



Title	境界要素法による3次元ラプラスの式の数値解法について
Author(s)	白倉, 洋亮; 内藤, 林
Citation	大阪大学大型計算機センターニュース. 1998, 110, p. 10-16
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/66304
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

境界要素法による 3 次元ラプラスの式の数値解法について

大阪大学大学院工学研究科船舶海洋工学専攻博士後期課程 1 年

白倉 洋亮

大阪大学大学院工学研究科船舶海洋工学専攻教授

内藤 林

1 目的

時間領域で浮体運動をシミュレートするプログラムを開発することを目指として、ラプラスの式の境界値問題を数値的に解くことができるプログラムを開発中である。その計算方法についてまとめた。

2 境界積分方程式の離散化

境界積分方程式は次式となる。

$$\alpha(\vec{x})\phi(\vec{x}) + \int_{\partial V} \left\{ \phi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n} - \frac{\partial \phi(\vec{x}')}{\partial n} G(\vec{x}, \vec{x}') \right\} dS(\vec{x}') = 0. \quad (1)$$

ここで領域外向き法線ベクトルを正方向とする。各要素について離散化すると、

$$\alpha(\vec{x})\phi(\vec{x}) + \sum_{p=1}^{p_{max}} \int_{\partial V_p} \left\{ \phi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n} - \frac{\partial \phi(\vec{x}')}{\partial n} G(\vec{x}, \vec{x}') \right\} dS(\vec{x}') = 0. \quad (2)$$

面積分を要素上のパラメーター s, t で置き換えると次式を得る。

$$\alpha(\vec{x})\phi(\vec{x}) + \sum_{p=1}^{p_{max}} \iint_{\partial V_p(s,t)} \left\{ \phi(s,t) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}'(s,t))}{\partial n} - \frac{\partial \phi(s,t)}{\partial n} G(\vec{x}, \vec{x}'(s,t)) \right\} J(s,t) ds dt = 0, \quad (3)$$

ここで

$$\vec{x}' = \vec{x}'(s,t), \quad J(s,t) = \left| \frac{\partial \vec{x}'(s,t)}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{x}'(s,t)}{\partial t} \right|, \quad dS = J(s,t) ds dt, \quad (4)$$

である。各要素上で $\phi(s,t) = \sum_{l=1}^{l_{max}} N_l(s,t) \phi_l^{[p]}$, $\partial \phi(s,t) / \partial n = \sum_{l=1}^{l_{max}} N_l(s,t) (\partial \phi / \partial n)_l^{[p]}$ の関係が成立するので (3) は次式に変形できる。

$$\alpha(\vec{x})\phi(\vec{x}) + \sum_{p=1}^{p_{max}} \iint_{\partial V_p(s,t)} \left\{ \sum_{l=1}^{l_{max}} N_l(s,t) \phi_l^{[p]} \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}'(s,t))}{\partial n} - \sum_{l=1}^{l_{max}} N_l(s,t) \frac{\partial \phi(s,t)}{\partial n} G(\vec{x}, \vec{x}'(s,t)) \right\} J(s,t) ds dt = 0. \quad (5)$$

離散化するとき全ての節点、及び要素には通し番号をふる。更に節点番号と要素番号との対応をとるため、節点には通し番号とは別に、局所的節点番号を要素毎ふる。例えばある節点における ϕ の値には次の 2 つの表現が可能である。

$\phi^{(i)}$	広域節点番号 i 番目の位置における ϕ の値
$\phi_l^{[p]}$	p 番目の要素上の局所節点番号 l 番目の位置における ϕ の値

これら二つの表現は変換 T により関連づけられており, $T(p, l) = i$ のように要素番号 p と局所節点番号 l が分かれば広域節点番号 i を得ることができる. (5) は和の順序を入れ替えると次式となる.

