



Title	高速流れ場の中の音の伝播
Author(s)	椿下, 庸二
Citation	大阪大学大型計算機センターニュース. 1988, 71, p. 77-87
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/65807
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

高速流れ場の中の音の伝播

大阪大学基礎工学部 椿下 庸二

1. まえがき

音の伝播問題への数値法については、空力音響学の領域に限っても、従来から数多くある。しかし、その適用例は、放射や散乱、室内音響のように音波の伝播する媒質は静止している場合がほとんどであり、噴流のように高速で運動する媒質中での音の伝播といった場合への応用は非常に少ない。本稿では、このような高速流れ場中の音源からの音の伝播を考え、それに対して差分法を適用する。

ここでは、まず、音響問題における代表的な数値解法を概略する。次に、本論にはいる準備として、差分法の誤差解析について述べ、この方法を音の伝播問題に適用する場合に前もって考えておくべき種々の問題点について議論する。最後に、差分法による音波の伝播および音場計算の具体例として、亜音速せん断流中の音源による音場の数値計算について紹介する。

流れ場と音の問題は大別すれば発生と伝播になる。もちろん、これらは密接に結びついているのであるが、ここでは音の発生の問題には触れない。興味ある読者は、例えば、坂尾¹⁾、Ribner²⁾による解説等を参考にしていきたい。

2. 音場の数値解法

本稿は、差分法を中心に話を進め、それについては後で詳しく述べることにする。ここでは、その他の代表的な手法^{3,4)}について概説する。ただし、音の伝播問題への有限要素法の適用については紙面の制限から他の文献⁵⁾にゆずることにする。

2.1 幾何音響学 (Geometrical acoustics, Ray acoustics) の近似

音波の振幅と伝播の方向が波長の距離で一定とみなせる場合の近似であり、非均一な媒質中での伝播に対しては代表長に比べ波長が十分短い（一般に高周波数の波）ことが必要である。この方法を用いると、音の伝播を直感的なイメージでとらえることができる。しかし、波の回折 (wave diffraction) が説明できない、又、非均一な場に適用すると、多くの場合、'caustic' と呼ばれる包絡線が発生するが、その付近では幾何音響学の近似は成立しない、空間各点における音圧の計算が結構めんどうである、などの欠点を持つ。

2.2 スペクトル法

スペクトル法は本来は級数展開法的一种で、一般にフーリエ級数あるいはチェビシェフ級数を用いる。フーリエ変換法もこの方法に含まれる。スペクトル法は空間差分を含まないこと、後述する

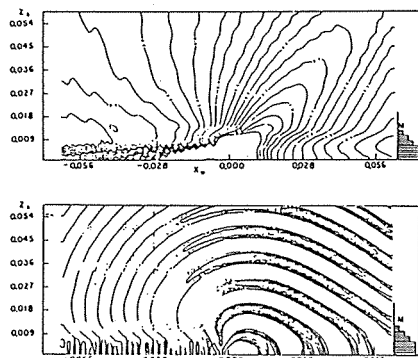
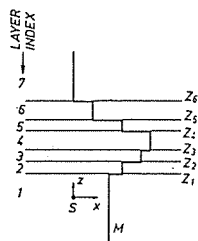
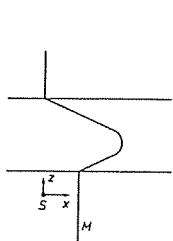


図 1 2次元せん断流における
音の伝播 (Candel, 文献6)

エイリアシング誤差を消去できるなどの利点があり、流体力学や波動問題に広く適用されている。ただし、周期境界条件が必要であること、衝撃波のような急な流れの変化を伴う問題に不適で、簡単な流れに適用が限られているようである。

Candel⁶⁾は亜音速せん断流中の線音源からの音の伝播を数値計算している(図1)。まず、せん断層内の連続的な速度分布を階段関数におきかえ、各々の層内では流れの状態が一樣であると仮定する。音源は単一周波数の点音源で中心軸上に固定されており、各層間の接触面で圧力および垂直方向の流体粒子変位が連続であること、又、最後の層については放射条件を満たす必要がある。この系に対して、 x に関してフーリエ変換し逆変換にFFTを用いる。しかし、実際の適用に際し、ある層で波がほとんど減衰してしまい外部に放射できないといった不都合が生じるため修正を行う必要がある。図1は $M=0.8$ で5層からなるせん断層の場合の計算結果で音圧の大きさおよび波面を表す。 $\theta = 50^\circ (= \cos^{-1} 1/(1+M))$ に音圧のピークがあり、主流に近い方向の音圧レベルは低くなる。このような音場の特徴は高周波数に対する幾何音響学の近似による結果とよく一致している。

