資　料

定電流場及び静電界における有限要素法

玉川大学工学部　中村　充伸

有限要素法は、連続体の応力解析のため、発達した手法であるが、最近、計算機の能力増大と共に、いろいろな分野で生ずる偏微分方程式の数値解を得るための有力な手段となっている。連続体の力学における有限要素法は、連続体を多くの有限要素に分割し、各要素内に分布する応力を、節点に作用する仮想節点力で代表させて、連続体を、それと等価な骨組構造に置き換えて、数値解析する手法である。それと全く類似な考え方が、定電流場、及び静電界においても成立する。即ち、定電流場、及び静電界における有限要素法は、導体、及び誘電体を有限要素に分割し、各要素内の電流密度、電束密度、電荷密度を、各々、仮想節点電流、仮想節点電束、仮想節点電荷で代表させて、導体及び誘電体を、各々それらと等価な抵抗、及びコンデンサー回路網に置き換えて、数値解析する手法である。このように、回路網に置き換えることにより、定電流場、及び静電界のマックスウェルの方程式を簡単な行列演算を行なうことによって解くことができる。ここでは有限要素法を、仮想仕事の原理によって、定電流場及び静電界に導入し、簡単な例題を扱う。

§ 1.　定電流場における有限要素法

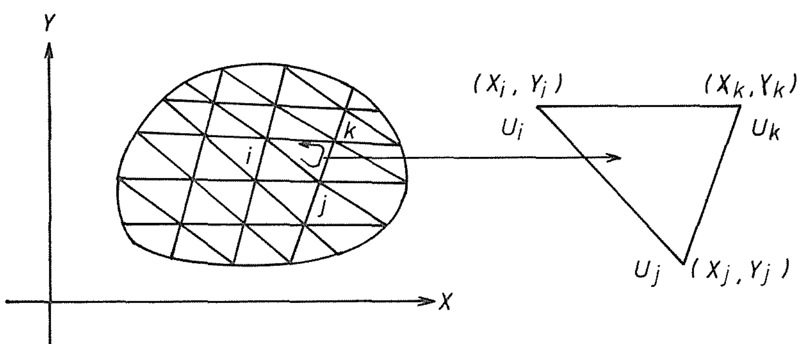
定電流電場のマックスウェルの方程式は

$$\mathrm{div}\,\vec{J} = 0 \qquad (1)$$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\ U \qquad (2)$$

$$\vec{J} = \sigma E \qquad (3)$$

であり、ここでは簡単のため、二次元問題を扱う。



第1図　三角要素に分割された2次元導体とその一要素

第１図に示すように、２次元導体を多くの有限要素に分割し、その１つの有限要素の節点番号を反時計回りに i，j，k とする。節点 i，j，k の座標及び電位を各々（x_i，y_i），（x_j，y_j），（x_k，y_k），U_i，U_j，U_k とし、要素内で、電位Uは、線形に変化するものとすれば

$$U=\frac{1}{2d}\left[a_i+b_ix+c_iy,\ a_j+b_jx+c_jy,\ a_k+b_kx+c_ky\right]\begin{bmatrix}U_i\\U_j\\U_k\end{bmatrix} \quad (4)$$

ここで、dは要素面積で

$$d=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\1 & x_j & y_j\\1 & x_k & y_k\end{vmatrix} \quad (5)$$

$$a_i=\begin{vmatrix}x_j & y_j\\x_k & y_k\end{vmatrix},\ b_i=y_j-y_k,\ c_i=x_j-x_k \quad (6)$$

a_j，b_j，c_j，a_k，b_k，c_k は式(6)において i，j，k を順に入れ換えることによって得られる

要素内の電界 $\vec{E}$ は、式(4)を式(2)に代入して

$$\vec{E}=-\frac{1}{2d}\begin{bmatrix}b_i & b_j & b_k\\c_i & c_j & c_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_i\\U_j\\U_k\end{bmatrix}=[B]\begin{bmatrix}U_i\\U_j\\U_k\end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで

$$[B]=-\frac{1}{2d}\begin{bmatrix}b_i & b_j & b_k\\c_i & c_j & c_k\end{bmatrix} \quad (8)$$

