定常圧縮流の数値シミュレーション

大阪大学基礎工学部　椿　下　庸　二
大阪大学基礎工学部（院）　北　川　哲　也

1. まえがき

数値流体力学が急速に発展するに伴って、これまで求めることがむつかしかった複雑な流れ場も解かれ、物理実験が困難な場合でも数値シミュレーションによってある程度解析されるようになった。利用できる計算機が大型化、高速化されるにつれ、数値流体力学における各分野の技術の進展にはめざましいものがある。例えば、数値手法の改善、格子形成法、境界条件の処理、数値人工粘性モデルの高度化、さらに図形処理を利用した流れの可視化法の進歩等、多方面にわたっている。それらについて、すべて説明するわけには行かないので、他の解説[1〜4]を参照していただくとして、ここでは非粘性の圧縮性流れ場を差分法で数値計算した２，３の例[5,6]を紹介して、上記の点に少しふれるにとどめる。

2. 数値手法

流れの問題を数値的に解く場合には、大きく分けると差分法と有限要素法になるが、流れが高速になり圧縮性が重要になる流れを数値的に求める場合、差分法がよく用いられている。簡単にするため、流れは非粘性で熱伝導性を無視する。流れがうずなしであると仮定すれば速度ポテンシャルが導入でき数値計算は非常に楽になる。しかし、圧縮性が重要になる高速流れでは、通常、衝撃波が発生してうずなしの仮定は満たされなくなる。このような場合、流れ場は、密度、速度、圧力に関してオイラー方程式といわれる連立非線形偏微分方程式で支配される。

衝撃波を伴う圧縮性流れで、定常流れ場を対象にする場合に、時間進行法あるいは時間依存法と呼ばれる方法がある。この方法では、非定常のオイラー方程式を差分近似し、適当な初期値を与え、各時間ステップ毎に流れ場を計算し、十分な繰り返し回数後流れ場が時間的に変わらなくなった時の解を定常解と見なす。時間進行法では、衝撃波が自動的に形成される。ただし、オイラー方程式に対しては非粘性流仮定のため衝撃波の位置で解が振動しやすく、一般に数値人工粘性を付加する。実際の流れでの衝撃波は不連続面とみなされるのに対し、数値解では粘性項付加により有限幅の衝撃波になるので格子間隔を狭めることにより精度を上げようとする。よく知られているように陽解法では、ＣＦＬ安定条件により、時間ステップ Δt が空間格子の最も小さいもので決まってしまう。このため、定常解を得るのに多くの反復回数が必要になり能率的ではない。これを回避するため、時間進みに理論上制限のない陰解法が提案され、その代表的なもの

として Beam & Warming 法がある。ただし、この方法は2次元問題で、1タイムステップ当り2回のブロック三重対角行列の反転が必要である。対角化を施すことによって演算量を減らす等の計算効率上の改良が図られてきたが、それでも陽解法と比べ時間上の有利さはあまりない。最近、MacCormack は Beam & Warming 法のこの欠点をある程度減ずるため、ブロック三重対角のかわりにブロック二重対角行列の反転を解けばよい新しい陰解法を提案した。これら陰的方法は理論的には時間ステップ Δt に対し無制限であるが、2次元や3次元問題に実際に適用すると必ずしも Δt は大きくは取れないし、境界条件の陰的な取扱いも必要となって使い勝手がわるい。一方、陽解法では安定条件のため時間ステップに制限があるが、そのアルゴリズムに対するプログラムのベクトル化率が高くスーパーコンピューター向きと言える。後述する例では陽的マコーマック法に数値人工粘性項を付加したものを用いる。

計算手法の最近の動向として、衝撃波付近での不要な振動を避けかつ高精度を維持することのできるような種々の方法が提案されている。その内の一つに風上差分法がある。この方法は実質的には中心差分+人工粘性項の形をしており、強い衝撃波でもかなり安定的にしかも高い解像度で求めることができる。ただし、流れ場の各点で流れに応じて差分スキームを切り替えることが必要で、マコーマック法のようなアルゴリズムの簡単なスキームに比べ計算時間はより多くかかる。又、最近、衝撃波を2ないし3の空間格子点で捉えることのできるスキームとして、TVDスキームが注目されているが、やはり計算時間はかかる。

スーパーコンピュータが容易に利用でき、又その計算機の記憶容量や処理速度が増大するにつれ、かって計算機能力の制限から実用的でないとされた方法、例えばニュートン法が見直されている。この方法は高次代数方程式の解を得る手法として従来からよく用いられている。円弧翼形状まわりの2次元遷音速流れ場計算で、反復回数が10～20回で定常解が得られたとの報告があるが、今のところ計算時間の短縮までには至っていないようである。