この方法を軸対称問題に適用する場合には、フーリエ・ベッセル変換となるが、その逆変換において、積分径路上に 'Rayleigh pole' があるためFFTのサンプリング問題に工夫がいる⁴⁾。従って軸対称問題へのこの方法の適用は今のところ簡単な問題に限られている。

2.3 境界要素法

境界積分法は、微分方程式の境界値問題をそれと等価な積分方程式に変換することで、境界上の積分だけを含む方法であるが、最近では境界要素法と呼ばれる数値解法が注目されている。境界要素法は、境界が複雑な幾何学的形状も扱いやすい、未知量が境界上の値だけであるため有限要素法等に比べ未知数が少ない、又、入力データ量が減り労力が省ける、さらに無限遠まで領域が広がる場合のいわゆる放射条件を簡単に満足するなど有効な点が多い。しかし、一方、一般の非線形偏微分方程式に適用できる差分法や有限要素法に対し、境界要素法では同次方程式に限られ、特異解(

グリーン関数)が簡単に得られるものでないと思えない⁷⁾。さらに数値計算上、完全に密な行列の反転が必要で計算点の割には計算量が減らない、さらに空間の1点での値を求めるのに、グリーン関数を境界上で計算しなおす必要があるなど不利な点も多い。

境界要素法の音響問題への適用は、音響放射つまり振動する物体からの無限に広がる媒質中への音の放射、あるいは散乱のように音波が物体によって反射、回折する場合、さらに室内音響のような内部音場の問題に限られているようである。これらは、Helmholtzの方程式に支配される。Candel⁴⁾はこの境界積分法を用いて入射平面波が剛体により散乱して作られる音場を具体的に計算して、既知の解析解と比較した。数値解は全体的にはよく一致しているが、剛体球表面のごく近くではあまり精度がよくない。これは境界積分法においては境界上で特異項の積分を含んでいることの影響で何らかの対策が必要であることを示している。

3. 差分方程式と誤差解析

波動問題を差分法で解く場合に、その差分法がもつ誤差の性質が解にどのように影響するかを考えておく必要がある。以下で述べる誤差解析については、既に多くの文献で記述されているので、ここでは概略を述べるにとどめる。次の波動方程式に対するMacCormack法を適用した場合の数値誤差について述べる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

に対するMacCormack法は

$$\begin{aligned} \bar{u}_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{c \Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) \\ u_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[u_j^n + \bar{u}_j^{n+1} - \frac{c \Delta t}{\Delta x} (\bar{u}_{j+1}^{n+1} - \bar{u}_j^{n+1}) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

この差分方程式の厳密解をD、有限桁による実際の計算機を使って得られる差分方程式の数値解をN、もとの偏微分方程式の解析解をAとすれば、計算機による数値解のもつ誤差(A-N)は、丸め誤差 $\varepsilon = N - D$ および離散化誤差 $\delta = A - D$ からなる。ここで丸め誤差は、実際の計算機では有限桁計算のため数値を丸めるのでそれにより生じる誤差である。一方、離散化誤差というのは、連続的な問題を離散化したための誤差で、主に打ち切り誤差と境界条件の誤差からなる。

3.1 増幅係数による安定性解析⁸⁾

ここではvon Neumannによるフーリエ級数に基づく安定性解析を行う。差分方程式(2)は線形であるから、丸め誤差 ε はuと同じ式を満足する。つまり

$$\varepsilon_j^{n+1} = \varepsilon_j^n - \frac{1}{2} \frac{c \Delta t}{\Delta x} \left(\varepsilon_{j+1}^n - \varepsilon_{j-1}^n \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left(\varepsilon_{j+1}^n - 2 \varepsilon_j^n + \varepsilon_{j-1}^n \right) \quad (3)$$

上式に対する解を次の形で仮定すると

$$\varepsilon(x, t) = \sum_m e^{\alpha t} e^{i k_m x} \quad (4)$$

ここで α は複素数, k は波数である. 式(3)は線形であるから単一の項 $\varepsilon_m = e^{\alpha t} e^{i k_m x}$