である。

要素内の電流密度 $\vec{J}$ は、式(7)を式(3)に代入して

$$\vec{J}=\sigma[B]\begin{bmatrix}U_i\\U_j\\U_k\end{bmatrix} \quad (9)$$

ここで、要素電流密度 $\vec{J}$ を節点 i ，j ，k の仮想節点電流 $\begin{bmatrix} I_i \\ I_j \\ I_k \end{bmatrix}$ に置き換える。そのため、仮想仕事の原理を使う。節点電位に、仮想変位 $\begin{bmatrix} \delta U_i \\ \delta U_j \\ \delta U_k \end{bmatrix}$ を与えたとき、それによる節点電力の変化は、要素内で発生する単位時間当りのジュール熱の変化に等しい。

それ故

$$[\delta U_i \ , \delta U_j \ , \delta U_k] \begin{bmatrix} I_i \\ I_j \\ I_k \end{bmatrix} = \iint \delta \vec{E}^t \circ \vec{J}\, dx\, dy \qquad (10)$$

$\vec{E}^t$ は電界 $\vec{E}$ の転置ベクトル、$\delta \vec{E}^t$ は電位変化による $\vec{E}^t$ の変位であり、積分領域は、要素内部である。

式(7)より

$$\delta E^t = \delta \left([B] \cdot \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix} \right)^t$$

$$= [\delta U_i \ , \delta U_j \ , \delta U_k] [B]^t \qquad (11)$$

であるから、式(9)と式 (11) を式 (10) に代入して

$$\begin{bmatrix} I_i \\ I_j \\ I_k \end{bmatrix} = \iint [B]^t \sigma [B]\, dx\, dy \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix} \qquad (12)$$

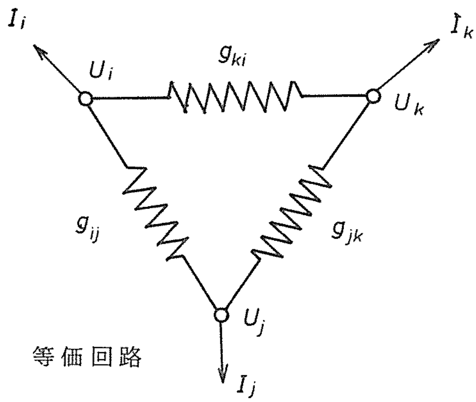
を得る。特に、伝導率 σ が要素内で、一様なとき

$$\begin{bmatrix} I_i \\ I_j \\ I_k \end{bmatrix} = \sigma d [B]^t [B] \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix} = [g] \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix} \qquad (13)$$

ここで、$[g] = \sigma d [B]^t [B]$ (14)

は3行3列のマトリックスで、要素伝導マトリックスとよぶ。式(13)を具体的な形で表わすと

$$\begin{bmatrix} I_i \\ I_j \\ I_k \end{bmatrix} = \frac{\sigma}{4d} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix} \tag{15}$$



第2図　等価回路

これを第2図の等価回路

$$\begin{bmatrix} I_i \\ I_j \\ I_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{ij} + g_{ki} & -g_{ij} & -g_{ki} \\ -g_{ij} & g\, g_{ij} + g_{jk} & -g_{jk} \\ -g_{ki} & -g_{jk} & g_{ki} + g_{jk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix} \tag{16}$$

と比較すれば、各節点間のコンダクタンス g_{ij} , g_{jk}, g_{ki} を次のように置いたものに相当する。

$$g_{ij} = -\frac{\sigma}{4d}(b_i b_j + c_i c_j) = \frac{\sigma}{4d}\{(x_k - x_j)(x_k - x_i) + (y_k - y_j)(y_k - y_i)\} \tag{17}$$

