



Title	ベクトル計算機による乱流の数値シミュレーション： (続編) 400万点のLES
Author(s)	梶島, 岳夫; 三宅, 裕
Citation	大阪大学大型計算機センターニュース. 1988, 69, p. 31-38
Version Type	VoR
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/65775">https://hdl.handle.net/11094/65775</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

# ベクトル計算機による乱流の数値シミュレーション

(続編) 400万点のLES

大阪大学工学部 梶島岳夫・三宅 裕

## 1. 序

本研究は乱流機構の解明を目的として、ナビエ・ストークス方程式を直接計算し、時間平均的な流れ場だけでなく渦構造まで数値的に再現しようという試みである。計算は非常に大がかりなもので、計算機性能に大きく依存し、大いにS X機の恩恵に浴した分野のひとつである。センターの開発研究に採用された間、プログラムの高速化・大規模化に取り組み、最高速にして最高解像度の計算を実現することができ（…という間にも世界のどこかでさらに大きな計算が進められているに違いない）、実験や理論的研究からでは得難い多くの知見を得ることができるようになった。

このような試みに際して、最小規模の乱れまでとらえうるために確保すべき差分格子数はレイノルズ数  $R$  に対して  $R^{9/4}$  と見積られている。本計算のような約 5000 の低レイノルズ数乱流の場合にも 2 億点以上を要することになり、これは現実的でない。LES (large eddy simulation) は乱流計算を実現する方法の一つで、格子以下のスケールすなわち SGS (subgrid scale) の乱流渦の作用をモデルで与えて計算を維持するものである。現在多用されているモデルは普遍性に若干の問題を残しているが、SGS の効果は格子幅の 2 乗のオーダーであることを考えると、ある程度の格子解像度を確保すればモデルに支配されない結果が得られるものと期待される。

ここで、そんな大きな計算をして何の役に立つの？というのがきわめて素朴な疑問であろう。将来においても乱流予測はレイノルズ方程式に対する乱流モデルに基づく方法が主流になると予想されるし、だいいち乱流場の速度・圧力の完璧なデータを得ることと流れを理解するということは別の話である。しかしモデルは経験的な定数や代数式への依存度が大きく、流れ場ごとにこれらを調整しなければならないのが実状である。モデルの研究のための情報を得る上で、実験的方法や統計理論的考察の限界を越えるのは数値シミュレーション以外にないと考えられ、そのために高解像度の大規模計算が期待されているわけである。また流れの機構の理解のためには、各種の統計的処理、条件付きサンプリング、単独の渦の追跡などのデータ処理が必要である。そこで本計算結果は、いくつかの時間ステップでの全格子点上のデータが磁気テープに保管され、多様な目的のために参照可能のようにデータベース化されている。

## 2. 数値計算の概要

### 2. 1 基礎方程式

まず流れ場の各量にフィルタをかけて乱れを大小のスケールに分離する。フィルタ幅は差分格子

幅の程度であるから、大スケール流れ ( $u_i, p$  で表す) とは GS (grid scale) 以上の流れ、小スケールの流れとは SGS の流れと考えてよい。LES では大スケール成分のみの流れの支配方程式を直接数値計算する方法である。大スケール流れ場の連続の式は

$$\bar{u}_i, i = 0 \quad (1)$$

であり、フィルタをかけたナビエ・ストークスの運動方程式は

$$\bar{u}_i, t = -\bar{u}_j \bar{u}_i, j - \bar{p}, i + (\bar{u}_i, j + \bar{u}_j, i), j / R \quad (2)$$

で表される。添え字  $t$  は時間微分  $\delta / \delta t$ 、添え字  $i$  などは空間微分  $\delta / \delta X_i$  を意味する。長さと速度はそれぞれ代表値  $L$  と  $U$  により、また圧力は  $p U^2$ 、時間は  $H/U$  により無次元化されており、 $R$  はレイノルズ数  $R = LU/\nu$  である。また  $\tau_{ij}$  は小スケール乱れの寄与で、ここでは一括して渦粘性近似とし、SGS 渦粘性係数  $\nu_S$  を Smagorinsky モデルで与えることとする。これにより運動方程式は

$$\bar{u}_i, t = -\bar{u}_j \bar{u}_i, j - \bar{p}, i + ((1/R + \nu_S) (\bar{u}_i, j + \bar{u}_j, i)), j \quad (3)$$

