OUKA
Osaka University Knowledge Archive

Title	弾性ロータの振動およびつりあわせに関する研究
Author(s)	岩壺, 卓三
Citation	大阪大学, 1971, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/665
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

弾性ロータの振動およびつりあわせに関する研究

岩 壷 卓 三

弾性ロータの振動およびつりあわせに関する研究

昭和46年2月

神戸大学工学部

岩壺卓三

目　次

頁

概　要　1

第Ⅰ編　非対称回転軸の振動　11

第1章　概　説　12

第2章　非対称弾性ロータの振動　15

第1節　まえがき　15

第2節　運動方程式　16

第3節　自由振動の解析　19

第4節　強制振動の解析　27

4－1　重力によって生ずる強制振動　27

4－2　軸の偏心によって生ずる強制振動　29

第5節　まとめ　33

付　録　34

第3章　オーバハング部を有する非対称軸弾性ロータの振動　36

第1節　まえがき　36

第2節　自由振動の解析　36

2－1　運動方程式　36

2－2　解析　38

2－3　特性方程式とその根　41

第3節　種々のパラメータの影響について　44

3－1　段付比の影響　44

3－2　スパン比と質量比の影響　46

3－3　スパン比と段付比の影響　47

3－4　モード形　48

第4節　自由振動の安定　49

第5節　重力による強制振動の解析　54

第６節　実験　58
第７節　まとめ　61
第４章　オーバハング部を有する弾性ロータの設計法　65
第１節　まえがき　65
第２節　理論解析　66
第３節　パラメータが固有値およびモードにおよぼす影響　69
３－１　スパン比と質量比の影響　69
３－２　段付比の影響　70
３－３　段付比とスパン比の変換　70
３－４　ジャイロモーメントが固有値に与える影響　72
第４節　設計法　74
４－１　設計上の分類　74
４－２　設計の方法　75
４－３　設計例　76
第５節　実験とその考察　82
第６節　まとめ　85
第５章　有限駆動力をもつ非対称ロータの危険速度通過について　86
第１節　まえがき　86
第２節　運動方程式　87
第３節　解析　89
３－１　漸近的方法による近似式の導出　89
３－２　定常状態　91
第４節　系の安定性　92
第５節　主危険速度通過時の非定常振動　97
５－１　軸の非対称性の影響　97
５－２　偏心の位相角の影響　98
５－３　トルクの大きさの影響　99

5－4　減衰の影響　99
5－5　減速の場合の非定常振動　100
第6節　危険速度通過時の最大振幅　102
6－1　偏心の位相角の影響　102
6－2　ロータの非対称性による影響　102
6－3　減衰の影響　103
第7節　実験装置と実験結果　105
7－1　実験装置　105
7－2　実験結果　106
第8節　まとめ　112

第6章　有限駆動力をもつ非対称回転軸の危険速度通過現象の解析　113
第1節　まえがき　113
第2節　過渡振動の解析法　114
第3節　非対称回転軸の過渡振動の解析　115
第4節　まとめ　120
付録　121
第Ⅱ編　弾性ロータのつりあわせ　123
第1章　概説　124
第2章　弾性ロータと剛性ロータ　127
第1節　まえがき　127
第2節　剛性ロータのつりあわせ　127
第3節　弾性ロータと剛性ロータ　135
第3章　弾性ロータのつりあわせ（Ⅰ）（剛軸受台で支持される場合）　139
第1節　まえがき　139
第2節　つりあわせの方法　140
2－1　軸受力を零にするつりあわせ法　140
2－2　モーダルバランス法　143
2－3　静つりあいと動つりあいの条件　144

第３節　つりあわせ効果の検討　146
第４節　前節の条件を満たすためのつりあわせ方法　150
第５節　まとめ　151
第４章　弾性ロータのつりあわせ（Ⅱ）
（軟軸後で支持される場合）　155
第１節　まえがき　155
第２節　理論解析　155
第３節　つりあわせに関する検討　160
第４節　実験および考察　165
４－１　実験装置　166
４－２　実験結果　167
４－３　実験に対する考察　168
第５節　まとめ　168
第５章　非対称軸弾性ロータのつりあわせ　170
第１節　まえがき　170
第２節　偏心による強制振動の解析　170
２－１　運動方程式　170
２－２　解析　171
２－３　ふつりあいの位相角とたわみの振幅との関係　174
２－４　ふつりあいの位相とたわみの位相の関係　178
第３節　非対称軸のつりあわせ方法　179
３－１　対称軸のつりあわせ　179
３－２　非対称軸のつりあわせ　180
３－３　非対称軸のつりあわせの効果　182
第４節　実験とその考察　184
４－１　実験装置　184
４－２　実験　186
４－３　考察　189
第５節　まとめ　189

第6章　オーバハング部を有する弾性ロータのつりあわせ　191
第1節　まえがき　191
第2節　理論解析　192
第3節　ふつりあいによる軸受応答の検討　197
3－1　振動モードと軸受応答の検討　197
3－2　ふつりあい位置判定の指針　200
第4節　つりあわせ方法の検討　202
4－1　つりあわせ方法　202
4－2　つりあわせ効果の検討　203
第5節　つりあわせ位置の選定　206
第6節　実験　209
6－1　実験装置　209
6－2　実験結果　210
第7節　まとめ　211
第7章　弾性ロータのつりあわせ基準　215
第1節　まえがき　215
第2節　軸受の弾性と減衰を考慮した弾性ロータ系　216
第3節　計算結果の検討　219
第4節　つりあわせ基準作成に関する考察　221
第5節　まとめ　225

総括　226

参考文献　229

お礼のことば　233

おもな記号

$O-xyS$: 静止座標系で OS 軸は，軸受を通る水平な軸で Ox 軸はそれに垂直下向きを正，Oy 軸は，OS，Oy 軸に垂直で，右手系を形成する方向を正とする。

$O-\xi\eta S$: 回転座標系で．OS 軸は静止座標系と一致し，角速度 ω で回転するものとし，$O\xi$，$O\eta$ 軸はそれぞれ右手系を形成するように剛性の高い方を ξ，剛性の低い方を η とするように軸を定める（図 2-1 参照）。

z，ζ : 複素数で次の諸関係を満たす。

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$
$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \bar{\zeta} = \xi - i\eta$$
$$z = \zeta e^{i\omega t}, \quad \bar{z} = \bar{\zeta} e^{-i\omega t}$$

φ, θ, ψ : オイラーの角

θ_x, θ_y : 傾き角 θ の x，y 方向の成分（図 2-2 参照）

I_1, I_2, I_3, I_4 : 断面 2 次モーメント

E : ヤング率

$I = (I_1 + I_2)/2$

$\Delta I = (I_1 - I_2)/2$

I_P, I_{D1}, I_{D2} : OS，$O\eta$，$O\xi$ 軸まわりの単位長さ当りの慣性モーメント．

$I_D = (I_{D1} + I_{D2})/2$

$\Delta I_D = (I_{D1} - I_{D2})/2$

$I_{P1} = I_P + 2I_D$

$I_{P2} = I_P - 2I_D$

M_{bx}, M_{by} : Ox 軸，Oy 軸まわりの曲げモーメント．

M_{sx}, M_{sy} : Ox 軸，Oy 軸まわりのジャイロモーメント．

T_x, T_y : OSx，OSy 面内のせん断力

$\varepsilon(x)$: 回転軸の偏心．

$\varepsilon_\xi(s), \varepsilon_\eta(s)$: $\varepsilon(s)$ の ξ, η 方向の偏心成分.

a_n, b_n : 偏心をあらわす n 次のフーリエ係数

$\phi_r(s)$: r 次のモード函数

E_n, E'_n : 偏心をあらわす n 次のモード係数

$\omega^*_{i\xi}, \omega^*_{i\eta}$: 1次の ξ, η 方向のジャイロモーメントを考慮しないときの固有振動速度.

$\omega^{*2} = (\omega^2_{i\xi} + \omega^2_{i\eta})/2$

ω : OS軸の回転速度 (I-5 では $\omega = \sqrt{k/m}$ を表わす)

Ω : 無次元回転角速度 $\Omega = \omega/\omega^*$

Ω^* : 無次元危険速度

$A\rho = m$: 単位長さ当りの軸の質量

l : 回転軸の全長

t : 実時間

b_e, b_i : 速度に比例する外部減衰および内部減衰係数.

μ, ν : b_e/m , b_i/m

g : 重力の加速度

a : スパン比

A, A_L, A_R : 断面積, 左側部断面積, 右側部断面積

$b = 1 - a$

c : 段付比 $c = (I_3 + I_4)/(I_1 + I_2)$

d_e : 軸等価直径比 $d_e = \sqrt{A_R/A_L} \approx \sqrt[4]{c}$,

$M = P/g$, ($M^2 = d_e$; 丸軸の場合は軸径比)

I_G : オーバハング ディスクの無次元ジャイロ効果

λ_0, λ : 回転座標, 静止座標系から見た軸の自然振動数

m_d : ディスク (オーバハング部) の質量

N : 質量比

σ_0 : ふれまわりの無次元角速度

k : ばね定数 (軸の強い方と弱い方の平均値)

Δk : ばね定数の差の 1/2 の値

m : 円板の質量 (I-5 章)

$L(\dot{\varphi})$ ： モータの原動トルク（モータの動特性は無視し，$\dot{\varphi}$ に対して直線的な特性を持つと仮定する）。

$g(\dot{\varphi})$ ： 振動負荷以外の抵抗トルク（$\dot{\varphi}^2$ に比例すると仮定）

φ ： 回転角

U ： ふつりあいのベクトル

U_j ： j 番目の位置の修正量

$G_{ij}(\omega_i, l_j)$ ： ω_i の速度で，l_j の位置の影響係数

$G_s(\sqrt{\Omega}, l_i/l)$，$G(\sqrt{\Omega}, l/l)$ ： $\sqrt{\Omega}$ の速度，l_i/l の位置の影響係数

l_0 ： ふつりあい質量の位置

l_j ： 修正質量の位置

$u(x)$ ： 位置 x における単位長さ当りのふつりあい力

$\phi_j(x)$ ： j 次のモード関数

I_R ： 円板の慣性モーメント（I－5章）

I_M ： モータ回転子，カップリング等円板以外の慣性モーメント（I－5章）

I_T ： 総合慣性モーメント $I_T = I_R + I_M + m\varepsilon^2$（I－5章）

f ： 軸受力

W_S ： 回転軸の重量

W_B ： 軸受台重量

$\omega_B = \sqrt{kg / W_B}$

$P = \mu^4 l_p \{(\omega_B/\omega)^2 - 1\}$

$N = W_B / W_S$

$Q = \omega_B / \omega_S$

概　要

回転体の性能について考える場合，いろいろな考え方がある。たとえば，タービンやモータのようなものを考える場合，高出力を出すためには，回転速度をそのままにして，寸法を拡大するかまたは，寸法をそのままにして，回転速度を上げるか　のいずれかを行わなければ　大巾な性能の向上は望めない。たとえば，タービン発電機においては，1940年頃は，最も大きな出力の発電機でも120MWであったのが，1965年頃には，750MWの大容量のものが作られ，最近では，1136MWの発電機が作られるようになった。このようなタービン発電機の装置の大きさを考えると，250MWでは，蒸気タービンと発電機を入れて全長30mとなっている。ところが，500MWでは全長52mとなり，このうち発電機の部分だけでも，ロータの軸受間長さ11m，重量74tonという大きさである。しかも，タービンと発電機とは直結されていて，回転軸を厳密に一直線上に保たねばならない。このように大型化してくると，種々の困難な問題が生じてくる。その中で最も困難な問題は振動の相似則からくる共振振動数の低下の問題である。

すなわち，回転体の寸法を拡大する場合には，あるロータを幾何学的に相似に拡大すれば，その危険速度は，拡大率の自乗の割合で低下する。したがって，拡大する前と同じ速度で運転するとすれば，従来，一次危険速度よりも十分低い速度で運転していたものが，危険速度の低下により，相対的に危険速度附近　またはそれ以上の速度で運転することになる。

また，回転体の寸法をそのままにして，運転速度を上げるとすれば，回転速度が上がるために　危険速度附近またはそれ以上で運転することになる。一方　製作上の誤差によるロータのふつりあいによって発生する遠心力は，回転速度の自乗に比例するから運転速度を上げることによって　非常に大きな力がロータ系に作用することになる。

以上に述べた２つの性能向上の方法は，運転速度を危険速度で

無次元化すればわかるように，いずれも相対的に 運転速度を上げているという意味で 同じことである。そして，いずれの場合にも 大きな振動の発生の原因となり 回転体の破損または，軸受の破損の原因となっている。

要するに，回転機械の性能向上のためには，大型化あるいは，高速化が必要であり，大型化，高速化を行うには，種々の困難な問題が生じてくる。この困難な問題に対する研究は，1880年頃から始まり，数多くの研究がなされているが，今なお未解決の問題が 数多く残されている。以下にその研究の内容と問題点について述べる。

まず，ロータをつりあわせの見地から分類する場合に，二つに分けることができる。(1) 使用回転速度がロータ系全体の一次危険速度よりも十分低い場合であり，このような場合を，剛性ロータと呼ぶ。(2) 使用回転速度がロータ系全体の一次危険速度の60～70%より上の場合であり，このようなロータを 弾性ロータと呼ぶ。剛性ロータのつりあわせは，静つりあいと動つりあいだけで十分であるが，弾性ロータの場合には，それだけでは不十分である。軸がたわんでいる状態でも なおつりあいがとれるように 軸のたわみをも考慮したつりあいの条件を付加しなければならない。この条件を附加したつりあわせを 弾性ロータのつりあわせと呼ぶ。

回転機械の振動に関する研究は (1)危険速度の予測，(2)振動の励起，(3)振動振幅 の3つの分野に分けることができる。(1)の分野に関する研究内容は 非常に多く，ほとんどの研究もこの分野に関するものである。この分野において今なお未解決のものとして，ジャイロモーメントの影響，軸受を境界条件として評価する評価法，ロータの基礎およびケーシングの影響等がある。ジャイロモーメントの影響については，F.M.Dimentberg，T.M.Tondle 等の教科書には，簡単化された形で記されているだけである。軸受に関する研究も，非常に多くの研究報告があるにもかかわらず，ま

だ，すべての条件で現象と一致するような研究報告はなされていないようである。ロータの基礎およびケーシングの影響については　まだ研究すらなされていないという状態であり，ロータの危険速度に関する問題の深さがわかる。

非対称回転軸については，タービン発電機の2極回転子にみられるように，軸断面の直交する2つの主軸に関する軸剛性に差が生ずる。一方，質量は主軸方向に関係なく一定であるから，主軸に関して　2つの危険速度が存在することになる。また，断面二次モーメントの算定に際して，主軸より適当な角度だけ回転した座標を選べば，主軸方向の最大と最小値の範囲内の任意の軸剛性が選べることから　軸剛性の最大と最小の値で決められる2つの危険速度の間のどこかで　危険速度を生ずる。したがって，主軸方向の最大と最小の軸剛性によって決められる危険速度の範囲内のすべてが不安定な速度領域となってしまう。このように，危険速度領域が　対称軸の場合よりも広いことから，ロータと軸受に減衰があるような系においても不つりあいによって生ずる振動の振幅は　大きく現われる。また，主軸剛性に差があるために　最大振幅の位相は　対称軸の場合の位相おくれを考慮した不つりあい質量の存在する位相と一致せず，その位相ずれは，回転速度の関数となる。この際，不つりあい質量の存在する位相によって，最大振幅が異なり，その変化率も速度の関数となるという非対称軸特有の現象がみられる。これらの現象の可能性については，回転軸を集中質量系と近似して，C.R. Sonderberg，D. Robertson，D.M. Smith，H.D. Taylar，C.M. Laffoon，B.A. Rose 等によって定性的に示されている。一方，R.E.D. Bishop，A.G. Parkinson，S.T. Ariaratnam 等は，軸を連続系とみなしたときの非対称な回転軸の解析をおこない，同様の現象について説明を与えている。しかし，彼等の研究では，軸の非対称な剛性のみを考慮しているが，非対称な回転慣性の影響については，考慮していない。一方，山本，太田等は　回転軸系を集中質量系に近似して非対称な回転慣

