



Title	デジタル信号解析におけるシステム
Author(s)	門田, 良実
Citation	大阪大学大型計算機センターニュース. 1982, 44, p. 77-83
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/65516
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

ディジタル信号解析におけるシステム

大阪大学基礎工学部 門 田 良 実

1. はじめに

時系列解析のモデルとしてはこれまでに多くのものが提案されている。その中の代表的なものとして、観測不可能な白色雑音だけを入力とする

$$\text{ARモデル} \quad y_t + a_1 y_{t-1} + \cdots + a_m y_{t-m} = e_t$$

$$\text{MAモデル} \quad y_t = c_0 e_t + c_1 e_{t-1} + \cdots + c_l e_{t-l}$$

$$\text{ARMAモデル} \quad y_t + a_1 y_{t-1} + \cdots + a_m y_{t-m} = c_0 e_t + c_1 e_{t-1} + \cdots + c_l e_{t-l}$$

などの他に、観測可能な入力機構を有す

$$\text{ARXモデル} \quad y_t + a_1 y_{t-1} + \cdots + a_m y_{t-m} = b_0 u_t + b_1 u_{t-1} + \cdots + b_n u_{t-n} + e_t$$

$$\text{MAXモデル} \quad y_t = b_0 u_t + b_1 u_{t-1} + \cdots + b_n u_{t-n} + c_0 e_t + c_1 e_{t-1} + \cdots + c_l e_{t-l}$$

$$\begin{aligned} \text{ARMAXモデル} \quad y_t + a_1 y_{t-1} + \cdots + a_m y_{t-m} = & b_0 u_t + b_1 u_{t-1} + \cdots + b_n u_{t-n} \\ & + c_0 e_t + c_1 e_{t-1} + \cdots + c_l e_{t-l} \end{aligned}$$

などをあげることができる。モデルの一般性から言えばARMAXモデルということになるが、入力雑音があり問題とならないような場合にはARXモデルでも十分一般的なものとなっている。この小論では適応制御⁽¹⁾・ディジタルフィルタ⁽²⁾の分野で重要になりつつあるARXモデルに焦点を絞り、系のインパルス応答と出力の共分散からARXモデルをもとめる方法とそのARMAディジタルフィルタ設計への応用について述べることにする。

2. インパルス応答と共分散からARXモデルをもとめる方法

この節では、与えられた系の伝達関数 $H(z)$

$$H(z) \sim z^{-\tau} \frac{b_n(z)}{a_m(z)} \quad (1)$$

のようなむだ時間 τ をもつARMAフィルタで近似する問題を考える。ただし

$$a_m(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_m z^{-m}$$

$$b_n(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}$$

とし、 $a_m(z)$ のすべての零点は単位円内にあるものとする。近似の規範としては、次のような二乗誤差規範を採用する：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |a_m(e^{i\omega}) H(e^{i\omega}) - e^{-i\tau\omega} b_n(e^{i\omega})|^2 d\omega. \quad (2)$$

系のインパルス応答と出力共分散列 $\{r_j\}$ がそれぞれ

$$h_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{i\omega}) e^{ij\omega} d\omega, \quad j \geq 0$$

$$r_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{i\omega})|^2 e^{-ij\omega} d\omega$$

で与えられることを用いて(2)式を

$$(1, a_1, \dots, a_m; b_0, b_1, \dots, b_n) \begin{pmatrix} \mathbf{R}_m - \mathbf{H}_\tau \\ -\mathbf{H}_\tau' & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} (1, a_1, \dots, a_m; b_0, b_1, \dots, b_n') \quad (3)$$

のように書きかえることができる。ここに \mathbf{R}_m , \mathbf{H}_τ はそれぞれ $\{r_j\}$, $\{h_j\}$ とで構成される $(m+1) \times (m+1)$, $(m+1) \times (n+1)$ Toeplitz 行列

$$\mathbf{R}_m = \begin{pmatrix} r_0 & \dots & r_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{-m} & \dots & r_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_\tau = \begin{pmatrix} h_\tau & \dots & h_{\tau+n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\tau-m} & \dots & h_{\tau+n-m} \end{pmatrix}$$

である。かくして(1)の近似問題は(2)あるいは(3)の最小化問題に、ひいては正規方程式

$$(1, a_1, \dots, a_m; b_0, b_1, \dots, b_n) \begin{pmatrix} \mathbf{R}_m - \mathbf{H}_\tau \\ -\mathbf{H}_\tau' & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} = (\delta_{mn}^A, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0) \quad (4)$$

を解くことに帰着されることが容易にわかる。この方法の特徴は、インパルス応答列の“すそ”の情報も共分散情報に繰込まれているため、それらの一方だけを用いる方法（たとえば Padé 近似、AR 近似など）に比べてより低い次数でより高い精度を達成できることにある。