(ただし  $\hat{p} = \bar{p} + \tau_{kk}/3$ ) と書き換えることができる。後に示すように、本計算では十分に細かい格子を用いているので、大部分の乱流渦が直接計算されている。したがって SGS の効果は微小で、モデルへの依存度は非常に小さいことを強調しておく。そこで今後は GS を意味する  $\bar{u}_i, \bar{p}$  を簡単に  $u_i, p$  と記して、SGS の影響が重要なときにはその都度言及する。

## 2. 2 数値計算の概要

平行平板間の十分に発達した流れを考える。平均流れの方向を  $x$  (1)、流路幅方向を  $y$  (2)、横断方向を  $z$  (3) とする。以下では長さの代表値  $L$  には流路幅  $H$ 、速度の代表値  $U$  には壁面平均摩擦速度  $u_T$  を選び、 $u_T$  に基づくレイノルズ数を  $R_T = Hu_T/\nu$  で表す。 $x, z$  方向には有限の計算領域  $H_x (= 6.83)$ ,  $H_z (= 2.56)$  を設け、周期条件

$$u(x, y, z) = u(x + mH_x, y, z + nH_z)$$

( $m, n$  は任意の整数) を与える。また壁面上ではすべりなし ( $u = 0$ ) の境界条件とする。

主流方向と横断方向には等間隔格子とし、流路幅方向には格子を壁近傍で緩やかに集中させる。格子点は各方向に  $N_x = 256$ ,  $N_y = 117$ ,  $N_z = 128$  であり、計約 383 万点となる。 $R_T = 300$  に設定し、このとき壁指標で表す格子の解像度は  $h^+ x = 8.0$ ,  $h^+ y = 0.7 \sim 4.5$ ,  $h^+ z = 6.0$  である。

基礎方程式 (連続の式 (1) と運動方程式 (3)) の各項は 5 点中心差分 (ただし連続の式と圧力項の中の  $y$  方向微係数は 3 点差分) で近似される。時間進行差分には 2 次精度の Adams-Basforth 法を用い、連続の式と連立させて FFT で解き、新たな時間ステップでの流れ場を求めてゆく。時間刻みは  $\Delta t = 0.00015$  とする。

## 2. 3 数値計算法の改良

本計算のプログラムは、工業的な実用計算への適用も考慮して、spectral 法等の特殊な手法ではなく通常の差分法を用いること、モデルが数値誤差に埋もれない程度の精度で差分近似すること、計算途中での外部記憶の利用を避けること、という条件のもとに作成されている。

計算法の具体的な説明、ベクトル機を有効に利用するための技法については前報<sup>(1)</sup>に示したので省略する。本年度は主として高精度化と大規模化に取り組んだ。前報に示した通り A S L (SX 版) の二次元複素 FFT でよい結果が得られたのでこれを利用することにした。ただし入力データは実数なので変換後のデータ配置の対称性を利用して、実部と虚部のそれぞれ半分のデータを変換前の配列に収納した。その他にも、同時に必要としないデータの記憶場所を共有することにより、大幅に小容量化した。そのかいあって、400 万点近い格子点(容量は約 180 M B)が可能となったが、反面、プログラムは非常に複雑で、共同研究者間でも共有が困難になってしまった。

なお SGS モデルを加えない場合には 420 万点余りの格子点を確保することができた。しかしこの直接計算(DS)は、aliasing の除去をしていなかったので、最終的には発散した。

さて、計算時間は 1 time-step 前進するのに大阪大学大型計算機センターの NEC SX-2 N で約 8.3 秒を要し、これは 1 格子点当たりにすると約 2 マイクロ秒となる。この数値は、差分精度を改善したことを考慮すれば、前報<sup>(1)</sup>のコード L19 (格子点数約 34 万) の 4 マイクロ秒よりかなり改善されている。また使用計算機は異なるが、Moin ら<sup>(2)</sup>の LES (1982) の 70 マイクロ秒、Horiuchi<sup>(3)</sup>の LES (1987) の 26 マイクロ秒、Kim ら<sup>(4)</sup>の DS (1987) の 10 マイクロ秒などの最近の計算と比較しても十分に速い。