に基づく誤差のみを考えればよい. そこでこれを式(3)に代入して整理すると

$$\frac{\varepsilon_m^{n+1}}{\varepsilon_m^n} = 1 - \nu^2 (1 - \cos \beta) - i \nu \sin \beta, \quad \nu = \frac{c \Delta t}{\Delta x}, \quad \beta = k_m \Delta x \quad (5)$$

ν はクーラン数, β は波数パラメータである. $\varepsilon_m^{n+1}/\varepsilon_m^n$ は1タイムステップ当たりの丸め誤差の増加の割合を意味し, 増幅係数 (Amplification Factor) と呼び, 以下 G で示す. 差分式が安定のためには $G \leq 1$ が必要であり式(3)より $\nu \leq 1$.

差分方程式の厳密解に対する増幅係数 u_j^{n+1}/u_j^n は, 差分式が線形であるので丸め誤差の増幅係数と同じになり, これを $G = |G| e^{i\phi}$ とおくと

$$|G|^2 = [1 - \nu^2 (1 - \cos \beta)]^2 + \nu^2 \sin^2 \beta \quad (6)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{-\nu \sin \beta}{1 - \nu^2 (1 - \cos \beta)} \right]$$

一方, もとの偏微分方程式の厳密解に対する増幅係数を求めてみる. 波動方程式(1)の解として $u = e^{\alpha t} e^{i k x}$ を仮定し代入すれば $\alpha = -i c k$ となるので $u = e^{i k(x - ct)}$. 従って, $G_e = u(t + \Delta t)/u(t)$ と $G_e = |G_e| e^{i\phi_e}$ より

$$|G_e| = 1, \quad \phi_e = c k \Delta t = -\beta \nu \quad (7)$$

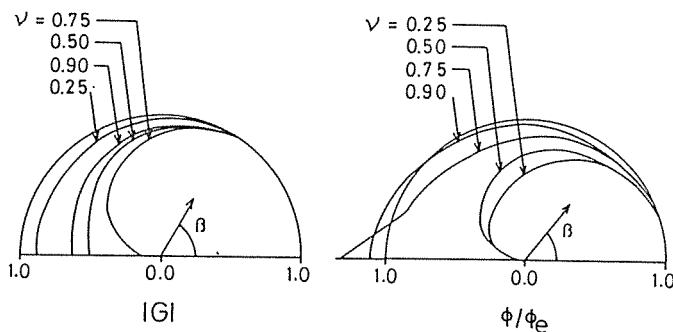


図2 MacCormack法の減衰, 位相特性

よって、差分方程式およびもとの偏微分方程式のそれぞれの厳密解に対する増幅係数 G および G_e の比較、つまり $|G|$ と ϕ/ϕ_e によってスキームの誤差の特性が明らかとなる。例えば、 $\phi/\phi_e > 1$ であれば位相進みを $\phi/\phi_e < 1$ なら位相遅れのスキームである。理想的なスキームとしては、減衰や位相の誤差のないスキームで $|G|=1$ 、 $\phi/\phi_e=1$ であればよい。例として、MacCormack法の減衰、位相の各特性を図2に示す。

3.2 擬似微分方程式による解析⁹⁾

ここでは擬似微分方程式 (Modified Equation) に基づいて、差分法の安定性、散逸性および分散性等について述べる。例として、基礎方程式は式(1)を用い、差分法としてMacCormack法を取り上げる。式(2)を (x_j, t_n) まわりでテーラー展開すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta t)^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{c \Delta t}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\ + \frac{(\Delta t)^3}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \frac{c^2 \Delta t (\Delta x)^2}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)を繰返し微分して u を除く高階の時間導関数を消去する。この場合、差分式として実際に解いているのは式(8)であり、もとの式(1)ではないので、高階の時間導関数項消去のため式(1)を使用すべきではないという点に注意しなければならない。MacCormack法に対して、このようにして得られた微分方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c}{6} (\Delta x)^2 (1-\nu^2) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{c (\Delta x)^3}{8} \nu (1-\nu^2) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\Delta x)^4 \quad (9)$$