性の項を入れた理論的研究をおこなっている。しかし，回転軸系を連続体とみなした場合の研究は全くなされていない。

カップリングやファンなどのようなオーバハング部がある回転軸系の場合には，振動は複雑となり，振動の除去も困難となる。なぜなら，系を集中質量系で近似するときにも，最低2個の集中質量が必要なことからもわかるように，振動様式が非常に複雑となるからである。この様な系に関する研究はあまりなされていない。対称軸の場合については，R.F. Wojnowski と T.R. Faucett, T.C. Huang と F.C.C.Huang および，小堀等の研究があるが，それらは系の特性方程式の定性的な説明だけに終っているため，設計に対して全く役立たない。実際のオーバハング軸としては，遠心ファンのように丸軸の場合と，さらに複雑な系としては，ターボジェネレータのように軸受間部が非対称で，オーバハング部（カップリング部）が対称軸のような場合がある。対称軸については，Wojnowski 等の研究があるが，定性的な説明にとどまっている。さらに，非対称軸でオーバハング部を持つ系の振動現象を明らかにした研究は，現在までみあたらない。このような場合の振動現象を明らかにするときにさらに望ましいのは，この様な複雑な系をより理解しやすい二つの系　すなわち　オーバハング部を持つ対称な回転軸系と，両端で支持された非対称な回転軸系の問題に帰着させることであろう。そして，オーバハング部を有する対称な回転軸の設計法を用いて，設計上困難なオーバハング部を有する非対称な回転軸の設計ができるようにしておけば，便利であろう。

最近の多くの機械で見られるように，運転速度を危険速度以上に選んでいる機械では，危険速度通過時の問題がある。V.O. Kononenko は　対称な回転軸系を集中質量系とみなし，漸近的手法を用いて　有限な駆動力を持つ回転機械系の解析をおこなっている。また，I　Mitroporiski' は　駆動系はいくらでも必要なトルクを出すことができるという仮定のもとで，やはり漸近的手法

を用いて，非対称な回転軸の危険速度通過に関する研究を行なっている。しかし，非対称回転軸のように危険速度の領域が大きく，対称軸よりも不安定度の高い回転軸系では，危険速度付近の振幅の増加に使われるエネルギがきわめて大きくなるため，駆動力が無制限であると仮定するのは問題である。現実と合致するためには，駆動力の制限を考慮した過渡振動の解析が必要である。

つぎに，前述(2)の分野，すなわち，振動励起について考える。この分野では，空気力，歯車，蒸気脈動等の励振もあるが，なによりも大きなものは，軸の偏心による不つりあい力によって生ずる振動である。ロータの使用回転速度が危険速度に比べて十分低い場合には，ふつうの動つりあわせ法によってつりあわせを行なえる。しかし，危険速度の60～70%より上で運転する場合には，ロータを弾性ロータとしてつりあわせをとらなければならない。ところが前にも述べたように最近の回転機械は大型化，高速化の傾向にあるためほとんどのロータは弾性ロータのつりあわせを行わなければならなくなっている。それにもかかわらず，弾性ロータのつりあわせを行なう確定的な方法はなく，したがって，つりあわせの基準を決める方法もないのが現状である。

弾性ロータのつりあわせの困難さを示すためにまず，つりあわせにおいて満たされねばならない諸条件について述べると，次のようになる。

(1)ロータの振動の測定では，タービンブレードなどのように，部品が外周についていることが多く，また，外周が必ずしも軸心を中心とした真円でない。したがって，振動の測定が不可能か，たとえ可能であっても，十分な精度が得られない場合が多い。このような点を考えると，ロータの外周を測定点にとらず，軸受上を測定点とすることが好ましい。

(2)つりあわせを行なう速度については，危険速度をさける方が好ましい。ロータを危険速度で回転すると，振幅が大きくなり，軸受に非常に大きな減衰がない限り，測定が困難になるからである。

(3)修正面の数を増すと，影響係数の測定数が増すので，つりあわせ操作を簡略にするためには，修正面の数は，できるだけ少ない方がよい。

(4)つりあわせを行なう速度の数は (3)項と同じ理由で，影響係数の測定数を減少させるためには，少ない方がよい。

以上の諸条件を満たすような，弾性ロータのつりあわせ法を確立することが必要である。つりあわせ法に関する従来の研究結果を上記の条件と比較しながら検討する。

1959年 R.E.D. Bishop, G.M.L. Gladwell の提案したモーダルバランス法は，正規モードごとに，低次モードから順次つりあわせを行っていく方法で，理論的には非常にすぐれた方法であるが，上記の条件(2)を満たしていないという欠点がある。このような困難をとり除く方法として，A.H. Church, R. Plunket は，危険速度以外でつりあわせをとる方法を提案しているが，この方法では任意に定められた位置における振幅を測定しなければならず，条件(1)を満たしていない。　　したがって，前述の4つの条件を満たすつりあわせ方法を考案する必要がある。

非対称回転軸やオーバハング部を持つロータについては，前述のように，振動現象ですら明らかにされていない。しかし，このようなロータのつりあわせ方法についても検討する必要がある。オーバハング部を持つロータのつりあわせに関する研究としては R.E.D. Bishop が多くの軸受で支えられたロータのつりあわせについて少しふれているだけで，まだ，ほとんど研究されていない状態である。しかし，現実につりあわせについて困っているのは，オーバハング部のあるロータである。そして，この種のロータのつりあわせには，非常に多くの時間を費している。非対称軸ロータのつりあわせに対しては，不つりあい質量の位相と振幅の最大の位相とが異なるために，対称軸に用いるつりあわせ方法をそのまま使用することはできない。R.E.D. Bishop らは，モーダルバランス法を非対称軸のロータのつりあわせに拡張しているが，非対

称軸ロータのように不安定度の高いロータでは，条件(2)が満されていないのは，不都合である上に，この方法は，非対称軸ロータの特性を十分に把握していないように思われる。

さらに，剛性ロータのつりあわせに関しては，つりあわせ基準ができているが，弾性ロータに関しては，そのようなものがない。しかし，現実の要請としては，つりあわせ基準を作ることが必要となっており，現在ISO-101-WG6の分科会で弾性ロータの許容値設定の方向に進んでいる。英国から，許容値設定の一つの案が提案されたが　十分なものとはいえない。

本研究は，以上に指摘した弾性ロータの振動現象を解明し，実際のロータ設計の際に使用できる資料を与えるために行なったものである。この際，振動除去のためのつりあわせ方法を，種々のロータ系について提案し，従来のつりあわせ方法と比較している。さらに，つりあわせ許容値設定に対する合理的な方針を与えている。

本文は2編より成っている。以下その内容を概説する。

第I編は，主に非対称弾性ロータ系の振動現象の理論的解析を行っているものである。特に，非対称な回転軸は，回転慣性も非対称であるので，その影響を含めた運動方程式を導き，その解析を行ない，その結果得られた結論をもとにして，オーバハング部を有する非対称回転軸の振動現象を解析している。つぎに，これらの結果をもとにして，非対称軸も含めたオーバハング部を有する弾性ロータの危険速度が危険速度と最も離れた位置に来るようにするロータの設計方法を提案している。また，非対称なロータが　有限な駆動力で危険速度を通過するときの過渡振動について漸近的方法を用いて解析をおこない，過渡状態の振動振幅と位相の変化について考察を行ない，過渡状態をよく理解できる位相面による解析法を示し，それを用いた解析例を示している。

第1章は，第I編の内容の概説である。

第2章は，非対称回転軸を有する弾性ロータに断面二次モーメ

ントの非対称性と回転慣性の非対称性を考慮した連続体としての運動方程式を導いている。この際，ロータが回転しているときの自由振動と，偏心および重力による強制振動の解析を行なって，回転慣性の非対称性の不安定におよぼす影響について，減衰を含まない場合と含む場合について検討している。

第3章は，オーバハング部を有する非対称回転軸の振動について解析を行なったものである。回転慣性および減衰項を無視した場合について，ロータが回転しているときの自由振動の安定，および重力による強制振動について解析を行ない，オーバハング部を有する場合と比較検討を行なっている。さらに，実験による検討も加えている。

第4章は，オーバハング部を有する対称な回転軸の設計方法を提案している。この方法は，使用回転速度によって，危険速度以下で運転するか，または，それ以上で運転するかについて先ず判定し，危険速度以上で運転する場合には，1次と2次の危険速度の中央に運転速度がくるように軸径，軸長，スパン比，質量比を決定する設計方法である。また，この方法は，第3章の解析結果を利用すれば，非対称軸の設計にも使用できる。

第5章では，非対称な回転軸を集中質量系で近似して，駆動力が有限な場合の危険速度通過時の振動について漸近的方法を用いて解析を行なっている。そして，有限な駆動力を持つロータ系の危険速度通過時の振幅を一定値以下におさえるために必要なトルクを求める方法を与えている。

第6章は，第5章の解析において得られた種々の振動現象を，物理的に解釈することを目的として，過渡現象の解析に tracking function 法を使用する手法を述べ，これを用いて物理的な解釈を行なっている。

第II編は，弾性ロータのつりあわせに関する一連の研究であって，つりあわせ方法について検討し，剛な軸受で支えられたときのつりあわせ方法，および，剛性ロータ用のバランシングマシン

のような軸受台で支えられたときのつりあわせ方法について合理的な提案を行っている。また，非対称軸ロータのつりあわせについても，理論的にすっきりしたつりあわせ方法を提案している。また，前述の軸受支持が剛な場合のつりあわせ方法を，オーバハング部を有するロータの場合に拡張し，この方法の有効性を示している。最後に，弾性ロータのつりあわせの許容値の定め方に関する合理的な方針を示している。

第1章は，第II編の内容の概説である。

第2章は 剛性ロータのつりあわせ方法に対する理論的な考察および 弾性ロータと剛性ロータとの違いについて述べている。

第3章は 剛な軸受台で両端が支持された弾性ロータのつりあわせ方法として 軸受力を零にするつりあわせ方法を示し，つりあわせ効果について，R.E.D. Bishop 等のモーダルバランス法を理論的に比較検討するとともに，低速から高速まで静粛な運転が得られるために必要かつ十分なつりあわせ面の数について検討を行なっている。

第4章は，両端が軟軸受台で支持された弾性ロータのつりあわせ方法を示している。この方法においては，危険速度においても測定が可能であると考えられるので R.E.D. Bishop の示すモーダルバランス法の考え方をもとにしてつりあわせを行なっている。

第5章は 非対称な剛性をもつ弾性ロータの解析を行ない，その結果得られる非対称軸ロータ特有の特性を考慮に入れたつりあわせ方法を提案し，理論的および実験的にその効果を検討している。

第6章は，オーバハング部を有するロータのつりあわせ方法について 検討している。まず，第3章の方法をもとにして，軸受反力を零にするつりあわせ方法とモーダルバランス法とについてつりあわせ効果を検討している。つぎに，オーバハング部を有するロータの場合，不つりあいが軸受部とオーバハング部のいずれにあるかを知ることが大切であるので，このような不つりあい位

置を知るための方法を示している。

第7章は，弾性ロータのつりあわせ基準作製の方法を述べている。

なお，本論文の第II編第3，7章の一部は，ISO-TC-101部会のつりあわせに関する基準制定のための研究部会の依頼にもとづきつりあわせ研究会へ資料として提出したものである。

第 I 編

非対称回転軸系の振動

第1章

概説

非対称回転軸とは　軸断面の断面二次モーメントが　2つの直交する主軸方向で異なる値を持つ回転軸のことである。このような軸としては，二極発電機の回転子がそうであって，主軸方向の自由振動数が異なるために，対称な軸断面を持つ回転軸とは異なった振動現象が観察される。たとえば，この回転軸を水平において，回転させると，回転軸の自重が強制力となり，その強制力は1回転に2回生じるから，自然振動数のちょうど1/2のところで共振を起こす。また，対称軸の場合であれば，危険速度は1次モードに対して1つの値しか持たないのが非対称回転軸の場合には，2つの主軸で異なった値を持つため，危険速度は1つの定まった値ではなく，領域として現われる。また，回転慣性モーメントも非対称であるから，それによって非対称な回転慣性と非対称なジャイロモーメントが生じ，それが危険速度の範囲を増加させいっそう非対称回転軸の振動現象を複雑にしている。

非対称回転軸の振動に関する研究の始まったのは，1930年代であり，このころちょうど二極発電機の性能向上の時期であった。機械の大型化に伴って危険速度が低下し，大きな振動が生じたため回転機械の振動の研究の盛んな時期であった。このころの研究は，軸を簡単化して1自由度系とみなして，軸剛性の非対称性だけについて解析をおこなっていた。1960年代になって，R.E.D. Bishop等が系を連続体とみなした時の一連の研究をおこない，その中の一つとして，非対称回転軸について，軸剛性の非対称性のみを考えた振動の解析を行なっている。時を同じくして，S.T. Ariaratnumは同様の研究を行っている。彼は主に安定問題について論じ，減衰による安定の効果と非対称軸による不安定化の現象との関係を理論的に考察している。一方，山本等は，非対称回転軸の振動は，軸剛性の非対称性のみでなく，回転慣性モーメントの非対称性によって生ずる非対称な回転慣性とジャイロモーメン

トにも原因しているということを 1自由度系のロータについて理論的に明らかにし，非対称な回転慣性モーメントの影響を減衰，軸の非対称性等との関係についてくわしく考察を行っている。

しかし，非対称回転軸の研究は，まだまだ不完全であるように思われる。すなわち，以上の解析においては，系を解析的に都合のよい系に簡単化して，解析の目的とする現象のみを考察するという観点に立った研究であり，非対称回転軸の振動の定性的な性質の解明のみであると考えられる。一方，実際に使用されているロータはそのような簡単なものではなく，軸受には，ばね効果と減衰効果があり，また，オーバハング部を持っていたり，複雑な形状をしている効果等がある。したがって，これらの効果等も考えに入れた研究も必要である。

以下の章では，これらの効果の一部について考察している。第2章は，非対称回転軸を連続体とみなして回転慣性モーメントの非対称性をも考慮した運動方程式を導き，その一般的な解析をおこなっているものである。解析例として両端が単純支持されているような理想的なベアリングで支えられた場合について解析をして回転慣性モーメントの非対称性の影響と減衰効果について示している。第3章は，オーバハング部を持つ非対称回転軸の振動の解析である。軸受間部とオーバハング部との間に段がついていて両部分の非対称な割合の異なる場合の解析をおこなっている。そして対称軸との関係を示している。第4章は第3章の結果と結びつけられれば対称軸の設計方法で十分であるという観点に立ってオーバハング部を有する対称軸の設計方法を提案している。この方法は，主に1次危険速度以上でロータを使用する場合に，使用回転速度が，1次と2次の危険速度の中央にきて，しかも1次と2次の間隔が大きくなるように軸受間部とオーバハング部の長さの比と軸径の比を決定する方法を示すものである。第5章，第6章は，少し趣きが変わり，非対称回転軸が危険速度を通過するときの振動の過渡現象の解析である。とくに，駆動するモータのパ

ワーが不十分な場合に，回転速度の増減と振動振巾の増減の間でエネルギのやりとりの現象がみられるが，その現象について明らかにするものである。第5章は特にこのような系の解析であり，第6章はその運動の物理的な解釈に重点がおかれている。