## 3. 計算結果

統計量( $\langle \cdot \rangle$ で表す)は、乱れが十分発達した後に  $x-z$  面内平均を無次元時間で 0.48 (3200

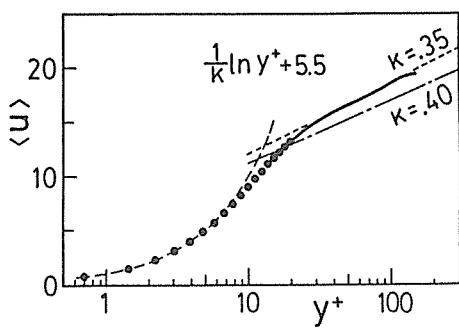


図 1 平均速度分布

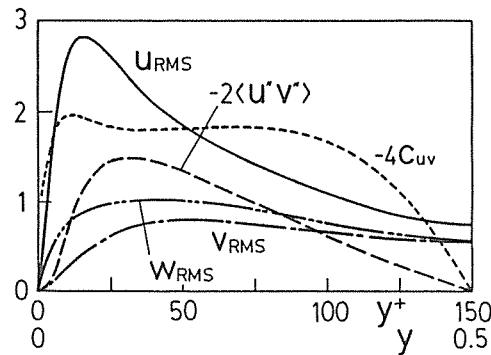


図 2 レイノルズ応力の各成分および相関係数

steps) の間に時間平均し、さらに中央断面の両側で平均して求めたものである。時間平均をとるための計算時間は約 7.4 時間であった。

図 1 に平均速度分布  $\langle u \rangle$  を示す。流路幅と中央断面の平均速度  $u_c$  ( $= 19.5$ ) によるレイノルズ数は  $R_c = 5840$  である。低レイノルズ数のため対数域は広くないが、 $30 < y^+ < 100$  では  $u^+ = 1 \ln y^+ / 0.35 + 5.5$  に近い。図 2 にはレイノルズ応力の各成分  $\langle u'' u_j'' \rangle$  (垂直成分については RMS 値  $\langle u''_i^2 \rangle^{1/2}$ ) および相関係数  $C_{uv}$  [ $= \langle u'' v'' \rangle / (u_{RMS} v_{RMS})$ ] の挙動を示す。 $u_{RMS}$  の最大値は 2.82 で  $y^+ \sim 15$  に、乱れエネルギー  $k$  の最大値は 4.47 で  $y^+ \sim 16$  にみられる。SGS 乱れのエネルギーを  $K_{SGS} = [\nu_s / (0.05 \Delta)]^2$  で見積ると、その最大値は 0.023 ( $y^+ = 40 \sim 60$ )、またせん断成分に対する SGS の寄与 ( $|v_{12}|$ ) の最大値は 0.020 ( $y^+ \sim 12$ ) で、いずれも GS 成分に比べて非常に小さい。

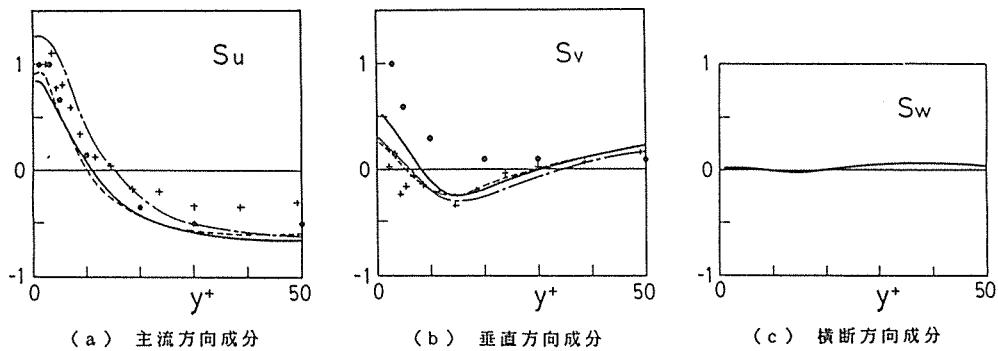


図 3 速度変動の歪度 (skewness) [———本計算; - - - Kim らの D-S<sup>(4)</sup>; - · - - Moser らの D-S<sup>(5)</sup> (曲管の凸側); ● は Kreplin ら, + は Barlow らの測定値]

