



Title	3次元熱剛塑性有限要素解析並列処理プログラムの開発
Author(s)	富田, 佳宏; 秋, 萬錫
Citation	大阪大学大型計算機センターニュース. 1989, 75, p. 17-27
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/65853
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

3 次元熱剛塑性有限要素解析並列 処理プログラムの開発

神戸大学工学部 富田佳宏 秋萬錫

1. ま え が き

塑性加工過程中の被加工物内の変形及び温度分布などを計算機シミュレーションによって正確に予知し、その情報を工程の設計や新しい加工法の確立のために利用する傾向が最近特に強くなっている。その中で各種剛塑性有限要素法が広く使われている。通常、剛塑性有限要素法では、塑性ひずみの非圧縮性を Lagrange 乗数法、Penalty などによって満足させているが、要素の選択と剛性マトリクスの数値積分において特別な注意を払うことなしに、高精度の解を得ることは困難である。このような状況を開拓する最も簡単かつ実用的な手法に、剛性マトリクスの評価に低減積分 (RI) あるいは選択低減積分 (SRI) を用いる方法がある¹⁾。事実、これまでの各種塑性加工過程の解析・シミュレーションでは、2次元問題に対して4節点4辺形要素、3次元問題に対して8節点6面体要素が主に用いられ、RI あるいは SRI によって剛性マトリクスが評価されている。しかしながら RIにおいては、計算時間が短縮されるが、変形後の有限要素メッシュにいわゆるアワーグラス状の Zero Energy Mode (ZEM) が発生²⁾、それが結合して、メカニズムを形成し、本来の解を覆い隠すことがある。一方、SRIを用いると安定した解は得られるが、計算時間が長くなるということは否めない。

そこで本研究では、Liu ら³⁾の安定化マトリクスを熱剛塑性有限要素法に導入し、3次元問題を高速かつ数値的に安定に解析することを可能にしたプログラムを開発したので報告する。

2. 熱剛塑性有限要素法

2・1 安定化マトリクス

RI することによって発生する ZEM を抑える手法について種々研究がなされているが、その中で Liu らによって提案された手法³⁾は最も簡単で、ZEM を抑えると同時に精度を犠牲にすることなく計算効率もよく、かつ非圧縮性に近い変形の場合に Locking しないと長所を持つ⁴⁾。ここでは、線形弾性問題に対して Liu らの安定化マトリクス \underline{K}_s の具体形を再記し、その性質を示そう。

3次元有限要素内の変位及びひずみをそれぞれ、 \underline{u} 、 $\underline{\varepsilon}$ 、節点における変位を \underline{d} で表すと、それらの間には次式が成立する。

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{\phi}_N \underline{d}_N, \quad \underline{\varepsilon} = \underline{B}_N \underline{d}_N \\ \underline{d} &= (\underline{d}_1^T \underline{d}_2^T \underline{d}_3^T \underline{d}_4^T)^T, \quad \underline{d}_N^T = (u_{xN} \ u_{yN} \ u_{zN}) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 ϕ_N 、 B_N は節点 N に対応した形状関数と B マトリクス、 \underline{d}_N^T は節点 N における変位成分を表す。

RI 法を用いて剛性マトリクスを評価することができれば、計算時間を大幅に抑えることができる。しかしながら、不適切な RI 法を用いると上述のような余分な ZEM を発生させる恐れがある。ZEM の発生原因は RI によって得られた剛性マトリクスがランク落ちすることによる。そこで、RI によって求めた剛性マトリクス \underline{K}^1 に安定化マトリクス \underline{K}^S を加えて、剛性マトリクス \underline{K} をつぎのように表し

$$\underline{K} = \underline{K}^1 + \underline{K}^S \quad (2)$$

剛性マトリクスのランク落ちを防止する。

3 次元の 8 節点 6 面体要素の場合のひずみ ξ を、要素の自然座標 ξ 、 η 、 ζ の原点まわりに展開することによりつぎの表示式を得る。

$$\begin{aligned} \underline{\xi}(\xi, \eta, \zeta) = & B_N(0) \underline{d}_N + B_N, \xi(0) \underline{d}_N \xi + B_N, \eta(0) \underline{d}_N \eta + B_N, \zeta(0) \underline{d}_N \zeta \\ & + 2B_N, \xi\eta(0) \underline{d}_N \xi\eta + 2B_N, \eta\zeta(0) \underline{d}_N \eta\zeta + 2B_N, \zeta\xi(0) \underline{d}_N \zeta\xi \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 (\cdot, ξ) 、 (\cdot, η) 、 (\cdot, ζ) … は、 (\cdot) の ξ 、 η 、 ζ による偏微分を表している。また、 $B_N(0)$ 、 $B_N, \xi(0)$ … は B_N 、 B_N, ξ … の自然座標 ξ 、 η 、 ζ の原点における値を表し、定数である。したがって、上式から B マトリクスは

