

Title	ライブラリー精度テスト : 数値積分
Author(s)	大中, 幸三郎
Citation	大阪大学大型計算機センターニュース. 27 P.121- P.139
Issue Date	1977-11
Text Version	publisher
URL	http://hdl.handle.net/11094/65365
DOI	
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/repo/ouka/all/>

ライブラリー精度テスト

—— 数 値 積 分 ——

研究開発部

大 中 幸 三 郎

1. はじめに

ライブラリー・プログラムの精度、信頼性等の検査については、代数方程式の根を求めるプログラムに対するテスト結果をすでにセンター・ニュース№26に示した¹⁾。今回はテストの第2段として、数値積分プログラムに対してテストを行った。数値積分をえらんだ要因としては次の2点があげられる。まず第1点として、数値積分は数値計算において重要な分野の一つであり、実際の使用頻度も高いことが予想されることである。次に第2点として、全国共同利用大型計算機センター間のプログラム・ライブラリー研究会において、1次元有限区間に対する自動積分プログラムのテストが1つのテーマとなったことである。したがって、テスト問題としては、プログラム・ライブラリー研究会で採用された16題を用いている。なお、計算機は大阪大学大型計算機センターのACOS77-NEAC SYSTEM 700(以下S700と略す)を使用した。

2. テストしたライブラリー・プログラム

大阪大学大型計算機センターのライブラリー・プログラム²⁾にはセンター・ライブラリーとMATHLIB-6の2種類がある。その中で数値積分関係のものを次に示す。

センター・ライブラリー^{2), 3)}

- SINT 1 : シンプソン1/3 則
- SINT 2 : ルジャンドル・ガウス法(2点公式)
- SINT 4 : シンプソン1/3 則(関数表使用・分点数固定)
- TINTMR : 変形ロンバーグ法
- TINTL : ラゲール・ガウス法(半無限区間・分点数固定)
- TINTH : エルミート・ガウス法(無限区間・分点数固定)
- TDINTG : ルジャンドル・ガウス法(二重積分・分点数固定)
- TDINTR : 変形ロンバーグ法(二重積分)

MATHLIB-6⁴⁾

- SKGLD : ルジャンドル・ガウス法(3点公式)
- SKROMB : ロンバーグ法

SKSIMP : シンプソン1/3 則

SKTRPZ : 台形公式(分点数固定)

数値積分の精度テストとしては分点数を増加させ、その収束値を積分結果とする自動積分型の評価が重要であり、分点数が固定されているものはテスト対象から除外した。また、自動積分型の二重積分はTDINTRのみであり、TINTMRの応用であるから、テスト対象から除外した。したがって、上記の12個のサブ・プログラム中でテストの対象としたものは、1次元有限区間に対する自動積分型のSINT1, SINT2, TINTMR, SKGLD, SKROMB, SKSIMPの6個のサブ・プログラム(すべてサブルーチン形式)である。

3. テスト問題

テスト問題としては被積分関数の特性により、おとなしい関数、ピーク型の関数、振動型の関数、特異型の関数、不連続な関数の5つのタイプから合計16題をえらんだ。なお、これらの問題は、全国共同利用大型計算機センター間のプログラム・ライブラリー研究会が数値積分のテスト問題として採用したものである。

問題 1 5), 6) (おとなしい関数)

$$\int_0^1 a e^{-ax} dx = (1 - e^{-a}) \quad , \quad a = 1, 5, 25$$

問題 2 (おとなしい関数)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1 - k^2 \sin^2 x)^{1/2}} = K(k^2) \quad , \quad k^2 = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{15}{16}$$

ただし Kは第1種完全楕円積分

問題 3 (おとなしい関数)

$$\int_0^1 \frac{x^m}{m+1} dx = 1 \quad , \quad m = 2, 4, 10$$

問題 4 (おとなしい関数)

$$\int_0^1 (n+1) x^n e^{x^{n+1}} dx = e - 1 \quad , \quad n = 1, 2, 4$$

問題 5 5)~10) (ピーク型)

$$\int_{-1}^1 \frac{a}{x^2 + a^2} dx = 2 \tan^{-1} \frac{1}{a} \quad , \quad a = 1, \frac{1}{100}, \frac{1}{10000}$$

問題 6 (ピーク型)

$$\int_{-1}^1 \frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} dx = \frac{1-t^2}{t} \log \frac{1+t}{1-t} \quad , \quad t = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{15}{16}$$

問題 7 (ピーク型)

$$\int_{-1}^1 \frac{k dx}{(k^2+1) - (k^2-1)\cos\pi x} = 1, \quad k = \coth \frac{\pi\beta}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$$

問題 8 (振動型)

$$\int_{-1}^1 (n+1) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n T_k(x) \right) dx = 1, \quad n = 4, 16, 64$$

ただし $T_k(x)$ は k 次のチェビシェフ多項式

問題 9 (振動型)

$$\int_0^1 \lambda \sin \lambda x dx = 1 - \cos \lambda, \quad \lambda = 16, 32, 64$$

問題 10 (振動型)

$$\int_0^1 \frac{a^2 + p^2}{p} e^{-ax} \sin px dx = 1 - e^{-a}, \quad p = 8\pi, \quad a = 1, 5, 25$$

問題 11 5), 6), 8) ~ 11) (特異型)

$$\int_0^1 x^k \sqrt{x} dx = \frac{2}{2k+3}, \quad k = 1, 0, -1$$

問題 12 (特異型)

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^\alpha dx = \begin{cases} \pi/2 & \alpha = 1/2 \\ 2 & \alpha = 0 \\ \pi & \alpha = -1/2 \end{cases}$$

問題 13 12) (特異型)

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} + x^{-\alpha}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \frac{9}{20}, \frac{1}{4}$$

問題 14 (導関数が不連続)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 1, \quad f(x) = \begin{cases} n(nx-1) & -\frac{1}{n} \leq x \leq 0 \\ n(1-nx) & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}, \quad n = 3, 5, 17$$

問題 15 5), 6), 8), 10) (不連続型)

$$\int_0^1 [nx] dx = \frac{n-1}{2}, \quad n = 2, 5, 10 \quad \text{ただし } [] \text{ はガウス記号}$$

問題 16 6) (不連続型)

$$\int_0^1 f(x) dx = 2(e^{a/2} - 1), \quad f(x) = \begin{cases} a e^{ax} & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2}(1+e^{a/2}) & x = \frac{1}{2} \\ a e^{a(x-1/2)} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}, \quad a = \frac{1}{10}, 1, 2$$

4. テスト問題の実行

3. に示した問題を S700 により実行する場合の各サブ・プログラムの使用条件は可能なかぎり、同一条件とするべきであり、実行時間の点を考慮すれば、被積分関数の評価回数の最大値を同一とすることが好ましい。しかしながら、各サブ・プログラムの引数の制約から、関数の評価回数
の最大値のかわりに最大分割数又は最大分割回数を用いた。実際の使用条件を次に示す。

SINT 1, SINT 2 ³⁾ , SKGLD, SKSIMP ⁴⁾	
収束判定常数	$\epsilon = 10^{-5}$
最大分割数	4096 (= 2^{12})
TINTMR ²⁾ , SKROMB ⁴⁾	
収束判定常数	$\epsilon = 10^{-5}$
最大分割回数	12

上記の使用条件で最大分割回数とは積分区間の分割回数の最大値であり、テスト対象となった 6 個のサブ・プログラムでは、1 回の分割で分割数は 2 倍となり、分割数 = 2^{分割回数} の関係が成立するから、いずれのサブ・プログラムにおいても最大分割数は 2^{12} となる。

S700 を用いて実行した結果と真値との誤差を ϵ との大小関係で類別し、表 1 に示す。ただし、問題 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 16 の場合は解析解を倍精度計算したものを真値とした。また、問題 11, 12, 13 において、特異点における被積分関数の値は零とした。

表 1 の記号

- : 誤差 ϵ 以内
 - △ : 誤差 10ϵ 以内
 - × : 誤差 10ϵ 以上
- error : 最大分割数又は最大分割回数まで分割しても収束しない場合

