



Title	教育工学と数式処理
Author(s)	対馬, 勝英
Citation	大阪大学大型計算機センターニュース. 1989, 73, p. 55-67
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/65832
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

教育工学と数式処理

対馬 勝英（大阪電気通信大学）

1. 序

かつて私はセンターニュースに8ビットのパソコンの標準としてのCP/Mシステムの紹介を兼ねてパソコン上での数式処理システム muMATH79 の紹介を行った。¹⁾ それから、ほぼ10年を経過し数式処理をとりまく状況は一変した。パソコン上でREDUCE, muMATH83 が利用でき、広く普及したワークステーション上では SMP, MACSYMA 等が利用できる。また、数式処理をベースとした統合化数学環境としてマッキントッシュ (MAC) の上で Mathematica が、パソコン上で Derive が利用できる。(これについては後述する。) この様に数式処理システムに関する知識も普及し利用環境も著しく改善された。それにも拘らず、数式処理のユーザは飛躍的には増大していない。殆どの科学技術が数式を用いて思考を展開し数式の処理が要求されることを考えるときにこの事実は奇異にすら感じられる。

一方、教育に目を転ずるとき、中等、高等教育を通じて数理科学（数学、物理、工学、等）に関する教科は非常に大きなウェイトを占めている。教育現場へのコンピュータの導入に伴いこれらの教科の数理的な教育にコンピュータが積極的に利用されていると思っている人が多いが現状はそのようなものではなく、むしろ、たち遅れが目立つ。対話型機器としてのパソコンが普及し CAI を始めとする種々の教育的な応用がなされている中にあって数理に関する教科への応用は著しいたち遅れをみせている。この理由について考え、数式処理と教育工学との関わりについて述べてみたい。

2. 数式処理システムの持つ教育上の問題点

BASIC 等の通常のコンピュータ言語は数値を扱うもので

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \quad 1)$$

$$(1+x+y)^2 = 1+x^2+y^2+2x+2y+2xy \quad 2)$$

のような数式（正しくは整式）の処理はできない。

$$\text{Sin}^2(1.5) \quad 3)$$

は

$$\text{Sin}(x) \mid_{x=1.5} \quad 4)$$

を自乗するものであるが数値を代入される $\text{Sin}(x)$ は関数であっても (4) は数値であり、それを自乗したものも数値である。従ってこの例では最初のステップのみしか関数を意識した処理が出来ない。次のステップからは関数で記述したことはシステム上では生きてこない。例えば COS (3) の値を 4) を使って求めるといとおもっても数値化されてしまうと

$$\text{Cos } 2x = 1 - 2\text{Sin}^2 x \quad 5)$$

を引用した自動変形は不可能で人間が介入して自分の数学的な知識を頼りに手操作をするしか術はない。これを

$$\text{関数} \rightarrow \text{数値} \rightarrow \text{数値} \rightarrow \text{数値} \quad 6)$$

と表現することにしよう。このように数式処理システムにおいて関数が利用できるという言明は但し書のついたものである。

次に

$$\text{FUNCTION } F(x), x^3, \text{ENDFUN\$} \quad 7)$$

$$\text{FUNCTION } G(x), 5*x+4, \text{ENDFUN\$} \quad 8)$$

と関数 $F(x)$ が x^3 , $G(x)$ が $5x+4$ と定義されていたとする。

$$\frac{d}{dx}(F(G(x))) \rightarrow \frac{dF}{dx}(G(x)) \frac{dG}{dx} \quad 9)$$

$$\rightarrow 5 \frac{dF}{dx}(G(x)) \quad 10)$$

$$\rightarrow 5 \frac{dF}{dx}(4+5x) \quad 11)$$

を実行するには人間はまず記号としての関数のレベルで処理を行ってから実体としての整式を代入したり、場合によっては関数レベルの結果でとどめたりする。通常の数式処理システムにおいては