3. 格子形成法

多次元の流れの問題に差分計算を行う場合、物体表面に沿わせて格子を作ることが一般的になってきている。計算の安定性、収束性から格子形状は滑らかに変化しさらに直行性をできるだけ満足させる必要がある。又、精度の面から流れの急激に変化する、例えば衝撃波やすべり線で格子間隔が細かくなるものが望ましい。

翼のような曲がった形状の物体まわりの流れを数値的に解こうとする場合、正方格子を用いると物体表面上に格子点がのらないため、数値解の精度、安定性に悪影響する。まさしくこのことが差分法が有限要素法より不利であるとされた大きな点であった。1970年代の中頃になって、座標のひとつが物体表面と一致するようないわゆる物体適合座標変換法[7]が導入され、複雑な形

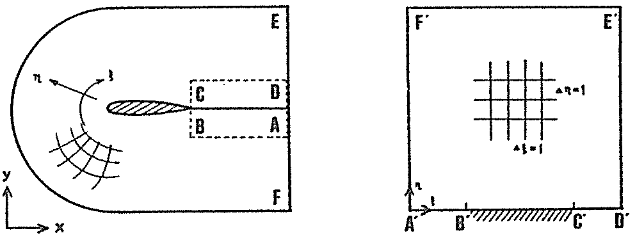

図１　物体適合座標

状物体でも境界条件が比較的容易に計算に組み込まれるようになってきた。この方法では、図１に示すように物理面上の物体適合の一般曲線座標系を、計算面上の正方格子座標に変換してその上で基礎方程式を解くことになる。現実的な複雑な形状を取り扱う場合には、単一の座標系でそのまわりを覆うとなると座標が極端に捻れ、格子間隔が急に変化せざるをえなくなる。そのため数値解の精度に悪影響を与え、悪くすると解が発散したりする。これを回避する手法として、マルチブロック法と呼ばれる方法が提案されている。この方法では、物体を単純な形状に分割してそのまわりに座標を作り、各々の領域間をうまく接続しながら別々に解くことになる。

格子形成でさらに進んだ方法は、解適合格子法[8)]と呼ばれるもので、流れ場の計算の途中で格子を刻々移動させ、衝撃波などのように物理量が大きく変化するところに格子を自動的に集中させる。これにより、格子点を増やさずに解の精度を高めることができる。又、流れ場計算では一般に、初期子生成に時間と労力がかかる。解適合格子法のもう一つの利点として、計算途中で格子を自動的に妥当な位置に再配置してくれるため、初期格子にそれほど気を使わなくてもよいことである。

4. 人工粘性について

計算の安定性のため数値人工粘性が付加されることが多い。よく用いられているのはJameson型の人工粘性モデル[9)]である。これは領域全体に対し４次の粘性項、衝撃波の付近では２次の粘性項が主となり、基本的には衝撃波での解の振動を抑え空間的な安定を保つ。ただし、このモデルでは人工粘性の強さをきめるパラメータが２つあり、数値解がなまってしまったり衝撃波付近での大きな振動をともなわないように適当に与える必要がある。問題毎にこのパラメーターの適切な値が変化するので使い勝手がかなり悪い。そこで与えるパラメータの数が非常に少ない、あるいは無くてすむ方法が望ましい。そこで、最近注目されている方法が前述のＴＶＤスキームである。この方法はスキーム自身優れていて安定して精度良い解が得られるが計算量や判定条件の増加のため計算時間がかかる。そのため、簡易型のＴＶＤスキーム[10)]も提案されていて、後述の自由噴流の結果にも使用した。

5. 計算時間の短縮

5.1　スキームの選択

スーパーコンピュータがスカラー処理に基づく汎用機に比べ、やはり10〜20倍以上高速でないとその特徴を生かしきっているとは言えない。その性能を十分に発揮するための１つの目安としてプログラムのベクトル化率がやはり９５％以上であることが必要である。ベクトル化率を上げるためにアルゴリズム自身がシンプルであることが基本的である。前述のように、差分法として陽的マコーマック法を使用するとベクトル化率はほとんど１００％に近くスーパーコンピュータ向きである。その他、プログラム上、手軽にできることとして、ＤＯ文でループ長の長い方を内側に入れるとか、サブルーチン、外部関数はめんどうでも可能な限りループ内に展開して入れてしまう。さらに、最深ＤＯループからのＩＦ文の除去等も効果がある。これらの点を含め計算高速化のためプログラム上注意すべき点についてセンターニュースの解説[11]が参考になる。

5.2　時間分割法

非定常多次元問題に対し、例えばマコーマック法を適用し直接に差分プログラム化できるが、この場合、時間ステップ Δt は１次元問題よりも厳しくなる。例えば２次元問題では時間ステップは約１／3 となる。その制限を軽減する方法として、時間分割法がある。これは基礎方程式を空間の各方向に分割して、各々に対しその１次元計算の組合せにより解を求めて行くことができる。これにより、プログラム自身も容易になるし時間進みも緩和する。又、各空間方向に差分を分割することにより計算機の並列処理にも都合がよいとの指摘がある。