実行結果の詳細（積分結果、誤差、実際の分割数など）については計算機の実出力結果を表 2 に示す。

表 2 の各欄の説明

ERROR INDICATOR

エラー・インディケータ（正常終了のときは零となる）。

NUMERICAL ANSWER

積分結果。

NUMERICAL DIFFERENCE

積分結果と前段の結果との差の絶対値。ただし TINTMR では少し内容が異なるが、

実用上の意味の差異はない。なお、SKROMBでは対応する出力がなく、空欄とする。

ABSOLUTE ERROR

絶対誤差、 $|\text{積分結果}-\text{真値}|$ 。

RELATIVE ERROR

相対誤差、 $|(\text{積分結果}-\text{真値}) / \text{真値}|$ 。

PARTITION

SKGLD, SKSIMP の場合 …………… 実際の分割数。

TINTMR, SKROMB の場合 …………… 実際の分割回数。

SINT1, SINT2 の場合 …………… 対応する出力がなく空欄。

FUNCTION EVALUATION

被積分関数の評価回数。

CPU TIME

S700 による実行時間(ミリ秒単位)。

表 1 数値解の誤差の類別

問 題	絶 对 誤 差						相 对 誤 差					
	SINT1	SINT2	TINTMR	SKGLD	SKROMB	SKSIMP	SINT1	SINT2	TINTMR	SKGLD	SKROMB	SKSIMP
1 $a = 1$ $a = 5$ $a = 25$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2 $k^2 = 1/2$ $k^2 = 3/4$ $k^2 = 15/16$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
3 $m = 2$ $m = 4$ $m = 10$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
4 $n = 1$ $n = 2$ $n = 4$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
5 $a = 1$ $a = 1/100$ $a = 1/10000$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error
6 $t = 1/2$ $t = 3/4$ $t = 15/16$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	error	○	○	○	error	○	error	○	○	○	error	○
7 $\beta = 1/2$ $\beta = 1/4$ $\beta = 1/16$	○	○	○	△	○	○	○	○	○	△	○	○
	○	○	○	△	○	○	○	○	○	△	○	○
	○	○	○	△	○	○	○	○	○	△	○	○
8 $n = 4$ $n = 16$ $n = 64$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	error	error	○	○	error	error	error	error	○	○	error	error
9 $\lambda = 16$ $\lambda = 32$ $\lambda = 64$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
10 $a = 1$ $a = 5$ $a = 25$	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○
	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○
	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○
11 $k = 1$ $k = 0$ $k = -1$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error
12 $\alpha = 1/2$ $\alpha = 0$ $\alpha = -1/2$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error
13 $\alpha = 1/2$ $\alpha = 9/20$ $\alpha = 1/4$	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error
	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error
	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error	error
14 $n = 3$ $n = 5$ $n = 17$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	error	×	○	△	error	○	error	×	○	△	error	○
15 $n = 2$ $n = 5$ $n = 10$	error	○	error	○	×	error	error	○	error	○	×	error
	error	○	error	○	error	error	error	○	error	○	error	error
	error	○	error	○	×	△	error	○	error	○	×	○
16 $a = 1/10$ $a = 1$ $a = 2$	○	○	○	○	△	○	○	○	○	○	×	○
	○	○	○	○	×	○	○	○	○	○	×	○
	○	○	○	○	×	○	○	○	○	○	×	○

表 2 実行結果

***** PROBLEM NUMBER ; 1 *****	SUBROUTINE NAME	ERROR INDICATOR	NUMERICAL ABSOLUTE ERROR	NUMERICAL DIFFERENCE	ABSOLUTE ERROR	RELATIVE ERROR	PARTITION	FUNCTION EVALUATION	CPU TIME (MSEC.)
* PARAMETER	SI*11	0	6.32136400E-01	8.70494E-07	5.0433E-08	7.9815E-08		17	2.2
* EXACT RESULT	SI*12	0	6.32136901E-01	3.23092E-09	2.5745E-07	6.9844E-07		12	1.7
* SI*15	SI*15	0	6.32136565E-01	3.2782E-07	1.5714E-07	2.0866E-09	2	9	1.5
* SI*16	SI*16	0	6.3213653E-01	2.9802E-07	5.0992E-09	2.6881E-09	2	9	1.5
* SI*17	SI*17	0	6.3213653E-01	7.9721E-07	2.7574E-09	9.0986E-09	3	17	2.3
* SI*18	SI*18	0	6.3213653E-01	7.9721E-07	2.7574E-09	9.0986E-09	3	17	2.3
***** PROBLEM NUMBER ; 2 *****	SI*11	0	9.9323254E-01	4.0944E-06	2.0813E-07	2.0956E-07		65	6.7
* EXACT RESULT	SI*12	0	9.93232601E-01	2.0443E-06	1.4203E-07	1.4279E-07		124	12.0
* SI*15	SI*15	0	9.93232648E-01	6.1413E-06	1.5236E-08	1.5236E-08	4	33	4.4
* SI*16	SI*16	0	9.93232677E-01	1.7583E-06	1.5747E-08	1.5747E-08	8	45	4.9
* SI*17	SI*17	0	9.93232674E-01	3.0245E-06	2.1887E-08	2.2032E-09	33	5.3	5.3
* SI*18	SI*18	0	9.93232674E-01	3.0245E-06	2.0813E-07	2.0956E-07	32	65	7.2
***** PROBLEM NUMBER ; 3 *****	SI*11	0	1.0000005E+00	7.5400E-06	5.0663E-07	5.0663E-07		257	24.5
* EXACT RESULT	SI*12	0	9.9999947E-01	5.2051E-06	1.4781E-07	1.4781E-07		308	47.1
* SI*15	SI*15	0	1.0000000E+00	2.0994E-07	1.2886E-07	1.3886E-07	6	129	14.4
* SI*16	SI*16	0	9.99999351E-01	6.5118E-06	1.4900E-07	1.4900E-07	32	189	18.0
* SI*17	SI*17	0	1.00000003E+00	7.5400E-06	3.6765E-08	2.9818E-08	7	129	15.5
* SI*18	SI*18	0	1.00000051E+00	7.5400E-06	5.0663E-07	5.0663E-07	128	257	24.2
***** PROBLEM NUMBER ; 4 *****	SI*11	0	1.85407467E+00	1.7831E-07	5.3467E-09	2.8637E-09		17	3.4
* EXACT RESULT	SI*12	0	1.85407469E+00	1.1924E-07	9.2345E-09	5.1334E-09		28	5.2
* SI*15	SI*15	0	1.85407468E+00	3.6505E-07	5.2345E-09	3.1334E-09	4	33	6.8
* SI*16	SI*16	0	1.85407467E+00	0.	3.3467E-09	5.6537E-09	8	45	8.1
* SI*17	SI*17	0	1.85407472E+00	1.7831E-07	3.3467E-09	5.1274E-09	5	35	7.2
* SI*18	SI*18	0	1.85407467E+00	1.7831E-07	5.3467E-09	2.8637E-09	8	17	3.5
***** PROBLEM NUMBER ; 5 *****	SI*11	0	2.15651366E+00	2.9802E-08	1.0402E-08	4.8236E-09		33	6.1
* EXACT RESULT	SI*12	0	2.15651363E+00	2.9802E-08	1.4000E-08	6.9961E-09		60	10.5
* SI*15	SI*15	0	2.15651363E+00	2.5779E-06	1.8400E-08	8.9961E-09	4	33	6.8
* SI*16	SI*16	0	2.15651363E+00	2.9504E-06	1.4000E-08	5.9961E-09	5	45	9.1
* SI*17	SI*17	0	2.15651360E+00	2.9802E-08	4.2035E-08	2.8168E-08	3	33	7.2
* SI*18	SI*18	0	2.15651366E+00	2.9802E-08	1.0402E-08	4.8236E-09	16	33	6.2
***** PROBLEM NUMBER ; 6 *****	SI*11	0	2.80120611E+00	2.9802E-08	2.7247E-08	9.7268E-09		65	11.4
* EXACT RESULT	SI*12	0	2.80120611E+00	2.9802E-08	2.7247E-08	9.7268E-09		124	20.9
* SI*15	SI*15	0	2.80120611E+00	5.4836E-06	9.5169E-08	3.2198E-08	5	65	12.5
* SI*16	SI*16	0	2.80120608E+00	5.4836E-06	2.5252E-09	9.1228E-10	16	93	16.0
* SI*17	SI*17	0	2.80120611E+00	2.9802E-08	1.9826E-08	5.2830E-09	6	65	13.1
* SI*18	SI*18	0	2.80120611E+00	2.9802E-08	2.7247E-08	9.7268E-09	32	65	11.4

表 2 実行結果 (続き)