第2章
非対称軸弾性ロータの振動

第1節 まえがき

非対称なロータによって，ひき起される振動については，かなり以前から研究されていて，多くの研究者によって種々の仮定のもとで，その現象の解析がなされている。比較的最近の研究では，F.M. Dimentberg[7]が自由振動について，種々の境界条件のもとで解析をおこない，境界条件と不安定領域の関係について示し，偏心による強制振動および重力による強制振動についても解析している。一方，R.E.D. Bishop と A.G. Parkinson[25] および，S.T. Ariaratnam[26]等は，軸受が単純支持の条件を満たすものとして，モード解析をおこなっている。とくに R.E.D. Bishop 等は非対称なロータ特有の2次的危険速度（シャフトの回転速度が主危険速度の$\frac{1}{2}$のところで生じる危険速度）について論じ，非対称軸ロータのバランスの方法に対する指針を与えている。また，S.T. Ariaratnam は系に存在する内部減衰および外部減衰が安定にどの程度作用するかについて論じている。E.H. Hull[9]は非対称なロータが非対称な軸受で支えられた場合を論じるために，モデル化されたロータを作り，実験的にロータの振動現象を解析している。また，理論的な解析としては，H.F. Black & A.G. Mcternan[35]によっておこなわれたものがある。山本，太田等[11][34]は非対称回転体の振動について，理想化された質量のない軸と，慣性モーメントが非対称な円板からなるロータを考え，非対称回転体によって生ずる不安定現象，非対称回転体と非対称軸回転体との安定の相違，および非対称な回転体が非対称な剛性を有するシャフトによって構成されている場合の振動等について詳細に論じている。

一方，著者は非対称な回転軸は剛性と慣性モーメントが非対称であるのが大部分であることから，非対称な軸によって生ずるジャイロモーメントの影響を考慮した連続体の運動方程式を導いた。[38]

慣性モーメントの非対称性が高速回転においてどの程度影響を及ぼすか，減衰の影響はどうか等について，自由振動および重力による強制振動と偏心による強制振動の場合について検討している。

第2節　運動方程式

図1のように静止座標系 O-xyS の OS 軸は，2つの軸受中心を通る軸に一致するようにとり，Ox 軸は，その軸に垂直下向きを正，Oy 軸は，これらの2つの軸でできる面に垂直であるような直交座標系を考える。また，軸と共に角速度 ω で回転する回軸座標系 O-ξηS の Oξ，Oη 軸は 慣性主軸に一致させ，それぞれの軸のまわりの曲げ剛性が EI_2，EI_1 となるようにとる。

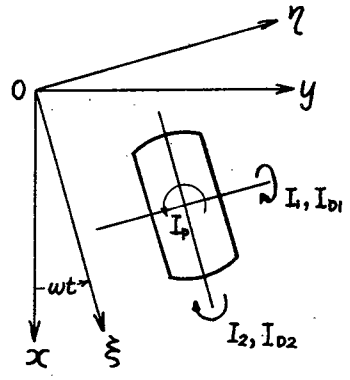


図2-1. 座標系および慣性モーメント

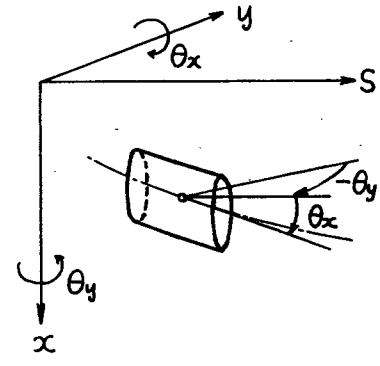


図2-2. θの説明図

そのとき，ある任意の時刻 t において たわみによって生ずる x 軸および y 軸まわりの曲げモーメントは，回転座標系では，

$$\begin{pmatrix} M_{b\xi} \\ M_{b\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EI_2 \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} \\ EI_1 \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} \end{pmatrix} \qquad 2-1$$

となる。(2-1)式を静止座標系に座標変換すると，

$$\begin{pmatrix} M_{bx} \\ M_{by} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{b\xi} \\ M_{b\eta} \end{pmatrix} \qquad 2-2$$

となり，計算すると

$$M_{bx} = EI\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \Delta EI\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\sin 2\omega t - \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\cos 2\omega t\right\}$$

$$M_{by} = EI\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \Delta EI\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\cos 2\omega t + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\sin 2\omega t\right\} \qquad 2-3$$

となる。ただし，

$$EI = \frac{EI_1 + EI_2}{2}, \qquad \Delta EI = \frac{EI_1 - EI_2}{2}$$

である。

つぎに，軸の任意の微小要素 ds について，軸がたわんで，θ_x θ_y が生じたときに発生するジャイロモーメントと回転慣性のモーメントの和 M_{sx}，M_{sy} を θ_x，θ_y を用いて表わすと，(P.34)

$$M_{sx} = -I_D\,ds\frac{\partial^2\theta_y}{\partial t^2} + I_p\,ds\,\omega\frac{\partial\theta_x}{\partial t} + \Delta I_D\,ds\left\{\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial t^2}\sin 2\omega t - \frac{\partial^2\theta_y}{\partial t^2}\cos 2\omega t\right)\right.$$
$$\left. + 2\omega\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial t}\cos 2\omega t + \frac{\partial\theta_y}{\partial t}\sin 2\omega t\right)\right\} \qquad 2-4$$

$$M_{sy} = I_D\,ds\frac{\partial^2\theta_x}{\partial t^2} + I_p\,ds\,\omega\frac{\partial\theta_y}{\partial t} + \Delta I_D\,ds\left\{\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial t^2}\cos 2\omega t + \frac{\partial^2\theta_y}{\partial t^2}\sin 2\omega t\right)\right.$$
$$\left. - 2\omega\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial t}\sin 2\omega t - \frac{\partial\theta_y}{\partial t}\cos 2\omega t\right)\right\}$$

となる。ただし，

$$I_D = \frac{I_{D1} + I_{D2}}{2}, \qquad \Delta I_D = \frac{I_{D1} - I_{D2}}{2}$$

となる。図 2-2 の関係より，微小項を省略すると，θ_x，θ_y は

$$\theta_x = \frac{\partial x}{\partial s}, \qquad \theta_y = \frac{\partial y}{\partial s} \qquad 2-5$$

で表わせるから，この関係を (2-4) 式に代入して

$$M_{sx} = I_D\frac{\partial^3 y}{\partial s\partial t}ds - I_p\,\omega\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t}ds + \Delta I_D\left\{\left(-\frac{\partial^3 x}{\partial s\partial t^2}ds\sin 2\omega t\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial^3 y}{\partial s\partial t^2}ds\cos 2\omega t\right) - 2\omega\left(\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t}ds\cos 2\omega t + \frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t}ds\sin 2\omega t\right)\right\}$$

$$M_{sy} = -I_D \frac{\partial^3 x}{\partial s \partial t^2} ds - I_p \omega \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} ds + \Delta I_D \left\{ \left(\frac{\partial^3 x}{\partial s \partial t^2} ds \cos 2\omega t \right. \right. \qquad 2-6$$

$$\left. + \frac{\partial^3 y}{\partial s \partial t^2} ds \sin 2\omega t \right) - 2\omega \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} ds \sin 2\omega t - \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} ds \cos 2\omega t \right) \Big\}$$

が得られる。したがって，要素 ds について，軸にかかるせん断力は，曲げモーメントとジャイロモーメント，回転慣性モーメントの和として与えられるから

$$-\frac{\partial M_{by}}{\partial s} ds + M_{sy} = -T_x ds$$

$$-\frac{\partial M_{bx}}{\partial s} ds + M_{sx} = -T_y ds \qquad 2-7$$

となる。

つぎに，ds部分にかかる力を考えると，それは，慣性力と外部減衰力および内部減衰力であり，外部減衰力と内部減衰力とが速度に比例する函数として表わされるとすれば，系の要素に作用する力のつりあい式は，

$$\frac{\partial T_x}{\partial s} = A\rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + (b_e + b_i) \frac{\partial x}{\partial t} + b_i \omega y$$

$$\frac{\partial T_y}{\partial s} = -A\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - (b_e + b_i) \frac{\partial y}{\partial t} + b_i \omega x \qquad 2-8$$

となる。したがって，(2-3), (2-6), (2-7), (2-8) 式より次の方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(EI \frac{\partial x}{\partial s^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ \Delta EI \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \cos 2\omega t + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \sin 2\omega t \right) \right\}$$

$$- \frac{\partial}{\partial s} \left[I_D \frac{\partial^3 x}{\partial s \partial t^2} + I_p \omega \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} - \Delta I_D \left\{ \left(\frac{\partial^3 x}{\partial s \partial t^2} \cos 2\omega t + \frac{\partial^3 y}{\partial s \partial t^2} \sin 2\omega t \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2\omega \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \sin 2\omega t - \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} \cos 2\omega t \right) \right\} \right] + A\rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + (b_e + b_i) \frac{\partial x}{\partial t} + b_i \omega y = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ \Delta EI \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \sin 2\omega t - \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \cos 2\omega t \right) \right\} \qquad 2-9$$

$$- \frac{\partial}{\partial s} \left[I_D \frac{\partial^3 y}{\partial s \partial t^2} - I_p \omega \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} - \Delta I_D \left\{ \left(\frac{\partial^3 x}{\partial s \partial t^2} \sin 2\omega t - \frac{\partial^3 y}{\partial s \partial t^2} \cos 2\omega t \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2\omega \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \cos 2\omega t + \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} \sin 2\omega t \right) \right\} \right] + A\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (b_e + b_i) \frac{\partial y}{\partial t} - b_i \omega x = 0$$

(2-9) 式は 時間に関する可変パラメータの偏微分方程式であるので，そのまま解析するのは 困難である。つぎに角速度 ω で回転する回転座標系 $O-\xi\eta\zeta$ について (2-9) 式を座標変換して，強制力として，重力と軸の偏心を考えると，

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(EI_1\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}\right)-\frac{\partial}{\partial s}\left\{I_{D2}\left(\frac{\partial^3\xi}{\partial s\partial t^2}-2\omega\frac{\partial^2\eta}{\partial s\partial t}-\omega^2\frac{\partial\xi}{\partial s}\right)\right.$$
$$\left.+I_{p2}\omega\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}+\omega\xi\right)\right\}+A\rho\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-2\omega\frac{\partial\eta}{\partial t}-\omega^2\xi\right)$$
$$+(b_e+b_i)\frac{\partial\xi}{\partial t}-b_e\omega\eta=A\rho g\cos\omega t+A\rho\varepsilon_\xi(s)\omega^2$$

2-10

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(EI_2\frac{\partial^2\eta}{\partial s^2}\right)-\frac{\partial}{\partial s}\left\{I_{D1}\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial s\partial t}+2\omega\frac{\partial^2\xi}{\partial s\partial t}-\omega^2\frac{\partial\eta}{\partial s}\right)\right.$$
$$\left.+I_{p1}\omega\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}-\omega\eta\right)\right\}+A\rho\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+2\omega\frac{\partial\xi}{\partial t}-\omega^2\eta\right)$$
$$+(b_e+b_i)\frac{\partial\eta}{\partial t}+b_e\omega\xi=-A\rho g\sin\omega t+A\rho\varepsilon_\eta(s)\omega^2$$

となる。つぎに，(2-10) 式を複素表示すると，

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(EI\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\Delta EI\frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial s^2}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left\{-I_D\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+2i\omega\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\omega^2\zeta\right)\right.$$
$$+iI_p\omega\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}+i\omega\zeta\right)+\Delta I_D\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial t^2}-2i\omega\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial t}-\omega^2\bar{\zeta}\right)$$
$$\left.+2i\Delta I_D\omega\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial t}-i\omega\bar{\zeta}\right)\right\}+A\rho\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+2i\omega\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\omega^2\zeta\right)$$
$$+(b_e+b_i)\frac{\partial\zeta}{\partial t}+ib_e\omega\zeta=A\rho g\,e^{-i\omega t}+A\rho\varepsilon(s)\omega^2 \qquad 2-11$$

となる。

第3節 自由振動の解析

非対称な剛性を有する回転軸の回転しているときの振動は，2つの異なった連続体が互いに干渉をおよぼしあって振動している場合と同じであり，解析が複雑になる。とくに境界条件が複雑な型で入っている場合には，解析的に解を求めることは 困難なようであるが，安定領域を調べることは比較的容易にできる。ここ

では主に安定について論じることにする。

解析にあたって次の仮定をおく。

(1) 回転軸は軸方向に一様な断面を持っているとする。すなわち，EI_1, EI_2, I_{D1}, I_{D2}, I_P は S の函数でなく，定数であるとする。

(2) 軸の質量分布は軸方向で一定値 $A\rho$ であるとする。

以上の仮定をおくと，(2-10), (2-11)式の EI_1, EI_2, I_{D1}, I_{D2}, I_P 等は微分記号の外に出すことができる。そこで，(2-10)式の解を次のような変数分離型で仮定する。

$$\xi = P\,\Xi(S)\,e^{\lambda t} = P\,e^{\sqrt{\tau}S}\,e^{\lambda t}$$
$$\eta = Q\,H(S)\,e^{\lambda t} = Q\,e^{\sqrt{\tau}S}\,e^{\lambda t} \qquad 2\text{-}12$$

ただし，P, Q は定数とする。

(2-12)式を(2-10)式に代入すると，2つの P, Q に関する代数方程式が得られる。この方程式が意味のある解を持つための必要十分条件として，P, Q に関する係数行列式が零でなければならない。すなわち，

$$\begin{vmatrix} \frac{EI_1}{A\rho}\tau^2 - \left\{\frac{I_{D2}}{A\rho}(\lambda^2-\omega^2) + \frac{I_{P2}}{A\rho}\omega^2\right\}\tau & \left(2I_{D2}-I_{P2}\right)\cdot\frac{\omega\lambda}{A\rho}\tau - (2\lambda+\mu)\omega \\ +(\lambda^2-\omega^2) + (\mu-\nu)\lambda & \\ \left(-2I_{D1}+I_{P1}\right)\frac{\omega\lambda}{A\rho}\tau + (2\lambda+\mu)\omega & \frac{EI_2}{A\rho}\tau^2 - \left\{\frac{I_{D1}}{A\rho}(\lambda^2-\omega^2) + \frac{I_{P1}}{A\rho}\omega^2\right\}\tau \\ & +(\lambda^2-\omega^2) + (\mu+\nu)\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad 2\text{-}13$$

となる。(2-13)式を計算すると，τ に関する4次の方程式が得られる。この τ の4根を μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 とおくと，$\Xi(S)$, $H(S)$ は次のような型の解となることが予想される。

$$\Xi(s) = A_1 \cosh\frac{\sqrt{\mu_1}}{\ell}s + A_2 \sinh\frac{\sqrt{\mu_1}}{\ell}s + A_3 \cos\frac{\sqrt{\mu_2}}{\ell}s + A_4 \sin\frac{\sqrt{\mu_2}}{\ell}s$$
$$+A_1' \cosh\frac{\sqrt{\nu_1}}{\ell}s + A_2' \sinh\frac{\sqrt{\nu_1}}{\ell}s + A_3' \cos\frac{\sqrt{\nu_2}}{\ell}s + A_4' \sin\frac{\sqrt{\nu_2}}{\ell}s \qquad 2\text{-}14$$
$$H(s) = A_1 p_1 \cosh\frac{\sqrt{\mu_1}}{\ell}s + A_2 p_1 \sinh\frac{\sqrt{\mu_1}}{\ell}s + A_3 p_2 \cos\frac{\sqrt{\mu_2}}{\ell}s + A_4 p_2 \sin\frac{\sqrt{\mu_2}}{\ell}s$$
$$+A_1' q_1 \cosh\frac{\sqrt{\nu_1}}{\ell}s + A_2' q_1 \sinh\frac{\sqrt{\nu_1}}{\ell}s + A_3' q_2 \cos\frac{\sqrt{\nu_2}}{\ell}s + A_4' q_2 \sin\frac{\sqrt{\nu_2}}{\ell}s$$