5.3　局所時間ステップ法[4]

最近では、物理量の大きく変化する場所に格子点を密に、変化の小さい場所では粗になるようにして、全格子点を増やさず高精度を保たせようとする。時間進行法で解の時間発展を正しく追跡するために全領域で共通の時間ステップをとることになる。前述のようにこの時間ステップは最小の格子間隔で決まる。その結果、格子間隔の粗い場所では不必要に時間ステップが小さく計算効率が悪い。定常解を求める場合には、場所毎に時間ステップを変化させ収束を速める、いわゆる局所時間ステップ法が有効であることが知られている。翼まわりの流れ場計算でこの方法を適用したところ、同じ収束で比較すると約２５％計算時間が減少した。従って、定常問題ではぜひ使うべきである。

6. 計　算　例

最初の例では、風洞内部に置かれた軸対称物体にマッハ数2.5で気体が流入してできる定常流れ場を考える。軸対称オイラー方程式を、陽的マコーマック法に Jameson の人工粘性項を付加

し解適合格子を用いて解く。格子点数は１２１×３１である。表１に示すように、解適合格子をチューニング無しで適用すると、固定格子に比べ１タイムステップ当り約６倍も時間がかかった。そこで、サブルーチンをメインプログラムに展開して組み込むことで約４０％時間の短縮、解適合格子のアルゴリズムの修正により最深ＤＯループからのＩＦ文の除去でさらにその４０％時間短縮、解適合格子法による格子形成を毎回ではなく数回おきにやることで計算時間の短縮が図られた。結局、解適合格子を組み込んだ場合の計算時間の増大は、格子を固定した場合に比べ約10％以下に抑えることができた。図２は等密度線図を示し、物体前方にできる離脱衝撃波が風洞壁で反射する様子がとらえられ、格子網の衝撃波の位置に一致して密になっていることがよくわかる。

次の例は、超音速自由噴流である。ジェットエンジン、ロケット等の排気ガスのように、高圧の気体がノズルあるいはオリフィスを通って低圧の空間へ膨張する時にできる流れ場が自由噴流である。この流れ場は、内部に衝撃波を含み膨張圧縮の反復過程の複雑な構造になっている。筆者の一人[12]は以前この流れ場の数値解析を行い、ブロック二重対角行列の反転ですむ陰的マコーマック法の改良型を用いて解いた。噴流形状、衝撃波やすべり線の位置、又密度分布を含め実験データとよく一致した。陰解法であるため時間ステップは陽的マコーマック法の８倍（ＳＸ－１、ＣＰ）にとれたが、アルゴリズム自身がベクトル化しにくいためスーパーコンピュータとしての計算機の能力がほとんど出なかったと結論できる。そこで最近、アルゴリズムの見直しを行い、スキームを陽的マコーマック法に人工粘性項としてＴＶＤタイプのものを採用した。格子点数は１３０×４０、プログラム全体のベクトル化率は９９.３％で、計算時間はＳＸ－２Ｎで約40秒であった。図３に得られた結果の一例として等密度線図とその時の解適合格子を示す。

最後に紹介する例は高速流中に置かれた２次元翼（NACA 0012翼）まわりの遷音速定常流れ場の計算である。陽的マコーマック法にＪameson の人工粘性項を付加し解適合格子と局所時間ステップ法を使った。格子は１６１×４１（翼面上１０１点）のＣ型格子である。一例として、自由流マッハ数０.８で迎え角１.２５°の場合の等圧力線分布と解適合格子を示す。無限上流の平行な一様流は翼に近づくにつれて圧縮され減速し、ついには翼前縁でよどむ。そこを過ぎると急激に加速膨張して超音速になり翼中央付近で衝撃波を形成する。図４から明らかのように、格子は衝撃波の位置に十分集中しておりその位置を解像度よく捉えている。プログラム全体のベクトル化率は９８.５％で計算時間は１ケース当りＳＸ－２Ｎで約３０秒であった。

表１　１タイムステップあたりの計算時間の比較　（ＳＸ－１）

計算条件	固定格子を用いる場合	解適合格子を用いる場合		
		チューニングなし	チューニングあり	
			毎回	数回おき
CPU / 1 STEP (msec)	6.2	34.9	14.8	6.8