***** PROBLEM NUMBER ; 3 *****									
SUBROUTINE NAME	ERROR INDICATOR	NUMERICAL ANSWER	NUMERICAL DIFFERENCE	ABSOLUTE ERROR	RELATIVE ERROR	PARTITION	FUNCTION EVALUATION	CPU TIME (SEC)	
PARAMETER	0	1.0000000E+00	0.0	0.0	0.0		19	1.4	
EXACT RESULT	0	1.0000000E+00	0.0	1.4901E-08	1.4901E-08	1	12	1.0	
PARAMETER	0	1.0000000E+00	0.0	0.0	0.0		5	1.4	
EXACT RESULT	0	1.0000000E+00	0.0	0.0	0.0	2	5	1.1	
PARAMETER	0	1.0000000E+00	0.0	0.0	0.0		5	0.9	
EXACT RESULT	0	1.0000000E+00	0.0	0.0	0.0	2	5	0.9	
***** PROBLEM NUMBER ; 3 *****									
SUBROUTINE NAME	ERROR INDICATOR	NUMERICAL ANSWER	NUMERICAL DIFFERENCE	ABSOLUTE ERROR	RELATIVE ERROR	PARTITION	FUNCTION EVALUATION	CPU TIME (SEC)	
PARAMETER	0	1.0000000E+00	0.0	6.258E-07	6.258E-07		33	2.3	
EXACT RESULT	0	9.9999995E-01	9.353E-06	0.0	0.0	2	60	1.5	
PARAMETER	0	1.0000000E+00	0.0	0.0	0.0		9	1.5	
EXACT RESULT	0	1.0000000E+00	1.4901E-08	1.4901E-08	1.4901E-08	3	9	1.7	
PARAMETER	0	1.0000000E+00	0.0	6.4073E-07	6.4073E-07	16	33	3.3	
EXACT RESULT	0	1.0000000E+00	9.3367E-06	0.0	0.0		33	3.3	
***** PROBLEM NUMBER ; 4 *****									
SUBROUTINE NAME	ERROR INDICATOR	NUMERICAL ANSWER	NUMERICAL DIFFERENCE	ABSOLUTE ERROR	RELATIVE ERROR	PARTITION	FUNCTION EVALUATION	CPU TIME (SEC)	
PARAMETER	0	1.0000000E+00	0.0	1.639E-07	1.639E-07		129	10.0	
EXACT RESULT	0	9.9999991E-01	7.6397E-09	0.0	0.0	2	252	30.0	
PARAMETER	0	1.0000000E+00	0.0	3.9603E-08	3.9603E-08		33	1.2	
EXACT RESULT	0	1.0000000E+00	6.4588E-09	1.4901E-08	1.4901E-08	4	93	1.2	
PARAMETER	0	1.0000000E+00	0.0	1.4901E-08	1.4901E-08	5	33	1.4	
EXACT RESULT	0	1.0000000E+00	2.4587E-06	1.4901E-08	1.4901E-08	64	129	15.9	
***** PROBLEM NUMBER ; 4 *****									
SUBROUTINE NAME	ERROR INDICATOR	NUMERICAL ANSWER	NUMERICAL DIFFERENCE	ABSOLUTE ERROR	RELATIVE ERROR	PARTITION	FUNCTION EVALUATION	CPU TIME (SEC)	
PARAMETER	0	1.7182819E+00	9.8438E-07	6.463E-08	3.8480E-08		62	8.3	
EXACT RESULT	0	1.7182818E+00	9.258E-07	2.274E-08	1.3230E-08		127	19.3	
PARAMETER	0	1.7182819E+00	0.0	8.66E-08	3.869E-08	3	45	2.7	
EXACT RESULT	0	1.7182818E+00	4.1723E-07	0.1386E-08	3.2912E-08	4	17	6.4	
PARAMETER	0	1.7182819E+00	0.0	1.760E-08	1.259E-08		33	4.9	
EXACT RESULT	0	1.7182822E+00	1.533E-05	1.0350E-06	6.0237E-07	16	33	4.9	
PARAMETER	0	1.7182822E+00	0.0	5.4350E-07	3.1619E-07		63	10.1	
EXACT RESULT	0	1.7182821E+00	7.6380E-06	3.4350E-07	3.1619E-07		127	17.6	
PARAMETER	0	1.7182819E+00	0.0	1.760E-08	1.259E-08		33	2.9	
EXACT RESULT	0	1.7182818E+00	2.135E-06	0.160E-08	1.2664E-08	4	33	6.9	
PARAMETER	0	1.7182819E+00	0.0	1.5703E-07	9.1402E-08		33	6.9	
EXACT RESULT	0	1.7182818E+00	9.8199E-06	2.1760E-08	1.2664E-08	5	33	6.9	
PARAMETER	0	1.7182822E+00	7.6380E-06	5.4350E-07	3.1619E-07	32	63	10.1	
EXACT RESULT	0	1.7182821E+00	5.1261E-06	3.7939E-07	2.2079E-07		129	20.2	
PARAMETER	0	1.7182819E+00	0.0	3.7939E-07	1.0007E-07		232	30.7	
EXACT RESULT	0	1.7182818E+00	3.442E-06	8.0428E-09	4.6806E-09	5	63	11.1	
PARAMETER	0	1.7182819E+00	0.0	6.0351E-06	4.801E-06	16	93	13.3	
EXACT RESULT	0	1.7182817E+00	6.0351E-06	2.2548E-08	4.801E-06	6	63	12.5	
PARAMETER	0	1.7182819E+00	0.0	3.7939E-07	1.0007E-07	64	129	20.2	
EXACT RESULT	0	1.7182822E+00	5.1261E-06	3.7939E-07	2.2079E-07		129	20.2	

表 2 実行結果 (続き)

***** PROBLEM NUMBER ; 5 *****	SUBROUTINE NAME	ERROR INDICATOR	NUMERICAL ASSWER	NUMERICAL DIFFERENCE	ABSOLUTE ERROR	RELATIVE ERROR	PARTITION	FUNCTION EVALUATION	CPU TIME (MSEC)
*****	PARAMETER	0	1.57079633E+00	7.1504E-08	9.9209E-10	6.3159E-10	33	33	1.9
*****	EXACT RESULT	0	1.57079633E+00	8.533E-06	5.831E-08	3.7314E-08	28	28	1.7
*****	SKGLD	0	1.57079633E+00	5.1707E-06	1.3609E-08	8.8548E-09	33	33	2.7
*****	SKQDR	0	1.57079633E+00	7.5016E-07	9.2309E-10	6.3159E-10	4	4	2.5
*****	SKSTP	0	1.57079633E+00	1.1721E-05	7.5498E-08	2.7828E-08	5	33	3.0
*****	SKSTP	0	1.57079633E+00	1.1721E-05	7.5498E-08	2.7828E-08	8	17	1.4
*****	PARAMETER	0	3.12149324E+00	8.9407E-08	8.3273E-08	2.6677E-08	2049	2049	181.1
*****	EXACT RESULT	0	3.12149324E+00	5.844E-07	8.3273E-08	2.6677E-08	4092	4092	151.7
*****	SKGLD	0	3.12149324E+00	8.2917E-06	7.0912E-07	2.2517E-07	2046	2046	97.7
*****	SKQDR	0	3.12149324E+00	1.4701E-07	3.3705E-08	7.5827E-09	1024	6141	233.2
*****	SKSTP	0	3.12149324E+00	8.9407E-08	8.3273E-08	2.6677E-08	11	2049	1.5
*****	SKSTP	0	3.12149324E+00	8.9407E-08	8.3273E-08	2.6677E-08	1024	2049	77.1
*****	PARAMETER	0	4.01798111E+00	2.8823E+00	8.2599E-01	2.7604E-01	4097	4097	141.3
*****	EXACT RESULT	1	3.07659615E+00	8.5193E-01	6.5976E-02	2.0786E-02	16380	16380	630.9
*****	SKGLD	1	2.9505775E+00	9.7068E-01	1.9093E-01	2.0786E-02	8193	8193	380.8
*****	SKQDR	3	3.16792320E+00	9.8759E-02	6.5976E-02	2.0786E-02	49149	49149	1877.4
*****	SKSTP	3	3.16792320E+00	6.2874E-01	2.874E-01	5.1015E-01	12	4097	221.3
*****	SKSTP	3	3.16792320E+00	1.6699E-02	1.2539E-01	3.9461E-02	8192	16385	621.8
***** PROBLEM NUMBER ; 6 *****	SUBROUTINE NAME	ERROR INDICATOR	NUMERICAL ASSWER	NUMERICAL DIFFERENCE	ABSOLUTE ERROR	RELATIVE ERROR	PARTITION	FUNCTION EVALUATION	CPU TIME (MSEC)
*****	PARAMETER	0	1.6679180E+00	5.5134E-06	3.7248E-07	2.2603E-07	129	129	10.8
*****	EXACT RESULT	0	1.6679180E+00	3.2104E-06	2.5257E-07	1.5367E-07	252	252	17.4
*****	SKGLD	0	1.6679180E+00	1.6901E-07	1.4850E-08	9.0114E-09	126	126	8.6
*****	SKQDR	0	1.6679180E+00	5.0564E-07	2.9854E-08	1.8116E-08	6	189	8.1
*****	SKSTP	0	1.6679180E+00	1.6679E-07	1.4850E-08	9.0114E-09	32	129	8.7
*****	SKSTP	0	1.6679180E+00	5.5134E-06	3.7248E-07	2.2603E-07	64	129	5.7
*****	PARAMETER	0	1.13511430E+00	7.0035E-07	4.3655E-08	3.8659E-08	1025	1025	45.2
*****	EXACT RESULT	0	1.13511376E+00	6.8843E-06	4.9270E-07	2.3343E-07	1020	1020	39.8
*****	SKGLD	0	1.13511425E+00	8.0947E-07	1.3551E-08	1.2204E-08	513	513	28.6
*****	SKQDR	0	1.13511451E+00	1.7434E-06	4.5752E-08	4.0306E-08	128	745	58.8
*****	SKSTP	0	1.13511451E+00	1.0184E-09	1.0184E-09	9.2353E-10	9	513	20.9
*****	SKSTP	0	1.13511507E+00	1.0401E-05	7.4601E-07	6.5345E-07	256	513	20.6
*****	PARAMETER	1	4.43526480E-01	6.7167E-05	5.8086E-06	1.3309E-05	4097	4097	146.8
*****	EXACT RESULT	0	4.43526491E-01	3.6620E-07	1.8929E-07	4.2767E-07	16380	16380	633.2
*****	SKGLD	0	4.43526503E-01	6.9260E-07	1.1872E-08	2.6765E-08	18193	18193	387.1
*****	SKQDR	0	4.43526556E-01	1.1999E-06	2.5381E-08	5.7222E-08	2048	12285	469.7
*****	SKSTP	3	4.43527393E-01	7.1223E-07	7.1223E-07	1.6557E-08	12	4097	225.4
*****	SKSTP	0	4.43526593E-01	5.9498E-07	1.1872E-08	2.6765E-08	8192	16385	623.8

