資　料

有限要素法の可能性について

大阪大学工学部機械工学科

北　川　　　浩

1. は じ め に

有限要素法は、構造解析(Structural Analysis)の分野で著しい成功を収めた計算手法である。この分野では、従来から用いられてきた様々な解析法を完全に凌駕し、高い評価を得ている。それでは、非構造的分野への応用性、すなわち、工学的視点に立つ場合、一般的な偏微分方程式の解析手法としてどのように評価できるであろうか。

有限要素法は、枝葉を取り払ってしまえば、場の支配方程式を積分形で表現して、独得の方法で離散化し代数方程式に置き換える手法であると言える。しかしながら、この手続きの中に、単に自然現象の数理モデルを数値的に解くというのではなく、物理的に解くとでも言える、いわば自然さが認められ、そして、それがまた、明快な数学的検討を可能にしているというのが有限要素法の特徴である。この小文においては、積分表現と離散化という側面から、有限要素法の底を流れるこうした特徴に光をあて、長所、短所を眺めてみる。

2. 工学解析手法としてのFEM

工学解析手法としての有限要素法(Finite Element Method，以後FEMと略記する)の評価は、高性能コンピュータを誰もが手軽に用いることができるようになるにつれて高まる一方である。とくに、構造解析手法としては、最も強力なものと広く認識されている。

構造解析の分野 — これはもう少し広げて、連続固体力学の分野と言うことができるが — では、方程式の線形性、非線形性を問わず、あるいは、楕円形、放物線形、双曲線形のいずれであっても広く用いられ、実験に置き換えうる精密なシミュレーション手法として有効であることも実証されてきている。FEMの実用性も見逃すことはできない。工学の様々な実際の現場 — 設計、開発、製造、… — において、日常的に、そして必要不可欠の道具として生かされているのを見ることができる。

このような大成功、しかも評価の厳しい工学の分野での解析手法としての成功を可能にしたのは、FEMがコンピュータによる数値処理に適した構造を有していて、汎用性のあるプログラムを作ることができ、しかもそれを、ほとんどブラックボックスとして利用しても精度の高い解を得ることができるという特徴に集約できよう。少し立ち入って見ると、解析の対象となっている物体の形状が不規則、複雑であることに起因する解析上の難点をほぼ完全なまでに取除くことに成功している

ことと、利用できる計算手段（コンピュータの能力、計算に許される時間、経費など）が定まると、最適な結果を得るための方策（最良の近似モデルの設定）を予じめ立てることができるようなアルゴリズムを有していることにあると思われる。

それでは、FEMは固体力学の分野にしか適さない解析法なのであろうか。上に述べた特徴（利点）はどの分野においても有効なはずである。事実、そのように考えるのは適当でなく、流体力学、熱力学などの分野で扱われる場の問題に対する、さらには、一般的な偏微分方程式の境界値－初期値問題の有力な数値解法として位置付けができる解析法なのである。ただし、このような広い分野において有効な解法となるためには、乗り越えなければならない大きな問題が幾つも残されている。しかし、構造解析に偏った現状のFEMの利用の仕方を規定しているのは、何よりも次節で見るように、その発展の歴史的理由によるように思われる。

近年、この近似解析法に対して、応用数学者による検討が活発になされるようになり、その成果が新しい分野への応用を促すといった、工学技術者と応用数学者による、応用と基礎理論の両面からの、いわば車の両輪に譬えられるような、理想的な形での発展が見られる。数学者の参画が早い時期から得られているのはきわめて幸運なことである。基礎的、数学的構造に光があてられた結果、問題点を解決するための明確な方向付けがなされ、数値処理のための新しい技法がつぎつぎと開発されてきている。この状況は、後に見るように、FEMが現在つきあたっている壁は数学的なものであることを思えば、将来への展望を明るくする。