$$\text{DIF}(F(G(x)), x) \rightarrow 240 + 600x + 375x^2 \quad 12)$$

なる出力しか得られず教員が教えたい 9) のような処理は行えない。このことを

関数 → 整式 → 整式 → 整式

と表現しよう。

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \cos^2 x \quad 13)$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x \quad 14)$$

$$= 1 \quad 15)$$

は紙上では容易に処理できるが数式処理システムで 1 を得ることは易しくない。上記の式の変換は

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad 16)$$

なる公式を利用するがシステムに右辺から左辺への変換をするのか、それともその逆を行うのかをステップごとに指示しなければシステムは式の簡単化は行えない。この辺の煩わしさを知ると多くのユーザは数式処理システムから遠ざかってしまう。

このように人間が紙の上で行う記号の処理においては容易にできることが数式処理システムの上では処理できない、整式は処理するが関数を処理できないことに気づいた教員はやはり記号は人間のものであり、コンピュータを用いて数理を教えることには無理があると結論してしまう。

このように見えてくると既存の数式処理システムさえあれば数理に関する教育にコンピュータを応用できるという見方が楽観的に過ぎることが判る。これが数理的な教科の教育に数式処理システムがあまり利用されていない原因といえる。教育工学における数式処理システムの展開は上記の困難を正面から克服するか、それとも回避するしかしなければ不可能であることを理解されたと思う。

3. 数式処理の教育工学への応用²⁾

数式処理の教育工学、広くは工学への応用を以下の 5 つに分けて捉えてみたい。

- 1) 教育システムへの数式処理機能の組み込み
- 2) 汎用の数式処理システムの利用
- 3) 教育用汎用数式処理システムの構築とその教育への応用
- 4) ICAI (ITS) での数式処理機能の利用
- 5) 数式処理そのものの教育

1) 数式処理機能の埋め込み

微分の教育においては微分、式の簡単化等の特定の数式処理機能のみが利用できるコンピュータを用意し、適切な実習のカリキュラムを準備すれば数式処理機能をもちいた演習が可能となり教育的な目的を達成できる。その場合、汎用の数式処理システムの多くの高度な機能は使われず教育的な絞り込みさえできていれば、数式処理機能は限定的であっても教育的有効性が発揮できる。

このような実践は比較的多くなされている。³⁾

上述の数式処理の使い方は教員が学習者の問題解決空間を予め局限するものであり、学習者が主導権をとって種々の試みをする可能性は閉ざされている。例えば、学習者が関数を TAYLOR 展開してから項別に微分する、逆問題としての積分により微分の正当性を確認するといった戦略を思いついても限定的なシステムの上では TAYLOR 展開や積分の機能がないのでその戦略はとれなくなる。教育における自由度を尊重して学習者に多くの試行錯誤を許そうとする教員にとってはこの種のシステムはもの足りないだろう。

一方、教員が座学で教え込んだ公式や事例の確認を定型的に与えることが教育目標である教員には上記の限定的システムは充分満足のゆくものとなるだろう。もっとも限定的なものとして数式処理機能を埋め込んだ CAI、教授システムがある。これは学習者に主導権を全くわたさず知識の確認、記憶のために利用されるものである。

次に学習者に処理結果以外の処理の内容の説明を与える必要について考えよう。単なる数式の変形の確認以上のことを行なうことを演習の目的とする学習者に対してシステムの処理のプロセスを段階的に示すか、その理由を説明する必要がでてくる。殆どの数式処理システムは LISP 言語で記述されているので、TRACE をとれば処理の詳細な内容を見ることができる。これが見にくく教育的でないことを別としても、TRACE により処理の内容が理解できる保証はない。数式処理システムは人間の行う数式処理と同じやり方で数式の処理を行うとは限らない。かつて SLAGLE⁴⁾ は人間が積分を行うやり方を踏襲した数式処理システム SIN を作成したがそれは四半世紀も前のものである。現代の数式処理システムは積分、代数方程式 の解法、因数分解等を人間とは違った一般性のある高速で強力なアルゴリズムを用いて処理する。これを数式処理の現代的アルゴリズムというがそのリストを見てシステムの動作を理解できるのは数式処理の専門家のみである。⁵⁾⁶⁾