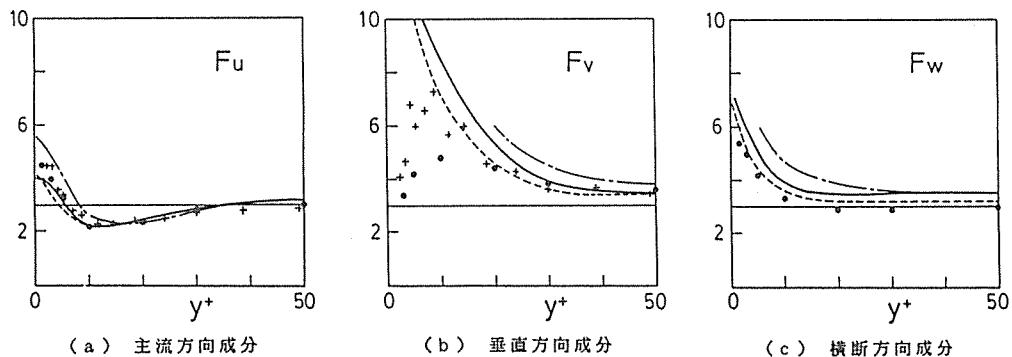
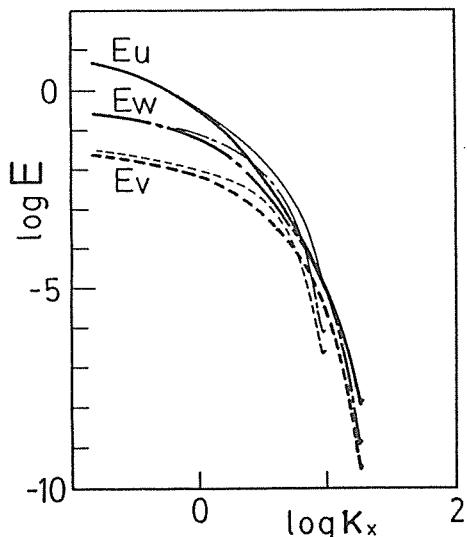


図 4 速度変動の尖度 (flatness) [記号は図 3 と同様]

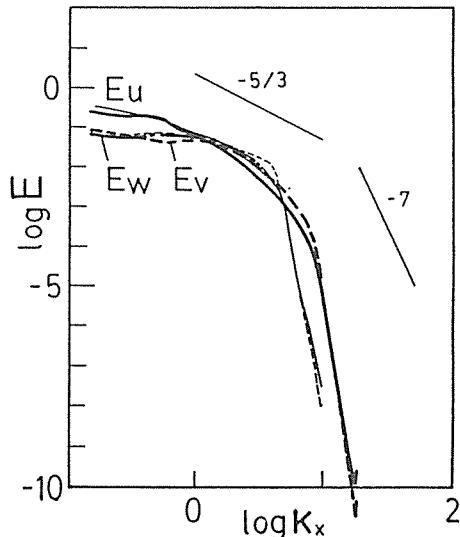
図 3 および図 4 には高次の統計量である歪度 (3 次)  $S_i$  と尖度 (4 次)  $F_i$  を DS<sup>(4)(5)</sup> および測定値 (いずれも文献(4)より転載) と比較して示す。 $S_w$  は本来 0 で、統計量を求めるためのサンプル数の妥当性の目安として示した。壁垂直方向  $v$  のみ、壁のごく近く ( $y^+ < 10$ ) では測定値にばらつ

きが大きく、計算結果と大きく異なる。3つの高解像度の計算がほとんど同じ結果を与えること、またuとwについては壁面まで全てのデータがよく一致することを考慮すると、vの測定精度に問題があるように思われる。