表 2 実行結果 (続き)

***** PROBLEM NUMBER ; 7 *****									
SUBROUTINE	ERROR	NUMERICAL	NUMERICAL	ABSOLUTE	RELATIVE	PARTITION	FUNCTION	CPU TIME	
NAME	INDICATOR	ANSWER	DIFFERENCE	ERROR	ERROR		EVALUATION	(MSEC.)	
* PARAMETER									
* NAME									
* SINT1	0	1.00000001E+00	2.3320E-06	1.4901E-08	1.4901E-08		33	6.7	
* SINT2	0	1.00000000E+00	1.6838E-06	0.	0.		60	11.5	
* TINT4R	0	1.00000001E+00	1.4864E-06	1.4901E-08	1.4901E-08	5	65	13.7	
* SKGLD	0	9.99919824E-01	9.0152E-07	8.0176E-05	8.0176E-05	4	21	4.5	
* SKRMD	0	1.00000003E+00	2.9802E-08	2.9802E-08	2.9802E-08	6	65	14.3	
* SKSLP	0	1.00000001E+00	2.3320E-06	1.4901E-08	1.4901E-08	16	33	6.8	

* SUBROUTINE	ERROR	NUMERICAL	NUMERICAL	ABSOLUTE	RELATIVE	PARTITION	FUNCTION	CPU TIME	
NAME	INDICATOR	ANSWER	DIFFERENCE	ERROR	ERROR		EVALUATION	(MSEC.)	
* SINT1	0	1.00000000E+00	2.3246E-06	0.	0.		65	12.5	
* SINT2	0	1.00000001E+00	1.6540E-06	1.4901E-08	1.4901E-08		124	23.1	
* TINT4R	0	1.00000001E+00	1.5125E-06	1.4901E-08	1.4901E-08	6	129	26.0	
* SKGLD	0	9.99919840E-01	9.1642E-07	8.0161E-05	8.0161E-05	8	45	8.9	
* SKRMD	0	1.00000001E+00	2.9802E-08	2.9802E-08	2.9802E-08	7	129	27.1	
* SKSLP	0	1.00000000E+00	2.3171E-06	0.	0.	32	65	12.6	

* SUBROUTINE	ERROR	NUMERICAL	NUMERICAL	ABSOLUTE	RELATIVE	PARTITION	FUNCTION	CPU TIME	
NAME	INDICATOR	ANSWER	DIFFERENCE	ERROR	ERROR		EVALUATION	(MSEC.)	
* SINT1	0	1.00000000E+00	2.3171E-06	0.	0.		257	47.9	
* SINT2	0	9.99999978E-01	1.6913E-06	2.2352E-08	2.2352E-08		508	92.8	
* TINT4R	0	1.00000000E+00	1.4938E-06	0.	0.	8	513	100.0	
* SKGLD	0	9.99919809E-01	8.7172E-07	8.0191E-05	8.0191E-05	32	189	34.9	
* SKRMD	0	1.00000000E+00	2.9802E-08	2.9802E-08	2.9802E-08	9	513	103.3	
* SKSLP	0	1.00000000E+00	2.3171E-06	0.	0.	128	257	47.5	
***** PROBLEM NUMBER ; 8 *****									
* SUBROUTINE	ERROR	NUMERICAL	NUMERICAL	ABSOLUTE	RELATIVE	PARTITION	FUNCTION	CPU TIME	
NAME	INDICATOR	ANSWER	DIFFERENCE	ERROR	ERROR		EVALUATION	(MSEC.)	
* SINT1	0	1.0000003E+00	9.5367E-06	6.2585E-07	6.2585E-07		129	13.4	
* SINT2	0	9.9999568E-01	6.3624E-06	4.3213E-07	4.3213E-07		252	25.1	
* TINT4R	0	9.9999962E-01	3.7253E-08	3.7253E-08	3.7253E-08	2	9	1.7	
* SKGLD	0	9.9999948E-01	1.1176E-07	5.2154E-08	5.2154E-08	2	9	1.5	
* SKRMD	0	1.0000001E+00	9.5367E-06	1.4901E-08	1.4901E-08	3	9	1.9	
* SKSLP	0	1.00000064E+00	9.5367E-06	6.4075E-07	6.4075E-07	64	129	13.2	

* SUBROUTINE	ERROR	NUMERICAL	NUMERICAL	ABSOLUTE	RELATIVE	PARTITION	FUNCTION	CPU TIME	
NAME	INDICATOR	ANSWER	DIFFERENCE	ERROR	ERROR		EVALUATION	(MSEC.)	
* SINT1	0	1.00000000E+00	4.7535E-06	2.9802E-07	2.9802E-07		2049	591.5	
* SINT2	0	9.9999680E-01	3.0622E-06	3.2037E-07	3.2037E-07		4092	1177.5	
* TINT4R	0	9.9999985E-01	1.4901E-08	1.4901E-08	1.4901E-08	7	257	77.7	
* SKGLD	0	9.9999962E-01	6.4820E-07	3.7253E-08	3.7253E-08	256	1533	440.5	
* SKRMD	0	1.00000006E+00	5.9605E-08	5.9605E-08	5.9605E-08	8	257	79.7	
* SKSLP	0	1.00000030E+00	4.7535E-06	2.9802E-07	2.9802E-07	1024	2049	588.6	

* SUBROUTINE	ERROR	NUMERICAL	NUMERICAL	ABSOLUTE	RELATIVE	PARTITION	FUNCTION	CPU TIME	
NAME	INDICATOR	ANSWER	DIFFERENCE	ERROR	ERROR		EVALUATION	(MSEC.)	
* SINT1	1	1.00004976E+00	1.4026E-02	9.4976E-04	9.4976E-04		4097	4297.6	
* SINT2	0	9.99961913E-01	5.9631E-04	3.8087E-05	3.8087E-05		16380	17100.0	
* TINT4R	0	1.00000004E+00	6.6683E-07	4.4703E-08	4.4703E-08	12	8193	8628.4	
* SKGLD	0	1.00000000E+00	8.9407E-08	0.	0.	4096	24573	25066.7	
* SKRMD	3	9.99999426E-01	5.7369E-07	5.7369E-07	5.7369E-07	12	4097	4341.7	
* SKSLP	3	1.00000432E+00	5.5224E-05	4.3213E-06	4.3213E-06	8192	16385	17100.4	

表 2 実行結果 (続き)

PROBLEM NUMBER	SUBROUTINE	ERROR INDICATOR	NUMERICAL ANSWER	NUMERICAL DIFFERENCE	ABSOLUTE ERROR	RELATIVE ERROR	PARTITION	FUNCTION EVALUATION	CPU TIME (MSEC.)
9	*****								
PARAMETER	*****								
EXACT RESULT	LAMBDA = 16		1.95765969E+01	2.44895E-06	2.1125E-07	1.0791E-07		257	28.6

EXACT RESULT	LAMBDA = 32		1.95765969E+01	1.6591E-06	1.6125E-07	8.2384E-08		508	54.2

EXACT RESULT	LAMBDA = 64		1.95765969E+01	2.5532E-07	3.2435E-08	1.6568E-08	A	129	16.2

EXACT RESULT	LAMBDA = 128		1.95765969E+01	1.0133E-06	2.6325E-09	1.3447E-09	32	189	21.2

EXACT RESULT	LAMBDA = 256		1.95765969E+01	2.5034E-06	5.2232E-08	3.1792E-08	7	129	17.3

EXACT RESULT	LAMBDA = 512		1.95765969E+01	2.5034E-06	2.1125E-07	1.0791E-07	128	257	27.8

10	*****								
PARAMETER	*****								
EXACT RESULT	LAMBDA = 32		1.65776640E-01	3.4677E-06	3.0429E-07	1.8556E-06		257	28.2