3. 離散化方法の流れから見たFEM

微分方程式の近似解析とは、無限回数繰返せば正しい結果に至ることが証明されている（それが期待されるにすぎないことが多いが）手続きを、適当な基準もしくは理由を設定して、有限回で打切る操作で代行することであると理解できよう。言い換えると、有限な操作で満足できる解が得られる離散化モデルを作ることを意味している。数値解析の手段たるコンピュータがいかに高速化、大型化しても、有限桁の数の有限回数の操作しかできないことには変りなく、本質的なところは同じである。変ったところと言えば、数値処理の量、速度についての制約が大幅に緩和された反面、ソフトウェアの開発にロードがかかるようになったことであろう。そのため、離散化のアルゴリズムは、なるべくシンプルで一般性があり、しかもその根拠が数理的に確かであることが重要視される。さらに付け加えれば、数値解析を現象のシミュレーションと見なす傾向を反映して、例えば、たとえ得られる解の精度が悪くとも、それが用いた近似に照らしてどの程度のものなのかが（感覚的に）把握できればよいといったような使い方のできる、物理的に明快な構造を持った解析アルゴリズムが好まれる。

有限要素法では、ずばりその名の通り、解析の対象となる時空領域を、有限個の要素と名付けら

れる部分領域の和と考えるという、きわめて直截的な形の離散化、有限化を行なっている。この離散化のやり方は物理的に無理がなく(場合によっては、微分方程式を経ずに、要素の特性を直接評価することによって系全体の離散化近似式を導出できることもある)、また得られる離散化(代数)方程式が系の局所的(local)な特性を代表したものとなるので、安定で好条件(well-conditioned)なものになっているという特徴がある。何よりも、直截簡明であることは、我々工学を専攻する者にとっては有難い。

あらゆる数値解析法に共通な離散化に焦点を合わせて、FEMにまとまってくる歴史的な流れを整理してみると、図1のようにまとめられる。流れを簡単に追ってみると、まず、構造解析の分野