図5は速度変動の各成分の主流方向波数に対するスペクトル $E_i$  ( $K_x$ )で、図5 (a)は壁のごく近く、図5 (b)は流路中央断面のものである。図中には本計算に先だって実施された粗い主流方向格子の計算結果( $N_x = 128$ 、 $h^+ x = 15$ )を加えたが、低波数域の大規模な構造の違いはわずかで、図1～図4に示すような統計量の両者の差は小さかった。したがって従来のLESのように主流方向に長い格子を用いても支障はないと思われる。しかし後に示す散逸方程式の算定のような目

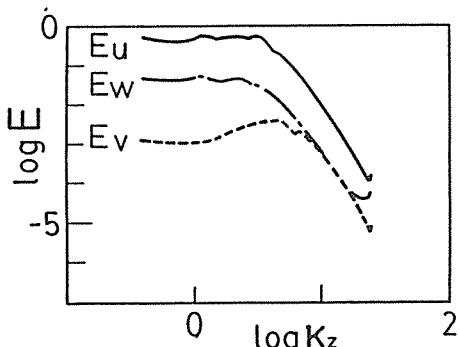


(a) 壁近傍 ( $y^+ = 10$ )

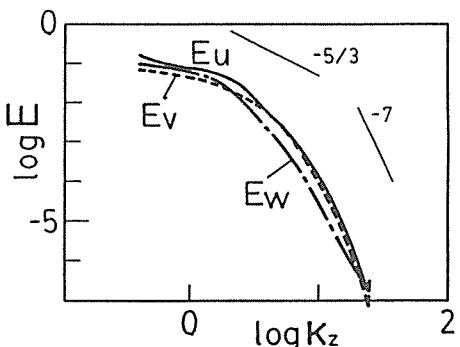


(b) 流路中央断面 ( $y^+ = 150$ )

図5 速度変動の主流方向一次元スペクトル [細線は  $N_x = 128$ 、 $h^+ x = 15$  の場合]



(a) 壁近傍 ( $y^+ = 10$ )



(b) 流路中央断面 ( $y^+ = 150$ )

図6 速度変動の横断方向一次元スペクトル

的には細かい渦までとらえることが重要で、主流方向にも十分な解像度を確保することが必要である。

図6は同じく速度変動の横断方向波数に対するスペクトル  $E_i (K_z)$  である。主流方向の場合よりも高波数側での落込みが小さいものの、渦構造は十分にとらえられている。図6(a)の曲線ピーク位置に対応する寸法  $\lambda_z$  は、 $u$  と  $w$  については  $\lambda_z^+ \sim 100$ 、 $v$  については  $\lambda_z^+ \sim 50$  となり、実験的に知られている値に一致する。

以上に示したように本計算では高次の統計量まで精度よく求められており、また高波数端でのスペクトル曲線の巻上がりはいずれも小さく、SGSモデルは主要な構造に影響を与えることなく、数値的な不安定要素を除去するように作用していることがわかる。

#### 4. 応力方程式の算定

現在乱流予測の大部分は  $k - \epsilon$  (2方程式) モデルあるいは応力方程式モデルによって行われている。モデルは通常高レイノルズ数乱流の理論に基づいているが、最近では壁乱流にも適用できる様々な修正モデルが提案されている。これらの全てを系統的に調べる余裕もないし、特定のモデルだけを検討したところで、「ワシのモデルを除外して乱流モデルを議論するのはけしからん」という物言いがつくに決っている。ここでは上記方程式の各項を本計算結果（ただし GS 成分のみ）を用いて算定するにとどめる。

図7はエネルギー  $k$  ( $= \langle q^2 \rangle$ 、ただし  $q^2 = u''_i u''_i / 2$ ) の収支式の各項（生成項  $P_k$ 、散逸項  $D_k$ 、