$$\begin{aligned} \underline{B}_N(\xi, \eta, \zeta) = & B_N(0) + B_N, \xi(0) \xi + B_N, \eta(0) \eta + B_N, \zeta(0) \zeta + 2B_N, \xi\eta(0) \xi\eta \\ & + 2B_N, \eta\zeta(0) \eta\zeta + 2B_N, \zeta\xi(0) \zeta\xi \end{aligned} \quad (4)$$

となる。上式右辺第 2 項以降が剛性マトリクスのランク落ちを抑える効果を持つ項である。なお、本研究では、ひずみの展開及び体積積分において、ヤコビマトリクスならびにヤコビアンを要素内で一定と近似している。このような仮定のもとで、式(3)をよく知られた仮想仕事の原理式に導入することにより、剛性マトリクス \underline{K}_{MN}^1 と安定化マトリクス \underline{K}_{MN}^S の具体形を得る。

$$\begin{aligned} \underline{K}_{MN}^1 &= \underline{V} B_M^T(0) \underline{D} B_N(0) \\ \underline{K}_{MN}^S &= (1/3) \{ \underline{B}_M, \xi(0) \underline{D} B_N, \xi(0) + \underline{B}_M, \eta(0) \underline{D} B_N, \eta(0) + \underline{B}_M, \zeta(0) \underline{D} B_N, \zeta(0) \} V \\ & + (4/9) \{ \underline{B}_M, \xi\eta^T(0) \underline{D} B_N, \xi\eta(0) + \underline{B}_M, \eta\zeta^T(0) \underline{D} B_N, \eta\zeta(0) + \underline{B}_M, \zeta\xi^T(0) \underline{D} B_N, \zeta\xi(0) \} V \end{aligned} \quad (5)$$

ここで V は要素の体積、 \underline{D} は応力ひずみマトリクスを表す。

積分法と発生する ZEM の関係を調べるために、8 節点 6 面体 isoparametric 要素を対象とし

て、変形拘束のない状態で、完全積分(FI)、RI、SRI、RIとLiuら³⁾の安定化マトリクスを導入した手法(RIS)を適用して得られた剛性マトリクスの固有値と固有値ベクトルを用いて、ZEMのみを求めた。その結果、FI、SRI、RISでは、ZEMは剛体変形モードのみを表すのに対して、RIではいわゆるアワーグラス状の変形モードを含んでいた。このことから、RISでは積分点が1つであるがSRIの場合と同様の性質を持つことがわかる。

2・2 安定化マトリクスを導入した剛塑性有限要素法

ここでは、ペナルティ形剛塑性有限要素法に安定化マトリクスを導入することにより剛塑性有限要素解析の解析効率の向上と解析の安定化を図る。ペナルティ形剛塑性有限要素方程式は一般につぎのように表すことができる⁵⁾

$$\int_V (g \underline{Q} + \bar{\lambda} \underline{\underline{E}}) dV \dot{\underline{d}} = \int_{S_i} \underline{\phi}^T \underline{P} dS = \underline{f} \quad (6)$$

$$\underline{Q} = \underline{B}^T \bar{\underline{C}} \underline{B}, \quad \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^T \underline{B}$$