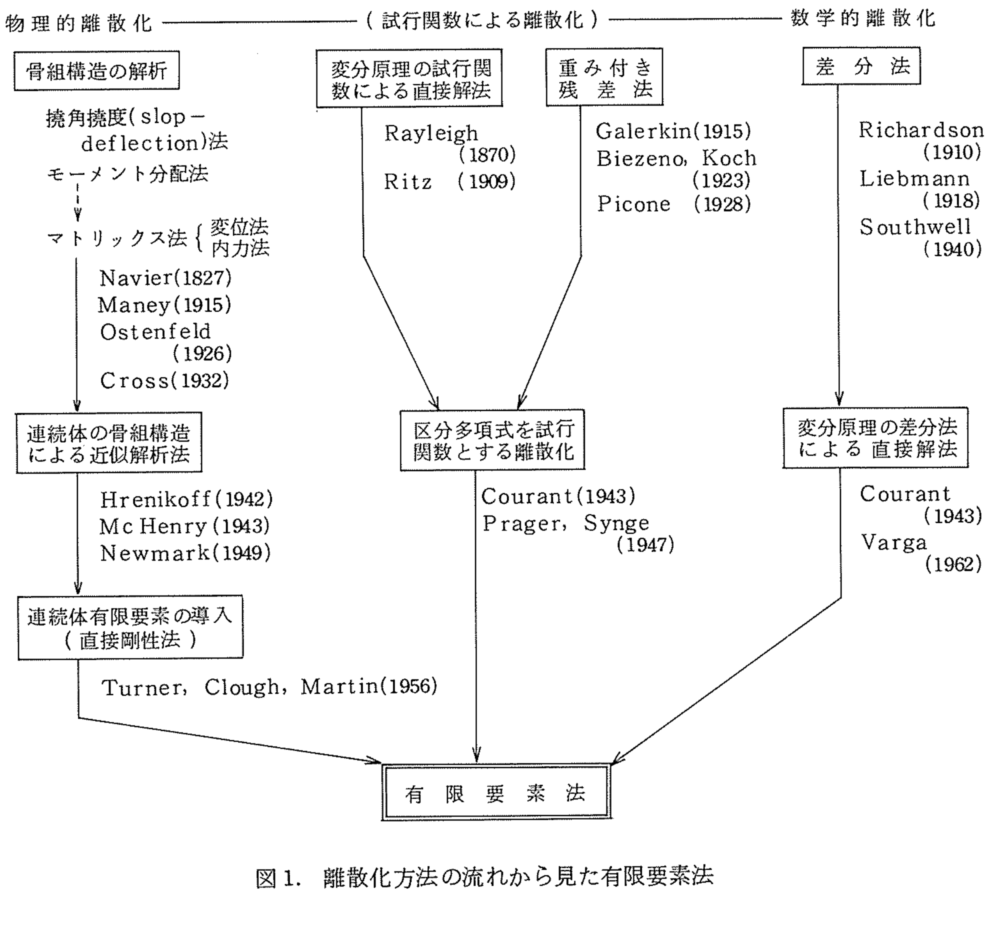

図1. 離散化方法の流れから見た有限要素法

では、構造体を構成部材の集合と見なすことは具体的な実体と対応するので、ごく自然に受け入れられ、FEMの原型とも言うべき離散化法に基づく応力解析が古くから行なわれていた。しかし、良い結果が得られたのは、骨組構造のような1次元的構造体の場合だけで、2次元、3次元的に広がった構造体にあてはめること、言い換えると、連続固体に対する場の方程式の形で記述された問

題の数値解法として数学的に定式化することは容易なことではなかった。コンピュータが利用できるようになり、多量のマトリックス演算が可能となるにつれ、様々な試みがなされた末に、一つの画期的な手法が提案された。Turner, Clough, Martin によるもので、それは、ⅰ)各要素は相隣るものと有限個の点(節点)で連結されていると考え、ⅱ)要素間の適合性(変位の連続性)が節点での適合性で代表できるような要素内変位モードを仮定して、それに対する節点に集中する力と変位の関係(剛性関係と呼ぶ)を導出し、ⅲ)節点での平衡条件より構造全体の離散化モデルを作るという手順より成っている。いかにも物理的考察のみから生れた武骨な解析法で、骨組構造に対するものとあまり異なっていないように見えるが、ⅱ)のステップに目を向けることが肝要である。この手法は局所的コンパクトな台の上の区分多項式を試行関数とする変分原理の直接解法に他ならないことが見抜かれるまでに時間はかからなかった。

一方、変分原理の直接解法には、Rayleigh, Ritz 以来の長い歴史がある。一方で、汎関数が見い出されないような微分方程式系に対しても有効な、積分表示式を利用して試行関数を用いて解を求める、今日、重み付き残差法(Method of Weighted Residual, MWR)と総称される一群の解析法が知られている。そして、区分多項式を試行関数として用いることの有効性もCourantにより指摘されていた。この流れより見れば、コンピュータを用いた解析法として組み立てる直前までのFEMの道具立ては、かなり以前に揃っていたことがわかる。しかもここにおける視点は、構造解析の流れにおけるものよりはるかに広く深い。

もう一つ、古くから用いられている離散化法に差分法(Finite Difference Method, FDM)があり、現在でも、とくに非構造的分野では広く用いられている。ところで、微分方程式を差分近似式で置き換える操作を変分原理を用いて行なうと、境界条件をも含めて整合性のある結果が得られるなど、好都合であることが知られ、一方で、部分領域(要素)と節点を規則的に配置した場合、FEMによる離散化の結果と一致することが知られるに及んで、今日では、FDMはFEMのファミリーの一員と見なすことができるとされている。

このように見てくると、FEMの寄って立つ視点の高さに気付く。FEMは離散化近似式を導くための一般性のある方法であると言えよう。今度は、その有効性について、支配方程式の面からながめてみよう。

4. 連続体の場の積分表現と区分多項式による離散化

これまで、FEM(およびそのファミリー)という言葉をルーズに用いてきているが、この解析手法の特徴をもう一歩踏み込んで検討するために、各種分野で利用されているFEMに共通なところを抜き出して、ぎりぎりまで一般化した形で表現してみると、