従って、教育的な助言能力を持つ数式処理システムの構築法は現代的な数式処理システムの構築とは別のものである。教育用システムにはエキスパートシステムの持つユーザインターフェースや、システムの動作を説明する知識ベースエディタのようなものが必要となる。

また、数式処理そのものが長大なアルゴリズムによるものではなく人間の行うパターンマッチを主

とした試行錯誤的なルールの連鎖にもとづいて行われねばならない。これは数式処理システムのエキスパートシステム化に他ならないがよく知られているようにこの種のシステムは処理効率が悪くかつ処理の完全性が保証されない。⁶⁾しかし、上述の『人間的アルゴリズム』を持つ教育的な数式処理システムの開発は重要な課題である。

2) 汎用の数式処理システムの利用

現代の数式処理システムの機能は高く、それを利用すれば相当なレベルでの数理的な問題解決が可能である。特に大学教育では途中の処理過程の説明がなくても学習者は入力と出力の対応より処理の内容を理解するので大きな教育的成果が期待できる。しかし、そのような事例を殆どきかない。それについては下の理由があげられよう。

1. 情報処理教育以外のカリキュラムで利用できる多人数の利用できる施設がない。
 2. 数式処理システムを用いて教育を行うには該当する教科以外に種々の知識と準備が必要でありそれを行う熱意のある教員がいない。
 3. 数学を始めとする教育は教え込み型教育をするものであり、コンピュータと対話させる必要ないと教員が信じている。
-
1. はわが国がコンピュータ生産の大國であっても教育におけるコンピュータ利用の大國でないことを意味している。この現状を改善しようとする動きもあり期待してもいいのだろう。
 3. はわが国の教育全般に関わる問題であり、学習者を一定の型にはめ込む教育が好きな教員の意識の改善は難しい。対話的に利用できる数式処理システムを用いると自ら仮説をたて、コンピュータにより仮説を検定するという情報化時代の発見学習が可能である。これは学習者を能動的になると共に高いレベルの創造性を育成し、数学教育の活性化にもなる。一般に、コンピュータの教育への利用は多様性のある人間集団を作り出すことこそ望ましい教育の理念であるとの前提があつて意味をもつ。数式処理システムの上記の利用もこののような意識を持つ教員により、初めて可能となる。現在、大学院においては学生が数式処理システムを活発に利用する傾向が目立つており、長い目でみると今後の改善は期待できる。

3) 教育用数式処理システム

- 1) で述べた『人間的アルゴリズム』を持つ本格的な教育用汎用数式処理システムは残念ながら

まだ実現されていない。現時点では実現されているものは

1. 微分、因数分解等について小規模のシステムを構築したもの
2. インタフェースを改善したもの
3. 数式処理機能そのものを改善したもの

にわけられる。³⁾

全体的に数式処理機能そのものの実現を成果とみなす初等的なレベルのものが多い。数式処理システムとエディタ機能の一体化、浅いレベルでのマッチング機能の改善、数式処理システムのWP化といったものが多く城を攻めるのではなく外堀を埋める形の研究が目立つ。2では二次元入出力、ドキュメントとしての数学的表記での出力（入力はキーボードで行う）が取り上げられることが多い。1については技術的に既知のことであり特にコメントするほどのことではない。1)で述べた本格的説明機能や数式処理システムにおいて関数、オペレータが入力としてしか扱えないのでそれを改良するといった教育や数式処理の本質に迫る研究、開発は少ない。