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{x})\phi(\vec{x}) &+ \sum_{p=1}^{p_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} \phi_l^{[p]} \iint_{\partial V_p(s,t)} N_l(s,t) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}'(s,t))}{\partial n} J(s,t) ds dt \\ &- \sum_{p=1}^{p_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} \frac{\partial \phi^{[p]}}{\partial n_l} \iint_{\partial V_p(s,t)} N_l(s,t) G(\vec{x}, \vec{x}'(s,t)) J(s,t) ds dt = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

ここで $D_{p,l}(\vec{x}), S_{p,l}(\vec{x})$ は次式で定義される.

$$D_{p,l}(\vec{x}) = \iint_{\partial V_p(s,t)} N_l(s,t) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}'(s,t))}{\partial n} J(s,t) ds dt, \quad (7)$$

$$S_{p,l}(\vec{x}) = \iint_{\partial V_p(s,t)} N_l(s,t) G(\vec{x}, \vec{x}'(s,t)) J(s,t) ds dt. \quad (8)$$

(7),(8) を代入すると, (6) は次式となる.

$$\alpha(\vec{x})\phi(\vec{x}) + \sum_{p=1}^{p_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} \phi_l^{[p]} D_{p,l}(\vec{x}) - \sum_{p=1}^{p_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} \frac{\partial \phi^{[p]}}{\partial n_l} S_{p,l}(\vec{x}) = 0. \quad (9)$$

(9) で $\phi(\vec{x})$ が定数であるとする,

$$\alpha(\vec{x}) + \sum_{p=1}^{p_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} D_{p,l}(\vec{x}) = 0, \quad (10)$$

となり, (10) は立体角計算の時非常に便利である. 3次元問題では, $G(\vec{x}, \vec{x}') = 1/|\vec{x} - \vec{x}'|$, $\partial G(\vec{x}, \vec{x}')/\partial n = \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')/|\vec{x} - \vec{x}'|^3$ となるので, (7),(8) は次式となる.

$$D_{p,l}(\vec{x}) = \iint_{\partial V_p(s,t)} N_l(s,t) \frac{\vec{n}(s,t) \cdot (\vec{x} - \vec{x}'(s,t))}{|\vec{x} - \vec{x}'(s,t)|^3} J(s,t) ds dt, \quad (11)$$

$$S_{p,l}(\vec{x}) = \iint_{\partial V_p(s,t)} N_l(s,t) \frac{J(s,t)}{|\vec{x} - \vec{x}'(s,t)|} ds dt. \quad (12)$$

(9),(10) より, 立体角 $\alpha(\vec{x})$ を消去すると, 次式となる.

$$-\left(\sum_{p=1}^{p_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} D_{p,l}(\vec{x}) \right) \phi(\vec{x}) + \sum_{p=1}^{p_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} \phi_l^{[p]} D_{p,l}(\vec{x}) - \sum_{p=1}^{p_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} \frac{\partial \phi^{[p]}}{\partial n_l} S_{p,l}(\vec{x}) = 0. \quad (13)$$

(9),(10),(13) を選点についての式に書き換えると次式となる.

$$\alpha^{(i)}\phi^{(i)} + \sum_{p=1}^{p_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} \phi_l^{[p]} D_{p,l}^{(i)} - \sum_{p=1}^{p_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} \frac{\partial \phi^{[p]}}{\partial n_l} S_{p,l}^{(i)} = 0, \quad (14)$$

$$\alpha^{(i)} + \sum_{p=1}^{p_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} D_{p,l}^{(i)} = 0, \quad (15)$$

$$-\left(\sum_{p=1}^{p_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} D_{p,l}^{(i)} \right) \phi^{(i)} + \sum_{p=1}^{p_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} \phi_l^{[p]} D_{p,l}^{(i)} - \sum_{p=1}^{p_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} \frac{\partial \phi^{[p]}}{\partial n_l} S_{p,l}^{(i)} = 0. \quad (16)$$

各選点において $\phi^{(i)}, \partial \phi / \partial n$ のどちらか一方が未知数であるので, (16) を必要な数だけたて, 連立1次方程式を解いて未知数を求めることができる.