ここで、 $g = 2 \bar{\sigma} / 3 \dot{\varepsilon}$ 。 $\bar{\sigma}$ は相当応力、 $\dot{\varepsilon}$ は相当ひずみ速度で、偏差応力を $\underline{\sigma}'$ 、ひずみ速度を $\dot{\underline{\varepsilon}}$ としたとき、 $\bar{\sigma}^2 = (3/2) \underline{\sigma}'^T \bar{\underline{C}} \underline{\sigma}'$ 、 $\dot{\varepsilon}^2 = (2/3) \dot{\underline{\varepsilon}}^T \bar{\underline{C}} \dot{\underline{\varepsilon}}$ 。 $\bar{\underline{C}}$ は $C_{ij} = 0$ ($i \neq j$)、 $C_{ii} = 1$ ($i = 1 \sim 3$)、 $C_{ii} = 2$ ($i = 4 \sim 6$)を成分とする正方マトリクス、 $\bar{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}^{-1}$ 、 $\bar{\lambda}$ はペナルティ量、 \underline{f} は節点力、 $\underline{\underline{A}}$ は1と0を成分とするベクトルである。この有限要素方程式は節点変位速度 $\dot{\underline{d}}$ に関する非線形方程式であるので、摂動展開して高次の項を省略し、つぎのように線形化して解析される。

$$\int_A \{ g \underline{Q} + \bar{\lambda} \underline{\underline{E}} + (g/\bar{\sigma}) (\partial g / \partial \dot{\varepsilon}) \underline{\beta} \underline{\beta}^T \} dV \Delta \dot{\underline{d}} = \underline{f} - \int_V (g \underline{\beta} + \bar{\lambda} \bar{\underline{\beta}}) dV \quad (7)$$

$$\underline{\beta} = \underline{Q} \dot{\underline{d}}, \quad \bar{\underline{\beta}} = \underline{\underline{E}} \dot{\underline{d}}$$

上式に、式(4)を代入することにより、安定化マトリクスを導入したペナルティ形剛塑性有限要素方程式を得る。

$$(g (\underline{\underline{C}}^1 + \underline{\underline{C}}^s) + \bar{\lambda} \underline{\underline{E}} + (g/\bar{\sigma}) (\partial g / \partial \dot{\varepsilon}) \underline{\beta} \underline{\beta}^T) V \Delta \dot{\underline{d}} = \underline{f} - (g \underline{\beta} + \bar{\lambda} \bar{\underline{\beta}}) V \quad (8)$$

$$\underline{\beta}' = (\underline{\underline{C}}^1 + \underline{\underline{C}}^s) \dot{\underline{d}}$$

ここで、8節点6面体要素に対するマトリクス $\underline{\underline{C}}^1$ 、 $\underline{\underline{C}}^s$ の成分の具体形は以下のようになる⁶⁾。

$$\underline{\underline{C}}_{MN}^1 = \underline{B}_M^T (0) \bar{\underline{C}} \underline{B}_N (0)$$

$$\underline{\underline{C}}_{MN}^s = (1/3) \{ \underline{B}_M, \xi^T (0) \bar{\underline{C}} \underline{B}_N, \xi (0) + \underline{B}_M, \eta^T (0) \bar{\underline{C}} \underline{B}_N, \eta (0) + \underline{B}_M, \zeta^T (0) \bar{\underline{C}} \underline{B}_N, \zeta (0) \}$$

$$+ (4/9) \{ \underline{B}_M, \xi \eta^T (0) \bar{\underline{C}} \underline{B}_N, \xi \eta (0) + \underline{B}_M, \eta \zeta^T (0) \bar{\underline{C}} \underline{B}_N, \eta \zeta (0) + \underline{B}_M, \zeta \xi^T (0) \bar{\underline{C}} \underline{B}_N, \zeta \xi (0) \}$$

$$(9)$$

このように、安定化マトリクスが加わり元の剛塑性有限要素方程式(7)より若干複雑な形式になっているが、前節において述べたように、いずれの項も自然座標の原点において評価できるので効率よく各マトリクスを計算できる。

2・3 有限要素熱伝導方程式

Updated Lagrange 表示の局所形のエネルギー平衡方程式の弱形式表示に、塑性変形に伴って発生する非可逆仕事 $\sigma = \alpha \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$ ($\alpha = 0.95$ ⁷⁾) を熱源として導入することによりつぎの有限要素熱伝導方程式が得られる⁸⁾。

$$\int_V \rho c \bar{\phi}^T \bar{\phi} dV \dot{t} + \int_V \kappa \bar{B}^T \bar{B} dV \dot{t} = \int_V \bar{\phi}^T \sigma dV - \int_{S_q} \bar{\phi}^T Q dS \quad (10)$$