式(9)が実際に数値解が満たす微分方程式であり、MacCormack法を使って解いている方程式は式(1)ではなく式(9)である。この方程式を擬似微分方程式という。式(9)の右辺は差分近似により生じる誤差で打ち切り誤差と呼ばれる。差分式の精度はこの誤差に現れる Δx 、 Δt に関する最低次数で決まる。MacCormack法は $(\Delta x)^2$ であるから2次精度のスキームである。又、適合性とは Δx 、 Δt をどのように0に近づけても打ち切り誤差が0に近づくことである。

擬似微分方程式を次式のように

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(2n+1) \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(2n) \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} \quad (10)$$

上式の基本的な解とし $u(x, t) = e^{\alpha t} \cdot e^{ikx}$ と仮定し $\alpha = a + ib$ とおけば、係数 a 、 b は

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n k^{2n} \mu(2n) \quad b = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n k^{2n+1} \mu(2n+1) \quad (11)$$

数値的に安定のためには $a \leq 0$ でなければならない。波数 k が小さい場合、近似的に a は最低次数の項で決定される。これをMacCormack法に適用すると

$$\mu(4) = -c (\Delta x)^3 \nu (1-\nu^2) / 8 \leq 0 \quad (12)$$

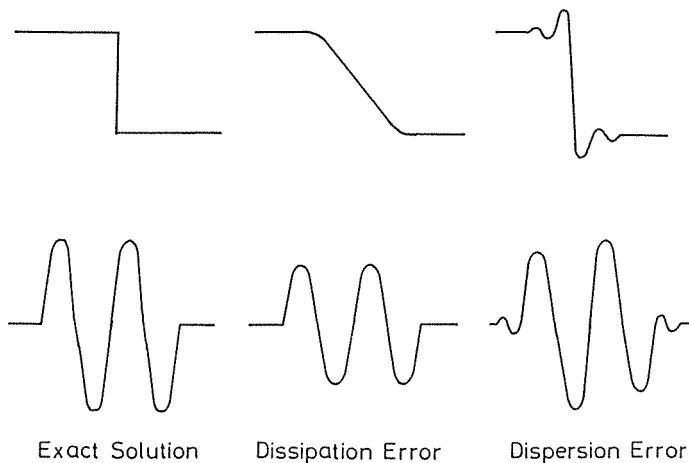


図3 散逸性誤差と分散性誤差

となるので $\nu \leq 1$ となる。これは前述の増幅係数に基づく結果(4)式と一致する。

次に擬微分方程式と増幅係数とを関連づけよう。式(11)の基本的な解の増幅係数は $G_n = e^{a_n \Delta t} = e^{2a_n \Delta t} e^{ib_n \Delta t}$ であり、フーリエ級数に基づく安定性解析から得られる増幅係数 $G = |G| e^{i\phi}$ と一致するので、両者の比較から

$$|G| = e^{a_n \Delta t} = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n k^{2n} \mu(2n) \Delta t \right] \quad (13)$$

$$\phi = b \Delta t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n k^{2n+1} \mu(2n+1) \Delta t$$

従って、減衰に関する $|G|$ は、打ち切り誤差の偶数階の導関数の係数 $\mu(2n)$ で決まり、この誤差を散逸性誤差(dissipation error)と言う。一方、位相誤差は打ち切り誤差の奇数階の導関数の係数 $\mu(2n+1)$ にのみ関係し、これによる誤差を分散性誤差(dispersion error)と言い位相ずれの原因となる(図3)。

4. 波動問題と差分法

流れ場中の波の伝播を差分法で解く場合には、少なくとも3つの重要な長さに関するパラメータが存在する。それらは差分格子 h と、非均一な流れ場の径 D 、それに計算領域の大きさ L である(図4)。もちろん、これらは波長 λ に対して考えるべきであるので、 h/λ 、 D/λ 、および L/λ となる。まず、 h/λ は1波長あたりに何個

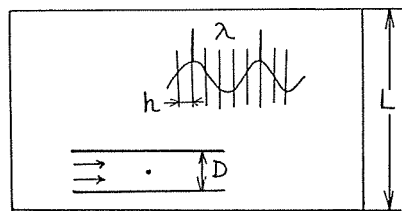


図4 差分計算にあられる代表長さ

の格子があるかということで解の精度，安定性に関係する。D/λ は非均一な流れ場に何波長の波が含まれるかを示し，非均一な場を通過後の波のゆがみの程度を表す。又，L/λ は計算領域に何波長の波があるかを示し，計算領域外端での放射条件の有効性と関係する。従って空間的な格子配列としては上述のパラメータを考えながら計算コストの面から総格子点数を可能なかぎり少なくすることが望ましい。このような点を考慮しつつ，実際に差分法を適用する場合の問題点を列挙すると