3 影響係数の計算法

境界積分方程式を空間について離散化するとき、形状関数の選び方によって様々な場合が考えられ、影響係数の計算法もまた形状関数の選び方に影響される。次の3つの場合について考える。

1) 場の関数 ϕ, ϕ_n は0次要素、境界形状を表す関数 \bar{x} は1次要素により表現。

2) 場の関数及び境界形状を表す関数は全て1次要素により表現。

3) 場の関数及び境界形状を表す関数は全て2次要素により表現。

1) の場合には要素中央 ($s = t = 0$) の位置に選点を取り、2), 3) の時には節点のどれか一つと選点を一致させる。数値計算上では選点と節点が十分に離れているとき、影響係数の計算は比較的容易で、直接 (7), (8) を数値積分により計算すれば影響係数が求まる。1次以上の要素を利用するとき、計算速度を増すために多重極展開を用いることもある。一方で、選点と節点が非常に近く、同一要素上に存在するとき、(7), (8) の被積分関数は特異性を持つので、このような自己影響係数の計算には特別な工夫が必要となる。自己影響係数の計算には多くの方法があるが、ここでは、1) のとき [2], 2) の時 [3], 3) の時 [1] の方法を用いることにする。

3.1 形状関数

形状関数を列挙する。

0次要素 ($l_{max} = 1$)

$$N(s, t) = 1. \quad (17)$$

1次要素 ($l_{max} = 4$)

$$\begin{aligned} N_1(s, t) &= \frac{1}{4}(1-s)(1-t), & N_2(s, t) &= \frac{1}{4}(1+s)(1-t), \\ N_3(s, t) &= \frac{1}{4}(1+s)(1+t), & N_4(s, t) &= \frac{1}{4}(1-s)(1+t). \end{aligned} \quad (18)$$

2次要素 ($l_{max} = 9$)

$$\begin{aligned} N_m(s, t) &= \frac{1}{4}s(s+s_m)t(t+t_m), & (m = 1, 3, 5, 7), \\ N_m(s, t) &= \frac{1}{2}(1-t_m^2s^2-s_m^2t^2)[t_mt(1+t_mt)+s_ms(1+s_ms)], \\ & & (m = 2, 4, 6, 8), \\ N_9(s, t) &= (1-s)^2(1-t)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

3.2 自己影響係数の計算 (境界形状表現1次要素、場の関数表現0次要素の時)

場の関数については節点、選点ともに要素中央に存在し、境界形状を定めるために要素の4すみの座標が与えられている。この場合、(14), (15), (16) は簡単な形になり、

$$\alpha^{(i)}\phi^{(i)} + \sum_{p=1}^{p_{max}} \phi^{[p]} D_p^{(i)} - \sum_{p=1}^{p_{max}} \frac{\partial \phi^{[p]}}{\partial n} S_p^{(i)} = 0, \quad (20)$$

$$\alpha^{(i)} + \sum_{p=1}^{p_{max}} D_p^{(i)} = 0, \quad (21)$$

$$-\left(\sum_{\substack{p=1 \\ T(p) \neq i}}^{p_{max}} D_p^{(i)} \right) \phi^{(i)} + \sum_{\substack{p=1 \\ T(p) \neq i}}^{p_{max}} \phi^{[p]} D_p^{(i)} - \sum_{p=1}^{p_{max}} \frac{\partial \phi^{[p]}}{\partial n} S_p^{(i)} = 0, \quad (22)$$

となる。(22) で自己影響係数の内実際に計算が必要となるのは $S_p^{(i)}$ だけとなる。 $S_p^{(i)}$ は演算して行くと特異性がある項と特異性が無い項に分離できる。

$$\begin{aligned}
S_p^{(i)} &= \iint_{\partial V_p(s,t)} \frac{J(s,t)}{|\vec{x} - \vec{x}'(s,t)|} ds dt \\
&= \iint_{\partial V_p(s,t)} \frac{\sqrt{\sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 C_{mn} s^m t^n}}{\sqrt{r_{20}s^2 + r_{02}t^2 + r_{22}s^2 t^2}} ds dt \\
&= \iint_{\partial V_p(s,t)} \frac{\sqrt{\sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 C_{mn} s^m t^n} - \sqrt{C_{00}}}{\sqrt{r_{20}s^2 + r_{02}t^2 + r_{22}s^2 t^2}} ds dt \\
&\quad + \iint_{\partial V_p(s,t)} \frac{\sqrt{C_{00}}}{\sqrt{r_{20}s^2 + r_{02}t^2 + r_{22}s^2 t^2}} ds dt.
\end{aligned} \tag{23}$$