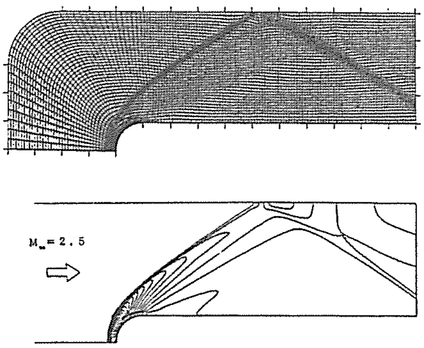

図２　風洞内部の軸対称鈍頭物体をすぎる
超音速流れ場　解適合格子と等圧力線図

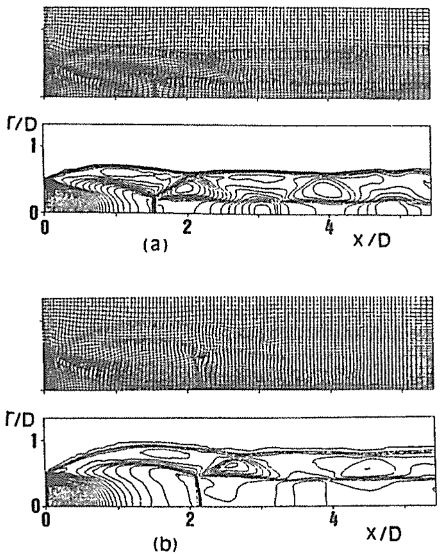

図３　軸対称自由噴流における解適合格子と等密度線図
（ａ）$P_{exit} / P_\infty = 3.4$　（ｂ）$P_{exit} / P_\infty = 6$

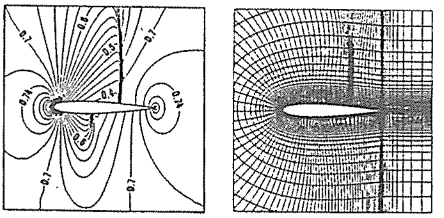

図4　２次元翼まわりの高速流れ場（M∞＝0.8，迎え角1.25°）
等圧力線図と解適合格子

7. おわりに

圧縮性の高速流れ場の問題に対し、ＳＸ－１、ＳＸ－２Ｎを使用して精度を保ちながら特に高速計算を目的として工夫を行った。そのために、スキームの構造が非常に簡単で扱いやすい陽的マコーマック法と、解の安定のため人工粘性項を付加したものを使った。さらに、物理量が急激に変化する衝撃波等の位置を含めた解の精度、つまり解像度を高めるため解適合格子を採用した。その結果、実用的な計算時間で精度よく安定して衝撃波を含む圧縮性流れ場を解くことが可能となった。

定常問題では、時間ステップが大きく取れる陰解法が有利とされスキームも種々提案されている。しかしベクトル処理型の計算機であるスーパーコンピュータの能力をできるだけ引き出すためには、やはり陽解法か有利であろう。又、最近では風上差分法やＴＶＤスキームが注目され、強い衝撃波を含む場合でも安定して解像度の良い解を得ることができるようになった。しかし、計算時間の点から言えばまだまだ改良の余地がある。残る大きな問題として、得られた数値解の信頼性の問題がある。現在の段階では、解は実験データと比較され、その信頼性をチェックする。それでは、実験データのない場合の計算に対してはその解の信頼性はどのように保証されるか、といった問題が最後に残ってくるのではないか。

本稿によって、計算機センターを利用する皆さんが数値流体力学に興味を持ち、流れの問題に挑戦されていく時に少しでも参考になれば幸いである。最後に、２次元翼まわりの流れ場計算については、大阪大学基礎工学部学生　吉本和加さんの協力を得た。ここに記して謝意を表する。

参考文献

1）日本航空宇宙学会誌，Vol. 34, No. 390（１９８６）.

2）日本機械学会誌，Vol. 87, No. 785（１９８４）.

3）Kutler, P.：航空宇宙技術研究所特別資料　SP–7（１９８７）.

4）Pulliam, T. H. and Steger, J. L.：AIAA Paper 85－0360（１９８５）.

5）北川哲也，椿下庸二，吉川孝雄：第１９回流体力学講演会講演集（１９８７）.

6) 椿下庸二, 北川哲也, 吉川孝雄：第１回数値流体力学シンポジウム講演論文集（１９８７）.
7) Thompson , J . F. et al. : Numerical Grid Generation , North−Holland (1984).
8) Nakahashi, K. and Deiwert, G.S. : AIAA J., Vol. 25, No. 4 (1987), pp.513−520.
9) Jameson, A. and Schmidt, W. : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 51, North−Holland (1985), p. 467.
10) Davis , S. F. : NASA CR 172373 or ICASE Report No. 84−20 (1984)
11) 梶島岳夫, 三宅裕：大阪大学大型計算機センターニュース, Vol. 17, No. 2 (1987).
12) Tsubakishita , Y. : Trans . Japan Soc. Aero . Space Sci., Vol. 30, No.90 (1988), pp. 211−219.