- ① 数値誤差である分散，散逸誤差の少ないスキームの選択
- ② 計算領域が有限であることによる境界外端からの波の反射の問題
- ③ 波長に対する差分格子間隔の比 → エイリアシング誤差や分散，散逸誤差の発生
- ④ 数値境界条件の与え方

などが考えられる。最後の数値境界条件については，差分法で境界値問題を解く場合に一般的考えるべきことなので文献10を参照していただくとして，ここでは特に取り上げない。

4.1 スキームの選択

差分法は，多種多様の流れの解析に応用されてきたが，波動問題への適用は意外に少なく始まったばかりといってよい。音場の計算においては普通，遠方場に興味があるので音源から遠方まで精度よく数値解を求める必要がある。1次精度の差分法は散逸誤差が支配的で遠方での波が数値的散逸のため減衰して正確に捉えられない。定常問題においては，一般に使用されている2次精度の差分法（MacCormack 法，風上法等）は分散誤差が支配的で位相ずれを起こして波形を崩す。従って波動を正確にシミュレートするには数値誤差の少ない高次の精度の差分法を用いる必要がある。この場合，1格子点，1タイムステップ当りの計算量が多くなり計算時間の増大となる。又，境界条件の取り扱いが難しく誤差の発生をまねきやすい。一方，時間に関して高精度な差分スキームは一般に計算時間がかかりすぎること，アルゴリズムが複雑となるため用いられることはほとんどなく，高々2次精度である。このような考えに基づき，次のような時間2次，空間4次の精度のスキームを用いた方法が提案されている¹¹⁾（以下，簡単のため Two-Four Method と呼ぶことにする）。

このスキームは一次元の波動方程式(1)に対し

$$\begin{aligned} \bar{u}_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{\nu}{6} \left(7u_j^n - 8u_{j+1}^n + u_{j+2}^n \right) \\ u_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[u_j^n + \bar{u}_j^{n+1} + \frac{\nu}{6} \left(-7\bar{u}_j^{n+1} + 8\bar{u}_{j-1}^{n+1} - \bar{u}_{j-2}^{n+1} \right) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

この差分法の安定性について考えると，前述の安定性解析により増幅係数を求めると

$$G = 1 - \frac{\nu^2}{18} (1 - \cos \beta) (25 - 7 \cos \beta) - i \frac{\nu}{3} \sin \beta (4 - \cos \beta) \quad (15)$$

安定のためには $|G| \leq 1$ であり $\nu < 2/3$ となる。

実際に各スキームを適用した場合に、どの程度の誤差の影響が現れるかを具体例で示す。ここでは厳密解がわかっている1次元の正弦波問題を考える。図5は400タイムステップ後の数値解を比較したものである。明らかにMacCormack法は位相遅れを、風上法は位相進みを示している。誤差への影響は、パラメータ、 β によって変わるのでいちがいには判定できないが大体においてTwo-Four Methodは厳密解とよく一致しており波動問題で有効な方法である。

非定常多次元の問題は直接差分計算される必要はなく、時間分割法の考えを適用し非定常1次元問題の組み合わせで解かれることが多い。例えば、2次元方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

に対し、次のように方程式を分割し

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

それぞれの差分オペレータを L_x, L_y とすれば、

$$u(t + 2\Delta t) = L_x(\Delta t) L_y(\Delta t) L_y(\Delta t) L_x(\Delta t) u(t) \quad (18)$$

で与えられる。

4.2 外部境界の位置

音の外部放射問題のように音場が無限遠方まで存在する場合には、差分計算上、つまり計算機容量の制限により計算領域は有限の大きさにならざるをえない。このような場合、その対策として大別して2通りある。1つは写像あるいは座標変換により外部の無限領域を有限の領域に変換する方法である。ただし、無限遠方での解が一定値に漸近するか、急速に減衰する場合にはこの方法は有効であるが、振動する性質の場合には適さないという報告がある。もう1つの対策は、音源から有限の距離に人工的な境界を置く方法がある。この時、重要なことは、この境界にやってくる波が反