3に関して我々は関数やオペレータを入力としても出力としても扱える ICAS (Intelligent Computer Algebra System) と名付けた独自の数式処理システムを開発している。それを用いると紙の上で人間の行う操作の殆どが数式処理システム上で可能となり、数式処理を持ち込んだためにかえって煩わしさが増加するといった従来のシステムの持つ教育上の欠点が解消される。MS-DOS 版の muSIMP/muMATH を利用したものから LISP, PROLOG 版のものまで多くのものを作成している。詳細な機能は文献を参照されたい。^{7, 8, 9, 10)}

$$F(x)=3x^2+4 \quad (17)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + 3\right)^2 F(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + 6\frac{d}{dx} + 9\right) F(x) \quad (18)$$

$$= \frac{d^2F}{dx^2} + 6\frac{dF}{dx} + 9F(x) \quad (19)$$

$$= \left(\frac{d^2}{dx^2} + 6\frac{d}{dx} + 9\right) \cdot (3x^2 + 4) \quad (20)$$

$$= 42 + 36x + 27x^2 \quad (21)$$

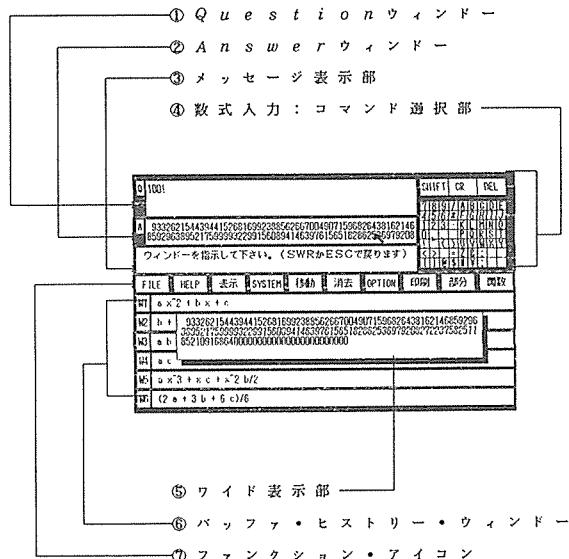
を数式処理システムを用いて実行することは難しいが ICAS では容易に実現できる。これはオペレータ、関数、微係数、整式、変数を各々独立した実体として数式処理システムの情報処理構造として実現したことにより可能となった。また、ICAS を用いると以下のように数学公式を関数のレベルで入手できる。

7? DIF(F(x)*G(x)*H(x),x);
@: F (x) G (x) Hx (x) + F (x) Gx (x) H (x)
+ G (x) Fx (x) H (x) 22)

3? TAYLOR(F(x)*G(x),x,0,3);
@: x F (0) Gx (0) + x G (0) Fx (0) + x^2 F (0) Gxx (0)/2
+ x^2 G (0) Fxx (0)/2 + x^2 Fx (0) Gx (0) + x^3 F (0) Gxxx (0)/6
+ x^3 G (0) Fxxx (0)/6 + x^3 Fx (0) Gxx (0)/2 + x^3 Gx (0) Fxx (0)/2
+ F (0) G (0) 23)

なお、この出力は単なる見た目ではなくそれに代入が可能なものである。

更に、上で述べた ICAS をマウス、アイコンを用いて操作できる INTCAS と名付けた数式処理ワークステーションも開発し実践に供している。¹⁰⁾¹¹⁾ そこではオペレータの部分抜取りと挿入が許され、事後に評価することも可能である。



1 図 INTCAS の標準画面

ユーザは常にこの画面上のアイコンと
そのサブアイコンと対話する。

このように教育に数式処理を利用するためには教育目標と人間とのヒューマンインターフェースを熟考した開発が必要であり、教育用であるから簡単であるといった安易なものではない。

4) CAI, 特にICAIにおける利用

我が国でも CAI はやっと本格的な利用のフェーズに入ろうとしている。最近のハイパーメディア上のマルチメディア CAI を見ると柔軟な CAI を構築する技術的な基礎は完成したとの感を深くする。私はこれを『CAI 新時代』と呼んでいる。¹³⁾ これを教育の現場で有効に使うためには 3) で述べた教育に関する教員自身の意識の改革が待たれる。