g_{jk} , g_{ki} は式(17)において、i , j , k を順に入れ換えたものである。

すべての要素の電流密度を、その要素の節点の仮想節点電流に置き換えて、各節点において、キルヒホッフの第一法則を適用すると次の連立方程式が得られる。

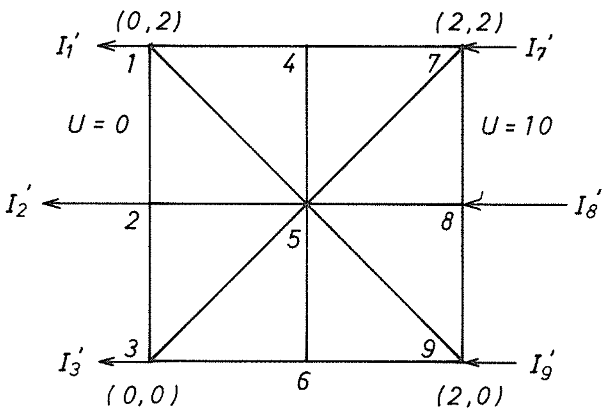
$$\begin{bmatrix} \ddots & & O \\ & G & \\ O & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U^2 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \\ \vdots \\ I_i' \\ \vdots \\ I_n' \end{bmatrix} \tag{18}$$

ここで、 I_i' は節点 i において、導体の外部に出入する仮想節点電流で、一般に導体内部の節点でその値は0である。マトリックスのバンド状の部分 G は、各要素の要素伝導マトリックスが合成されたものである。式 (18) はもとのマックスウェルの方程式(1)・(2)・(3)から導き出される準調和方程式

$$\mathrm{div}(\sigma\ \mathrm{grad}\,U) = 0 \qquad (19)$$

に相当する連立方程式である。

ここで簡単な例題を取扱う。



第 3図　　有限要素法の一例

第3図において、すべての要素において、 $\sigma = 1$ とすれば式 (18) は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & -0.5 & & & & & \\ -0.5 & 2 & -0.5 & 0 & -1 & & & 0 & \\ 0 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & -0.5 & & & \\ -0.5 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -0.5 & & \\ & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & \\ & & -0.5 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -0.5 \\ & & & -0.5 & 0 & 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ & 0 & & & -1 & 0 & -0.5 & 2 & -0.5 \\ & & & & & -0.5 & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \\ I_3' \\ I_4' \\ I_5' \\ I_6' \\ I_7' \\ I_8' \\ I_9' \end{bmatrix} \qquad (20)$$

片側の電位を 0、その反対側の電位を 1 0 とすれば

$$U_1 = U_2 = U_3 = 0\ ,\ U_7 = U_8 = U_9 = 10 \qquad (21)$$

節点４，５，６において導体外部に出入する仮想節点電流は０であるから

$$I_4' = I_5' = I_6' = 0 \qquad (22)$$

式(21)，(22)を式(20)へ代入し

$$U_4 = U_5 = U_6 = 5$$

$$I_1' = I_3' = -2.5, \quad I_2' = -5$$

$$I_7' = I_9' = 2.5, \quad I_8' = 5$$

を得る。式(4)，(5)，(6)を使って、全領域にわたって、正解 $U = 5x$ が得られ、通過全電流は１０となる。

§ 2. 静電界における有限要素法

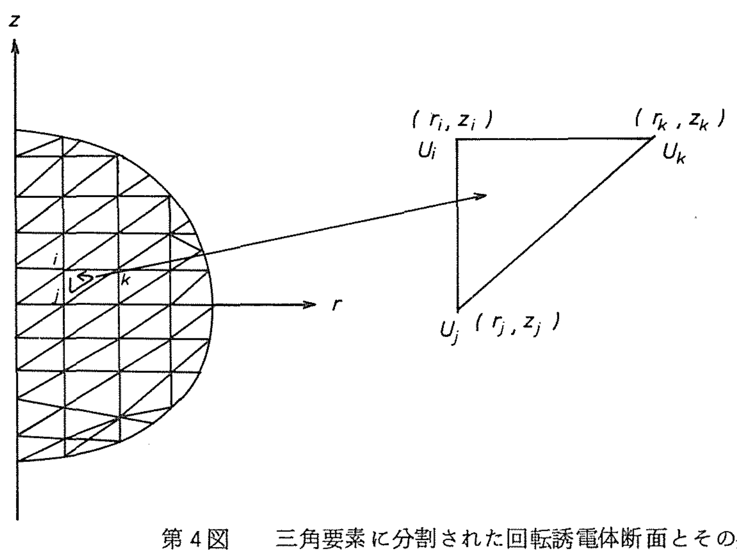
静電界のマックスウェルの方程式は

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \qquad (23)$$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,U \qquad (24)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad (25)$$