(23) 右辺最後の項は特異性を持つが、解析的に計算することが可能であり、結果は次式となる [2].

$$\begin{aligned}
&\sqrt{C_{00}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{ds dt}{\sqrt{r_{20}s^2 + r_{02}t^2 + r_{22}s^2 t^2}} \\
&= \sqrt{C_{00}} \{I_s(1,1) - I_s(-1,1) - I_s(1,-1) + I_s(-1,-1)\},
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
I_s(s,t) &= \frac{t}{\alpha} \log \left\{ \alpha s + \beta \cos \phi t + \sqrt{r_{20}s^2 + r_{02}t^2 + r_{22}s^2 t^2} \right\} \\
&\quad + \frac{s}{\beta} \log \left\{ \alpha \cos \phi s + \beta t + \sqrt{r_{20}s^2 + r_{02}t^2 + r_{22}s^2 t^2} \right\},
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\alpha = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \right|_{s=t=0}, \beta = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right|_{s=t=0}, \cos \phi = \left(\frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}}{\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \right| \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right|} \right)_{s=t=0} \tag{26}$$

3.3 自己影響係数の計算（境界形状表現 1 次要素、場の関数表現 1 次要素の時）

この場合、(14),(15),(16) は、次のようになる。

$$\alpha^{(i)} \phi^{(i)} + \sum_{p=1}^{p_{max}} \sum_{l=1}^4 \phi_l^{[p]} D_{p,l}^{(i)} - \sum_{p=1}^{p_{max}} \sum_{l=1}^4 \frac{\partial \phi^{[p]}}{\partial n_l} S_{p,l}^{(i)} = 0, \tag{27}$$

$$\alpha^{(i)} + \sum_{p=1}^{p_{max}} \sum_{l=1}^4 D_{p,l}^{(i)} = 0, \tag{28}$$

$$-\left(\sum_{p=1}^{p_{max}} \sum_{l=1}^4 D_{p,l}^{(i)} \right) \phi^{(i)} + \sum_{p=1}^{p_{max}} \sum_{l=1}^4 \phi_l^{[p]} D_{p,l}^{(i)} - \sum_{p=1}^{p_{max}} \sum_{l=1}^4 \frac{\partial \phi^{[p]}}{\partial n_l} S_{p,l}^{(i)} = 0. \tag{29}$$

また、 $S_{p,l}^{(i)}, D_{p,l}^{(i)}$ は次式のようにになる。

$$D_{p,l}^{(i)} = \iint_{\partial V_p(s,t)} N_l(s,t) \frac{\vec{n}(s,t) \cdot (\vec{x}^{(i)} - \vec{x}'(s,t))}{|\vec{x}^{(i)} - \vec{x}'(s,t)|^3} J(s,t) ds dt, \tag{30}$$

$$S_{p,l}^{(i)} = \iint_{\partial V_p(s,t)} N_l(s,t) \frac{J(s,t)}{|\vec{x}^{(i)} - \vec{x}'(s,t)|} ds dt. \tag{31}$$

(30),(31) の計算のうち、選点と節点が近いとき SACT(Self-Adaptive Co-ordinate Transform) を用いて計算した。SACT は被積分関数が弱い特異性を持つとき、特異性が強い部分に積分点を集中することで通常のガウス

の数値積分によって特異積分を計算する方法である [3]. 被積分関数を $f(s, t)$ とするとき

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(s, t) ds dt \quad (32)$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f \left\{ \frac{[(\gamma_1 - \bar{\gamma}_1)^3 + \bar{\gamma}_1(\bar{\gamma}_1^2 + 3)]}{(1 + 3\bar{\gamma}_1^2)}, \frac{[(\gamma_2 - \bar{\gamma}_2)^3 + \bar{\gamma}_2(\bar{\gamma}_2^2 + 3)]}{(1 + 3\bar{\gamma}_2^2)} \right\} \\ \times \frac{3(\gamma_1 - \bar{\gamma}_1)^2}{(1 + 3\bar{\gamma}_1^2)} \frac{3(\gamma_2 - \bar{\gamma}_2)^2}{(1 + 3\bar{\gamma}_2^2)} d\gamma_1 d\gamma_2. \quad (33)$$