a) 積分形で支配方程式を表現する

b) 解析領域を物理的に同定しうる実体より成る（物理的時空間内の）有限個数の部分領域（要素）に分割する

c) 未知関数を各要素内で定義された区分多項式を試行関数として用いることにより、全領域に対する積分を各要素における積分の和として表現する（離散化する）

ということになろう。前節までの検討を一歩遡らせて、a) に目を向けてみよう。

FEM定式化の出発点として用いられている場の支配方程式の積分表現のやり方を整理すると、図2のようになる。

$\boxed{\text{変　分　原　理}}$ - - - - - - → Ritz(−Galerkin) 型有限要素法

汎関数の停留 ←→ Euler 方程式、自然境界条件

↓

拘束条件付汎関数の停留 ←→ Euler 方程式、自然境界条件、拘束条件

Lagrange 乗数法 ←

Penalty 関数法 ←

$\boxed{\text{仮想仕事の原理}}$ ←——→ 適合条件（許容変位場）、平衡条件（許容応力場）

$\boxed{\text{重み付き残差法}}$ ←

Galerkin法 - - - - - → (Ritz −) Galerkin型有限要素法

選 点 法

部分領域法

モーメント法

最小自乗法 ←

$\boxed{\text{擬　変　分　原　理}}$

随伴関数の導入 ←

最小自乗法 ←

図2. 微分方程式の積分表現の方法

自己随伴形の方程式の場合、あるいはうまく積分因子が見い出せて自己随伴形に変換できる場合、汎関数が存在して、その停留条件と支配方程式系が対応するという変分原理が見い出される。連続体力学の場については、変位の適合条件と応力の平衡条件の積分形表現としての仮想仕事の原理（もしくは、ダイバージェンス定理）が成立する。この原理は材料特性に依存しない形で書かれる

ので、変分原理よりもカバーできる範囲は広い。

一方、変分原理が存在しない場合でも、随伴問題まで含めて拡張された問題を考えると、汎関数を作ることができて、変分原理の形で書くことができる。そしてこれは、変関数に対する拘束条件を汎関数中に考慮するために用いられる常套手段であるLagrange 乗数法の特別な場合とも見られる(Lagrange乗数が随伴関数と見なされる)。拘束条件のもう一つの扱い方であるPenalty関数法からも、最小自乗変分原理を作ることができ、新たに関数を導入することなく、変分原理が存在しない問題に対しても、汎関数の停留条件と支配方程式を対応させることができる。

他方、支配方程式(および境界条件)を領域内(および境界上)での重み付き平均積分として満足させる形で積分表現するMWR ― 歴史的に見れば、選点法、Galerkin法などのような、試行関数を用いて表現した解関数中に含まれる未定のパラメータ(もしくは関数)を定める条件式を、残差の重み付き平均が零となる条件から導出するという形で用いられてきた解析法 ― がある。MWRには、形式上の適用範囲に対する制約はない。そして、随伴関数を導入する変分原理は随伴関数を重み関数と考えればMWRに属すると見られ、最小自乗変分原理も汎関数の停留条件を作ればMWRの一種であることが確認できること、さらに、試行関数と重み関数が同一であるとするGalerkin法によれば、自己随伴形の問題の場合には変分原理に基づくRitz形の解析法による結果と完全に一致することより、MWRは積分表示法の全体を包括する見方であると言える。

さて、これらの積分表現法とFEM離散化との関連を検討してみよう。変分原理に基づく離散化が行なえる場合には、自己随伴性からも明らかなように、対称性を有する代数方程式(具体的には、対称な係数マトリックスを有する連立代数方程式)が得られる。この対称性と区分多項式を用いる結果としての係数マトリックスのスパース性は、後の数値処理を大幅に楽なものとする。さらに、試行関数による近似解関数が一定の連続性を有し、積分が可能で、しかも各要素ごとの積分の和として全体の積分が求められるような場合、エネルギノルムの意味で最良解が得られること、また、たとえ連続性の条件が十分に満足されず、要素間境界上の積分値の寄与が残る場合でも、要素の大きさを小さくすると真の解への収束性が証明される場合があることが知られている。固体力学の多くの問題では、前者の条件を満たす解析を行なうことが可能で、その場合、得られた解の信頼性を確認するために精度の検討を行なう必要はまずない。

Ritz法の流れをくむFEMは、前述のように、Galerkin 法に基づくものに含まれてしまうので、Galerkin型FEMの一種であると見なされる。Galerkin型FEMは、自己随伴問題に適用するかぎりにおいては、問題が構造解析か非構造的なものであるかを問わず、上述の利点が少しもそこなわれないことは明らかである。ところが、構造問題は自己随伴問題として記述されることが多いのであるが、非構造的問題では少々事情が異なっている。流体場の支配方程式として代表的なNavier-Stokes の式を例にとると、対流項の非対称性のために、数値処理が面倒となるばかり