であり、この場合 $\vec{D}$ と ε は、各々、定電流場の $\vec{J}$ と σ に相当し、２次元の場合は全く定電流場と同じ操作をすればよいが、静電界の場合、分布電荷 ρ が存在することと、一様電界中に存在する回転誘電体の問題のように、軸対称の場合が、しばしば現われる。そこで軸対称の静電界における有限要素法を述べる。



第４図　　三角要素に分割された回転誘電体断面とその要素

第４図のように、ｚ軸を中心にした回転誘電体の断面を、多くの有限要素に分割し、その一つの有限要素の節点番号を反時計回りに、ｉ，ｊ，ｋとし、その座標及び電位を、各々（r_i，z_i），（r_j，z_j），（r_k，z_k），U_i，U_j，U_k とする。電位が線形に変化するものとすれば §１．において、ｘをｒに、ｙをｚに置き換えることによって、要素内の電位、及び電界が得られる。要素内の電束密度 $\vec{D}$ は次のようになる。

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=\varepsilon\,[B]\begin{bmatrix}U_i\\U_j\\U_k\end{bmatrix}\qquad(26)$$

各要素の電束密度 D を、仮想仕事の原理によって、仮想節点電束に置き換える。
節点電位に仮想電位変位を与えた場合、それによる節点のエネルギー変化は、要素内の静電エネルギーの変化に等しい。それ故、

$$[\delta U_i,\ \delta U_j,\ \delta U_k]\begin{bmatrix}Q_i\\Q_j\\Q_k\end{bmatrix}=\iint\delta\vec{E}^t\cdot\vec{D}\,2\pi r\,dr\,dz\qquad(27)$$

ここで、Q_i，Q_j，Q_k は節点ｉ，ｊ，ｋにおける仮想節点電束で、§１．と同様な操作により、

$$\begin{bmatrix}Q_i\\Q_j\\Q_k\end{bmatrix}=\iint[B]^t\,\varepsilon\,[B]\,2\pi r\,dr\,dz\begin{bmatrix}U_i\\U_j\\U_k\end{bmatrix}\qquad(28)$$

要素内で、ε が一様な場合

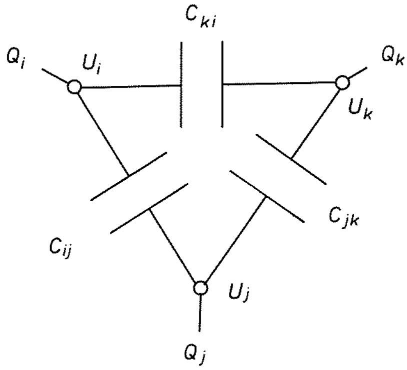
$$\begin{bmatrix}Q_i\\Q_j\\Q_k\end{bmatrix}=\varepsilon V[B]^t[B]\begin{bmatrix}U_i\\U_j\\U_k\end{bmatrix}=[C]\begin{bmatrix}U_i\\U_j\\U_k\end{bmatrix}\qquad(29)$$

ここで　$V=\iint 2\pi r\,dr\,dz$　は三角要素断面をｚ軸回りに回転した円輪の要素体積で

$$V=\frac{\pi}{3}(r_i+r_j+r_k)\begin{vmatrix}1&r_i&z_i\\1&r_j&z_j\\1&r_k&z_k\end{vmatrix}=\frac{2\pi}{3}d\,(r_i+r_j+r_k)\qquad(30)$$

であり、$[C]=\varepsilon V[B]^t[B]$ (31)