EXACT RESULT	LAMBDA = 64		1.65776640E-01	2.9501E-06	2.5394E-08	1.5318E-07		508	54.8

EXACT RESULT	LAMBDA = 128		1.65776640E-01	3.6184E-08	1.9310E-08	1.1648E-07	7	257	31.0

EXACT RESULT	LAMBDA = 256		1.65776640E-01	8.1795E-08	4.9112E-08	2.9625E-07	64	381	41.4

EXACT RESULT	LAMBDA = 512		1.65776640E-01	2.0362E-07	8.4502E-08	5.0974E-07	8	257	33.0

EXACT RESULT	LAMBDA = 1024		1.65776640E-01	8.4937E-07	9.7541E-08	5.8859E-07	256	513	55.1

11	*****								
PARAMETER	*****								
EXACT RESULT	LAMBDA = 64		6.08142935E-01	8.4192E-07	1.6517E-07	2.7160E-07		1025	110.4

EXACT RESULT	LAMBDA = 128		6.08142935E-01	8.3592E-06	2.2246E-07	3.6548E-07		1020	108.6

EXACT RESULT	LAMBDA = 256		6.08142935E-01	1.1544E-07	4.5960E-08	7.5574E-08	A	513	60.8

EXACT RESULT	LAMBDA = 512		6.08142935E-01	3.2737E-07	1.7262E-07	2.8353E-07	128	765	81.2

EXACT RESULT	LAMBDA = 1024		6.08142935E-01	1.9497E-07	1.6260E-07	3.2040E-07	9	513	64.1

EXACT RESULT	LAMBDA = 2048		6.08142935E-01	8.4937E-07	1.6517E-07	2.7160E-07	512	1025	108.5

12	*****								
PARAMETER	*****								
EXACT RESULT	LAMBDA = 1		1.30681190E-07	1.3068E-07	6.3212E-01	1.0000E+00		5	1.4

EXACT RESULT	LAMBDA = 2		6.37120365E-01	3.2445E-06	1.9541E-07	3.0914E-07		508	90.6

EXACT RESULT	LAMBDA = 4		1.30681190E-01	2.5972E-07	6.3212E-01	1.0000E+00	1	5	1.6

EXACT RESULT	LAMBDA = 8		6.37120365E-01	4.9023E-06	1.5241E-07	2.0847E-07	32	189	34.1

EXACT RESULT	LAMBDA = 16		1.30681190E-01	1.0524E-07	6.3212E-01	1.0000E+00	1	5	1.2

EXACT RESULT	LAMBDA = 32		6.37120365E-01	4.9397E-06	3.7083E-07	5.8664E-07	128	257	46.4

13	*****								
PARAMETER	*****								
EXACT RESULT	LAMBDA = 5		3.20197004E-09	3.2020E-09	9.9326E-01	1.0000E+00		5	1.4

EXACT RESULT	LAMBDA = 10		9.93262181E-01	4.7682E-06	2.3688E-07	2.4050E-07		508	90.2

EXACT RESULT	LAMBDA = 20		3.20197004E-01	8.6116E-09	9.9326E-01	1.0000E+00	1	5	1.6

EXACT RESULT	LAMBDA = 40		9.93262181E-01	4.7207E-06	6.6590E-08	6.7042E-08	32	189	33.9

EXACT RESULT	LAMBDA = 80		3.20197004E-01	1.8135E-06	9.9326E-01	1.0000E+00	1	5	1.2

EXACT RESULT	LAMBDA = 160		9.93262181E-01	7.0482E-06	4.9127E-07	4.9461E-07	128	257	46.2

14	*****								
PARAMETER	*****								
EXACT RESULT	LAMBDA = 25		1.27921965E-10	1.2792E-10	1.0000E+00	1.0000E+00		5	1.4

EXACT RESULT	LAMBDA = 50		1.00000016E+00	1.1921E-06	1.0000E-07	1.0000E+00		1020	180.1

EXACT RESULT	LAMBDA = 100		1.27921965E-10	1.2494E-10	1.0000E+00	1.0000E+00	1	5	1.6

EXACT RESULT	LAMBDA = 200		9.99999948E-01	8.3447E-07	5.2140E-08	5.2140E-08	64	381	67.5

EXACT RESULT	LAMBDA = 400		9.99999973E-01	1.9372E-06	1.0000E+00	1.0000E+00	1	5	1.2

EXACT RESULT	LAMBDA = 800		9.99999973E-01	1.9372E-06	1.2665E-07	1.2665E-07	256	513	91.1

表 2 実行結果 (続き)

***** PROBLEM NUMBER ; 11 *****	SUBROUTINE NAME	ERROR INDICATOR	NUMERICAL ANSWER	NUMERICAL DIFFERENCE	ABSOLUTE ERROR	RELATIVE ERROR	PARTITION	FUNCTION EVALUATION	CPU TIME (MSEC.)
*****	SINT1	0	4.00000431E-01	1.9968E-06	4.3064E-07	1.0760E-06		65	7.8
*****	SINT2	0	3.99998728E-01	5.9158E-06	3.2719E-06	3.1793E-06		60	7.2
*****	TINT#	0	4.00001530E-01	7.0911E-06	1.5296E-06	3.8240E-06	4	33	4.9
*****	SKGLO	0	3.99999816E-01	8.5309E-07	1.8403E-07	4.6007E-07	16	33	10.9
*****	SKP0#	0	4.00001522E-01	1.9968E-06	1.5222E-06	3.8054E-06	5	33	5.3
*****	SKS1#P	0	4.00000434E-01	1.9968E-06	4.3437E-07	1.0859E-06	32	65	7.8
*****	SUBROUTINE NAME	ERROR INDICATOR	NUMERICAL ANSWER	NUMERICAL DIFFERENCE	ABSOLUTE ERROR	RELATIVE ERROR	PARTITION	FUNCTION EVALUATION	CPU TIME (MSEC.)
*****	SINT1	0	6.66664183E-01	4.5151E-06	2.4833E-06	3.7253E-06		1025	107.4
*****	SINT2	0	6.6671694E-01	9.2164E-06	5.0267E-06	7.5400E-06		508	52.7
*****	TINT#	0	6.66684586E-01	3.8221E-06	2.0812E-06	3.1218E-06	9	1025	116.3
*****	SKGLO	0	6.6668430E-01	3.1590E-06	1.7833E-06	2.6450E-06	128	765	78.9
*****	SKP0#	0	6.66644563E-01	4.5074E-06	2.1033E-06	3.1553E-06	10	1025	123.8
*****	SKS1#P	0	6.66664183E-01	4.5074E-06	2.4833E-06	3.7253E-06	512	1025	105.4
*****	SUBROUTINE NAME	ERROR INDICATOR	NUMERICAL ANSWER	NUMERICAL DIFFERENCE	ABSOLUTE ERROR	RELATIVE ERROR	PARTITION	FUNCTION EVALUATION	CPU TIME (MSEC.)
*****	SINT1	1	1.98033245E+00	8.1465E-03	1.9668E-02	9.8338E-03		4097	510.3
*****	SINT2	1	1.99453728E+00	2.2627E-03	5.4627E-03	2.7314E-03		16380	2018.3
*****	TINT#	3	1.98659498E+00	5.5525E-03	1.3405E-02	6.7025E-03	12	8193	1073.7
*****	SKGLO	3	1.99724666E+00	1.1396E-03	2.7533E-03	1.3767E-03	8192	49149	6029.0
*****	SKP0#	3	1.98104238E+00	1.8958E-02	9.4788E-03	4.7888E-03	12	4097	568.0
*****	SKS1#P	3	1.99016593E+00	4.0731E-03	9.8341E-03	4.9170E-03	8192	16385	2006.0
*****	SUBROUTINE NAME	ERROR INDICATOR	NUMERICAL ANSWER	NUMERICAL DIFFERENCE	ABSOLUTE ERROR	RELATIVE ERROR	PARTITION	FUNCTION EVALUATION	CPU TIME (MSEC.)
*****	SINT1	0	1.57079394E+00	4.5594E-06	2.3852E-06	1.5183E-06		4097	356.3
*****	SINT2	0	1.57080150E+00	9.1495E-06	5.1697E-06	3.2911E-06		2044	175.3
*****	TINT#	0	1.57079427E+00	3.8296E-06	2.0574E-06	1.3098E-06	11	4097	387.1
*****	SKGLO	0	1.57080128E+00	8.9407E-06	4.9462E-06	3.1484E-06	256	1533	131.1
*****	SKP0#	0	1.57079434E+00	1.2904E-05	1.9828E-06	1.2623E-06	12	4097	416.4
*****	SKS1#P	0	1.57078938E+00	1.2904E-05	6.9449E-06	4.4213E-06	1024	2049	174.6
*****	SUBROUTINE NAME	ERROR INDICATOR	NUMERICAL ANSWER	NUMERICAL DIFFERENCE	ABSOLUTE ERROR	RELATIVE ERROR	PARTITION	FUNCTION EVALUATION	CPU TIME (MSEC.)
*****	SINT1	0	2.00000000E+00	0.	0.	0.		9	0.8
*****	SINT2	0	2.00000000E+00	0.	0.	0.		12	0.9
*****	TINT#	0	2.00000000E+00	0.	0.	0.	1	5	0.8
*****	SKGLO	0	2.00000000E+00	0.	0.	0.	2	9	0.9
*****	SKP0#	0	2.00000000E+00	0.	0.	0.	1	3	0.8
*****	SKS1#P	0	2.00000000E+00	0.	0.	0.	2	5	0.7
*****	SUBROUTINE NAME	ERROR INDICATOR	NUMERICAL ANSWER	NUMERICAL DIFFERENCE	ABSOLUTE ERROR	RELATIVE ERROR	PARTITION	FUNCTION EVALUATION	CPU TIME (MSEC.)
*****	SINT1	1	3.10225701E+00	1.46295E-02	3.9366E-02	1.2521E-02		4097	435.4
*****	SINT2	1	3.13066240E+00	4.5265E-03	1.0925E-02	3.4776E-03		16380	1722.6
*****	TINT#	3	3.11478246E+00	1.1105E-02	2.6810E-02	8.5339E-03	12	8193	931.0
*****	SKGLO	3	3.13608798E+00	2.2815E-03	5.8047E-03	1.7522E-03	8192	49149	5141.8
*****	SKP0#	3	3.10327689E+00	1.4663E-02	3.7916E-02	1.2069E-02	12	4097	498.2
*****	SKS1#P	3	3.12172476E+00	8.1463E-03	1.9668E-02	6.2603E-03	8192	16385	1712.8