ここで，$A_1 \cdots A_4$，$A_1' \cdots A_4'$は係数であり，$p_1; q_1; p_2, q_2$は P Q の振幅比によって与えられるもので，一般に，$\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ と ω，入を含む函数となる。(2-14) 式に境界条件を代入すると，$A_1 \cdots A_4$, $A_1' \cdots A_4'$ に関する代数方程式が得られる。この方程式が零以外の解を持つための必要十分条件として，前述と同様に行列式が零でなければならない。したがって，この関係より，入，ω に関する4次の方程式が得られる。この式からてが求まり，解が得られる。

以上は，一般的な解法であるが，計算例として，ここでは両端が単純支持の条件で支えられた場合について解析する。

両端単純支持の境界条件は，

$$\Xi(0) = \Xi''(0) = \Xi(\ell) = \Xi''(\ell) = 0$$
$$H(0) = H''(0) = H(\ell) = H''(\ell) = 0 \qquad 2\text{-}15$$

であるから，この条件を (2-14) 式に代入して

$$A_1 + A_3 + A_1' + A_3' = 0$$
$$A_1\mu_1 - A_3\mu_2 + A_1'\nu_1 - A_3'\nu_2 = 0$$
$$A_1 a_1 + A_2 b_1 + A_3 a_2 + A_4 b_2 + A_1' a_1' + A_2' b_1' + A_3' a_2' + A_4' b_2' = 0$$
$$A_1\mu_1 a_1 + A_2\mu_2 b_1 - A_3\mu_2 a_2 - A_4\mu_2 b_2 + A_1'\nu_1 a_1' + A_2'\nu_1 b_1' - A_3'\nu_2 a_2' - A_4'\nu_2 b_2' = 0$$
$$A_1 p_1 + A_3 p_2 + A_1' q_1 + A_3' q_2 = 0 \qquad 2\text{-}16$$
$$A_1 p_1 \mu_1 - A_3 p_2 \mu_2 + A_1' q_1 \nu_1 - A_3' q_2 \nu_2 = 0$$
$$A_1 p_1 a_1 + A_2 p_1 b_1 + A_3 p_2 a_2 + A_4 p_2 b_2 + A_1' q_1 a_1' + A_2' q_1 b_1' + A_3' q_2 a_2' + A_4' q_2 b_2' = 0$$
$$A_1 p_1 \mu_1 a_1 + A_2 p_1 \mu_1 b_1 - A_3 p_2 \mu_2 a_2 - A_4 p_2 \mu_2 b_2 + A_1' q_1 \nu_1 a_1' + A_2' q_1 \nu_1 b_1'$$
$$- A_3' q_2 \nu_2 a_2' - A_4' q_2 \nu_2 b_2' = 0$$

となる。ただし，簡単化した次の式を用いている。

$$a_1 = \cosh\sqrt{\mu_1} \qquad a_2 = \cos\sqrt{\mu_2}$$
$$a_1' = \cosh\sqrt{\nu_1} \qquad a_2' = \cos\sqrt{\nu_2}$$
$$b_1 = \sinh\sqrt{\mu_1} \qquad b_2 = \sin\sqrt{\mu_2}$$
$$b_1' = \sinh\sqrt{\nu_1} \qquad b_2' = \sin\sqrt{\nu_2}$$

(2-16)式が0以外の解を持つための必要十分条件として，次の行列式が得られる。

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
-\mu_1 & 0 & -\mu_2 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 & 0 \\
a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_1' & b_1' & a_2' & b_2' \\
\mu_1 a_1 & \mu_1 b_1 & -\mu_2 a_2 & -\mu_2 b_2 & \nu_1 a_1' & \nu_1 b_1' & -\nu_2 a_2' & -\nu_2 b_2' \\
p_1 & 0 & p_2 & 0 & q_1 & 0 & q_2 & 0 \\
p_1\mu_1 & 0 & -p_2\mu_2 & 0 & q_1\nu_1 & 0 & -q_2\nu_2 & 0 \\
p_1 a_1 & p_1 b_1 & p_2 a_2 & p_2 b_2 & q_1 a_1' & q_1 b_1' & q_2 a_2' & q_2 b_2' \\
p_1\mu_1 a_1 & p_1\mu_1 b_1 & -p_2\mu_2 a_2 & -p_2\mu_2 b_2 & q_1\nu_1 a_1' & q_1\nu_1 b_1' & -q_2\nu_2 a_2' & -q_2\nu_2 b_2'
\end{vmatrix} = 0 \qquad 2\text{-}17$$

(2-17)式を簡単にすると

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
\mu_1 & -\mu_2 & \nu_1 & -\nu_2 \\
p_1 & p_2 & q_1 & q_2 \\
p_1\mu_1 & -p_2\mu_2 & q_1\nu_1 & -q_2\nu_2
\end{vmatrix} \times b_1 b_2 b_1' b_2' = 0 \qquad 2\text{-}18$$

となる。行列式の部分は常に零でないから，

$$b_1 b_2 b_1' b_2' = \sinh\sqrt{\mu_1}\,\sin\sqrt{\mu_2}\,\sinh\sqrt{\nu_1}\,\sin\sqrt{\nu_2} = 0$$

でなければならない。また，$\sinh\sqrt{\mu_1} > 0$，$\sinh\sqrt{\nu_1} > 0$ であることを考慮すると，

$$\sin\sqrt{\mu_2}\,\sin\sqrt{\nu_2} = 0$$

でなければならない。したがって，モード関数はこと関係より，

$$\Xi(s) = \sin\frac{n\pi}{\ell}s \qquad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

$$H(s) = \sin\frac{n\pi}{\ell}s \qquad (n = 1, 2, 3 \cdots) \qquad 2\text{-}19$$

とおくことができる。したがって，解は，次のように書ける。

$$\xi(s,t) = \sum \sin\frac{n\pi}{\ell}s \cdot u_n(t)$$

$$\eta(s,t) = \sum \sin\frac{n\pi}{\ell}s \cdot v_n(t) \qquad 2\text{-}20$$

ただし，$u_n(t)$，$v_n(t)$ は 時間のみに関する関数とする。

各モードは独立であるからn番目のモードについて，考える。

(2-20)式を(2-10)式に代入して，

$$\frac{EI_1}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4 u_n + \frac{I_{p2}}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2(\ddot{u}_n - 2\omega\dot{u}_n - \omega^2 u_n) + \frac{I_{p2}}{A\rho}\omega\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2(\dot{v}_n + \omega u_n)$$

$$+(\ddot{u}_n - 2\omega\dot{v}_n - \omega^2 u_n) + (\mu+\nu)\dot{u}_n - \mu\omega v_n = 0 \qquad 2\text{-}21$$

$$\frac{EI_2}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4 v_n + \frac{I_{p1}}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2(\ddot{v}_n + 2\omega\dot{u}_n - \omega^2 v_n) - \frac{I_{p1}}{A\rho}\omega\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2(\dot{u}_n - \omega v_n)$$

$$+(\ddot{v}_n + 2\omega\dot{u}_n - \omega^2 v_n) + (\mu+\nu)\dot{v}_n + \mu\omega u_n = 0$$

が得られる。(2-21)式の u_n, v_n に

$$u_n(t) = Pe^{\lambda t}$$

$$v_n(t) = Qe^{\lambda t} \qquad 2\text{-}22$$

ただし，P，Q は定数．

を代入して，P，Q，に関する代数方程式が 零以外の根を持つ条件より，行列式が0でなければならない。よって，(2-23)式が得られる。

(2-23)式を分解して，λに関して降べきの順に整理すると，

$$A\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E = 0 \qquad 2\text{-}24$$

$$\begin{vmatrix} \left\{\frac{I_{D2}}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2+1\right\}\lambda^2+(\mu+\nu)\lambda+\frac{EI_1}{A\rho} & \left\{-2\frac{I_{D2}}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2+\frac{I_{P2}}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2-2\right\}\lambda\omega \\ \times\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4-\left\{\frac{I_{D2}}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2-\frac{I_{P2}}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2+1\right\}\omega^2 & -\mu\omega \\ \left\{2\frac{I_{D1}}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2-\frac{I_{P1}}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2+2\right\}\lambda\omega & \left\{\frac{I_{D1}}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2+1\right\}\lambda^2+(\mu+\nu)\lambda+\frac{EI_2}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4 \\ +\mu\omega & -\left\{\frac{I_{D1}}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2-\frac{I_{P1}}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2+1\right\}\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

2-23

となる。ただし，係数は，

$$A=\frac{I_{P1}I_{P2}}{(A\rho)^2}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4+\frac{I_{D1}+I_{D2}}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2+1$$

$$B=(\mu+\nu)\left\{\frac{I_{D1}+I_{D2}}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2+2\right\}$$

$$C=\frac{EI_1I_{D1}+EI_2I_{D2}}{(A\rho)^2}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^6+\frac{\omega^2}{(A\rho)^2}\left(2I_{D1}I_{D2}-I_{D1}I_{P2}-I_{D2}I_{P1}+I_{P1}I_{P2}\right)\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4$$
$$+\frac{\omega^2}{A\rho}\left(2I_{D1}+2I_{D2}-I_{P1}-I_{P2}\right)\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2+\frac{EI_1+EI_2}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4+2\omega^2+(\mu+\nu)^2$$

$$D=(\mu+\nu)\left\{\frac{EI_1+EI_2}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4-\frac{\omega^2}{A\rho}\left(I_{D1}+I_{D2}-I_{P1}-I_{P2}\right)\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2-2\omega^2\right\}$$
$$+\mu\omega^2\left\{\frac{2I_{D1}+2I_{D2}-I_{P1}-I_{P2}}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2+4\right\}$$

$$E=\frac{EI_1\cdot EI_2}{(A\rho)^2}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^8-\frac{\omega^2}{(A\rho)^2}\left(EI_1\cdot I_{D1}+EI_2\cdot I_{D2}-EI_1\cdot I_{P1}-EI_2\cdot I_{P2}\right)\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^6$$
$$-\frac{\omega^2}{A\rho}\left(EI_1+EI_2\right)\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4+\left\{\frac{I_{D1}-I_{P1}}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2+1\right\}\left\{\frac{I_{D2}-I_{P2}}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2+1\right\}\omega^4+\mu^2\omega^2$$

である。したがって，(2-24)式は，モードの次数nを与えれば，Routh-Hurwitzの安定判別法によって安定判別することができる。

また，別の方法として，危険速度で回転しているとき，Precessionは零であるから，$\lambda=0$とおくことができる。したがって，(2-24)式は，Eだけが残り，$E=0$のとき，安定領域の境界になることがわかる。このωを計算し，ωが実根を有する範囲が安定で，虚根を持つ範囲が不安定である。

また，(2-10)式において減衰がない場合には，λ を $j\lambda'$ とおくと，(2-21)式は

$$A\lambda'^4 + C\lambda'^2 + E = 0 \qquad 2\text{-}25$$

となり，λ' が実数であれば，系は安定であることになる。

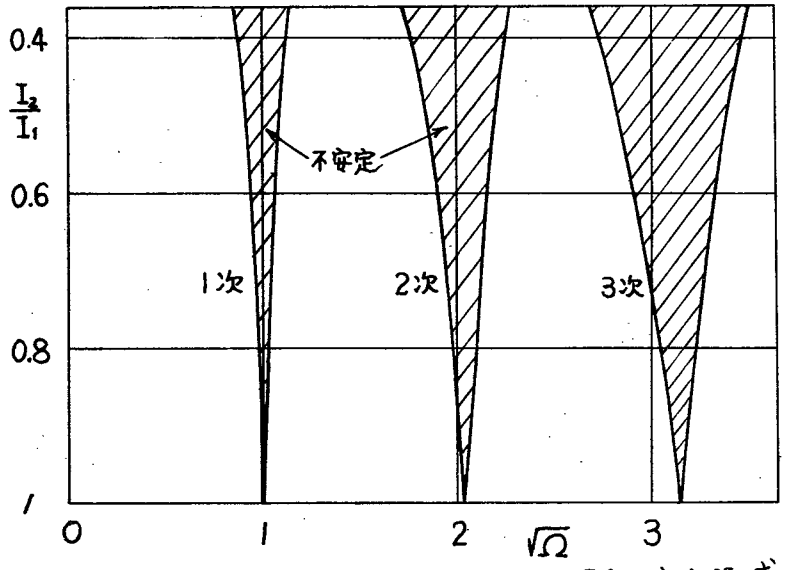


図2-3. 慣性モーメントの非対称性がない場合の安定領域
(剛性のみ非対称)

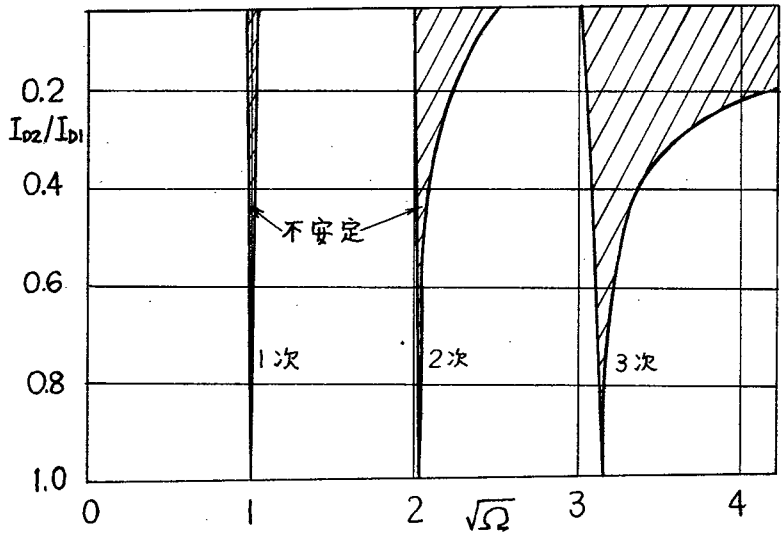


図2-4 剛性の非対称性がない場合の安定領域
(慣性モーメントのみ非対称)

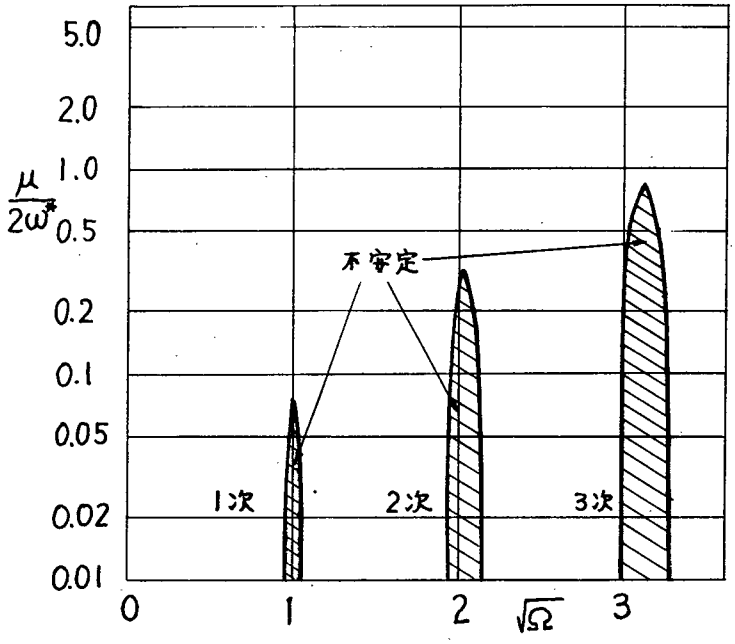


図 2-5. 剛性が非対称な場合の減衰が安定領域に及ぼす影響 ($I_2/I_1 = 0.7$)