を要素キャパシタンスマトリックスとよぶ。



第5図　等価回路

これを第5図のように等価回路で表わせば、節点 i — j 間のキャパシタンス C_{ij} は

$$C_{ij}=\frac{\varepsilon V}{4d^2}(b_i b_j + c_i c_j)=\frac{\pi\varepsilon}{6d}(r_i+r_j+r_k)$$

$$\{(r_k-r_j)(r_k-r_i)+(z_k-z_j)(z_k-z_i)\} \quad (32)$$

となり、C_{jk}, C_{ki} は式(32)において、i, j, k を順に入れ換えたものに等しい。

同様に仮想仕事の原理により、要素内の分布電荷 ρ を、仮想節点電荷 q_i, q_j, q_k に置き換えると

$$q_l=\frac{1}{2d}\iint\rho(a_l+a_l r+c_l z)\cdot 2\pi r\,dr\,dz \quad (33)$$

$$(l=i, j, k)$$

となる。

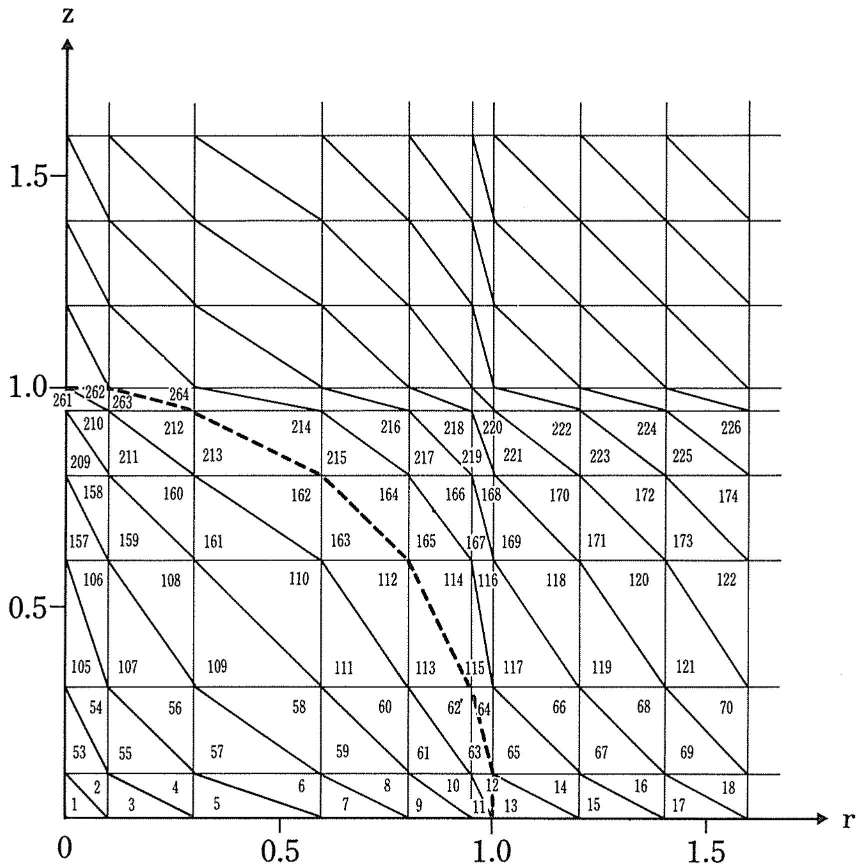
ここで、すべての要素の電束密度、分布電荷を各々その要素の節点の仮想節点電束、仮想節点電荷に置き換えて、各節点において、電束保存法則が成立するように考慮すると次のような連立方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & C & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q'-q_1 \\ Q'-q_2 \\ \\ Q'_i-q_i \\ \\ Q'_n-q_n \end{bmatrix} \quad (34)$$