表 2 実行結果 (続き)

**** PROBLEM NUMBER ; 13 ****									
SUBROUTINE	ERROR	NUMERICAL	NUMERICAL	NUMERICAL	ABSOLUTE	RELATIVE	PARTITION	FUNCTION	CPU TIME
NAME	INDICATOR	ANSWER	DIFFERENCE	ERROR	ERROR	ERROR	EVALUATION	EVALUATION	(MSEC.)
PARAMETER	*	3.10225855E+03	1.6292E-02	1.6292E-02	3.9334E-02	1.2520E-02	4097	4097	807.9
; ALPHA = 1/2	*	3.13046739E+03	4.5267E-03	4.5267E-03	1.0725E-02	3.4776E-03	16380	16380	3203.3
EXACT RESULT	*	3.11478281E+03	1.1105E-02	1.1105E-02	2.6810E-02	8.5338E-03	12	8193	1667.1
; 3.14159265E+00	*	3.13608658E+03	2.2799E-03	2.2799E-03	5.5061E-03	1.7266E-03	8192	49149	9604.3
SKGLD	3	3.10336784E+00			3.7914E-02	1.2068E-02	12	4097	863.8
SKRMP	3	3.12192500E+00			1.9668E-02	6.2604E-03	8192	16385	3193.2
SKSTMP	3								
**** PROBLEM NUMBER ; 14 ****									
SUBROUTINE	ERROR	NUMERICAL	NUMERICAL	NUMERICAL	ABSOLUTE	RELATIVE	PARTITION	FUNCTION	CPU TIME
NAME	INDICATOR	ANSWER	DIFFERENCE	ERROR	ERROR	ERROR	EVALUATION	EVALUATION	(MSEC.)
PARAMETER	*	3.13467255E+00	1.7942E-02	1.7942E-02	4.6080E-02	1.4487E-02	4097	4097	806.6
; ALPHA = 9/20	*	3.16681308E+03	5.3601E-03	5.3601E-03	1.5940E-02	4.3826E-03	16380	16380	3206.4
EXACT RESULT	*	3.14859189E+03	1.2453E-02	1.2453E-02	3.2061E-02	1.0080E-02	12	8193	1666.3
; 3.18075100E+00	*	3.17340979E+03	2.8069E-03	2.8069E-03	7.3432E-03	2.3086E-03	8192	49149	9604.9
SKGLD	3	3.13623840E+00			4.4515E-02	1.3995E-02	12	4097	864.8
SKRMP	3	3.15683386E+00			2.35919E-02	7.5700E-03	8192	16385	3204.1
SKSTMP	3								
**** PROBLEM NUMBER ; 14 ****									
SUBROUTINE	ERROR	NUMERICAL	NUMERICAL	NUMERICAL	ABSOLUTE	RELATIVE	PARTITION	FUNCTION	CPU TIME
NAME	INDICATOR	ANSWER	DIFFERENCE	ERROR	ERROR	ERROR	EVALUATION	EVALUATION	(MSEC.)
PARAMETER	*	4.03862977E+00	7.7086E-02	7.7086E-02	4.0425E-01	9.0989E-02	4097	4097	810.0
; ALPHA = 1/4	*	4.21788615E+03	4.2631E-02	4.2631E-02	2.500E-02	5.0442E-02	16380	16380	3211.5
EXACT RESULT	*	4.10890067E+03	6.3528E-02	6.3528E-02	3.3398E-01	7.5172E-02	12	8193	1679.5
; 4.44288294E+00	*	4.28299952E+03	3.0274E-02	3.0274E-02	1.5988E-01	3.5986E-02	8192	49149	9625.1
SKGLD	3	4.04537278E+03			3.9751E-01	8.9471E-02	12	4097	866.6
SKRMP	3	4.15746474E+00			2.8547E-01	6.4242E-02	8192	16385	3199.9
SKSTMP	3								
**** PROBLEM NUMBER ; 14 ****									
SUBROUTINE	ERROR	NUMERICAL	NUMERICAL	NUMERICAL	ABSOLUTE	RELATIVE	PARTITION	FUNCTION	CPU TIME
NAME	INDICATOR	ANSWER	DIFFERENCE	ERROR	ERROR	ERROR	EVALUATION	EVALUATION	(MSEC.)
PARAMETER	*	1.00000000E+00	0.	0.	0.	0.	9	9	0.9
; N = 3	*	1.00000149E+03	4.5002E-06	4.5002E-06	1.4901E-06	1.4901E-06	2044	2044	78.1
EXACT RESULT	*	1.00000000E+00	1.4701E-08	1.4701E-08	0.	0.	5	65	4.9
; 1.00000000E+00	*	1.00000158E+03	4.7257E-06	4.7257E-06	1.5795E-06	1.5795E-06	512	3069	115.4
SKGLD	0	1.00000000E+00			0.	0.	6	65	5.0
SKRMP	0	1.00000000E+00			0.	0.	4	9	1.0
SKSTMP	0	1.00000000E+00							
**** PROBLEM NUMBER ; 14 ****									
SUBROUTINE	ERROR	NUMERICAL	NUMERICAL	NUMERICAL	ABSOLUTE	RELATIVE	PARTITION	FUNCTION	CPU TIME
NAME	INDICATOR	ANSWER	DIFFERENCE	ERROR	ERROR	ERROR	EVALUATION	EVALUATION	(MSEC.)
PARAMETER	*	1.00000000E+00	0.	0.	6.2585E-07	6.2585E-07	4097	4097	156.5
; N = 5	*	9.99999466E-01	3.6755E-06	3.6755E-06	9.5367E-07	9.5367E-07	8188	8188	301.1
EXACT RESULT	*	1.00000000E+00	4.6939E-06	4.6939E-06	9.2387E-07	9.2387E-07	11	4097	188.3
; 1.00000000E+00	*	1.00000325E+03	3.8296E-06	3.8296E-06	3.2485E-06	3.2485E-06	512	3069	113.5
SKGLD	0	1.00000000E+00			9.2387E-07	9.2387E-07	12	4097	218.2
SKRMP	0	1.00000000E+00			6.4075E-07	6.4075E-07	2044	4097	150.3
SKSTMP	0	1.00000000E+00							
**** PROBLEM NUMBER ; 14 ****									
SUBROUTINE	ERROR	NUMERICAL	NUMERICAL	NUMERICAL	ABSOLUTE	RELATIVE	PARTITION	FUNCTION	CPU TIME
NAME	INDICATOR	ANSWER	DIFFERENCE	ERROR	ERROR	ERROR	EVALUATION	EVALUATION	(MSEC.)
PARAMETER	*	1.00000435E+03	2.1622E-05	2.1622E-05	6.3479E-06	6.3479E-06	12	4097	152.7
; N = 17	*	0.	0.	0.	1.0000E+00	1.0000E+00	12	12	1.0
EXACT RESULT	*	9.99994621E-01	9.8832E-06	9.8832E-06	5.3793E-06	5.3793E-06	12	8193	368.1
; 1.00000000E+00	*	9.9998774E-01	3.0324E-06	3.0324E-06	1.2226E-05	1.2226E-05	1024	6141	221.5
SKGLD	3	1.00000450E+03			4.5002E-06	4.5002E-06	12	4097	212.9
SKRMP	0	1.00000028E+00			4.7311E-06	4.7311E-06	8192	16385	580.5
SKSTMP	0								

