ波形の影響

初期たわみ量は、その最大値が板厚の1/100 および1/2の場合について解析を行ったが、初期たわみ量が小さいと初期たわみ波形の差はあまり板の変形挙動に影響を及ぼさないようである。これに対して初期たわみ量が大きいと、板の変形挙動は初期たわみ波形にかなり影響されることがわかる。

#### 5.4 初期たわみ量の影響

図4(a)のType I に相当するS I N半波の初期たわみ波形を仮定し、板中央部での初期たわみ量が板厚の1/100, 1/4, 1/2 および1/1 の場合について解析を行った。種々

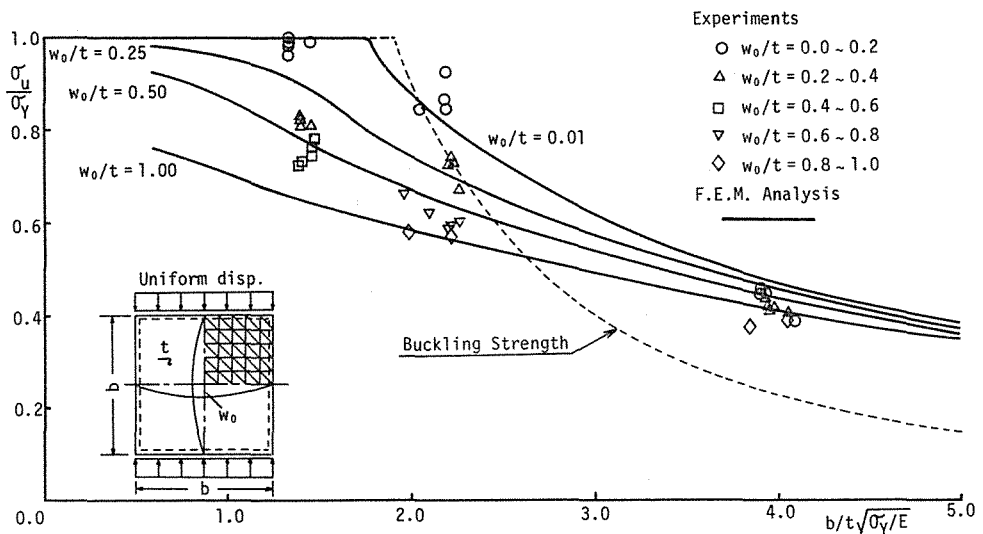


図5 圧縮を受ける正方形板の最終強度

の板厚についての最終強度をまとめて図5に示す。同図には参考の為に実験結果も併せて示す。

## 6. ま と め

以上、いくつかのエネルギー原理を有限要素法の定式化に適用する方法、そのひとつの例として弾塑性大たわみ問題の有限要素法による定式化、およびいくつかの解析例を示した。実際の問題を解くに当たって、どのエネルギー原理を適用して定式化を行うかは、解くべき問題の種類によって決定すべきである。構造解析の分野に於ては、平衡条件を満足する応力場の仮定よりも適合条件を満足する変位場の仮定のほうが容易であるため、従来ほとんどの場合、変位法による定式化を行ってきた。しかしながら問題の種類によっては、応力場を仮定するほうがより精度の高い解が得られる場合もあり、応力法による定式化も特にハイブリッド型のエネルギー原理を用いる形で今後さかんになってくるものと予想される。

現在有限要素法は、構造解析の分野では必要不可欠の強力な武器となっているが、解析すべき問題が複雑化してくるに従って必要とする電子計算機の気憶容量、計算時間および入力データの量が膨大となることは避けられず、これを何如に解消するかが重要な問題となってくる。この問題を解決する為のひとつの方向として、最近、有限要素法的ではあるが別の解析手法が提案されている。そのひとつは上田教授により提案されている理想化構造要素法<sup>17)</sup>である。この方法は、従来の有限要素法ではいくつもの要素に分割していたひとつの構造単位(例えば桁の1パネル)をひとつの要素と見なし、その変形挙動を理想化して要素特性を決め、このような要素の集合体として構造全体を解析する方法である。いまひとつは川井教授により提案されている離散化構造モデル法<sup>18)</sup>である。この方法では連続体を有限個の剛体とそれらを結ぶバネに置き換えて解析を行う。これらの新しい解析手法の詳細に関しては文献(15)および(16)を参照されたい。今後、より複雑な構造物の解析を行うに当たっては、上記ふたつの解析法も多く用いられるようになると思われる。

(参考文献)

- (1) M. Turner, R. Clough, H. Martin and L. Topp, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structure", J. Aero. Sci., 23, No9, Sept., 1956, pp. 805-823
- (2) J. C. Maxwell, "On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames", Phil. Mag. (4), 27, 294, 1864
- (3) A. Castigliano, Theorie de l'equilibre des Systemes Elastiques, Turin, 1879
- (4) O. Mohr, "Beitrag zur Theorie der Holz-und Eisen Konstruktionen", Zeit. des Architekten und Ingenieur Verienes zu Hannover, 1868.

- (5) G. B. Maney, *Studies in Engineering—No. 1, U. of Minnesota, Minneapolis, Minn., 1915*
- (6) A. Ostenfeld, *Die Deformationsmethode, Springer-Verlag OHG, Berlin, 1926*
- (7) H. Cross, "Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments", *Trans. ASCE, 96, 1932, pp1-10*
- (8) 例えば、S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, 1933*
- (9) 鷲津久一郎、弾性学の変分原理概論、コンピューターによる構造工学講座2-3-A、培風館、1972年
- (10) 上田幸雄、山川武人、藤原昭文、「有限要素法によるはり・柱・平板の熱弾塑性大たわみ解析」、日本鋼構造協会第7回大会研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集、1973年、pp 411-418
- (11) G. P. Bazley, Y. K. Cheung, B. M. Irons and O. C. Zienkiewicz, "Triangular Elements in Plate Bending-Conforming and Non-Conforming Solutions", *Proc. Conf. on Matrix Meth. in Struc. Mech., AFFDL-TR-66-80, 1966, pp. 547-576.*
- (12) 例えば、S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York, 1936*
- (13) R. Hill, *Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press, London, 1950*
- (14) Y. Yamada, N. Yoshimura and T. Sakurai, "Plastic Stress-Strain Matrix and its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problems by the Finite Element Method", *Int. J. Mech. Sci., 10, 1968, pp. 343-354*
- (15) 上田幸雄、安川度、矢尾哲也、池上博、大南亮一、「圧縮を受ける正方形板の最終強度に関する研究(第1報) —初期たわみおよび溶接残留応力の影響について—」、日本造船学会論文集、第137号、1975年、pp. 315-326.
- (16) 上田幸雄、安川度、矢尾哲也、池上博、大南亮一、「圧縮を受ける正方形板の最終強度に関する研究(第2報) —初期不整の影響に対する総合的考察—」、日本造船学会論文集、第140号、1976年、pp. 217-221
- (17) 例えば、上田幸雄、Sherif. M. H. Rashed, 片山正孝、「理想化構造要素法による二重底構造の最終強度解析」、日本造船学会論文集、第138号、1975年、pp. 322-329
- (18) 例えば、T. Kawai, "New Element Models in Discrete Structural Analysis", 日本造船学会論文集、第141号、1977年、pp. 174-180.