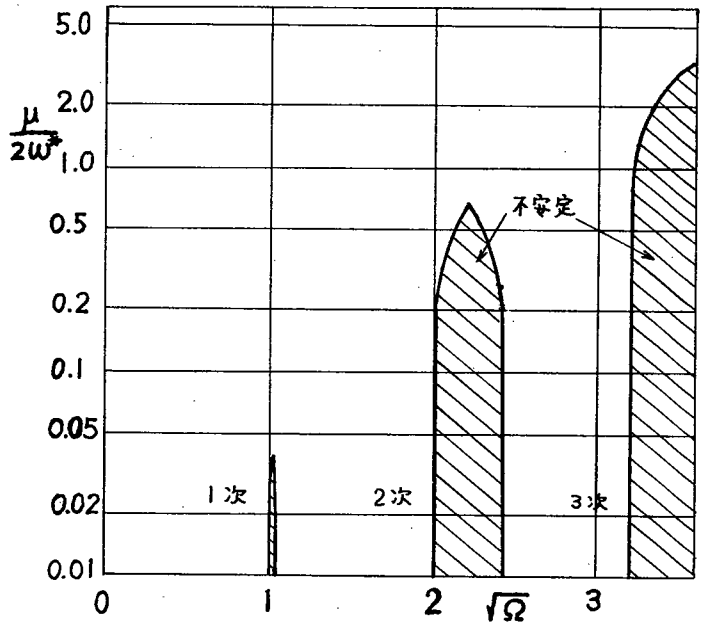


図 2-6. 慣性モーメントが非対称な場合に減衰による安定領域の影響 ($I_{D2}/I_{D1} = 0.05$)

安定領域を示す数値例として

$$\ell = 70cm,\quad Ap = 2.64\times10^{-4}(kg\cdot sec^2/cm^4),\quad EI = 1.649\times10^{6}(kg\cdot cm^2)$$
$$I_D = 0.257\times10^{-2}(kg\cdot cm\,sec^2),\quad I_p = 0.514\times10^{-2}(kg\cdot cm\cdot sec^2)$$

として，ΔEI と ΔI_D を種々変えて計算した結果は，図2-3～6に示されている。図2-3，2-4は減衰のない場合で，剛性比の変化に対する安定領域の変化と，慣性モーメント比の変化に対する安定領域の変化を示している。これら2つの図より，慣性モーメントの非対称性によって生ずる不安定領域は，モードの次数が高くなる程大きくなることがわかる。しかし，1次モードのところでは，不安定領域は非常に小さい。図2-5，2-6は，剛性比および慣性モーメントの比が0.7および0.05の場合の減衰の効果を調べた図である。ジャイロモーメントの非対称性によって生じた不安定領域は，高次モードの場合減衰の効果が余りないことがわかる。したがって，実際のロータの設計の場合には十分考慮しなければならない。

第4節　強制振動の解析

ロータを水平に置いた場合，ロータに作用する強制力としては，一般に重力と軸の偏心とがある。非対称な軸の場合，重力による強制振動では，主危険速度の $\frac{1}{2}$ のところで共振し，偏心による強制振動の場合には，危険速度で共振するので，解析するにあたって，両者を別々に分ければ都合がよい。

4－1　重力によって生ずる強制振動

重力による強制振動の解は，回転座標系からみると forward precession と backward precession の和として表わすことができる。すなわち，静止座標系から見ると，静たわみの項と，軸の1回転に対して2回の whirling をする項の和となることが知られている。したがって，解はこれら2つの成分で表わされるとする。

すなわち，

$$\zeta = U(s)e^{i\omega t} + V(s)e^{-i\omega t} \qquad 2-25$$

(2−25) 式を (2−11) 式の $\varepsilon(s)=0$, $be=0$, $bi=0$ とおいた式に代入して，虚部と実部に分けると，

$$EI\frac{\partial^4 U}{\partial s^4} + \Delta EI\frac{\partial^4 V}{\partial s^4} + 2\omega^2(2I_D - I_P)\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} - 4A\rho\omega^2 U = 0 \qquad 2-26a$$

$$EI\frac{\partial^4 V}{\partial s^4} + \Delta EI\frac{\partial^4 U}{\partial s^4} = A\rho g \qquad 2-26b$$

となる。 (2−26) 式より V を消去するために $(2-26)_b$ 式を $(2-26)_a$ 式に代入すると，

$$\left(EI - \frac{(\Delta EI)^2}{EI}\right)\frac{\partial^4 U}{\partial s^4} + 2\omega^2(2I_D - I_P)\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} - 4A\rho\omega^2 U = -\frac{\Delta EI}{EI}A\rho g \qquad 2-27$$

となる。 (2−27) 式において，左辺第二項の係数について考察すると，(2−2) 式において，dS を微小な要素について考えているから，dS に関する高次の項は無視できて，I_P, I_{D1}, I_{D2} の間に次の関係が成立する。

$$I_P = I_{D1} + I_{D2} = 2I_D \qquad 2-28$$

したがって，(2−28) 式を (2−27) 式に代入すると，左辺第二項の係数は零となる。つまり，回転慣性の項は，系に何も影響を及ぼさないことになる。よって，次のことが言える。重力による強制振動においては，非対称な回転慣性モーメントを持っている場合でも，ジャイロモーメントの項は 系に影響を及ぼさない。

非対称な回転軸において，ジャイロモーメントの項を考慮しない場合と同一であることがわかり，この場合については，Dimentberg が解析を行なっているので，本文では省略する。

なお，両端が単純支持型の軸受で支持されている場合の振動の応答曲線を図2−7に示す。この図でわかるように，重力による強制振動では，回転速度と振巾の関係は，回転速度が増加するに

従って，振巾は　乙乗の割合で減少していくことがわかる。

4－2　軸の偏心によって生ずる強制振動

(2－10)式で $A_{99}=0$ とおいた式について考える。右辺の $\varepsilon_\xi(s)$ $\varepsilon_\eta(s)$ は時間の変化に対して無関係であるから，次のようなフーリエ級数に展開できる。

$$\varepsilon_\xi(s)=\sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon_{\xi r}\,\phi_{\xi r}(s)$$

$$\varepsilon_\eta(s)=\sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon_{\eta r}\,\phi_{\eta r}(s) \qquad 2\text{-}29$$

ここで，$\varepsilon_{\xi r}$，$\varepsilon_{\eta r}$ は次式で与えられる。

$$\varepsilon_{\xi r}=\int_0^l \varepsilon_\xi(s)\,\phi_r(s)\,ds$$

$$\varepsilon_{\eta r}=\int_0^l \varepsilon_\eta(s)\,\phi_r(s)\,ds \qquad 2\text{-}30$$

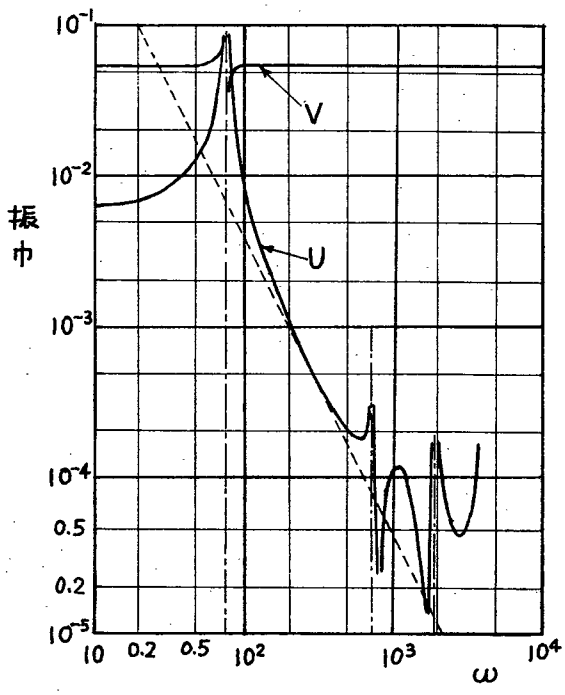


図2.7. 重力によって生ずる強制振動の振幅曲線

また，(2－10)式あるいは，(2－29)式の強制力を与える項は，時間を含んでいないから，強制振動の解析の際には，時間に関する項を含むものは，すべて零となることがわかる。したがって，(2－10)式は，

$$\frac{EI_1}{A\rho}\frac{\partial^4\xi}{\partial s^4}+\frac{I_{D2}}{A\rho}\omega^2\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}-\frac{I_{P2}}{A\rho}\omega^2\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}-\omega^2\xi=\varepsilon_\xi(s)\,\omega^2 \qquad 2\text{-}31\,a$$

$$\frac{EI_2}{A\rho}\frac{\partial^4\eta}{\partial s^4}+\frac{I_{D1}}{A\rho}\omega^2\frac{\partial^2\eta}{\partial s^2}-\frac{I_{P2}}{A\rho}\omega^2\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}-\omega^2\xi=\varepsilon_\eta(s)\,\omega^2 \qquad 2\text{-}31\,b$$

となり，強制振動に関しては，ξ，η の成分の間に干渉がないことがわかる。また，(2－31)a式の EI_1，I_{D2}，I_{P2}，ε_ξ をそれぞれ EI_2 I_{D1}，I_{P1}，ε_η にすれば，(2－31)b式と同じになるから，(2－31)a式について解析すればよいことがわかる。

(2－31)式の同次方程式の解は一般に

$$\xi = K_1 \cosh \frac{\sqrt{\tau_1}}{\ell} s + K_2 \sinh \frac{\sqrt{\tau_1}}{\ell} s + K_3 \cos \frac{\sqrt{\tau_2}}{\ell} s + K_4 \sin \frac{\sqrt{\tau_2}}{\ell} s \qquad 2\text{-}32$$

で与えられ，τ_1，τ_2 は，

$$\tau_1, \tau_2 = \frac{-\omega^2 (I_{D2} - I_{P2}) \pm \sqrt{\omega^4 (I_{D2} - I_{P2})^2 + 4 E I_1 A \rho \omega^2}}{2 E I_1} \ell^2 \qquad 2\text{-}33$$

で与えられる。$\varepsilon_\xi(s)$ がフーリエ級数で

$$\varepsilon_\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{\ell} s + b_n \sin \frac{2n\pi}{\ell} s \right) \qquad 2\text{-}34$$

のように展開可能であるとすると，(2-31)a 式の特解 $\Xi_p(s)$ は $n=r$ のモードに対しては，

$$\Xi_{pn}(s) = A_n \sin \frac{2n\pi}{\ell} s + B_n \cos \frac{2n\pi}{\ell} s \qquad 2\text{-}35$$

で与えられる。(2-31)a 式に (2-35) 式を代入して，直交条件を用いると，

$$A_n, B_n = \frac{a_n \omega^2 \ , \ b_n \omega^2}{\frac{E I_1}{A \rho} \left(\frac{2n\pi}{\ell} \right)^4 - \frac{\omega^2}{A \rho} (I_{D2} - I_{P2}) \left(\frac{2n\pi}{\ell} \right)^2 - \omega^2} \qquad 2\text{-}36$$

$$\equiv E_n a_n \ , \ E_n b_n$$

となる。よって，特解は，

$$\Xi_{pn} = E_n \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{\ell} s + b_n \sin \frac{2n\pi}{\ell} s \right) \qquad 2\text{-}37$$

となる。したがって，一般解は，同次方程式の解 (2-32) と特解 (2-37) の和で与えられるから，解は次のようになる。

$$\xi = K_1 \cosh \frac{\sqrt{\tau_1}}{\ell} s + K_2 \sinh \frac{\sqrt{\tau_1}}{\ell} s + K_3 \cos \frac{\sqrt{\tau_2}}{\ell} s + K_4 \sin \frac{\sqrt{\tau_2}}{\ell} s$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} E_n \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{\ell} s + b_n \sin \frac{2n\pi}{\ell} s \right) \qquad 2\text{-}38$$

全く同様にして，η 方向についても解析できて，解は，

$$\eta = K_1' \cosh \frac{\sqrt{\tau_1'}}{\ell} s + K_2' \sinh \frac{\sqrt{\tau_1'}}{\ell} s + K_3' \cos \frac{\sqrt{\tau_2'}}{\ell} s + K_4' \sin \frac{\sqrt{\tau_2'}}{\ell} s$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} E_n'\left(a_n' \cos\frac{2n\pi}{\ell}s + b_n' \sin\frac{2n\pi}{\ell}s\right) \qquad 2\text{-}39$$

となる。ただし，

$$\tau_1', \tau_2' = \frac{-\omega^2(I_{D1}-I_{P1}) \pm \sqrt{\omega^4(I_{D1}-I_{P1})^2 + 4EI_2 A\rho\omega^2}}{2EI_2}\ell \qquad 2\text{-}40$$

$$E_n' = \frac{\omega^2}{\frac{EI_2}{A\rho}\left(\frac{2n\pi}{\ell}\right)^4 - \frac{\omega^2}{A\rho}(I_{D1}-I_{P1})\left(\frac{2n\pi}{\ell}\right)^2 - \omega^2} \qquad 2\text{-}41$$

である。

(2-31)式より，回転座標系に関する式は，ξ方向とη方向の方程式が全く分離でき，また，(2-32)式より，ジャイロモーメントの影響は $(I_{D2}-I_{P2})$ または $(I_{D1}-I_{P1})$ の項で表わされていることがわかる。これらの項は $I_{D2}=I_D-\Delta I_D$, $I_{P2}=I_P-2\Delta I_D$, $I_{D1}=I_D-\Delta I_D$, $I_{P1}=I_P+2\Delta I_D$ を代入すると，$I_{D2}-I_{P2}=I_D-I_P+\Delta I_D$, $I_{D1}-I_{P1}=I_D-I_P-\Delta I_D$ となる。円形断面のシャフトでは $2I_D=I_P$ なる関係があることから，極慣性モーメントの$\frac{1}{2}$の大きさでジャイロモーメントが作用する。また，図8からわかるように，非対称な断面では非対称性が増加するにしたがって，I_DはI_Pの約$\frac{1}{2}$に近づいて，ΔI_DがI_Pの値に近づくため，$I_{D2}-I_{P2}$はほとんどジャイロモーメントの作用がきかなくなるのに反して，$I_{D1}-I_{P1}$の方はジャイロモーメントの作用が大きくなる。重力による強制振動の場合にはξ方向とη方向に関係なくジャイロモーメントは同じ作用を示したが，偏心による強制振動の場合にはξ方向とη方向でジャイロモーメントの作用が異なることがわかる。

計算例として，ベアリングで支えられている境界が理想的な両端単純支持の場合について解析してみる。両端単純支持の境界条件を(2-44)式に代入すると，係数の方程式は次のようになる。

$$K_1 + K_3 + \sum_{n=0}^{\infty} E_n a_n = 0$$

$$K_1\tau_1 - K_3\tau_2 - \sum_{n=0}^{\infty} E_n (2n\pi)^2 a_n = 0$$

$$K_1\cosh\sqrt{\tau_1}+K_2\sinh\sqrt{\tau_1}+K_3\cos\sqrt{\tau_2}+K_4\sin\sqrt{\tau_2}+\sum_{n=0}^{\infty}E_n a_n=0$$

$$K_1\tau_1\cosh\sqrt{\tau_1}+K_2\tau_1\sinh\sqrt{\tau_1}-K_3\tau_2\cos\sqrt{\tau_2}-K_4\tau_2\sin\sqrt{\tau_2}-\sum_{n=0}^{\infty}E_n(2n\pi)^2a_n=0 \qquad 2-42$$

(2-42) 式の連立方程式を解いて，$K_1\cdots K_4$ を求めると，

$$K_1=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}E_n(2n\pi)^2a_n-\tau_2\sum_{n=0}^{\infty}E_n a_n}{\tau_1+\tau_2}$$