ここで

$$\bar{\gamma}_1 = \sqrt[3]{\bar{s}s^* + |s^*|} + \sqrt[3]{\bar{s}s^* - |s^*|} + \bar{s}, \quad s^* = \bar{s}^2 - 1, \quad (34)$$

$$\bar{\gamma}_2 = \sqrt[3]{\bar{t}t^* + |t^*|} + \sqrt[3]{\bar{t}t^* - |t^*|} + \bar{t}, \quad t^* = \bar{t}^2 - 1. \quad (35)$$

$(s, t) = (\bar{s}, \bar{t})$ は $f(s, t)$ の特異点である.

3.4 自己影響係数の計算 (境界形状表現 2 次要素, 場の関数表現 2 次要素の時)

この場合自己相関関数の計算には DTM (*Degenerate Triangle Mapping*) を用いる [1]. 3 次元空間に存在する平面上の 3 角領域を単位正方形領域に写像する座標変換として次の座標変換を用いる.

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = (1 - \rho_1) \begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix} + \rho_1(1 - \rho_2) \begin{pmatrix} s_2 \\ t_2 \end{pmatrix} + \rho_1\rho_2 \begin{pmatrix} s_3 \\ t_3 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

ρ_1, ρ_2 は 3 角極座標, $(s_i, t_j) : j = 1, 2, 3$ は 3 角形のそれぞれの頂点における (s, t) の値である. 4 角形領域 ∂V_j を幾つかの 3 角形領域に分けこの変換により変数変換する. この時, 特異点になる節点が 3 角形の頂点となるようにする. 3 角領域で特異性を持つ被積分関数は, 各々単位正方領域の特異性を持たない関数に変換される.

選点が $k (k = 1, 2, \dots, 8, 9)$ 番目の節点に一致しているとき, 変換後の内挿関数は DTM の性質から, 補助関数 H_m を用いて, 次のように表すことができる.

$$N_m = \begin{cases} 1 + \rho_1 H_m(\rho_1, \rho_1) & (m = k) \\ \rho_1 H_m(\rho_1, \rho_2) & (m \neq k) \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots, 9). \quad (37)$$

補助関数 H_m を用いて様々な物理量を表現すると, 最終的に影響係数は以下ようになる.

$$S_m^{(j)} = 2 \sum_{\mu=1}^{\kappa} \int_0^1 \int_0^1 \frac{N_m(\rho_1, \rho_2) J(\rho_1, \rho_2) A_\mu}{R(\rho_1, \rho_2)} d\rho_1 d\rho_2, \quad (38)$$

$$D_m^{(j)} = 2 \sum_{\mu=1}^{\kappa} \int_0^1 \int_0^1 \frac{K(\rho_1, \rho_2) H_m(\rho_1, \rho_2)}{R^3(\rho_1, \rho_2)} J(\rho_1, \rho_2) A_\mu d\rho_1 d\rho_2, \quad (m \neq k), \quad (39)$$

$$D_m^{(j)} = 2 \sum_{\mu=1}^{\kappa} \int_0^1 \int_0^1 \frac{K(\rho_1, \rho_2)}{\rho_1 R^3(\rho_1, \rho_2)} [1 + H_m(\rho_1, \rho_2)] J(\rho_1, \rho_2) A_\mu d\rho_1 d\rho_2, \\ (m = k). \quad (40)$$

ここで, $m = 1, 2, \dots, 9$ で κ は要素を 3 角形に分割する時の 3 角形の個数であり, $\kappa \in [2, 3, 4]$ となる. (40) 式は, $\rho_1 \rightarrow 0$ の時, $\frac{0}{0}$ となり値が定まらない. しかし, これらの項は立体角 α の項と打ち消し合うため, 積分を実