ここで、 ρ 、 c は材料の密度と比熱、 T 、 \dot{T} は温度及び温度の変化率で、それぞれ要素節点における温度 \dot{t} 及び温度の変化率 \dot{t} と $T = \bar{\phi} \dot{t}$ 、 $\dot{T} = \bar{\phi} \dot{t}$ によって関係付けられる。また、温度勾配は $g = \bar{B} \dot{t}$ で表される。 $Q = h (T_\infty - T)$ は物体の表面から流入する熱流を表す。 h は熱伝達率、 T_∞ は外気温度、 κ は熱伝導率である。式 (8) の速度場は仕事 σ を介して式 (10) の温度場と連成している。解析にあたり、熱伝導有限要素微分方程式は Houbolt 法⁹⁾ により差分表示したものを用いた。

以上の剛塑性有限要素方程式 (8) 及び熱伝導方程式 (10) の解析の高速化を図るために並列処理プログラムを作成した。

3. 解析速度の検討と数値シミュレーション結果の概要

3・1 粘塑性解析と解析の安定・高速化の検討

上記剛塑性有限要素法による解析結果の性質を検討するために、これを基本的な3次元問題の解析に適用し、その結果を他の積分法を導入して得た結果と比較する。解析対象は一辺が2Hの立方体ブロックで、端面固定状態でz方向に圧縮を受けている。変形の対称性からブロックの1/8を図1(a)に示すように8節点6面体要素を用いてモデル化した。ブロックの材料は、ひずみ及びひずみ速度依存性とし、その相当応力 $\bar{\sigma}$ 、相当ひずみ $\bar{\epsilon}$ 、相当ひずみ速度 $\dot{\bar{\epsilon}}$ 関係を次式のように仮定する。

$$\bar{\sigma} = \sigma_y (\bar{\epsilon} / \epsilon_0)^n (\dot{\bar{\epsilon}} / \dot{\epsilon}_0)^m \quad (11)$$

ここで σ_y は $\dot{\bar{\epsilon}} = 0$ のときの降伏応力、 m はひずみ速度感度指数、 n は加工硬化指数である。さらに ϵ_0 、 $\dot{\epsilon}_0$ はそれぞれ基準ひずみと基準ひずみ速度である。これらの材料定数の値をまとめて表1に示している。なお、変形解析の精度と効率を左右する時間ステップの大きさ Δt を、

表1 各種定数の値

ϵ_0	constant	0.002
$\dot{\epsilon}_0$	constant	0.0024 1/sec
σ_y	yield stress at 23°C	400.0 MPa
ρ	density	7.87 g/cm ³
c	specific heat	04605 J/g°C
T_0	initial temperature	23.0 °C
T_{∞}	temperature of air	23.0 °C
κ	thermal conductivity	0.5986 J/cm·s·°C
h	heat transfer coefficient	0.00042 J/cm ² ·s·°C

1ステップあたり公称ひずみが0.005になるように決定した。解の収束は、全節点の変位速度ベクトルの修正量 $\Delta \dot{\tilde{d}}$ が $\Delta \dot{\tilde{d}}^T \Delta \dot{\tilde{d}} < 10^7$ を満足するときと考えた。この場合体積一定の条件、力のつり合い条件が十分な精度で満足されていることを確認している。図1(b)に $\eta = h/H = 0.8$ (H, h はブロックの変形前後の高さ)における変形形状と相当塑性ひずみ分布を示す。SRIとRISによる結果の一致は良好である。これに反し、RIによる結果には要素の変形の乱れがあり好ましくない結果である。ただ、平面ひずみの場合の結果⁶⁾と比較して、要素の変形の