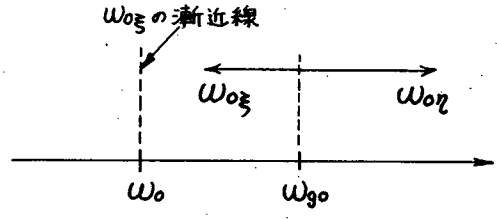
$$K_2=\frac{(1-\cosh\sqrt{\tau_1})}{\sinh\sqrt{\tau_1}\cdot(\tau_1+\tau_2)}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}E_n(2n\pi)^2a_n-\tau_2\sum_{n=0}^{\infty}E_n a_n\right\}$$

$$K_3=-\frac{\tau_1\sum_{n=0}^{\infty}E_n a_n+\sum_{n=0}^{\infty}E_n(2n\pi)^2a_n}{\tau_1+\tau_2}$$

$$K_4=\frac{(\cos\sqrt{\tau_2}-1)}{\sin\sqrt{\tau_2}\cdot(\tau_1+\tau_2)}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}E_n(2n\pi)^2a_n+\tau_1\sum_{n=0}^{\infty}E_n a_n\right\}$$

が得られる。

回転軸の偏心として，$n=1$，$a_1=0.1$，$b_1=0$ のような左右対称な偏心の分布をしている場合について計算した結果を図2-9に示す。強制力が左右対称であるから，1，3，5… の順に危険速度が表われている。非対称性が非常に強くなって，$I_{D2}/I_{D1}=0.05$ の場合には，図2-8で示すように，3次の危険速度の一つは非常に高くなり，他の一つはジャイロモーメントの影響を考えないときの危険速度に近づいている。この結果を自由振動の安定と対照させてみると，ξ方向とη方向の危険速度の中間領域が不安定になっていることがわかる。



ω_o：ジャイロモーメントを考えないときの危険速度

ω_{go}：対称なジャイロモーメントをもつ場合の危険速度

$\omega_{o\xi}$：非対称なジャイロモーメントをもつときのξ方向の危険速度

$\omega_{o\eta}$：非対称なジャイロモーメントをもつときのη方向の危険速度

図2-8. 強制振動の場合の非対称なジャイロモーメントの共振点に及ぼす影響

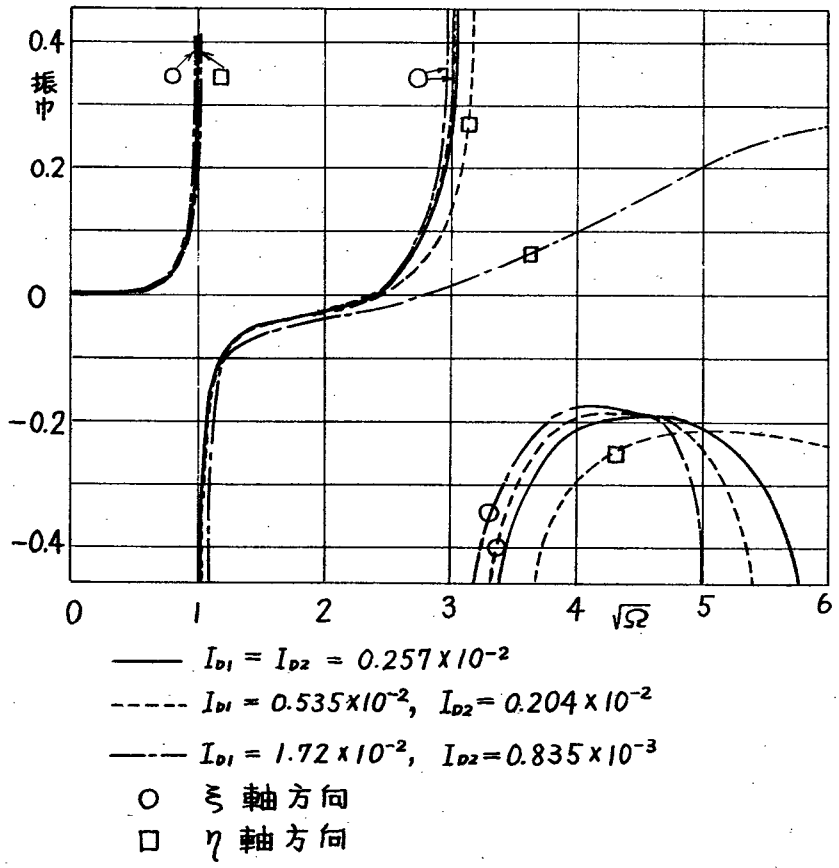


図2-9. 偏心による強制振動の応答曲線

第5節　まとめ

以上の自由振動および強制振動の解析結果を要約すると，次のようにいえる。

1) ジャイロモーメントの非対称性によって生ずる不安定は，高次のモードになる程領域が増し，回転数が増加する方向へその不安定領域は広がっていく。

2) 不安定の生ずる度合いは，ジャイロモーメントの非対称性によるよりも，剛性の非対称性による方がはるかに大きい。

3) 重力による強制振動の場合，ジャイロモーメントの非対称性による影響は存在しない。

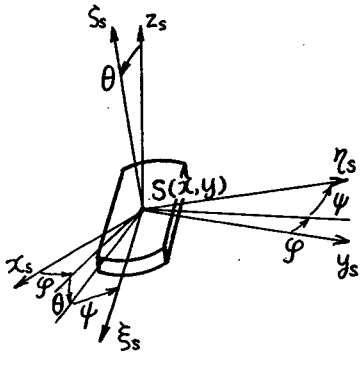
4) 偏心による強制振動の場合，回転軸の断面のξ方向とη方向の運動は干渉がない。慣性モーメントの非対称性が増すにつれて

ジャイロモーメントの小さい方の危険速度はジャイロモーメントを考えない場合の系の危険速度の値に近づき，ジャイロモーメントの大きい方の危険速度は，対称なジャイロモーメントが作用する場合の危険速度より高くなる。

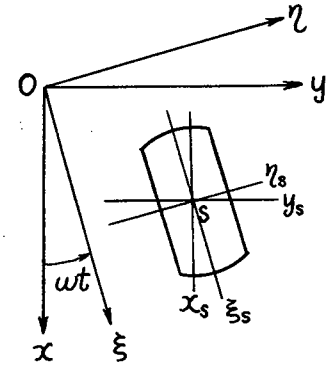
付録：ジャイロモーメントと回転慣性の式の誘導

連続体では分布する慣性モーメントとして系に作用するのであるが，ここでは，単位長さ当りのモーメントを求める。

オイラーの座標として図A－1を，また回転軸の任意の断面における座標系を図A－2のようにとる。図A－1で，φ, θ, ψはオイラーの角とし，軸のたわみは小さいとすればθは微小である。$S(x, y)$を回転軸の幾何学的中心，すなわち回転軸がたわんでいない時の軸受中心と一致する点とする。軸がたわめば，任意のSの位置では，両軸受間を通る軸とシャフトの方向はθだけずれる。いま考察する軸の任意断面における軸心と両軸受を結ぶ線分との交点をOとし，$S(x, y)$を原点とする座標系$S-x_s y_s z_s$と$O-xyz$とは平行であるとする。また，$M(x, y)$を原点として，軸に固定された座標系を$S-\xi_s \eta_s z_s$とする。



図A-1. オイラーの角



図A-2. 座標系の関係

回転角速度は,

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_\eta &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_\zeta &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\end{aligned} \qquad \text{A-2-1}$$

であり，また，θ の投影角を

$$\theta_x = \theta\cos\varphi \quad , \quad \theta_y = \theta\sin\varphi \qquad \text{A-2-2}$$

とし，$\varphi + \psi = \Theta$ とすれば，ジャイロモーメントと回転慣性によって生ずる運動のエネルギ T_G は，

$$T_G = \frac{1}{2}\left(I_p\omega_\zeta^2 + I_{D1}\omega_\eta^2 + I_{D2}\omega_\xi^2 \right) \qquad \text{A-2-3}$$

で与えられる。この式において，ω_ξ, ω_η, ω_ζ はそれぞれ

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= \dot{\theta}_x(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) - \dot{\theta}_y(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) \\ \omega_\eta &= \dot{\theta}_x(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + \dot{\theta}_y\sin(\varphi+\psi) \\ \omega_\zeta &= \dot{\Theta} + \frac{1}{2}(\dot{\theta}_x\theta_y - \theta_x\dot{\theta}_y)\end{aligned} \qquad \text{A-2-4}$$

である。(A-2-4) を (A-2-3) に代入して，微小項を省略し，$\dot{\Theta}^2$ はジャイロモーメントに関係しないから省くと，

$$\begin{aligned}T_G = \frac{1}{2}\big[& I_p\dot{\Theta}(\dot{\theta}_x\theta_y - \theta_x\dot{\theta}_y) + I_D(\dot{\theta}_x + \dot{\theta}_y) \\ & + \Delta I_D\{(\dot{\theta}_x - \dot{\theta}_y)\cos 2\Theta + 2\dot{\theta}_x\dot{\theta}_y\sin 2\Theta\}\big]\end{aligned} \qquad \text{A-2-5}$$

となる。したがって，ジャイロモーメントは，$\Theta = \omega t - \frac{\pi}{2}$ とおいて，$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_G}{\partial \dot{q}_k}\right)$ で q_k を θ_x, θ_y, $\dot{\theta}_x$, $\dot{\theta}_y$ として計算すると，

$$\begin{aligned}M_{Sx} = & -I_D\ddot{\theta}_y + I_p\omega\dot{\theta}_x + \Delta I_D\{(\ddot{\theta}_x\sin 2\omega t - \ddot{\theta}_y\cos 2\omega t) \\ & + 2\omega(\dot{\theta}_x\cos 2\omega t + \dot{\theta}_y\sin 2\omega t)\}\end{aligned} \qquad \text{A-2-6}$$

$$\begin{aligned}M_{Sy} = & I_D\ddot{\theta}_x + I_p\omega\dot{\theta}_y - \Delta I_D\{(\ddot{\theta}_x\cos 2\omega t + \ddot{\theta}_y\sin 2\omega t) \\ & - 2\omega(\dot{\theta}_x\sin 2\omega t - \dot{\theta}_y\cos 2\omega t)\}\end{aligned}$$

となる。

第3章

オーバハング部を有する非対称軸弾性ロータの振動

第1節　まえがき

表題のごとく非対称な回転軸系にオーバハング部がある系に関する研究は，非対称回転軸が軸の両端で支持された場合の振動とオーバハング部を有する回転軸の振動の2つの現象が重なった場合である。非対称回転軸の両端が支持された系の振動に関する研究としては，主に，R. E. D. Bishop & A. G. Parkinson[25]，S. T. Ariaratnum[26] らのものがあり，この問題に関しては，既に第2章で述べたとおりである。また，オーバハング部を有する回転軸については，小堀[28]，R. F. Wojnowski & T. R. Faucett[8]，T. C. Huang & F. C. C. Huang[33] らのものがある。しかし，これらの研究はいずれも対称軸に関するものであって，オーバハングロータを2自由度振動系に等価に置いたり，オーバハングロータを種々の仮定のもとで解析したものである。

ここでは，上述の2つの系の結合されたオーバハング部を有する非対称回転軸で，オーバハング部側の軸受で段がついていて，両軸受間部とオーバハング部とで剛性比の異なる系について，理論的解析をおこない，段付比，スパン比，質量比，非対称比が固有値に与える影響および自由振動の安定に与える影響について調べた。また，段のついていない系の強制振動について解析し，実験と比較している。

第2節　自由振動の解析

2－1　運動方程式

軸は，左側部と右側部で段がついていて，それぞれの部分では長手方向に沿って一様で，曲げ剛性，密度は一定とする。振動系は，図3－1に，座標系は，図3－2に示す。座標系は第2章と同様にとる。減衰を考慮せず，軸に初期たわみ，偏心がなく，軸

のせん断変形および回転慣性を無視する。軸左側部の軸の断面積を A_L，右側部のそれを A_R で表わすと，運動方程式は(2-10)式で慣性モーメントの項 $I_D=0$，$I_P=0$，および減衰力の項，$b_e=0$，$b_i=0$ とおいて，軸左側部では，

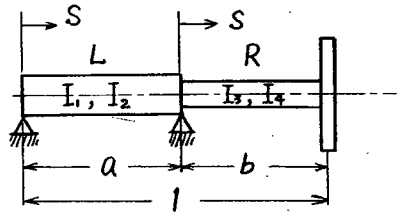


図3-1. ロータ系

$$\frac{EI_1}{A_L\rho}\frac{\partial^4\xi_L}{\partial s^4}+\frac{\partial^2\xi_L}{\partial t^2}-2\omega\frac{\partial\eta_L}{\partial t}-\omega^2\xi_L=0$$

$$\frac{EI_2}{A_L\rho}\frac{\partial^4\eta_L}{\partial s^4}+\frac{\partial^2\eta_L}{\partial t^2}+2\omega\frac{\partial\xi_L}{\partial t}-\omega^2\eta_L=0 \qquad 3-1)$$

軸右側部では，

$$\frac{EI_3}{A_R\rho}\frac{\partial^4\xi_R}{\partial s^4}+\frac{\partial^2\xi_R}{\partial t^2}-2\omega\frac{\partial\eta_R}{\partial t}-\omega^2\xi_R=0$$

$$\frac{EI_4}{A_R\rho}\frac{\partial^4\eta_R}{\partial s^4}+\frac{\partial^2\eta_R}{\partial t^2}+2\omega\frac{\partial\xi_R}{\partial t}-\omega^2\eta_R=0 \qquad 3-2$$

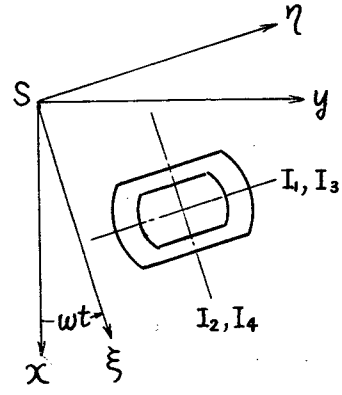


図3-2. ロータ系の座標

ただし，軸左側部では添字L，右側部では添字Rをつけて区別する。

ここで，便宜上次の記号を導入する。

$$\Gamma_1=\frac{EI_1}{\rho A_L}\cdot\frac{1}{\omega^2} \qquad \Gamma_2=\frac{EI_2}{\rho A_L}\cdot\frac{1}{\omega^2}$$

$$\Gamma_3=\frac{EI_3}{\rho A_R}\cdot\frac{1}{\omega^2} \qquad \Gamma_4=\frac{EI_4}{\rho A_R}\cdot\frac{1}{\omega^2} \qquad 3-3$$

また，

$$\begin{cases}\Gamma_\xi=\Gamma_1\\ \Gamma_\eta=\Gamma_2\end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases}\Gamma_\xi=\Gamma_3\\ \Gamma_\eta=\Gamma_4\end{cases} \qquad 3-4$$

とする。(3-4)式は，軸左側部のときは，$\Gamma_\xi=\Gamma_1$，$\Gamma_\eta=\Gamma_2$ で，軸右側部のときは，$\Gamma_\xi=\Gamma_3$，$\Gamma_\eta=\Gamma_4$ であることを意味する。(3-1)(3-2)式は類似しているので，次のように統合しても同じである。

$$\Gamma_\xi\omega^2\frac{\partial^4\xi}{\partial s^4}+\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-2\omega\frac{\partial\eta}{\partial t}-\omega^2\xi=0 \qquad 3-5$$

$$\Gamma_\eta \omega^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial s^4} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial \xi}{\partial t} - \omega^2 \eta = 0$$