表 2 実行結果 (続き)

***** PROBLEM NUMBER ; 15 *****									
SUBROUTINE	ERROR	NUMERICAL	NUMERICAL	NUMERICAL	ABSOLUTE	RELATIVE	PARTITION	FUNCTION	CPU TIME
NAME	INDICATOR	ANSWER	DIFFERENCE	DIFFERENCE	ERROR	ERROR	EVALUATION	EVALUATION	(MSEC.)*
PARAMETER									
j, N = 2	0	5.00182728E-01	0.6278E-04	0.6278E-04	3.2552E-04	3.2552E-04	4097	4097	144.9
EXACT RESULT									
j, 5.00000000E-01	1	2.00000000E-01	7.4357E-05	7.4357E-05	1.4871E-04	1.4871E-04	12	12	1.0
j, 1.00000000E-01	1	3.00000000E-01	0.	0.	0.	0.	4	21	346.5
j, 1.00000000E-01	0	1.00000000E-01	0.	0.	0.	0.	1	3	0.8
j, 5.00040688E+01	3	5.00040688E+01	4.0693E-05	4.0693E-05	8.1337E-05	8.1337E-05	8192	16385	549.8
PARAMETER									
j, N = 5	0	2.00000000E+00	8.1330E-05	8.1330E-05	4.0640E-05	4.0640E-05	4097	4097	146.0
EXACT RESULT									
j, 2.00000000E+00	0	2.00000000E+00	3.7178E-05	3.7178E-05	1.8597E-05	1.8597E-05	12	12	1.0
j, 1.00000000E+00	1	1.00000000E+00	0.	0.	0.	0.	2	9	348.3
j, 1.00000000E+00	3	1.00000000E+00	0.	0.	0.	0.	12	4097	203.7
j, 2.00002035E+00	3	2.00002035E+00	2.0325E-05	2.0325E-05	1.0177E-05	1.0177E-05	8192	16385	551.1
PARAMETER									
j, H = 10	0	4.50004272E+00	0.6278E-04	0.6278E-04	3.6160E-05	3.6160E-05	4097	4097	146.5
EXACT RESULT									
j, 4.50000000E+00	1	4.50000000E+00	7.4357E-05	7.4357E-05	1.6530E-05	1.6530E-05	12	12	1.0
j, 1.00000000E+00	0	1.00000000E+00	0.	0.	0.	0.	4	21	1.4
j, 1.00000000E+00	0	1.00000000E+00	0.	0.	0.	0.	1	3	0.8
j, 4.50004071E+00	0	4.50004071E+00	4.0650E-05	4.0650E-05	1.1111E-01	1.1111E-01	8192	16385	552.9
***** PROBLEM NUMBER ; 16 *****									
PARAMETER									
j, A = 1/10	0	1.02542192E-01	0.3132E-10	0.3132E-10	3.0695E-09	3.0695E-09	9	9	1.5
EXACT RESULT									
j, 1.02542192E-01	0	1.02542192E-01	1.4779E-10	1.4779E-10	3.0695E-09	3.0695E-09	12	12	1.8
j, 1.02542192E-01	0	1.02542192E-01	1.4779E-10	1.4779E-10	3.0695E-09	3.0695E-09	2	9	1.8
j, 1.02542192E-01	0	1.02542192E-01	1.4779E-10	1.4779E-10	3.0695E-09	3.0695E-09	4	21	2.8
j, 1.02542192E-01	0	1.02542192E-01	1.4779E-10	1.4779E-10	3.0695E-09	3.0695E-09	1	3	1.0
j, 1.02542192E-01	0	1.02542192E-01	1.4779E-10	1.4779E-10	3.0695E-09	3.0695E-09	4	9	1.6
PARAMETER									
j, A = 1	0	1.29744254E+00	1.4560E-06	1.4560E-06	7.9722E-08	7.9722E-08	17	17	2.3
EXACT RESULT									
j, 1.29744254E+00	0	1.29744254E+00	1.4560E-06	1.4560E-06	1.4779E-08	1.4779E-08	28	28	3.4
j, 1.29744254E+00	0	1.29744254E+00	1.4560E-06	1.4560E-06	1.4779E-08	1.4779E-08	4	33	4.6
j, 1.29744254E+00	0	1.29744254E+00	1.4560E-06	1.4560E-06	1.4779E-08	1.4779E-08	4	21	2.8
j, 1.29744254E+00	0	1.29744254E+00	1.4560E-06	1.4560E-06	1.4779E-08	1.4779E-08	1	3	1.0
j, 1.29744254E+00	0	1.29744254E+00	1.4560E-06	1.4560E-06	1.4779E-08	1.4779E-08	8	17	2.4
PARAMETER									
j, A = 2	0	3.43656366E+00	4.3511E-06	4.3511E-06	9.0713E-08	9.0713E-08	33	33	3.9
EXACT RESULT									
j, 3.43656366E+00	0	3.43656366E+00	2.8908E-06	2.8908E-06	4.8041E-08	4.8041E-08	6	6	6.6
j, 3.43656366E+00	0	3.43656366E+00	1.1370E-06	1.1370E-06	1.2668E-08	1.2668E-08	4	33	4.7
j, 3.43656366E+00	0	3.43656366E+00	1.6391E-06	1.6391E-06	6.6809E-09	6.6809E-09	4	21	2.8
j, 3.43656366E+00	0	3.43656366E+00	1.6391E-06	1.6391E-06	6.6809E-09	6.6809E-09	1	3	1.0
j, 3.43656366E+00	0	3.43656366E+00	4.3511E-06	4.3511E-06	9.0713E-08	9.0713E-08	16	33	4.0

5. 問題についての考察

数値積分によって得られた結果を大別すれば次の3種類となる。

- ① ほぼ正しい結果が得られた場合
- ② 真の解から大きくずれた値に収束した場合
- ③ 収束しない場合

以上のことを考慮して各問題について考えることにする。

●おとなしい関数（問題1, 2, 3, 4）

問題1～4では特に困難なものはなく、誤差はすべて ε 以内である（表1参照）。ただし、問題2で $k^2 \approx 1$ とすれば困難であることは明白であるが、 $k^2 = 15/16$ 程度では容易に解が得られる。

●ピーク型（問題5, 6, 7）

問題5の半値巾は $2a$ であることから、分割数としては少なくとも $1/a$ 程度は必要となる。したがって $a = 1/10000$ の場合に収束しないのは当然とも言える。問題6, 7では積分範囲外に特異点が存在する。特異点の位置は問題6では $x = (1+t^2)/2t$ 、問題7では $x = 2m \pm i\beta$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)であり、 $t \approx 1$ 、 $\beta \approx 0$ では特異点の影響が強く、困難な問題となるが、 $t = 15/16$ 、 $\beta = 1/16$ 程度では困難性はない。

●振動型（問題8, 9, 10）

これらの問題中で振動性以外に大きな特徴をもつものは、問題10において $x = m/8$ ($m = 0, 1, \dots, 8$)で被積分関数が零となることである。したがって、被積分関数の評価点が等間隔の場合には、分割数が少ない段階で零に収束する可能性がある。実際にSINT1, TINTMR, SKROMBでは積分結果は零となっている。次に数値計算一般について言うことであるが、計算結果が零又は非常に零に近い場合、たとえば問題9で $\cos \lambda \approx 1$ となるときには桁落ちによる誤差の影響が大きく、計算結果の信頼性は著しく低下する。数値積分では、振動型の関数の場合には特に注意する必要がある。その対策としては、あらかじめ積分区間を被積分関数の零点によって分割し、各々の小区間について積分を実行することである。

●特異型（問題11, 12, 13）

被積分関数の特異点が積分区間の端点以外に存在するときに、信頼性の高い解を得ることは非常に困難である。このような場合には、特異点が端点となるように積分区間を分割し、各々の小区間について積分すべきである。したがって問題11, 12, 13はすべて端点に特異性をもつ問題である。端点に特異性をもつにもかかわらず、テストの対象となった6個のサブ・プログラムのいずれもが好ましい結果を得られない。特異性に対して強い積分法（たとえば二重指数関数型積分公式）の導入が必要であろう。