さて、将来に目を転ずると AI 技術に支えられたもっと柔軟な応答の可能なソクラテス的 CAI を作り出すことが課題となる。最近、わが国の知的な CAI の研究は加速され明るい展望が開けようとしている。

知的な CAI はわが国では ICAI (Intelligent CAI) と呼ばれるが国際的には ITS (Intelligent Tutorial System) の方が一般的な名称となっている。これは学習者と対話して学習者のモデルを自分の内部に生成しつつ、それを参照して柔軟な教育戦略をとり、それに基づいて学習者と対話していく。¹⁴⁾ この教授戦略は有能な教員のとるそれと酷似している。個々の教材に依存しない形での一般的な教授戦略は何かを調べることが知的 CAI の研究の主題となるが、その際、教材が曖昧であったり、一般性を持たなかったり、複雑すぎると都合が悪い。そこで、代数、微分、幾何等の閉じた世界に教材を求めることが多い。前二者においてはシステムに数式処理機能を持たせて学習者の誤りを自動的に検出することがよく試みられる。これは数式処理の教育工学への応用としては興味深いものの一つである。

5) 数式処理そのものの教育

2 で述べたように数式処理の教科教育への応用は離陸以前というべき段階にあるが、離陸を実現するには数式処理の正しい理解が前提となる。その意味でも、まず、数式処理そのものを教えることから始めるることは重要である。

REDUCE の教育については広島大学の広田の実践は注目に値する。¹⁵⁾ また、広田はソリトンの研究者として世界的に知られており、その分野における数式処理の利用に関しても第一人者である。

数式処理の教育は一般教育の一環として広く行うべき基礎教育なのか、情報処理教育として行うのか、特定の数理科学専攻の学生のためのものであるかは議論の分かれることである。筆者の体験よりみて REDUCE の教育は後者であり、後述する Derive, Mathematica はその使い勝手の良さより前二者としても利用できると思われる。

我々は数式処理を持ち込んだために生じる学習者の誤りを調べる目的で学習者に数式処理システムを利用する形での数学のテストを実施した。これを数式処理テストと名付け、その結果を解析

して誤答の原因を推論的に認知する人工知能システム SMDIAG を作成した。¹⁶⁾これを用いて種々の知見を得たが新しい教具を導入する際にはそれのもたらす阻害要因を分析することは教育工学の見地よりは当然のことといえる。

4. 数式処理のニューウェーブ

最近、マッキントッシュ、UNIX システム等の上で利用できる Mathematica がわが国でも普及しようとしている。¹⁷⁾（ここでは Mac の上のそれに絞って紹介したい。）これは、種々の特徴を持つ統合化数学環境とでも言うべきシステムである。Mathematica を用いると数式処理、数値計算、グラフィックを一体化した連続処理が可能である。数式処理と数値計算の一体化は数式処理研究における永年の課題であるが、Mathematicaにおいてはスマートな形で実現されている。

マウスでブルダウンメニューを操作することで全ての操作が進行するので操作に関しての DMI が完全に実現されていてノートブックを用いた入力、実行結果の管理、ドキュメンテーションの快適さは他に比較すべきものもない。数式処理、数値計算、グラフィックの統合化とハイパーテディア環境は互いに強化しあって数理的な問題解決能力をたかめている。

Mathematica は以下の特徴を持つ。

- 1) 高度の数式処理機能を持つ（Gröbner Base による非線型代数方程式の解法はその一例である。）
- 2) 強力なパターンマッチング機能とその柔軟な制御機能を持つ。
- 3) APL, LISP, PROLOG の長所を兼ね備えたプログラム言語を用いて対話的処理が可能である。