3. 低域通過フィルタ設計への応用

前節の方法をデジタルフィルタの設計に適用するには、与えられたフィルタの振幅特性から互いに矛盾しないようなインパルス応答と出力共分散とをあらかじめもてておかねばならない。

設計すべき低域通過フィルタの振幅特性は図1のように与えられる。ただし通過域 ($0 \leq \omega \leq \omega_1$) と阻止域 ($\omega_2 \leq \omega \leq \pi$) の特性は正弦関数で“なめらかに”つながっているものとする。

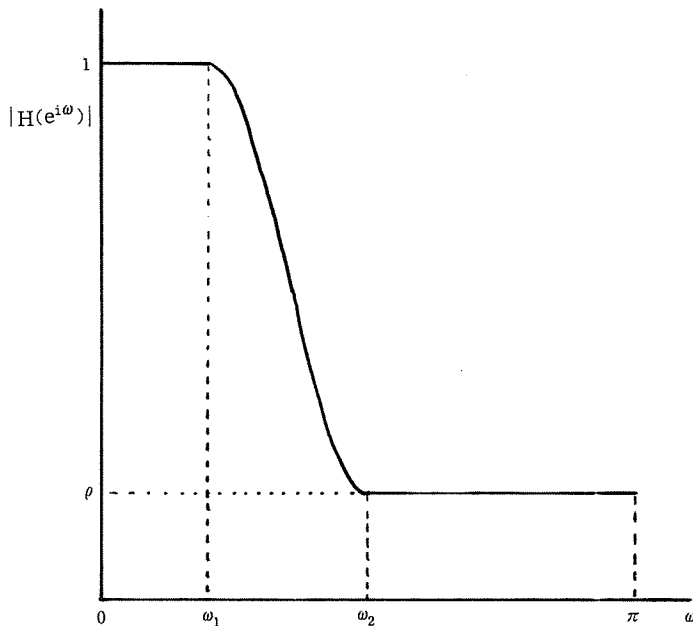


図 1

まず共分散列 $\{r_j\}$ は与えられた振幅特性から

$$r_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{H}(e^{j\omega})|^2 e^{-ij\omega} d\omega \quad (5)$$

のようにして簡単に計算できるのであるが、インパルス応答列 $\{h_j\}$ の方は振幅特性だけでは一意に決まらずその位相特性をも同時に指定しておく必要がある。

位相特性としては、最小位相・直線位相・最大位相など無数にあるが、ここでは実用上重要な最小位相と直線位相の場合のみ取り扱うことにする。最小位相は時間おくれはないものの波形がゆがむこと、直線位相は波形のゆがみはないが時間おくれがあることなどのため、それぞれ一長一短があるので目的に応じて使い分けなければならない。前者としてARフィルター、後者としてはFIRフィルターがよく知られているが、いずれも極あるいは零だけで構成されるため急峻な振幅特性を実現するには非常に高い次数を必要とすることになる。したがって極-零モデル（ARMAフィルター）をもちいて最小位相あるいは直線位相低域通過フィルターを設計することが重要な課題となってくる。

以下では、まず高次ARフィルター（高次FIRフィルター）を介して矛盾のないインパルス応答列をもとめ、しかるのちにそのインパルス応答列と共分散列をもとにARXモデルのあてはめを行なうことにより、低次の最小位相（直線位相）低域通過ARMAフィルターを設計することにする。

最小位相低域通過ARMAフィルターの設計

- 1) 与えられた振幅特性 $|\tilde{H}(e^{j\omega})|$ から共分散列を計算する:

$$r_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{H}(e^{j\omega})|^2 e^{-ij\omega} d\omega.$$

- 2) 共分散列 $\{r_j\}$ からもとまる高次ARフィルター

$$y_t + \alpha_1 y_{t-1} + \cdots + \alpha_N y_{t-N} = \sqrt{\delta_N} u_t$$

を介してインパルス応答列 $\{h_j\}$ を

$$\begin{cases} h_0 = \sqrt{\delta_N} \\ h_j = -(\alpha_1 h_{j-1} + \cdots + \alpha_N h_{j-N}) \end{cases}$$

のようにして計算する。

- 3) インパルス応答列 $\{h_j\}$ と共分散列 $\{r_j\}$ とをもちいて次の正規方程式を解く:

$$(1, a_1, \dots, a_m; b_0, b_1, \dots, b_n) \begin{pmatrix} \mathbf{R}_m & -\mathbf{H}_0 \\ -\mathbf{H}_0' & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} = (\delta_{mn}^A, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0),$$