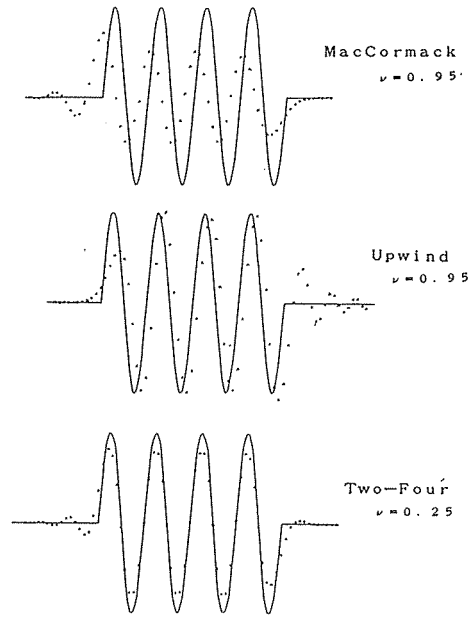


図5 1次元正弦波の伝播 ($\beta = 36^\circ$)

射なしで通過できるか、あるいはもう少し条件を弱めて、この人工的な境界の位置を遠方に移動させるにつれて、反射が急激に減衰するかということである。Bayliss & Turkel¹²⁾は無限領域問題のときの Sommerfeld の放射条件を一般化して、音源から十分遠方で、解が振動する性質を持つ場合に有効な方法を提案している。また、最も簡単な方法としては、外部境界の位置を可能なかぎり遠方に置き、音源からの擾乱が到達する前に計算を終了させる方法がある。この時、格子数が必然的に増加するが、十分遠方では格子間隔を大きくとるなどの工夫により十分可能な方法といえる。第5節で述べる計算例では、この方法を採用している。

4.3 差分格子間隔

波動問題の差分計算における格子間隔に関して、定常問題では無視されるいくつかの特有な点がある。まず波動問題では散逸誤差よりもむしろ分散誤差の低減が重要である。つまり分散誤差による位相ずれで波形が変形しないということである。もう1つ、いわゆるエイリアシング誤差と呼ばれる誤差がある。格子間隔を h とすれば格子がとらえることのできる波の最小波長は $2h$ である。従って、例えば流れに逆らって伝播して行く波のように、その波長が短くなれば格子間隔も小さくしなければならない。この制限を越えて格子間隔が大きいと、長い波長成分の波に影響を与え、結果的に数値不安定性を起こす。

以上のことから、格子間隔が小さい程これらの誤差は減少して良好な結果が期待できる。しかし、前述のように用いるスキームが陽的差分法のため空間格子間隔が小さくなれば時間間隔も減少し、ある時刻に達するまでの総ステップ数が増加し誤差の累積の影響があらわれる。又、3.2節で述べたように計算領域の外端は十分遠方にとる必要があり、その結果、格子点数が多く計算時間も増大する。従って、十分遠方では格子間隔を粗くとるなどして空間格子の配列に工夫が必要である。

5. 噴流中の音源による音場

Bayliss & Maestrello¹³⁾は亜音速噴流中のパルス音からの音の伝播に関して、実験的に得られた速度分布を用いて数値計算した。使ったスキームは前述の Two-Four Method である。図6はある時刻における音圧の空間分布を示す。彼らはそれまでの Lighthill 方程式あるいは Lilley の方程式のような波動方程式を用いず Euler の方程式に基づいて計算した。前に述べたように、Candel は

せん断流中におかれた点音源の作る音場を、フーリエ変換に基づき数値計算で具体的に求めているが、その適用に際し、せん断流速度分布をいくつかの不連続な階段関数の集まりの分布で近似していること、軸対称問題への拡張が難しいなどの制約があった。差分法を用いた場合¹⁴⁾にはこれらの

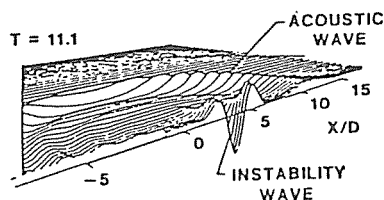


図6 音場の計算例 (Bayliss & Maestrello, 文献13)