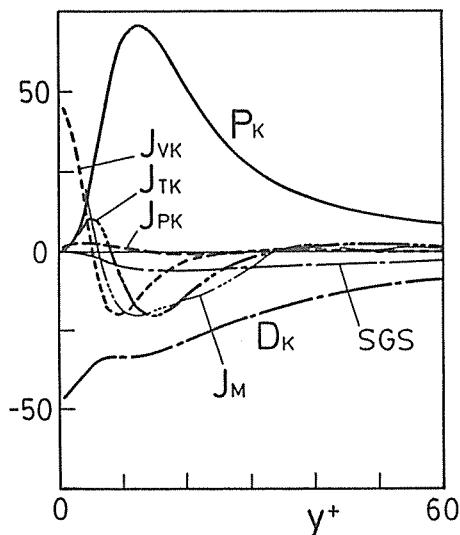


図7 亂れエネルギー  $k$  の収支

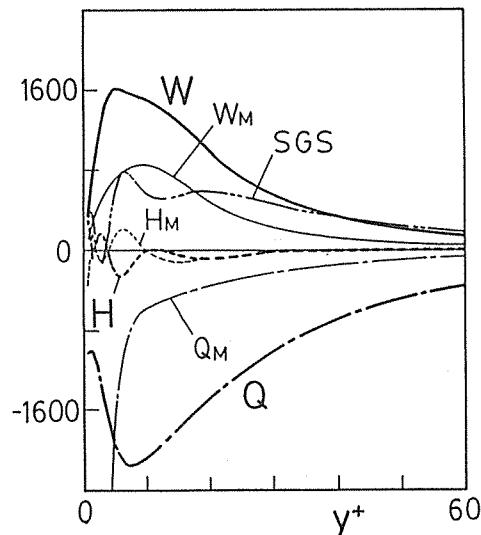
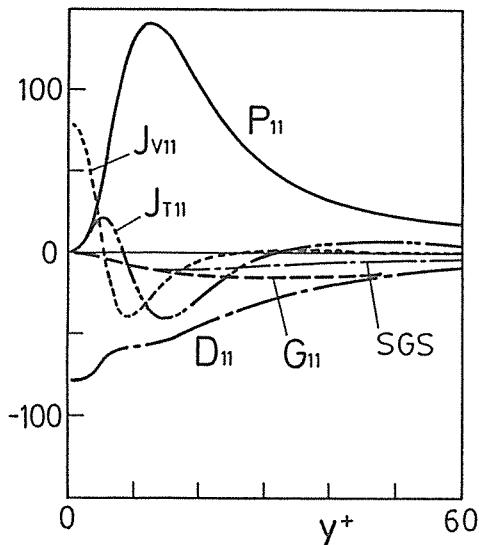


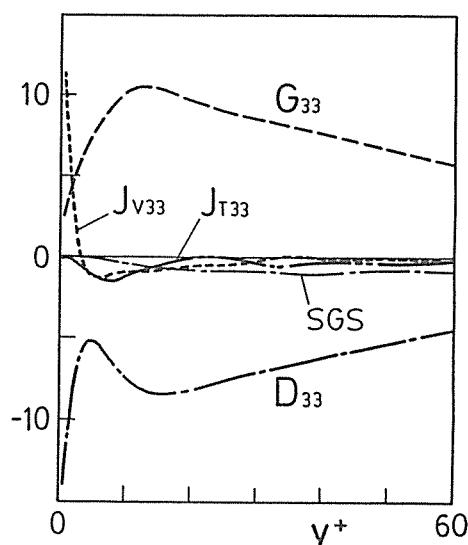
図9 散逸率  $\epsilon$  の収支

乱流拡散項  $J_{Tij}$ 、圧力拡散  $J_{pik}$ 、粘性拡散  $J_{vik}$  の分布を表したものである。細線はその余り、すなわち SGS の渦の寄与であり、散逸と見なしてよい。SGS 散逸は、粗い格子の場合には GS 散逸よりも大きくなり<sup>(6)</sup>、さらに実用計算ではエネルギー散逸の大部分を占めるであろう。しかし本計算では散逸に関与する渦の大部分が GS として直接計算されている。

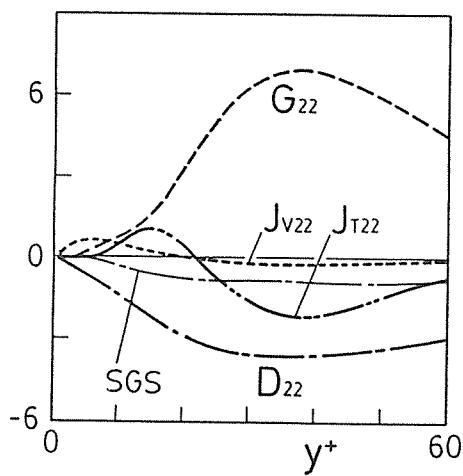
レイノルズ応力テンソルの各成分の収支式の各項 (生成項  $P_{ij}$ 、散逸項  $D_{ij}$ 、乱流拡散  $J_{Tij}$ 、粘