ただし，必要に応じて，ξ, η に添字 L, R をつけて表わすことにする。(3-5) 式が自由振動の運動方程式を表わす。

2－2 解析

減衰がないから，(3-5) 式の解は，(3-6) 式で与えられる。

$$\begin{aligned} \xi &= \Xi(s) \cos \lambda_0 t \\ \eta &= H(s) \sin \lambda_0 t \end{aligned} \qquad 3\text{-}6$$

ただし，この解は，次の 4 つの解を表わしている。

$$\begin{aligned} \xi_L &= \Xi_L(s) \cos \lambda_0 t \\ \xi_R &= \Xi_R(s) \cos \lambda_0 t \\ \eta_L &= H_L(s) \sin \lambda_0 t \\ \eta_R &= H_R(s) \sin \lambda_0 t \end{aligned} \qquad 3\text{-}7$$

$\Xi(s)$, $H(s)$ はそれぞれ ξ, η 方向のモード関数であり，s のみの関数である。(3-6) 式を (3-5) 式に代入すると，

$$\begin{aligned} &\Gamma_\xi \omega^2 \frac{\partial^4 \Xi(s)}{\partial s^4} - (\lambda_0^2 + \omega^2)\Xi(s) - 2\lambda_0 \omega H(s) = 0 \\ &\Gamma_\eta \omega^2 \frac{\partial^4 H(s)}{\partial s^4} - (\lambda_0^2 + \omega^2) H(s) - 2\lambda_0 \omega \Xi(s) = 0 \end{aligned} \qquad 3\text{-}8$$

ここで

$$\begin{aligned} \Xi(s) &= A e^{\sqrt{\tau} s} \\ H(s) &= B e^{\sqrt{\tau} s} \end{aligned} \qquad 3\text{-}9$$

と仮定する。ここで注意を要することとして，$\sqrt{\tau}$ は軸左側部と，右側部で異なるわけで，これをそれぞれ $\sqrt{\tau_L}$, $\sqrt{\tau_R}$ とする。(3-9) 式を (3-8) 式に代入すると，A および B に関する同次方程式

$$\begin{aligned} &\{\Gamma_\xi \omega^2 \tau^2 - (\lambda_0^2 + \omega^2)\} A - 2\lambda_0 \omega B = 0 \\ &-2\lambda_0 \omega A + \{\Gamma_\eta \omega^2 \tau^2 - (\lambda_0^2 + \omega^2)\} B = 0 \end{aligned} \qquad 3\text{-}10$$

となる。この式において、A, B共に零でない解が存在するためには、次式が成立つことが必要十分条件である。

$$\Gamma_\xi \Gamma_\eta \omega^4 \tau^4 - \omega^2(\lambda_0^2+\omega^2)(\Gamma_\xi+\Gamma_\eta)\tau^2 - (\lambda_0^2-\omega^2)^2 = 0 \qquad 3-11$$

(3-11)式より，τは2実根，2虚根を持つことがわかる。したがって，(3-9)式の解は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\Xi(s) &= A_1\cosh\sqrt{\mu}s + A_2\sinh\sqrt{\mu}s + A_3\cos\sqrt{\mu}s + A_4\sin\sqrt{\mu}s \\ &\quad + A_1'\cosh\sqrt{\nu}s + A_2'\sinh\sqrt{\nu}s + A_3'\cos\sqrt{\nu}s + A_4'\sin\sqrt{\nu}s \\ H(s) &= B_1\cosh\sqrt{\mu}s + B_2\sinh\sqrt{\mu}s + B_3\cos\sqrt{\mu}s + B_4\sin\sqrt{\mu}s \\ &\quad + B_1'\cosh\sqrt{\nu}s + B_2'\sinh\sqrt{\nu}s + B_3'\cos\sqrt{\nu}s + B_4'\sin\sqrt{\nu}s\end{aligned}$$

ただし，μ, νはτ²の2根とする。

しかし，BとAの比は独立でなく，(3-10)式によって決まる。μによって決まる比をp，νによって決まる比をqとする。μ², ν²はτ²の2根だから，(3-11)式から

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{2\Gamma_\xi\Gamma_\eta}\left\{(1+\sigma_0^2)(\Gamma_\xi+\Gamma_\eta) - \sqrt{(1+\sigma_0^2)^2(\Gamma_\xi+\Gamma_\eta)^2+16\sigma_0^2\Gamma_\xi\Gamma_\eta}\right\}} \qquad 3-12$$

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{2\Gamma_\xi\Gamma_\eta}\left\{(1+\sigma_0^2)(\Gamma_\xi+\Gamma_\eta) + \sqrt{(1+\sigma_0^2)^2(\Gamma_\xi+\Gamma_\eta)^2+16\sigma_0^2\Gamma_\xi\Gamma_\eta}\right\}}$$

を得る。ただし，

$$\sigma_0 = \frac{\lambda_0}{\omega} \qquad 3-13$$

である。σ_0は軸の振動数（回転角速度）で無次元化した回転座標系から見た自然振動数である。また，σ_0は回転座標から見た軸のふれまわり速度を無次元化したもので，synchronous precessionの時は，σ_0は0である。BとAの比は，(3-10)式および(3-12)式から得られて，

$$p = \frac{1+\sigma_0^2}{4\sigma_0}\cdot\frac{\Gamma_\xi-\Gamma_\eta}{\Gamma_\eta} - \sqrt{\left(\frac{1+\sigma_0^2}{4\sigma_0}\cdot\frac{\Gamma_\xi-\Gamma_\eta}{\Gamma_\eta}\right)^2+\frac{\Gamma_\xi}{\Gamma_\eta}} \qquad 3-14$$

$$q = \frac{1+\sigma_0^2}{4\sigma_0}\frac{\Gamma_3-\Gamma_4}{\Gamma_4} + \sqrt{\left(\frac{1+\sigma_0^2}{4\sigma_0}\cdot\frac{\Gamma_3-\Gamma_4}{\Gamma_4}\right)^2 + \frac{\Gamma_3}{\Gamma_4}}$$

(3-12), (3-14)式の μ, ν および p, q は軸の左側部と右側部で異なるが, p および q は軸の左側部と右側部の Γ_3/Γ_4 が等しければ. (すなわち, I_1/I_2 と I_3/I_4 が等しければ,) お互いに, 左側部と右側部で等しい。また, $\sigma_0 = 0$ のときは, Γ_3 と Γ_4 が等しい時に, $\mu_L = \nu_L$ または $\mu_R = \nu_R$ となる。いま, 軸の回転角速度 ω を (3-15) のように無次元回転角速度 Ω であらわす。

$$\Omega = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{E}{\rho A_L}\cdot\frac{I_1+I_2}{2}}} \qquad 3-15$$

これを (3-3) 式に代入すると

$$\Gamma_1 = \frac{2\,I_1/I_2}{1+I_1/I_2}\cdot\frac{1}{\Omega^2}$$

$$\Gamma_2 = \frac{2}{1+I_1/I_2}\cdot\frac{1}{\Omega^2}$$

$$\Gamma_3 = \frac{2}{A_R/A_L\,(I_1/I_3+I_2/I_3)}\cdot\frac{1}{\Omega^2} \qquad 3-16$$

$$\Gamma_4 = \frac{2}{A_R/A_L\,(I_1/I_4+I_2/I_4)}\cdot\frac{1}{\Omega^2}$$

今後, μ, ν, p, q には, Γ に (3-16) 式を用いるものとする。(3-12) 式に (3-16) 式を代入して,

$$\mu_L = \sqrt{\frac{1+I_1/I_2}{4\,I_1/I_2}\Omega^2\left\{(1+\sigma_0^2)\left(1+\frac{I_1}{I_2}\right) - \sqrt{(1+\sigma_0^2)^2\left(1-\frac{I_1}{I_2}\right)+16\sigma_0^2\frac{I_1}{I_2}}\right\}}$$

$$\mu_R = \sqrt{\frac{A_R/A_L\,(I_1/I_3+I_2/I_3)}{4}\Omega^2\left\{(1+\sigma_0^2)\left(1+\frac{I_3}{I_4}\right) - \sqrt{(1+\sigma_0^2)^2\left(1-\frac{I_3}{I_4}\right)^2+16\sigma_0^2\frac{I_3}{I_4}}\right\}} \qquad 3-17$$

$$\nu_L = \sqrt{\frac{1+I_1/I_2}{4\,I_1/I_2}\Omega^2\left\{(1+\sigma_0^2)\left(1+\frac{I_1}{I_2}\right) + \sqrt{(1+\sigma_0^2)^2\left(1-\frac{I_1}{I_2}\right)^2+16\sigma_0^2\frac{I_1}{I_2}}\right\}}$$

$$\nu_R = \sqrt{\frac{A_R/A_L\,(I_1/I_3+I_2/I_3)}{4}\Omega^2\left\{(1+\sigma_0^2)\left(1+\frac{I_2}{I_4}\right) + \sqrt{(1+\sigma_0^2)^2\left(1-\frac{I_3}{I_4}\right)^2+16\sigma_0^2\frac{I_3}{I_4}}\right\}}$$

また，(3-14)式から，

$$p_L = \frac{1+\sigma_0^2}{4\sigma_0}\left(\frac{I_1}{I_2}-1\right)-\sqrt{\left\{\frac{1+\sigma_0^2}{4\sigma_0}\left(\frac{I_1}{I_2}-1\right)\right\}^2+\frac{I_1}{I_2}}$$

$$p_R = \frac{1+\sigma_0^2}{4\sigma_0}\left(\frac{I_3}{I_4}-1\right)-\sqrt{\left\{\frac{1+\sigma_0^2}{4\sigma_0}\left(\frac{I_3}{I_4}-1\right)\right\}^2+\frac{I_3}{I_4}}$$

$$q_L = \frac{1+\sigma_0^2}{4\sigma_0}\left(\frac{I_1}{I_2}-1\right)+\sqrt{\left\{\frac{1+\sigma_0^2}{4\sigma_0}\left(\frac{I_1}{I_2}-1\right)\right\}^2+\frac{I_1}{I_2}} \qquad 3-18$$

$$q_R = \frac{1+\sigma_0^2}{4\sigma_0}\left(\frac{I_3}{I_4}-1\right)+\sqrt{\left\{\frac{1+\sigma_0^2}{4\sigma_0}\left(\frac{I_3}{I_4}-1\right)\right\}^2+\frac{I_3}{I_4}}$$

(3-17)，(3-18) 式を用いて，$\Xi(S)$，$H(S)$ は，

$$\begin{aligned}
\Xi_L(S) &= U_L(S) + V_L(S)\\
H_L(S) &= p_L U_L(S) + q_L V_L(S)\\
\Xi_R(S) &= U_R(S) + V_R(S)\\
H_R(S) &= p_R U_R(S) + q_R V_R(S)
\end{aligned} \qquad 3-19$$

ただし，

$$\begin{aligned}
U_L(S) &= A_1\cosh\sqrt{\mu_L}S + A_2\sinh\sqrt{\mu_L}S + A_3\cos\sqrt{\mu_L}S + A_4\sin\sqrt{\mu_L}S\\
V_L(S) &= A_1'\cosh\sqrt{\nu_L}S + A_2'\sinh\sqrt{\nu_L}S + A_3'\cos\sqrt{\nu_L}S + A_4'\sin\sqrt{\nu_L}S\\
U_R(S) &= B_1\cosh\sqrt{\mu_R}S + B_2\sinh\sqrt{\mu_R}S + B_3\cos\sqrt{\mu_R}S + B_4\sin\sqrt{\mu_R}S\\
V_R(S) &= B_1'\cosh\sqrt{\nu_R}S + B_2'\sinh\sqrt{\nu_R}S + B_3'\cos\sqrt{\nu_R}S + B_4'\sin\sqrt{\nu_R}S
\end{aligned} \qquad 3-20$$

(3-19)式は，境界条件を与えることによって，16個の係数間の比が決まり，特性方程式から μ および ν が定まる。

2－3．特性方程式とその根

左側の軸受で軸は単純支持され，二つ目の軸受のところで軸は段がつき，左側部と右側部が接合される。さらに右側部分の端でオーバハングディスクに結合される。この場合左側軸受で次の境界条件を得る。

$$\begin{aligned}
\Xi_L(0) &= H_L(0) = 0\\
\Xi_L''(0) &= H_L''(0) = 0
\end{aligned} \qquad 3-21$$

2つ目の軸受における接合条件から

$$\Xi_L(a) = H_L(a) = 0$$
$$\Xi_L'(a) = \Xi_R'(0)$$
$$EI_1\Xi_L''(a) = EI_3\Xi_R''(0) \qquad 2\text{-}22$$
$$H_L'(a) = H_R'(0)$$
$$EI_2 H_L''(a) = EI_4 H_R''(0)$$

が得られる。右側部分のディスクのところ（s=b）で，ディスクのジャイロモーメントと回転慣性およびせん断力の関係から，境界条件を得る。（付録A-3-1 参照）

$$H_R''(b) = \gamma_4 H_R'(b)$$
$$\Xi_R''(b) = \gamma_3 \Xi_R'(b) \qquad 3\text{-}23$$
$$\Xi_R'''(b) = -\frac{md\,\omega^2}{EI_3}\left\{(1+\sigma_0^2)\Xi_R(b) + 2\sigma_0 H_R(b)\right\}$$
$$H_R'''(b) = -\frac{md\,\omega^2}{EI_4}\left\{(1+\sigma_0^2)H_R(b) + 2\sigma_0 \Xi_R(b)\right\}$$

となる。ただし，ディスクは薄いとし，$I_p = 2I_D$ としている。γ_3 γ_4 は，

$$\gamma_3 = \frac{(\lambda_0^2 - \omega^2)}{EI_3} I_D$$
$$\gamma_4 = \frac{(\lambda_0^2 - \omega^2)}{EI_4} I_D$$

(3-3), (3-13), (3-15)式を用いれば，(3-24)式は(3-25)式となる。

$$\gamma_3 = \frac{\sigma_0^2 - 1}{\Gamma_3}\frac{I_D}{\rho A_R}$$
$$\gamma_4 = \frac{\sigma_0^2 - 1}{\Gamma_4}\frac{I_D}{\rho A_R} \qquad 3\text{-}25$$

$I_D/\rho A_R$ を

$$I_G \equiv I_D/\rho A_R \qquad 3\text{-}26$$

とおくと，(3-26)式は，ジャイロ効果（回転慣性を含む）をあらわすパラメータである。また，ディスクの質量の効果をあらわす

パラメータとしてNを用いる。Nはディスクの質量を軸全体の質量で無次元化したものとすると，

$$N = \frac{m_d}{\rho(aA_L + bA_R)\ell} \qquad 3\text{-}27$$

となる。特性方程式を導く前に簡単のために(3-28)式の記号を導入する。

$$\begin{array}{llll} \cosh a\sqrt{\mu_L} = \alpha_{1L} & \sinh a\sqrt{\mu_L} = \beta_{1L} & \cos a\sqrt{\mu_L} = \alpha_{2L} & \sin a\sqrt{\mu_L} = \beta_{2L} \\ \cosh a\sqrt{\nu_L} = \alpha'_{1L} & \sinh a\sqrt{\nu_L} = \beta'_{1L} & \cos a\sqrt{\nu_L} = \alpha'_{2L} & \sin a\sqrt{\nu_L} = \beta'_{2L} \\ \cosh b\sqrt{\mu_R} = \alpha_{1R} & \sinh b\sqrt{\mu_R} = \beta_{1R} & \cos b\sqrt{\mu_R} = \alpha_{2R} & \sin b\sqrt{\mu_R} = \beta_{2R} \\ \cosh b\sqrt{\nu_R} = \alpha'_{1R} & \sinh b\sqrt{\nu_R} = \beta'_{1R} & \cos b\sqrt{\nu_R} = \alpha'_{2R} & \sin b\sqrt{\nu_R} = \beta'_{2R} \end{array} \qquad 3\text{-}28$$