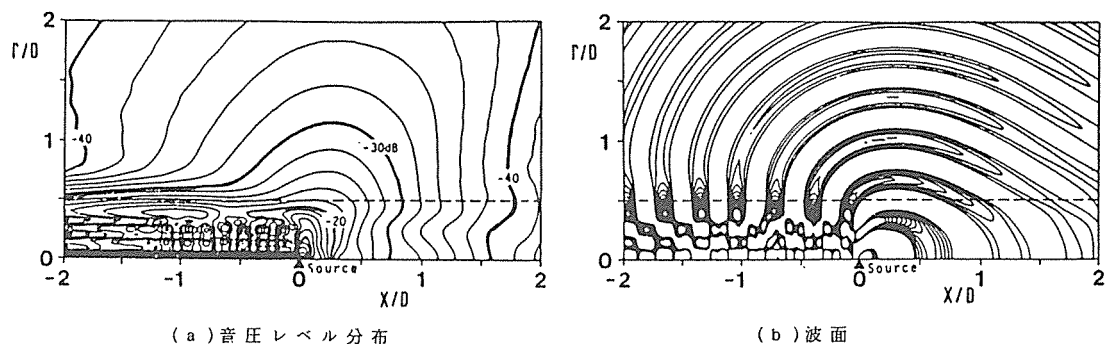


図7 軸対称亜音速せん断流からの音の伝播 (Tsubakishita, Y. et al., 文献14)

制限はない。一例として、図7に主流マッハ数0.8の場合の音圧レベル分布および波面を示す。ここで簡単のため、平均流れ場は圧力と密度が一定で、広がりなしのせん断流を仮定している。格子点数は 585×259 で計算領域は音源から波長の100倍程度にとっている。音源上流での音波の波長は主流マッハ数が増大すれば短くなるのでこの領域での格子間隔は細かくしている。

6. あとがき

以上、流れ場中の音源からの音の伝播を例に取り代表的な数値解析手法について概略し、差分法を波動問題に適用する場合に考慮すべき点について述べた。差分法による音場計算の具体例として、せん断流および超音速自由噴流への適用を示した。しかし、実際の噴流からの音の伝播をシミュレートするには、例えば、音源の種類やその分布および音源の運動の影響、平均流れ場をどのような形で与えればよいか、などといったまだまだ多くの問題が残されている。なお、浅学のため不適切な説明があったかと思うが、不十分な点については参考文献を参照していただきたい。また、本稿は日本機械学会関西支部第153回講習会の教材(文献15)の原稿を加筆、修正したものである。

参考文献

- 1) 坂尾 富士彦：日本物理学会誌, 32(昭52-12), 1004.
- 2) Ribner, H. S.: AIAA J. Vol. 19, No. 12(1981), pp. 1513-1526.
- 3) Candel, S. M.: Proc. of Int. Symp. on Recent Advances in Aerodynamics and Aeroacoustics, 1983, pp. 339-410, Springer-Verlag
- 4) Candel, S. M.: Aero-and Hydro-Acoustics, IUTUM SYMPOSIUM, 1985, Springer-Verlag
- 5) 加川 幸雄：数理科学(昭57-12), サイエンス社, 36.

- 6) Candel, S. M. : AIAA J., Vol. 21, No. 2, (1983), pp. 221-227.
- 7) 大宮司 久明 : 日本機械学会誌, 87(昭59-4), 16
- 8) Anderson, D. A. et al. : Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer,
1984, McGraw-Hill
- 9) Warming, R. F. and Hyett, B. J. : J. Comput. Phys., 14, (1974), pp. 159-179.
- 10) Yee, H. C. : NASA TM-81265, 1981
- 11) Gottlieb, D. and Turkel, E. : Mathematics of Computation, Vol. 30, No. 136
(1976), pp. 703-723.
- 12) Bayliss, A. and Turkel, E. : J. Comput. Phys., Vol. 48, (1982), pp. 182-199.
- 13) Bayliss, A. and Maestrello, L. : AIAA J., Vol. 19, (1981), pp. 835-841.
- 14) Tsubakishita, Y. et al. : Trans. of Japan Soc. for Aero. and Space Sci.,
Vol. 31, No. 92, (1988), pp. 94-103.
- 15) 椿下 庸二 : 日本機械学会関西支部第153回講習会教材、1987.