ここで、Q_i' は節点 i において、誘電体外部に出入する仮想節点電束である。マトリックスのバンド状の部分 C は、各要素のキャパシタンスマトリックスが合成されたものである。式(34)は式(23)，(24)，(25)から導かれるポアソン方程式(35)の軸対称の場合に相当する連立方程式である。

$$\mathrm{div}\ (\varepsilon\ \mathrm{grad}\ U) = -\rho \qquad (35)$$

例として、一様電界中に回転楕円誘電体が存在する場の問題を扱う（第6図）。



第6図　有限要素分割図

第6図に r＝0，z＝0 に中心をもち、半径1の球断面の球面近くの要素分割法を示す。対称性を考慮すれば、分割は 4半円ですみ、円は破線で近似してある。領域の境界の大きさは、縦横方向各々、半径の5倍、即ち、 r＝5，z＝±5 とし、z＝0 上の節点に電位0を、上の境界、z＝5 上の節点に、電位1を与えた。計算が簡単のため、式(34)の左辺のマトリックスのバンド巾が、一定になるように、また入力データが簡単になるように要素分割を行なった。全要素数は1352、

全節点数は729、バンド巾28である。回転楕円体の場合は、球の座標をそのままz軸方向、r軸方向に各々、同じ倍率を乗じたものを用いた。回転楕円体の誘導率とその周囲の誘電率の比をKとして、第7図(a)，(b)，(c)に等電位面を示す。

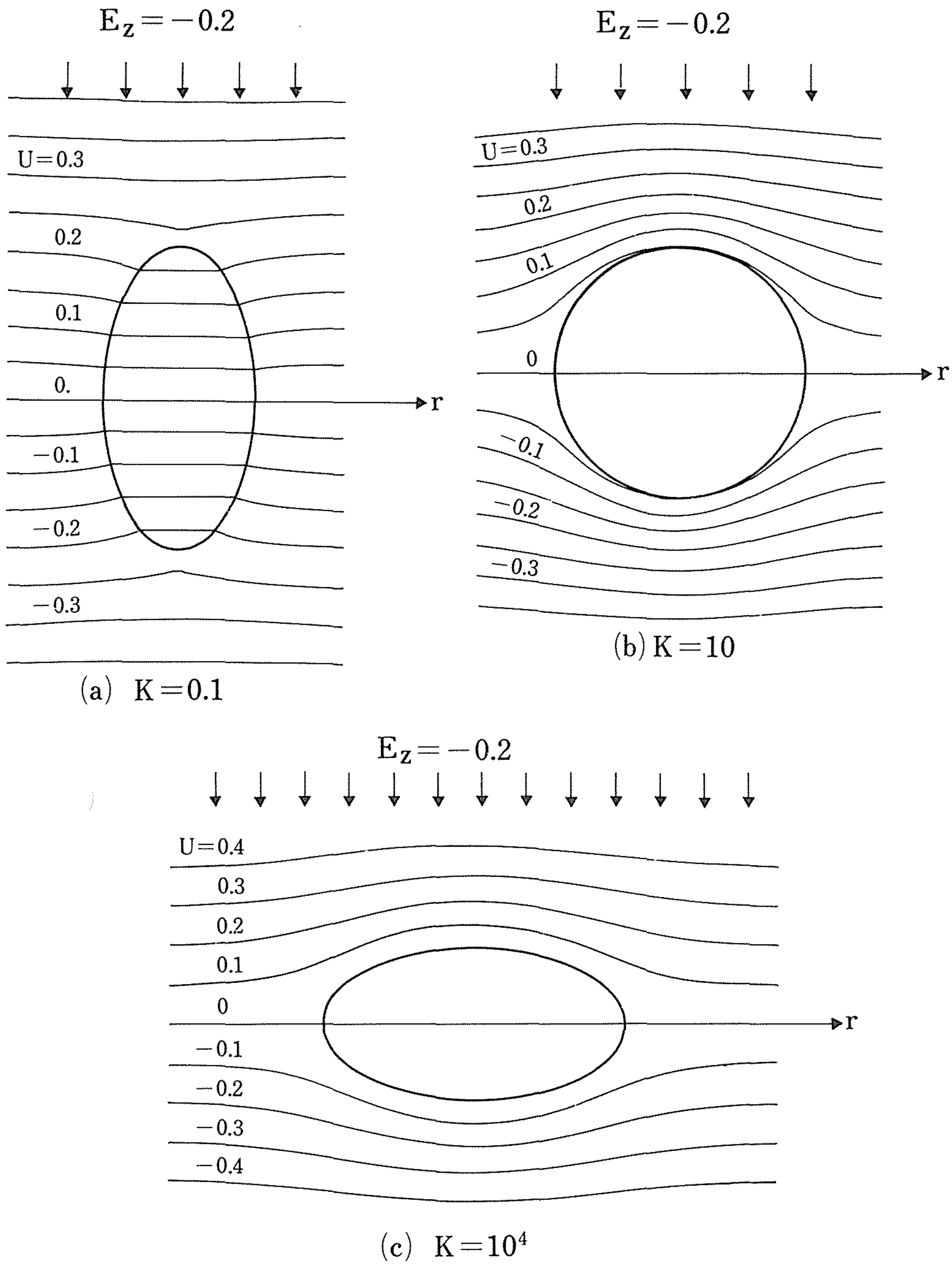
第7図(b)の場合について、誘電体内部要素の電界を第一表に示す。要素の位置は、第6図に示す番号の位置である。境界の大きさが無限の場合の理論値は、$E_r=0$，$E_z=-0.025$ であり、ここで示した例は、境界の大きさが、半径の5倍のものであり、直接理論値と比較できないが、球の上部の要素，261，262，263 では少し精度が落ちるが、他の部分はかなりの精度で電界が求められている。ここで使った第6図の分割法は、少し雑であったが、分割を丁寧にすれば、更によい結果が得られると考えられる。