行する必要はない.

$$\vec{X}(\rho_1, \rho_2) = - \sum_{m=1}^9 H_m \vec{x}_m, \quad (41)$$

$$|\vec{x}^{(i)} - \vec{x}(s, t)| = \rho_1 R(\rho_1, \rho_2), \quad (42)$$

$$K(\rho_1, \rho_2) = j_1 X(\rho_1, \rho_2) + j_2 Y(\rho_1, \rho_2) + j_3 Z(\rho_1, \rho_2), \quad (43)$$

$$R(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{X^2(\rho_1, \rho_2) + Y^2(\rho_1, \rho_2) + Z^2(\rho_1, \rho_2)}, \quad (44)$$

$$dS = J(\rho_1, \rho_2) J_\mu(\rho_1, \rho_2) d\rho_1 d\rho_2, \quad (45)$$

$$J_\mu = 2\rho_1 A_\mu. \quad (46)$$

ここで, A_μ は μ 番目の三角形の面積である.

4 試計算

円管内流について試計算を行い, その結果を評価した. Fig. 1 に境界条件, Fig. 2 に計算格子を示す. 全境界で ϕ_n を与える場合と, 流出境界では ϕ を, その他の境界では ϕ_n を与える場合の 2 種類の境界条件で計算を行った. Fig. 3, 4, 5 にそれぞれ 1), 2), 3) の計算結果を示す. 1) の場合には流入境界の角点近傍の ϕ_n の計算 (節点番号 121~300) で特に誤差が大きくなっている. その他の場所でも全般に誤差は大きい. 2), 3) の場合はほぼ解析解に近い数値解が得られたが, 3) の場合には流出入口境界角点 (節点番号 467~497) で 1 % 前後の誤差がみられた. 数値積分の精度を上げた結果この誤差は減少するため, 計算精度に起因していると考えられる.

5 大型計算機センターへの要望

SX4 は計算速度は速いのですが, 時間領域でシミュレーションを繰り返すような場合はその高性能を持ってしても非常に長時間の計算になり, 結果として高価な計算コストになりがちです.

並列化, ベクトル化, ライブラリーの使用によるより一層の高速化も考えられるのですが, コードを計算機センター用に変更すると他環境との併用をする場合に不便です. 一方でパソコン, ワークステーションの高速化はめざましく, 安価なワークステーションを研究室で買う方が安くつく場合もあります.

ですから, より安く, また他環境との併用が容易なシステムをご提供いただければと思います. より一層のセンターの方々の啓蒙活動を期待いたします.

参考文献

- [1] Xü, Hongbo. : Numerical Study of Fully Nonlinear Water Waves in Three Dimensions, *Ph.D. thesis*, Dept. of Ocean Eng., MIT, Cambridge, (1992)
- [2] Aliabadi, M.H. Hall, W.S. : Taylor Expansions for Singular Kernels in the Boundary Element Method, *Int. J. Numer. Methods. in Engng*, 21, 2221-2236, (1985)
- [3] Telles, J.C.F. : A Self-Adaptive Co-ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals, *Int. J. Numer. Methods. in Engng*, 24:959-973, (1987)