最新の数式処理システムが強力な教育手段となり得ることを実感する意味でも是非 Mathematica を体験されたい。一方、数理科学の研究者にとっては Mathematica は福音以外の何ものでもない。

また、MS-DOS 上で利用できる Derive も登場した。¹⁸⁾ これはプログラムが出来ないので数式処理電卓といった捉え方をされるが数式処理を極限までメニュー化したものもある。

例えば、 $x^3 + x$ を x で微分するには

A

$x^3 + 2 * x$

D

C/R

variable x

S

と入力する。左端はシステムのメッセージである。

このように Derive は紙の上の操作との一体化をめざすのではなくメニューとの対話による操作を極限まで追及したものである。慣れると便利であり、パーソナルな問題解決のツールとしては一つの方向を指示している。しかし、これを教育において用いることには異論が多い。

5.まとめ

教育を取り巻くコンピュータ環境は大きく変わろうとしている。BTRON、マッキントッシュ、OS/2 のプレゼンテーションマネジャーは殆ど共通のものを狙っており、教育用ソフトウェア、CAI には強い影響をあたえるものである。

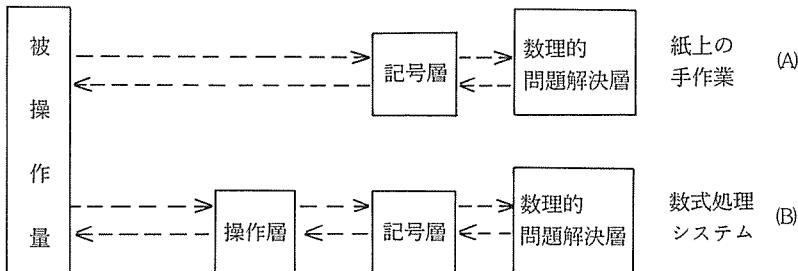
数式処理においてもこの流れは数式処理システムにも影響を与えており 4 で述べた Mathematica は一つの例である。

単なる模倣ではなく独創性のある教育用の数式処理システムをつくるには上記の流れをもう少し深いレベルで理解する必要がある。現代的なワークステーションにおける人間の操作に関するモデルに関して Norman による DMI (Direct Manipulation Interface) がある。¹⁹⁾ 具体的には Schneiderman のいうように

- 1) 関係のあるオブジェクトを恒に画面に表示する。
- 2) 複雑なコマンドによるのではなく、オブジェクトに直接働きかける動作やメニューによる選択により入力する。
- 3) 操作は速く、可逆的で、結果は直ちにオブジェクトの変化としてみることができる。

が DMI の要件である。DMI の実現はユーザに心理的に快適なインターフェースを提供するが、これはユーザの持つ操作に関するメンタルモデルとコンピュータに対する操作の一体性よりもたらさ

れる。Mathematica はそれを実現した一例である。



2図 数学的な作業と心理

数式処理システムを用いると出力の認知には敏感になるが紙上ではそれは殆ど意識されない。また、入力については紙上では記号操作そのものが意識されるが、その位置決め、移動、消去、同等性のマーク化等は無意識に行われ、操作層は心理的には無視できる。