ただしむだ時間 $\tau = 0$ とした。

従来“直線位相=FIRフィルター”と相場は決まっていたのであるが、急峻な振幅特性をFIRフィルターで実現するには非常に高い次数とその次数の半分程度の時間おくれを必要とするため、LSIなどによる実装化には適したものではなかった。しかし以下で述べることから、その“相場”も単なる偏見に過ぎないことが分かる。

直線位相低域通過ARMAフィルターの設計

- 1) 与えられた振幅特性 $|\tilde{H}(e^{j\omega})|$ から共分散列 $\{r_j\}$ を計算する:

$$r_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{H}(e^{j\omega})|^2 e^{-ij\omega} d\omega.$$

- 2) 高次FIRフィルター

$$y_t = h_0 u_t + h_1 u_{t-1} + \cdots + h_N u_{t-N}$$

を介して、振幅特性 $|\tilde{H}(e^{j\omega})|$ からインパルス応答列を計算する:

$$h_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{H}(e^{j\omega})| e^{j(j-\frac{N}{2})\omega} d\omega.$$

3) インパルス応答列 $\{h_j\}$ と共分散列 $\{r_i\}$ とをもちいて次の正規方程式を解く：

$$(1, a_1, \dots, a_m; b_0, b_1, \dots, b_n) \begin{pmatrix} \mathbf{R}_m & -\mathbf{H}_\tau \\ -\mathbf{H}_\tau^T & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} = (\mathbf{r}_{mn}^A, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0),$$

ただし $\tau = \frac{N}{2} - n$ とする。

次にこの方法にもとづいた低域通過ARMAフィルターの設計例を示すことにする。図2は250次のARフィルターを介してもとめた最小位相ARMAフィルターの設計例である。与えられた低域通過フィルターの特性は図1で

$$\rho = 0.001$$

$$\omega_1 = \omega_2 = 0.2\pi$$

とおいたものとなっている。次数(16, 16)のARMAフィルターは急峻な振幅特性をよく再現しており、その位相特性も最小位相に近いものになっている。

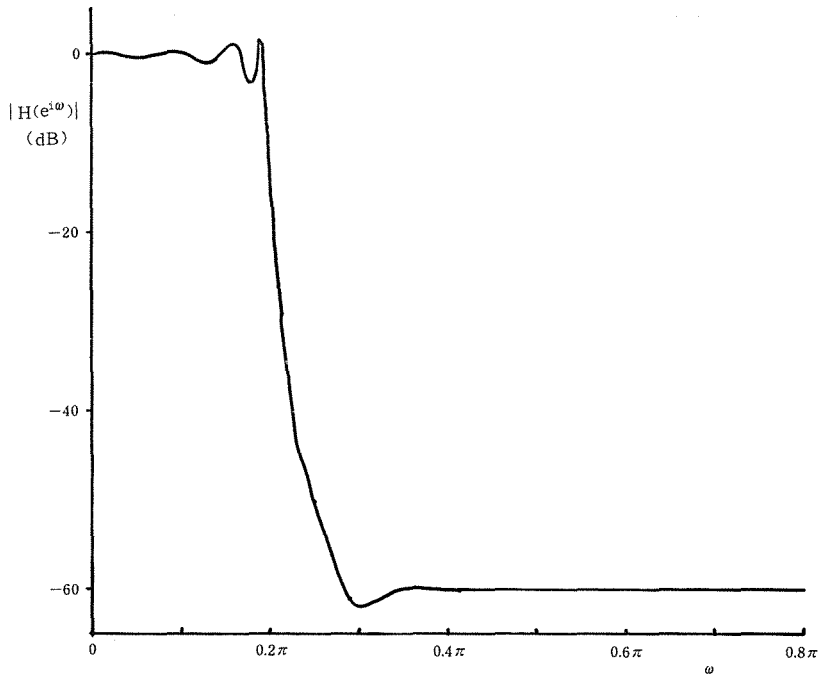


図2

図3は、200次のFIRフィルターを介してもとめた直線位相低域通過ARMAフィルターの特性を示している。与えられた低域通過フィルターの特性は図1で

$$\rho = 0.01$$

$$\omega_1 = 0.2\pi, \quad \omega_2 = 0.3\pi$$

とおいたものである。ARMA (13, 17) フィルターの振幅特性は最小位相の場合に比べてやや劣るものの、その位相特性はほとんど直線に近いものになっていることが分る。