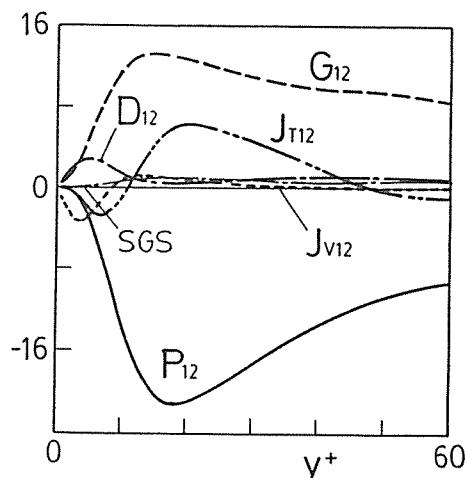
(a) 主流方向成分  $\langle u''^2 \rangle$



(b) 横断方向成分  $\langle w''^2 \rangle$



(c) 垂直方向成分  $\langle v''^2 \rangle$



(d) せん断成分  $\langle u'' v'' \rangle$

図 8 レイノルズ応力  $\langle u''_i u''_j \rangle$  の収支

性拡散  $J_{Vi,j}$ 、速度・圧力勾配相関 ( VPG ) 項  $G_{ij}$  ) を図 8 に示す。散逸項は非常に非等方的であり、等方に配分してせん断成分はないとするモデルは実状とは大きく異なる。

図 9 にはエネルギー散逸率  $\epsilon$  ( $= -D_k$ ) の式の各項 [発生項  $W$ 、消滅項  $Q$ 、拡散項  $H$ ] を示す。GS成分だけからの算出による不均衡 (図中の SGS) は、散逸の発生が不足していること、つまりはエネルギーの全散逸が計算されていないことの帰結である。また壁近傍での拡散項の算定には垂直方向の格子解像度はまだ不足している。これは、波数空間では散逸スペクトルはエネルギースペクトルよりも高波数側に寄るが、散逸の収支にはさらに高波数の渦が関わっているためである。定量的な精度に欠けるが、基本的なモデル (添え字 M) と比較する。モデルでは発生と消滅をともに過小に与え、それなりに均衡している形となっている。

以上の結果からも明らかなように、発達した高レイノルズ数乱流を前提としたモデルが壁乱流に適応できないのは当然であって、非等方性や低レイノルズ数を考慮した多くの修正モデルの提案がなされている。個々のモデルの検討は別の機会にゆずる。

## 5. 結 言

乱流渦の大部分を解像可能な差分格子を用いた最大規模の LES により、高次の統計量まで測定値とよく一致する結果が得られた。通常の差分法でも十分に細かい格子を設定すれば、spectral 法に比べても遜色のない結果が短時間に得られることを示し、複雑形状の流れ場への適用のための展望を開くことができた。

また本計算結果から算定された応力方程式および散逸方程式の各項の分布形状から、壁近傍でのモデルの修正に際しては、非等方性や低レイノルズ数を考慮した補正だけではなく、乱流渦の構造を意識した方法が必要であることが明らかになった。組織的構造と乱れの生成や散逸との関わりを明らかにするためには、統計平均だけではなく各量の局所的な分布が不可欠である。そのような研究を本計算で蓄積したデータベースのひとつの利用目的と考えている。

## 文 献

- (1) 梶島・三宅, 大阪大学大型計算機センターニュース, 17-2 (1987), 83.
- (2) Moin, P. and Kim, J., J. Fluid Mech., 118 (1982), 341
- (3) Horiuchi, K., J. Comp. Phys., 71-2 (1987), 343.
- (4) Kim, J., Mion, P. and Moser, R.D., J. Fluid Mech., 177 (1987), 133.
- (5) Moser, R.D. and Moin, P., J. Fluid Mech., 175 (1987), 479.
- (6) 三宅・梶島, 機械の研究, 39-11 (1987), 1189.