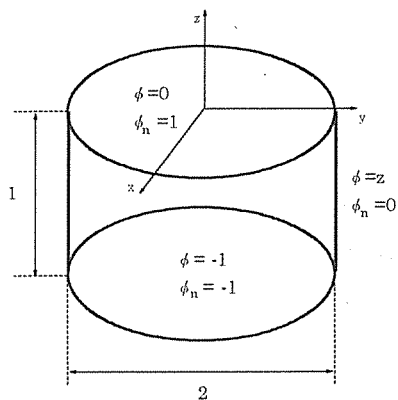


Fig. 1 境界条件

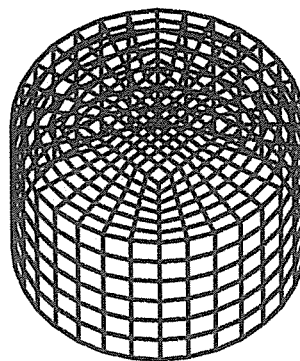


Fig. 2 計算格子

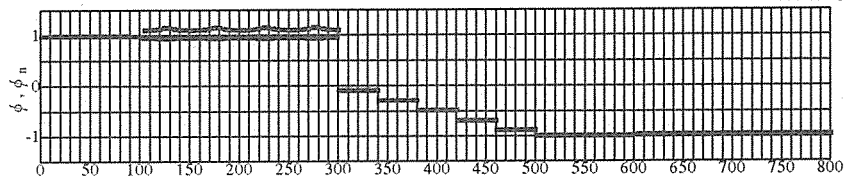
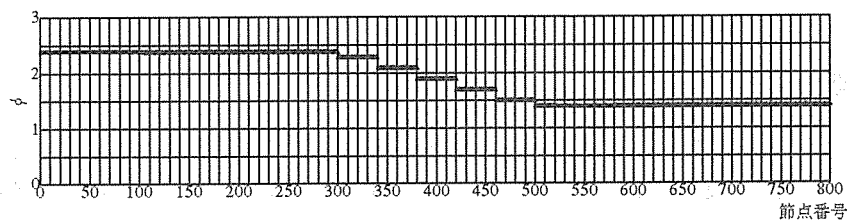


Fig.3: 1) 場の関数 0 次要素, 境界形状 1 次要素による計算結果 節点番号

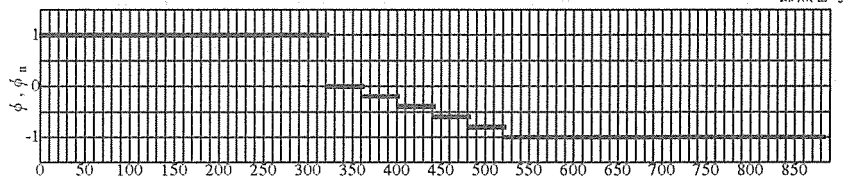
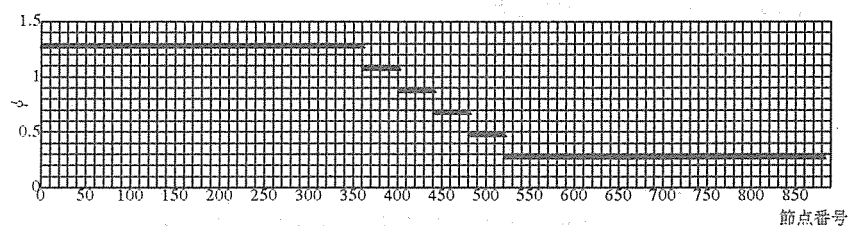


Fig.4: 2) 場の関数, 境界形状 1 次要素による計算結果 節点番号

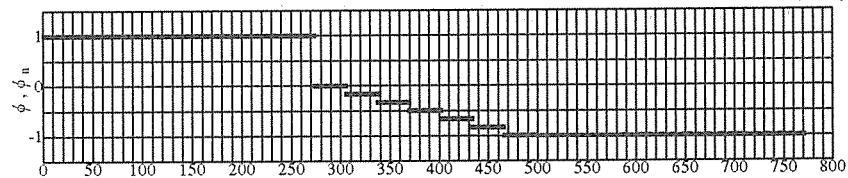
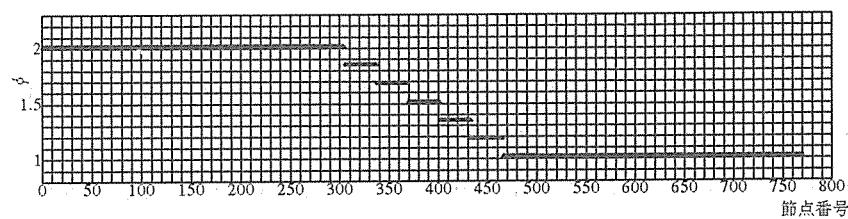


Fig.5: 3) 場の関数, 境界形状 2 次要素による計算結果 節点番号