ここでは、有限要素法を、変分法を使わずに導入したが、変分法を使用しても当然、同じ結果が得られる。仮想仕事の原理によって有限要素法を導く方が、導体、誘電体を直感的に、等価回路網に置換できるので、プログラミング上、考え方が簡単になる。ここで、とりあげたテーマは、電磁気学、応用数学、数値解析の学習をしながら、プログラミングできるので、教育上にも非常に有効である。

参 考 文 献

(1) 矢尾哲也，「有限要素法」，大阪大学大型計算機センター・ニュース №.27，1977，pp.25－42

(2) O. C. Zienkiewics, The Finite Element Method in Engineering Science, 1971.



$E_z = -0.2$
U=0.3
0.2
0.1
0.
−0.1
−0.2
−0.3
r
(a) K=0.1
$E_z = -0.2$
U=0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3
r
(b) K=10
$E_z = -0.2$
U=0.4
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
r
(c) $K=10^4$

第7図　等電位面

要素番号	E_r	E_z
1	0.00000	−0.02539
2	0.00000	−0.02539
3	0.00000	−0.02539
4	0.00001	−0.02536
5	0.00000	−0.02536
6	0.00004	−0.02524
7	0.00000	−0.02524
8	0.00012	−0.02500
9	0.00000	−0.02500
10	0.00027	−0.02458
11	0.00000	−0.02459
12	0.00042	−0.02438
53	0.00000	−0.02541
54	0.00000	−0.02541
55	0.00001	−0.02541
56	0.00003	−0.02539
57	0.00004	−0.02539
58	0.00008	−0.02532
59	0.00012	−0.02532
60	0.00026	−0.02518
61	0.00027	−0.02518
62	0.00068	−0.02487
63	0.00041	−0.02487
105	0.00000	−0.02548
106	0.00000	−0.02548
107	0.00003	−0.02548
108	0.00002	−0.02549
109	0.00008	−0.02549
110	0.00000	−0.02557
111	0.00026	−0.02557
112	−0.00028	−0.02594
113	0.00068	−0.02594
157	0.00000	−0.02554
158	−0.00002	−0.02555
159	0.00002	−0.02555
160	0.00011	−0.02547
161	0.00000	−0.02547
162	0.00016	−0.02522
163	−0.00028	−0.02522
209	−0.00002	−0.02539
210	−0.00058	−0.02577
211	0.00011	−0.02577
212	0.00025	−0.02558
213	0.00016	−0.02558
261	−0.00058	−0.02335
262	−0.00201	−0.02621
263	0.00025	−0.02621

第一表　　誘電体球内要素の電界（K＝10）