●不連続型（問題14, 15, 16）

問題14は $n \rightarrow \infty$ で δ 関数となる。したがって、分割数の少ない場合に零に収束する可能性が

あり、実際に SINT2 では $n = 17$ のときに積分結果が零となる。問題 15 では $x = m/n$ ($m = 0, 1, \dots, n$)、問題 16 では $x = 0, 1/2, 1$ において関数値が一直線上にならび、被積分関数の評価点が等間隔の場合には、被積分関数を直線と誤認する可能性がある。実際に SKROMB では誤認しているが、問題 15 で n が奇数の場合には被積分関数の評価点における関数値の直線性がくずれ、ほぼ正しい値を得ることができる。不連続型一般についての対策は特異型の場合と同様に、不連続点で積分区間を分割した後、各々の小区間を積分することである。

6. サブ・プログラムについての考察

テスト対象とした 6 個のサブ・プログラムの分割方法は、分割回数が進むにしたがって、与えられた積分区間を 2 等分、4 等分、8 等分、 \dots とするタイプである。すなわち、分割数と分割回数の間には、分割数 = $2^{\text{分割回数}}$ の関係がある。したがって、サブ・プログラムの引数としては最大分割数よりも最大分割回数を用いるべきであるが、実際には 4. に示したように SINT1, SINT2, SKGLD, SKSIMP では最大分割数を、TINTMR, SKROMB では最大分割回数を引数としている。

各サブ・プログラムの差異をとらえるために次の 4 点についての比較表を表 3 に示す。

- ① 収束判定条件（絶対誤差，相対誤差）
- ② 実際の分割（回）数と最大分割（回）数の関係
- ③ 被積分関数の評価回数
- ④ 被積分関数の評価回数の中で最終結果に直接影響するもの数

表 3 各サブ・プログラムの比較

	①	②	③	④
SINT1	絶対誤差	$2 \leq 2^L < x$	$2 \times 2^L + 1$	$2 \times 2^L + 1$
SINT2	絶対誤差	$4 \leq 2^L \leq x$	$2 \sum_{n=1}^L 2^n = 4 \times 2^L - 4$	2×2^L
TINTMR	絶対誤差	$1 \leq L \leq y$	$2 \times 2^L + 1$	$2 \times 2^L + 1$
SKGLD	相対誤差	$1 \leq 2^{L-1} \leq x$	$3 \sum_{n=0}^L 2^n = 6 \times 2^L - 3$	3×2^L
SKROMB	絶対誤差	$1 \leq L \leq y$	$2^L + 1$	$2^L + 1$
SKSIMP	相対誤差	$2 \leq 2^{L-1} \leq x$	$2 \times 2^L + 1$	$2 \times 2^L + 1$

L ; 実際の分割回数

x ; 最大分割数

y ; 最大分割回数

次に個々のサブ・プログラムについて述べる。

◎SINT 1 (シンプソン 1/3 則), SKSIMP (シンプソン 1/3 則)

SINT1 と SKSIMP は共にシンプソン 1/3 則であり、差異は表 3 における第 1, 2 項にあるにすぎない。第 2 項については最大分割数の値によって救済できるから、差異は第 1 項の収束判定条件しかないと言える。収束判定条件は相対誤差を基準とする方が好ましいことが多い。相対誤差基準の場合には、積分結果が零又は零に非常に近いときに意味を失うことも考えられるが、このような場合は桁落ちによる誤差が大きく、数値積分を行うこと自体が無意味となる。

シンプソン 1/3 則の特徴として、積分区間の端点の関数値は必ず計算することが挙げられる。したがって、端点に特異性をもつ問題の場合には、特異点における関数値の数値計算上の値によって積分結果が大きく変動することに注意を要する。

◎SINT2 (ルジャンドル・ガウス法 ; 2 点公式), SKGLD (ルジャンドル・ガウス法 ; 3 点公式)

SINT2 と SKGLD の主要な差異は 2 点公式と 3 点公式にある。一般に、極端に高次の近似を用いることは不利とされているが、この程度の近似では近似の次数を高くする方向と、分割を多くする方向の優劣はつけられない。

ルジャンドル・ガウス法の特徴の第 1 点は、積分区間の端点の関数値は不必要なことである。したがって、収束性を問題にしなければ、端点に特異性をもつ問題に対しても、SINT1, SKSIMP のような注意は不用である。特徴の第 2 点は、分割回数が 1 つ増加すると以前の関数値を利用できないことである。すなわち、表 3 において第 3 項と第 4 項の値が異なっており、実行時間の点で不利となる。その対策としては姑息な手段ではあるが、最小分割数を用いることであり、最小分割数を引数としない現状では、利用者が積分区間をあらかじめ分割しておくことである。

◎TINTMR (変形ロンバーグ法), SKROMB (ロンバーグ法)

ロンバーグ法は台形公式を基本とし、極限への補外を行ったものである。また、変形ロンバーグ法は中点公式、台形公式、補外法の 3 つの組合せである。したがって、TINTMR¹³⁾, SKROMB のいずれにおいても積分区間の端点に特異性をもつときには、SINT1, SKSIMP と同様の注意が必要である。

7. まとめ

自動積分プログラムとは、本来、被積分関数の特性が不明の場合においても、実用価値をもつことが理想である。しかしながら、現実問題としては、被積分関数の特性を充分に利用する必要がある。特性を利用することにより、5. に述べたような被積分関数の誤認の機会を減少させることができる。利用者の立場に立った対策としては、少なくとも、被積分関数の特異点、不連続点を認識し(場合によっては零点なども必要)、そのような点であらかじめ積分区間を分割することである。各小区間における積分法は各種考えられるが、一般的には次のようにえらばよいと言われている。

おとなしい関数：どのような積分法でもよい

ピーク型の関数：二重指数関数型積分公式,¹⁴⁾ クレンショー・カーチス積分法^{8), 10), 15)}

振動型の関数：クレンショー・カーチス積分法

特異型の関数：二重指数関数型積分公式

周期関数の1周期にわたる積分：台形公式^{10), 15), 16)}

無限区間の積分：台形公式^{14), 16)}

テスト対象となったサブ・プログラムにおける積分区間の分割方法は、積分区間を一律に分割する方法であるが、この方法に無駄が多いことは明白である。すなわち、各分割区間の積分値の収束性によって分割を制御する適応型の積分^{6), 7), 9), 10)}とすべきであり、この型のものは一律に分割する型よりもはるかに良好な結果を得ることができる。

残念ながら、大阪大学大型計算機センターのライブラリーには、適応型の積分、二重指数関数型積分公式、クレンショー・カーチス積分法を行うものは皆無である。数値積分の場合にかぎらずライブラリー一般について、計算機センターでも整備の努力は行っているが、各利用者においても、ライブラリーに登録する価値のあると思われるプログラムを、積極的に登録して下されば幸いである。

参 考 文 献

- 1) 大中幸三郎；ライブラリー精度テスト — 代数方程式 — ，大阪大学大型計算機センター・ニュース，No. 26，pp. 117～134，1977。
- 2) ライブラリー・プログラム一覧，大阪大学大型計算機センター，1977。
- 3) ライブラリー・プログラム仕様書，大阪大学大型計算機センター，1976。
- 4) ACOS 6 数値計算ライブラリー説明書（概念／機能編，アルゴリズム編，例題編），日本電気（マニュアル），1976。
- 5) D. K. Kahaner；Comparison of Numerical Quadrature，in J. R. Rice (ed.)，Mathematical Software，Academic Press，pp. 229～259，1971。
- 6) 市田浩三，清野武；自動積分について，京都大学数理解析研究所講究録，No. 269，pp. 34～54，1976。
- 7) K. E. Hillstrom；Comparison of Several Adaptive Newton-Cotes Quadrature Routines in Evaluating Definite Integrals with Peaked Integrand，CACM，Vol. 13，No. 6，pp. 362～365，1970。
- 8) W. M. Gentleman；Implementing Clenshaw-Curtis Quadrature I — Methodology and Experience，CACM，Vol. 15，No. 5，pp. 337～342，1972。

- 9) V. A. Dixon ; Numerical Quadrature — A Survey of the Available Algorithm, in D. J. Evans (ed.), Software for Numerical Mathematics, Academic Press, pp. 105~137, 1974。
- 10) D. J. Davis & P. Rabinowitz ; Methods of Numerical Integration, Academic Press, 1975。
- 11) Bo Einarsson ; Testing and Evaluation of Some Subroutines for Numerical Quadrature, in D. J. Evans (ed.), Software for Numerical Mathematics, Academic Press, pp. 149~157, 1974。
- 12) 鳥居達生 ; 高速 sine 変換, cosine 変換とその数値積分への応用, 情報処理, Vol. 15, No. 9, pp. 670~679, 1974。
- 13) ライブラリー・プログラム説明書 No. 1, 東北大学大型計算機センター, 1971。
- 14) 森正武 ; 曲線と曲面, 教育出版, pp. 21~27, 1974。
- 15) 山内二郎, 森口繁一, 一松信 ; 電子計算機のための数値計算法 I, 培風館, pp. 74~90, 1965。
- 16) 森正武 ; 数値解析, 共立出版, pp. 164~198, 1973。