しかし、数式処理においては2図の示すように紙の上の記号法がシステム上で実現されるかという『数学的記号法に関する DMI』についても考慮がなされる必要がある。

例えば

$$(-\frac{d^2}{dx^2} + 3)^2 U(x) \quad 24)$$

を通常の数式処理システムで実行するには

$$\text{DIF}(U(x), x, 4) + 6 * \text{DIF}(U(x), x, 2) + 9 * U(x) \quad 25)$$

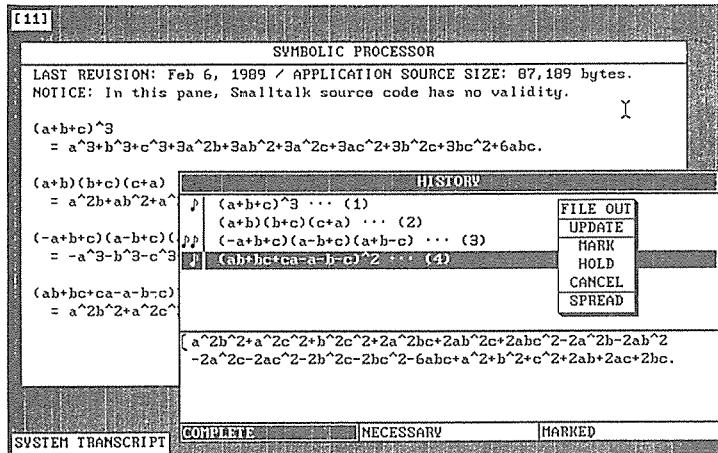
とユーザが前処理をして入力する必要があるが ICAS では

$$((Dx^2 + 3)^2). U(x) \quad 26)$$

と直接、入力すればよい。これは数学的記号法に関する DMI の実現に他ならない。このように我々の開発した ICAS, INTCAS, SMSS²¹⁾ は数式処理の DMI についての一つの解

答であるが、この種の研究は始まったばかりであり、独創的なアイデアの出現が待たれる。（3図に開発中の Smalltalk 上の数式処理システム SMSS の画面を示した。）

本稿では教育用数式処理システムの開発、評価に終始し、その教育的な展開については殆ど触れなかった。現在の数式処理システムを改善しない限り、教育には使えないとの筆者の見解が反映したものとして御了承いただきたい。



3図 開発中の SMALLTALK 上の数式処理システム SMSS の画面（1）

[参考文献]

1. 対馬, CP/Mシステム, 大阪大学大型計算機センターニュース, 40, 36, '81
2. 対馬, 数式処理, CAI ハンドブック, (印刷中)
3. これらについては電子情報通信学会, CAI 学会, 情報処理学会の教育工学に関する研究会資料を参照されたい。
4. スレーグル, 「人口知能」, みすず書房
5. 佐々木, 元吉, 渡辺, 「数式処理システム」, 昭晃堂 '86
6. 情報処理, 大特集「数式処理」, 27, 4, '86.
7. K.Tsusima, T.Satou, "OAP---Operator Algebra Package---", SIGSAM Bull. '86.
8. K.Tsusima, H.Kaga, Y.Yoshimatsu and T.Satou, "Teaching Mathematics using a Computer Algebra", Proc. of MCSE'86, 407, '86.
9. 対馬, 加賀, 吉松, 佐藤, 「数式処理を用いた微分の教育」, CAI 学会誌, 5, 59, '87.
10. 対馬, 「小型数式処理システムとその応用」, 情報処理, 27, 379, '86.
11. 対馬, 広田, 「数式処理ワークステーションの開発」, 信学技報 ET87-5, 19, '87.
12. K.Tsusima, H.Kaga and K.Hirota, "Mathematical Education Using a Workstation for Computer Algebra", Proc. of APCCE'88, '88.
13. 対馬, CAI の現状, 事務と経営, 88年11月号
14. スリーマン他「人工知能と知的 CAI システム」, 講談社, '87.
15. bit別冊「計算機による数式処理のすすめ」, '86.
16. 対馬, 阪野, 「数式処理テストに関する誤答診断システム SMDIAG の開発」, CAI 学会誌, 4, 1, 5, '84.
17. S.Wolfram, "Mathematica", ADDISON WESLEY, '88.
18. SOFTWARE HOUSE, "Derive" Manual, '88.
19. 古川, 溝口, 「インタフェースの科学」, 共立出版, '87.
20. 対馬, 「数式処理におけるヒューマンインターフェースの改善」, 第3回ヒューマンインターフェースシンポジウム論文集, 347, '87.
21. 対馬, 加賀, 植野, 「オブジェクト指向環境における数式処理」, 情報処理学会「コンピュータと教育」研究会発表論文 4-8, '89.