か、Galerkin型FEMが良い結果を与える保証はなくなる。一般に流体問題では対流項は重要な役割をなしている。そのため、種々の解決策(多くは、対称化を図る方法)が検討され、問題によっては有効な方法が見い出されているが、汎用性のあるものはまだ知られていない。しかも、対流項の影響が顕著であるような問題(工学上解明が要求される問題の多くはそうである)では、なお良い結果が得られていない。新しいブレークスルーがなされないかぎり、Galerkin型FEMが構造解析の分野で得た成功を流体力学の分野で達成することはできないとの指摘もなされている。

随伴関数の導入や最小自乗法による定式化によれば、対称な方程式を導くことができる。しかしながらこれはそのまま解析上の利点につながるものではない。前者では、随伴関数をも同時に定めなければならないという問題を抱え込むことになるばかりか、未知関数と随伴関数に対する離散化式が連成しない形になってしまい、事実上このような定式化をすることのメリットはほとんどないとされる。一方、最小自乗法によれば、被積分関数中に含まれる導関数の階数が高くなるため、試行関数の連続性に対する要求が厳しくなる。高階の導関数まで連続性を持たせた試行関数を作ることは一般に難しく、これは現実には大変大きな欠点と考えなければならない。

5. むすびにかえて

このように見てくると、FEMが、微分方程式(もしくは、積分方程式、微分−積分方程式)の形で数理モデル化された問題を解析するための、広い適応性を持つ有力な数値解法であることを見通すことができる。しかし、支配方程式の自己随伴性というところに一つの壁があって、そのこちら側ではきわめて有利な解法として認められているが、その向う側の問題に対しては、数ある手法の一つにすぎないという見方がなされている理由もうなずける。

ところで、FEMは実用的解析法として高く評価されているのであるから、種々の分野でどのような使われ方をし、成果を上げているかといった実際的側面に触れずして、その真価を語ったことにはならない。最後に、簡単にその一端を見ておこう。

最近、FEMの応用に関して話題となっている分野(テーマ、トピックス)を、思いつくまま列挙してみると、非弾性問題、板・殻体などの有限変形・不安定・崩壊問題、接触・摩擦問題、塑性加工問題、…といった、特に非線形性が問題となる現象の解析、波動伝播、衝撃・衝撃接解などの動的問題の解析、熱−弾・塑性、流体−構造物、電磁気−構造体、…などの各種非線形連成問題の解析、き裂、破壊のような特異性のある場の解析、大気、海洋などでの拡散、土質・岩盤の強度、生体の力学的挙動などの複合問題の解析……等々。これらより、いかに多方面で成果を上げているかをうかがい知ることができよう。また、コンピュータの能力が大きくなった今日、解析手法の実用的意味での評価は、ソフトウェアの入手しやすさとその質に大きく依存する。その面でのFEMの強さも群を抜いており、NASTRAN, ASKA, MARCなどの超大型のものを始めとして、膨

大な数の汎用プログラムが開発され、実用に供されている。どのようなタイプの問題の解析にも応じられ、境界条件の取扱いについての解析上の困難がほとんど取除かれているというアルゴリズムの特性は、益々高速化、大容量化するコンピュータとよくマッチングするようである。

以上、ＦＥＭの更なる発展の可能性について、限られた視点からではあるが、一小考察を試みた。筆者は塑性力学という特定工学分野でのＦＥＭの一利用者に過ぎず、そのため、偏った立場からの一面的な見方しかできていないものと思う。また、数式を用いない言葉による説明に終始したのは、物理的具体性を伴ったシミュレーション的な解析手法であるＦＥＭには、数式による抽象化した表現を用いるよりも、その方が似つかわしいと考えたためであるが、かえってわかりにくくなってしまい、また、誤解を生むような表現も多々あったことと思う。これらは筆者の非力の故であり、お詫び申し上げる。

末筆ながら、本稿を草する機会を与えていただいた牧之内三郎教授にお礼申し上げる。