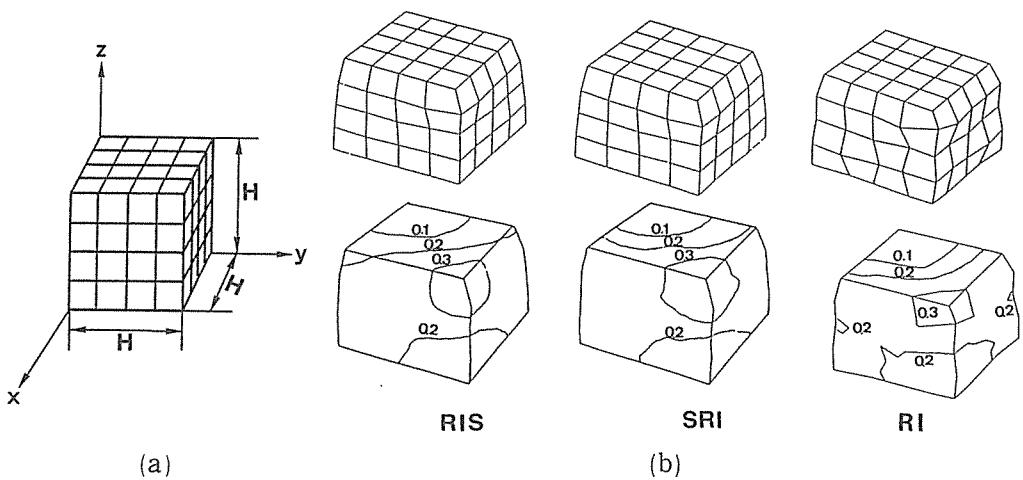


図1. 立方体ブロックの圧縮変形

(a)有限要素モデル, (b)変形形状と相当塑性ひずみの等高線

特異性が少ないので変形が3方向に起こるためであると考えられる。3種類の解析の効率を検討するために $\eta=0$ 。8までの変形解析に必要とする計算時間、全繰り返し数、全ステップ数を表2に示す。これより、RISによるとSRIの計算時間を約1/3に短縮できることがわかる。

表2. 計算条件のまとめ (CPUはRISのCPUを単位としている)

積分法	C P U	全繰り返し数	全ステップ数
SRI	2.71	681	80
RIS	1.00	610	80
RI	0.76	735	80

また、有限要素形状に不安定を伴わないので、収束までの繰り返し回数も少なくて済む。以上により、RISを用いた解析は効率ならびに精度が良いことが確認された。

つぎに、この有限要素解析プログラムを94%まで並列化処理した状態で3次元変形の解析を行う。解析対象は、z方向に圧縮を受ける端面が固着された長方形孔を有する円柱である。変形の対称性を考慮して図2(a)に示すように円柱の1/8を図示の8節点6面体要素750個を用いてモデル化した。 $\eta=h/H=0.7$ (H, h は円柱の変形前後の高さ)までの解析ステップ数は80で、それに要した計算時間は約8分(SX2)である。同図(b)に変形形状ならびに相当塑性ひずみ分布を示す。これより、外面はいずれも2重バルジを示し、厚さが小さい部分では内外

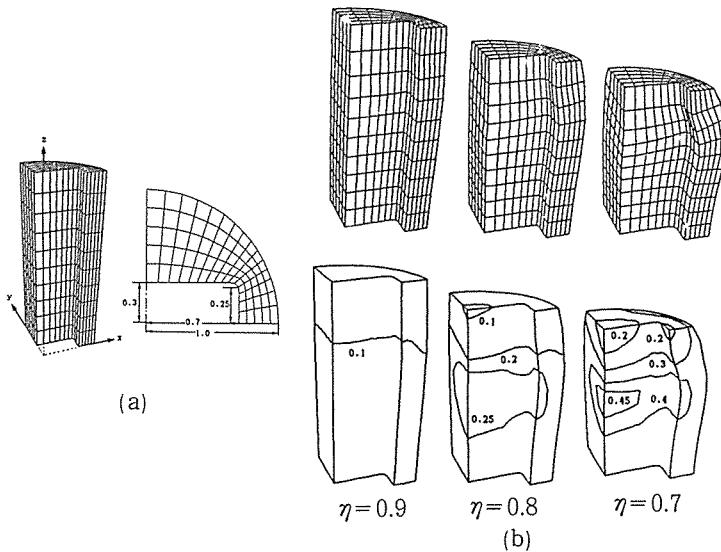


図2. 円孔を有する円柱の圧縮変形

(a)有限要素モデル, (b)変形形状と相当塑性ひずみの等高線

面とも外向きに張り出し、厚さが大きい部分では内面は内向きに張り出している。これらの張り出しが大きい部分でひずみが大きくなっている。このような解析が、短時間できるようになったことにより、剛塑性有限要素法の3次元変形のシミュレーション手法としての実用性は大幅に向上したと考える。次に並列処理による計算効率の改善を検討するために、3種類の3次元問題の解析を行なった。図3にスカラ処理の場合の計算時間と並列処理した場合の計算時