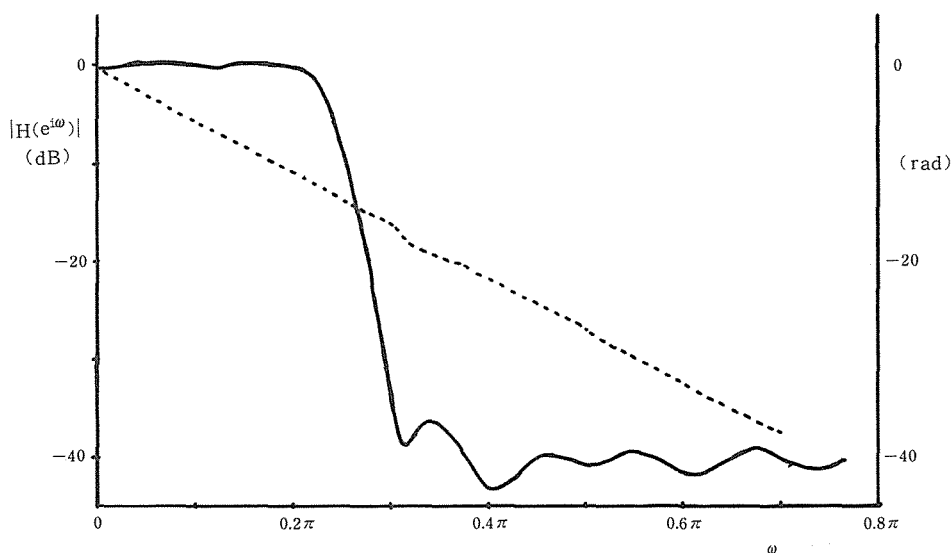


図 3

最後に直線位相ARMAフィルターの時間おくれについて簡単にふれておくことにする。N次FIRフィルターの伝達関数を $H_F(e^{j\omega})$ またその時間おくれを $D[H_F(e^{j\omega})]$ と表わし

$$H_F(e^{j\omega}) \sim e^{-i(\frac{N}{2}-n)\omega} \times \frac{b_n(e^{j\omega})}{a_m(e^{j\omega})}$$

$$D[H_F(e^{j\omega})] = \frac{N}{2}$$

$$D[e^{-i(\frac{N}{2}-n)\omega}] = \frac{N}{2} - n$$

であることに注意すれば、直線位相ARMA (m, n) フィルターの時間おくれは

$$D\left[\frac{b_n(e^{j\omega})}{a_m(e^{j\omega})}\right] = \frac{N}{2} - (\frac{N}{2} - n) = n$$

となり、 $\frac{N}{2}$ からARMA フィルターのMAの次数程度にまでに改善されたことになる。

4. おわりに

最後に本文で取上げることができなかった2,3の関連することがらについて簡単にふれておくことにする。

ここで述べた方法の特徴は、振幅特性を与えられるなら目的のフィルターのいかにかわらず全く同じやり方で最小位相・直線位相ARMAフィルターを設計できることにある。実際低域

通過フィルターだけでなく帯域・高域通過フィルターでも良好な結果を得ている。いずれも最終的には(4)式の正規方程式を解くことになるのであるが、その係数行列の特殊な構造 (Toeplitz block 行列 ie. Toeplitz 行列をその block 要素とする 2×2 block 行列) をうまく利用した逐次解法も可能となる。⁽³⁾

次にもとめた ARMA フィルターの安定性に関してであるが、最小位相の場合には \mathbf{H}_0 が上半 Toeplitz となっているためつねに ARMA フィルターの安定性が保証されているのであるが、⁽⁴⁾ 直線位相の場合はそうにうまくはいかない。したがって Schur - Cohn テストを併用して $m+n$ = 一定のものの中から安定かつ最適 (δ_{mn}^A を最小にするという意味で) なものを選んでやる必要がある。

最後にこの方法は逆システムの同定にも適用できる。これはちょうど与えられた系のインパルス応答と共分散からそれに矛盾しないような安定かつ最適な逆システム (ARMA フィルター) を因果的に構成することになっている。さらにこの多変数化を行なうことによりカクテルパーティ効果⁽⁵⁾ (多点での観測波形から多音源の波形を分離すること) などへの応用も期待できる。

参 考 文 献

- 1) B. Friedlander: Recursive Lattice Forms for Spectral Estimation and Adaptive Control; Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, Dec. (1980)
- 2) L.L. Scharf and J.C. Luby: Statistical Design of Autoregressive-Moving Average Digital Filters: IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-27, pp. 240 (1979)
- 3) Y. Monden, M. Yamada, and S. Arimoto: Fast Algorithm for Identification of an ARX Model and Its Order Determination; IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-30 (1982)
- 4) 門田・有本: 多変数 ARMA 型系の同定; 計測自動制御学会論文集, 第 16 巻, 第 6 号
- 5) 柳田・角所: 一般逆たたみ込み行列を用いた音源波形分離の定式化; 音講論集, 499 (1981)