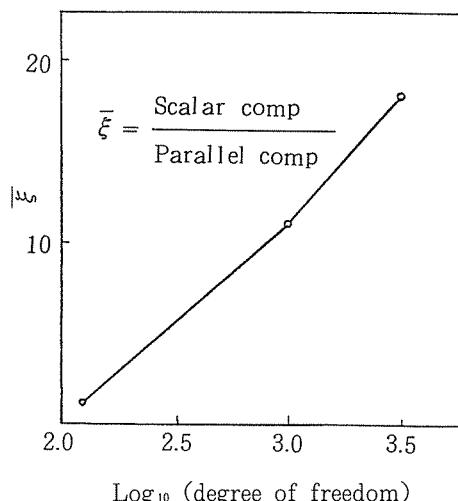


図3. 有限要素モデルの自由度と並列計算による高速化率 ξ

間の比 $\frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon}}$ とモデルの自由度の関係を示す。いずれの解析も SX 2 による。図に見られるように、多自由度になると解析速度を 20 倍程度に高速化できる。また、高速化は自由度の増加とともに著しくなる傾向にあることも注目される。前述の解析により RIS では SRI の解析速度を約 3 倍に高速化できたので、最終的には、SRI による従来の解析に対して、60 倍の計算速度が実現できたことになる。また、RIS では 1 点積分であるので SRI の場合に比べて要素剛性マトリクスの計算に必要な計算機容量も約 1/8 に抑えれることも特記すべきであろう。

3・2 3 次元熱剛塑性変形の解析

上記のように、開発した 3 次元剛塑性解析プログラムの解析効率はよい。ここでは、同様に並列化処理した 3 次元熱剛塑性解析プログラムによって直方体ブロックの変形の局所化過程をシミュレートした結果を示す。計算効率については特に言及しないが、3.1 項と同程度の高速化が実現されている。熱剛塑性問題の解析は、ある時間増分 Δt の間になされた塑性仕事を熱に変換し、それを熱発生量として熱伝導解析を行ない、 Δt 後の温度場を求める。求められた温度場を使い、次の時間増分 Δt まで変形解析を行なう。以上の操作を所定の変形が完了するまで繰り返し続行する。変形解析の精度と効率を左右する時間ステップの大きさ Δt を、1 ステップあたり公称ひずみ増分が 0.005 になるように決めた。

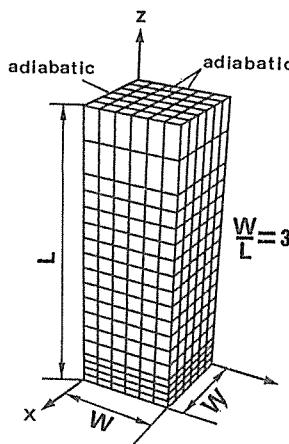


図 4. 直方体ブロックの有限要素分割モデル

図 4 に示すように変形の対称性を考慮して直方体ブロックの 1/8 を 8 節点 6 面体要素によりモデル化し解析した。また、発生した熱は自由表面からのみ空気との熱伝導によって放熱されるとし、他の面は断熱壁とした。ブロックは温度、ひずみ及びひずみ速度依存性体とし、その相当応力 $\bar{\sigma}$ 、相当ひずみ $\bar{\varepsilon}$ 、相当ひずみ速度 $\dot{\bar{\varepsilon}}$ 、温度 T 関係式(11)を次式のように修正することにより表した。

$$\bar{\sigma} = \sigma_y(T) \left(\bar{\varepsilon} / \varepsilon_0 \right)^n \left(\dot{\bar{\varepsilon}} / \dot{\varepsilon}_0 \right)^m \quad (12)$$

ここで、 $\sigma_y(T)$ は文献10)に基づいて本解析の温度域($23 \leq T \leq 150$ °C)において減少関数となるように定められた。

$$\sigma_y(T) = 0.002144T^2 - 1.4161T + 432.44 \text{ (MPa)} \quad (13)$$

なお、本解析で用いた各材料定数を表1に、計算条件と後の結果の説明を簡潔にするために導入した記号を表3に示す。

表3. 記号の説明

isothermal	diffusion & adiabatic			m	n
al	all	a 22	a 33	0.0 0 1	
bl	bll	b 22	\bar{b} 22	0.0 1	0.0 6 2 5
cl	cll	c 22	c 33	0.0 5	
u/L	0.2	0.2	2.0	2 0 0	

図5に端面の平均応力 $\tilde{\sigma}$ を降伏応力 $\sigma_y(T_0)$ で正規化した $\tilde{\sigma}/\sigma_y$ 、及びくびれ部のxz面に沿う変位 v/W と端面の変位 u/L との関係を示す。等温の場合(a)はひずみ速度感度指数m値を

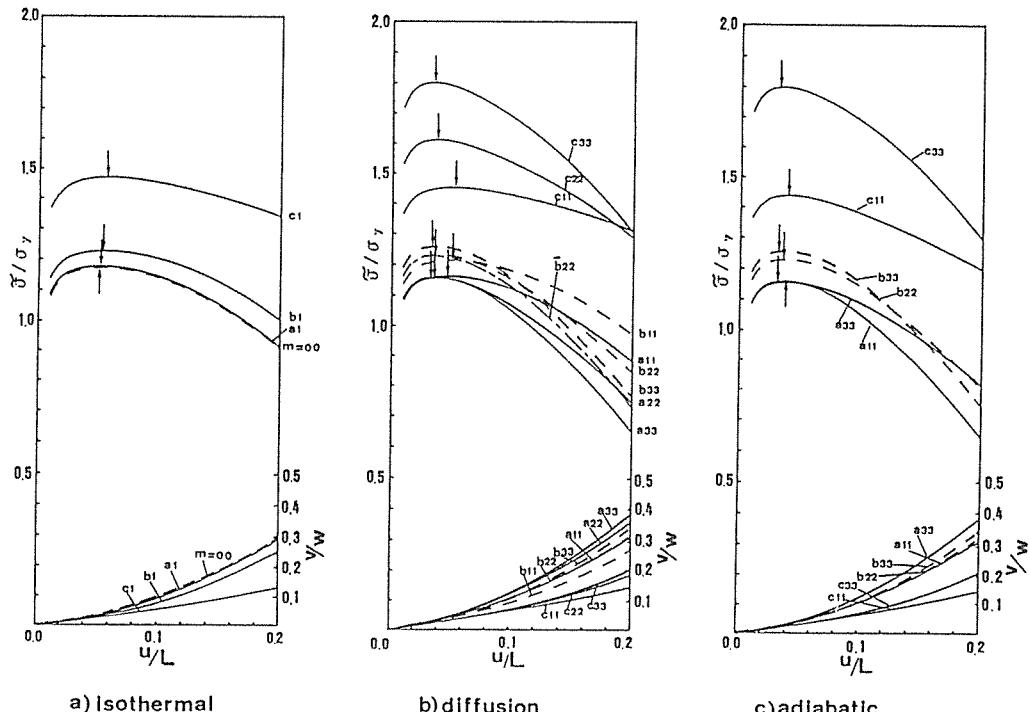


図5. 端面の平均応力 $\tilde{\sigma}$ と伸び u の関係

増加するに伴って荷重が上昇し、図中矢印で示した最大荷重点に対応した変位が若干大きくなる。また、くびれ部の変位は、 m 値が大きくなると減少し一様な変形に近づき、局所化が抑えられることがわかる。一方、熱発生と熱移動を考慮した場合 (b) では、荷重、変位ともに変形速度と m 値の影響を受けていることがわかる。変形速度が速い a 33, b 33, c 33 の場合、熱軟化による荷重の低下傾向が著しい。一方、速度が遅い a 11, b 11, c 11 の場合においても変形による熱発生が全体的な変形挙動に影響していることがわかる。変形速度を速くすると最大荷重の発生は早くなり、くびれ部の変位量は大きくなる。断熱変形の場合 (c) は、端面変位速度が速い a 33, b 33, c 33 は、熱移動を考慮した結果とほぼ一致するが、遅い a 11, b 11, c 11 の結果は大きく異なることがわかる。 m 値が大きくなると熱発生量が大きくなり、これらの差はさらに大きくなる。したがって、材料の熱発生の影響を断熱変形として近似的に評価する場合が多いが、このように比較的遅い変形の場合、断熱変形によって熱発生の影響を正確に検討するのは困難であろう。同じ解析条件で寸法が 10 倍のブロックの変形挙動のシミュレーションを行なった結果が b 22 である。熱の移動を考慮した場合と断熱変形の場合よりも最大荷重の発生が早く、荷重の低下は著しい。これは寸法が大きくなるに伴って発熱量に対する放熱面積の相対的減少ならびに熱の移動の絶対時間依存性によると考えられる。同様の結果がせん断帶

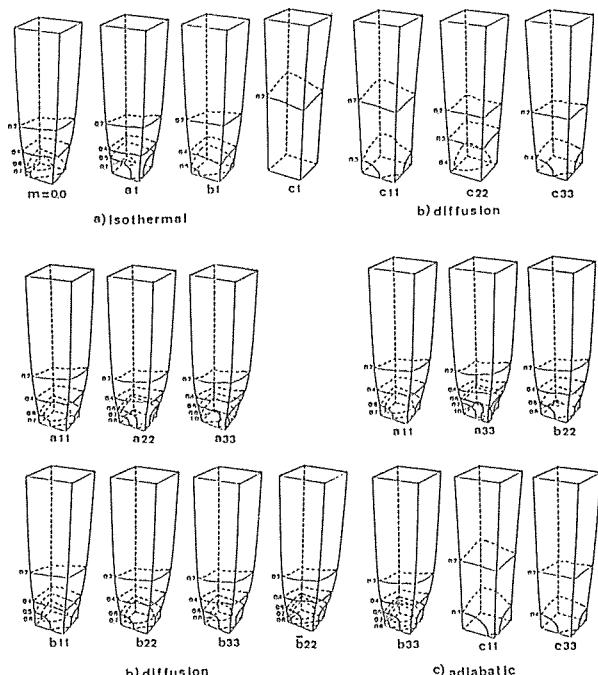


図 6. 相当塑性ひずみの分布

の発生を伴う2次元問題において検討されている¹¹⁾。一方、 $u/L=0.2$ のときの荷重をみると、寸法を10倍にすることにより、2次元の場合は34%⁶⁾、3次元の場合は16%減少している。このように熱の移動を伴う場合、寸法効果に十分な注意を払わなければならない。その他の結果の詳細は文献12)を参照されたい。

4. あ と が き

安定化マトリクスを低減積分して得られた剛性マトリクスに加えることにより熱剛塑性変形を効率よく解析する熱剛塑性有限要素法を開発しその解析処理を並列化したプログラムを作成した。その結果、計算過程は安定し、通常の解析速度に比して約60倍の高速化が実現した。さらに、要素剛性マトリクスの解析に必要とされる計算機容量も約1/8に抑えることができた。これより、3次元の塑性加工過程の実用的なレベルでの解析が可能になった。例として、ひずみ速度、温度依存性3次元ブロックに軸方向引張り変形を加えた場合の変形及び温度の連成問題の解析を行ない、材料のひずみ速度依存性、温度依存性、変形速度、熱の伝導、寸法効果が変形に及ぼす影響を明らかにした。

参 考 文 献

- (1) O.C. Zienkiewicz, The finite element method, 3rd ed., (1977) McGraw Hill, London
- (2) N. Bicanic and E. Hinton, Int. J. Numer. Meth. Engng., 14-10 (1979), 1545.
- (3) W.K. Liu, J.S. Ong and R.A. Uras, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 53 (1985), 13.
- (4) A.J.L. Crook and E. Hinton, Proc. Int. Conf. Computational Plasticity, (1987), 181, Barcelona
- (5) 富田佳宏, 機械の研究, 39 (1987) 1255。
- (6) 富田佳宏, 進藤明夫, 秋萬錫, 塑性と加工, 30-338 (1989), 426。
- (7) S.L. Semiatin, and G.D. Lahoti, Met. Trans., 12A-10 (1981), 1705.
- (8) 富田佳宏, 機械の研究, 40 (1988) 52.
- (9) 瀬口靖幸, 北川浩, 富田佳宏, 有限要素法の基礎, (1983) 日刊工業新聞社.
- (10) S.L. Semiatin, R.A. Ayres, and T.J. Jonas, Met. Trans., 16A (1985), 2299.
- (11) Y. Tomita, S. Asada, and A. Shindo, Proc., 25th, JCMR. (1988), 302.
- (12) 秋萬錫, 富田佳宏, 進藤明夫, 機論, 55-516, A (1989), 1865.