(3-19)式を境界条件式(3-21)，(3-22)，(3-23)式に代入すると，16元の同次連立方程式ができるが，これを簡単化すると，A_4，A'_4 B_1，B_2，B_4，B'_1，B'_2，B'_4に関する8元の連立方程式になる。これは同次方程式だから，A，Bがすべて0でない為に，係数行列式が0でなければならない。これが特性方程式を与える。この方程式はσ_0とΩの関数である。従って，適当なσ_0を与えて特性方程式を満足するΩをくり返し法で数値計算する。$\sigma_0 = 0$として求めたときのΩの収速値はsynchronous precessionの危険速度となる。このようにして収束したΩとσ_0から$\sqrt{\mu_L}$，$\sqrt{\nu_L}$，$\sqrt{\mu_R}$，$\sqrt{\nu_R}$が求まる。但し，この過程においては，比較的接近したΩの組が求められ，これに応じて2つづつ$\sqrt{\mu_L}$，$\sqrt{\nu_L}$，$\sqrt{\mu_R}$，$\sqrt{\nu_R}$が求まる。このとき，小さい方のΩで求められた$\sqrt{\nu_L}$と$\sqrt{\nu_R}$と，大きい方のΩで求められた$\sqrt{\mu_L}$と$\sqrt{\mu_R}$が正しい組の$\sqrt{\mu_L}$，$\sqrt{\nu_L}$，$\sqrt{\mu_R}$，$\sqrt{\nu_R}$で，特性方程式の根となる。他の残った，今除外した組，すなわち，小さい方のΩで求められた$\sqrt{\mu_L}$，$\sqrt{\mu_R}$と大きい方のΩで求められた$\sqrt{\nu_L}$，$\sqrt{\nu_R}$は選んだσ_0の値によって異なる。正しい組の$\sqrt{\mu_L}$，$\sqrt{\nu_L}$，$\sqrt{\mu_R}$，$\sqrt{\nu_R}$はσ_0の値を変えて求めても不変である。計算は電子計算機を用いて行ない，上のような手順で特性根を求めた。特性根を(3-30)式に示す。

$$N_0 = \frac{md}{\rho A_R \ell} = N \cdot \frac{a + b\frac{A_R}{A_L}}{A_R / A_L} \qquad 3\text{-}29$$

ここでNは(3-27)式に示すもので A_R/A_Lは，軸右側部の軸左側部に対する断面積の比であり，aは軸受スパン比で軸左側部の長さを示し，bは軸右側部の長さを示す。

特性方程式(3-30)式を解くに際して，次のパラメータを定義する。

$$\text{段付比 } C = \frac{I_3 + I_4}{I_1 + I_2} \qquad 3\text{-}31$$

この比は段付の比の様子がわかりにくいので，等価直径比 de を次のように定義する。

$$\text{等価直径比 } de = \sqrt{\frac{A_R}{A_L}} \cong \sqrt[4]{C} \qquad 3\text{-}32$$

deは軸左側部に対する軸右側部の断面積の比の平方根で，軸径が対称と考えたときの，右側部対左側部の直径比に相当し，系が対称軸径のときは，deは$\sqrt[4]{C}$に等しくなる。

なお，(3-30)式を解くときに使用したパラメータは I_1/I_2, I_3/I_4 N, a, C の5つであり，$I_G = 0$※としている。計算においては，ディスクのジャイロモーメントおよび回転慣性の項は無視している。

第3節 種々のパラメータの影響について

3－1 段付比の影響

剛性比 $I_1/I_2 = I_3/I_4 = 1$，質量比 $N = 1$，スパン比 $a = 0.5, 0.8$ の場合について，(3-30)式の計算結果を図3-3に示す。縦軸は等価直径比deで段付きを表わす。図3-3により，段付比が特性根に与える影響が示される。1次モードでは，軸左側部でも右側部でも，段付比が小さくなると，特性根の値が低くなるのに対して，2次および3次モードでは，軸右側部では高くなっている。換言

※ ジャイロモーメントの影響については，第4章の対称軸の設計法のところで示す。

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{\alpha_{2L}\beta_{1L}-\beta_{2L}\alpha_{1L}}{\beta_{1L}} & \dfrac{\alpha'_{2L}\beta'_{1L}-\beta'_{2L}\alpha'_{1L}}{\beta'_{1L}} & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\
\sqrt{\mu_L}\,\beta_{2L} & \sqrt{\nu_L}\,\beta'_{2L} & \dfrac{I_3}{I_4}\sqrt{\mu_R} & 0 & 0 & \dfrac{I_3}{I_1}\sqrt{\nu_R} & 0 & 0 \\
\dfrac{\alpha_{2L}\beta_{1L}-\beta_{2L}\alpha_{1L}}{\beta_{1L}}\cdot\dfrac{p_L}{p_R} & \dfrac{\alpha'_{2L}\beta'_{1L}-\beta'_{2L}\alpha'_{1L}}{\beta'_{1L}}\cdot\dfrac{p_L}{p_R} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{g_R}{p_R} & -\dfrac{g_R}{p_R} \\
\sqrt{\mu_L}\,\beta_{2L}\dfrac{p_L}{p_R} & \sqrt{\nu_L}\,\beta'_{2L}\dfrac{g_L}{p_R} & \dfrac{I_4}{I_2}\sqrt{\mu_R} & 0 & 0 & \dfrac{I_4}{I_2}\sqrt{\nu_R}\,\dfrac{g_R}{p_R} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sqrt{\mu_R}(\alpha_{1R}+\alpha_{2R}) - \gamma_4(\beta_{1R}+\beta_{2R}) & \sqrt{\mu_R}\,\beta_{1R}-\gamma_4\alpha_{1R} & -(\sqrt{\mu_R}\,\beta_{2R}+\gamma_4\alpha_{2R}) & \dfrac{g_R}{p_R}\{\sqrt{\nu_R}(\alpha'_{1R}+\alpha'_{2R}) - \gamma_4(\beta'_{1R}+\beta'_{2R})\} & \dfrac{g_R}{p_R}(\sqrt{\nu_R}\beta'_{1R}-\gamma_4\alpha'_{1R}) & -\dfrac{g_R}{p_R}(\sqrt{\nu_R}\beta'_{2R}+\gamma_4\alpha'_{2R}) \\
0 & 0 & \sqrt{\mu_R}(\alpha_{1R}+\alpha_{2R}) - \gamma_3(\beta_{1R}+\beta_{2R}) & \sqrt{\mu_R}\,\beta_{1R}-\gamma_3\alpha_{1R} & -(\sqrt{\mu_R}\,\beta_{2R}+\gamma_3\alpha_{2R}) & \sqrt{\nu_R}(\alpha'_{1R}+\alpha'_{2R}) - \gamma_3(\beta'_{1R}+\beta'_{2R}) & \sqrt{\nu_R}\,\beta'_{1R}-\gamma_3\alpha'_{1R} & -(\sqrt{\nu_R}\beta'_{2R}+\gamma_3\alpha'_{2R}) \\
0 & 0 & \mu_R\{\beta_{1R}-\beta_{2R} + (\alpha_{1R}-\alpha_{2R})\sqrt{\mu_R}N\} & \mu_R(\alpha_{1R}+\beta_{1R}\sqrt{\mu_R}N) & -\mu_R(\alpha_{2R}-\beta_{2R}\sqrt{\mu_R}N) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_R\{\beta'_{1R}-\beta'_{2R} + (\alpha'_{1R}-\alpha'_{2R})\sqrt{\nu_R}N & \nu_R(\alpha'_{1R}+\beta'_{1R}\sqrt{\nu_R}N) & -\nu_R(\alpha'_{2R}-\beta'_{2R}\sqrt{\nu_R}N)
\end{vmatrix} = 0
$$

(3-30)

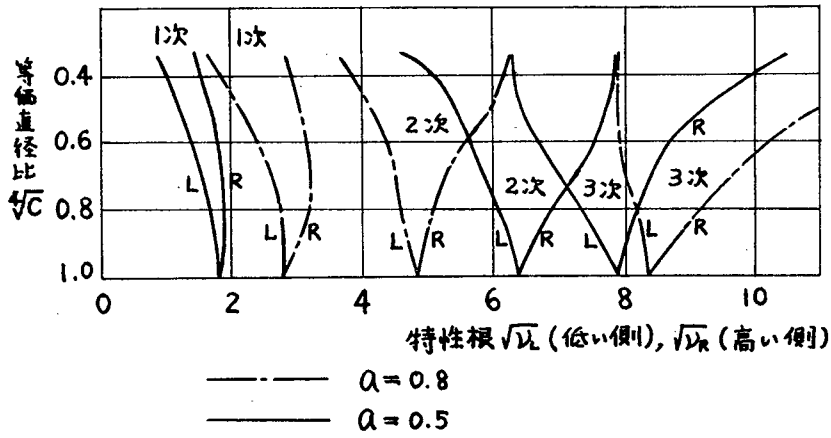


図 3-3. 段付きが特性根におよぼす影響

すれば，1次モードでは軸は左側部でも右側部でも弱くなるのに対し，2次および3次モードでは，軸左側部では段付比の影響によって弱くなるが，右側部では逆に強くなる。この傾向は，スパン比αが0.5の場合も，0.8の場合も同じである。この理由は，高次モードでは，ディスクの質量のため軸右側部が細くなるほど，相対的にディスクの質量が大きくなるため，ディスクが高い振動数に応答しきれなくなり，逆に静止してしまうため，ディスクが支点として作用するので，右側部が強くなると考えられる。図3-3で α = 0.5 と 0.8 のグラフでは，2次モードは α=0.8 の方が軸系としては弱くなっている。これは，2次モードでは α=0.8 のときでも軸左側部に節（node）が存在しないからである。このモードに関しては後述する。なお，図3-3は $I_1/I_2 = I_3/I_4 = 1$ の対称－対称軸に対する図であるが，非対称－対称，対称－非対称および，非対称－非対称の場合でも特性根の値はほとんど変わらず，同じ傾向を示していることを確かめた。（付録3-2）

3－2　スパン比と質量比の影響

$I_1/I_2 = 0.8$，$I_3/I_4 = 1.0$，$C = 0.2$ の場合について，質量比Nをパラメータにとってスパン比αが特性根の値におよぼす影響について図示したのが図3－4である。段のついていない非対称－非対称軸系の計算結果と文献8の対称軸系の特性根の結果は同じであり，また，図3－4とも類似していることがわかった。した

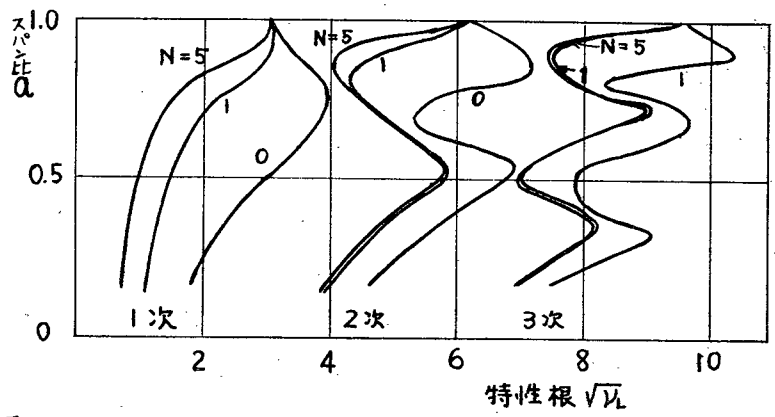


図 3-4. スパン比が特性根におよぼす影響（パラメータ：質量比N）

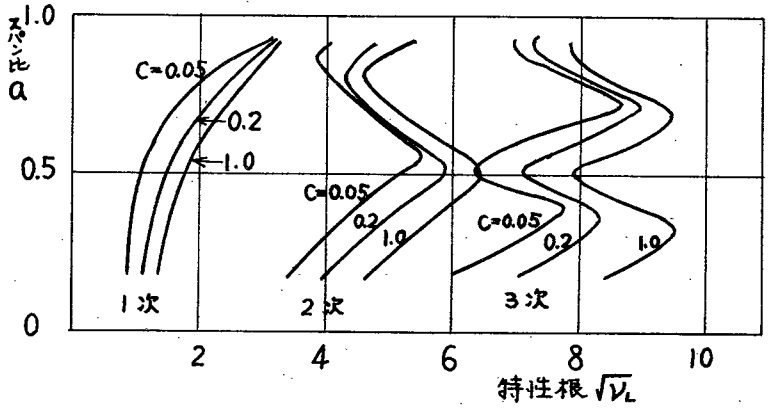


図 3-5. スパン比が特性根に及ぼす影響（パラメータ：段付比C）

がって段がついていない軸も，段がついている軸も，スパン比の影響はそれ程変わらないといえる。ただ，図3－4と文献4とでは，前者が，1次，2次および3次の間隔がつまっているのに対し，後者ではその間隔がかなりあいている。これは段がついたために，軸系が弱くなるためであると考えられる。質量比が1以上になると，モードは殆んど変らないこと，スパン比が0.5付近では，2次モードで軸系が強くなること，3次モードでは，スパン比が0.3または0.6付近で強くなることは文献8と同様である。したがって，定性的には丸軸と非対称軸とは同じであるといえる。

3－3　スパン比と段付比の影響

$I_1/I_2 = 0.8$，$I_3/I_4 = 1.0$，$N = 1$ について，Cをパラメータにとって，スパン比aが特性根の値に及ぼす影響について図示し

たのが図3－5である。各モードにわたって，段付比が小さい程軸系は弱くなっている。たとえば，1次モードでは，$\sqrt{\nu_L}$の値を同じにするとき，$C=1.0$ではスパン比が0.6であったものが，$C=0.2$では これと等価にするために0.68，$C=0.05$では0.79となる。換言すれば，スパン比が0.6の段のつかない非対称－対称軸と，軸系の強さを等しくして，段付比0.2の軸系に等価にしようとすれば，スパン比は 0.68 になる，ということである。この段付比が$\sqrt{\nu_L}$におよぼす影響は高次になっても消えない。しかし，段付比の値によって影響のしかたが変わるということはない。

3－4　モード型

2－3で述べたように，(3-19)を境界条件 (3-21)，(3-22)，(3-23) に代入して，簡単にしていくと，A_4, A_4', B_1, B_2, B_4, B_1', B_2', B_4' に関する8元の連立方程式ができるが，このうち，$A_4'=1$とおいてA_4'の項を右辺に移項すると7元の連立非同次方程式ができる。(3-30)で得られた解 $\sqrt{\nu_L}$, $\sqrt{\nu_L}$, $\sqrt{\nu_R}$, $\sqrt{\nu_R}$ およびσ_0, Ωを与えてやれば，この連立方程式を解くことによって モード関数の係数 A_4, B_1, B_2, B_4, B_1', B_2', B_4' が求まる。これを(3-20)に代入するとモード関数が得られる。$I_1/I_2=0.8$, $I_3/I_4=1$, $N=1$, $C=0.2$ で，$\alpha=0.2$, 0.5, 0.8 の場合について1次から3次までのモード型を図3－6に示す。2次，3次ではディスクの質量がほとんど静止して支持点のように作用することがわかる。弱い側のモードと強い側のモードはほとんど同じで節の点も変らない。図3－6は非対称－対称軸系のものであるから，強い側と弱い側では，変わるはずであるが，その相違は図3－6では見られない。ただ$\alpha=0.5$のとき，2次モードが逆に出ている。なお ついでながら，(4-19)式において弱い側のモードでは$V(S)$が大きく，強い側のモードでは$U(S)$が大きくなり，$V(S)$が弱い側のモードを支配し，$U(S)$が強い側のモードを支配している。また，モード型は質量比，剛性の非対称性，段付比によっても殆んど変化せず，スパン比によって顕著に変化するといえる。

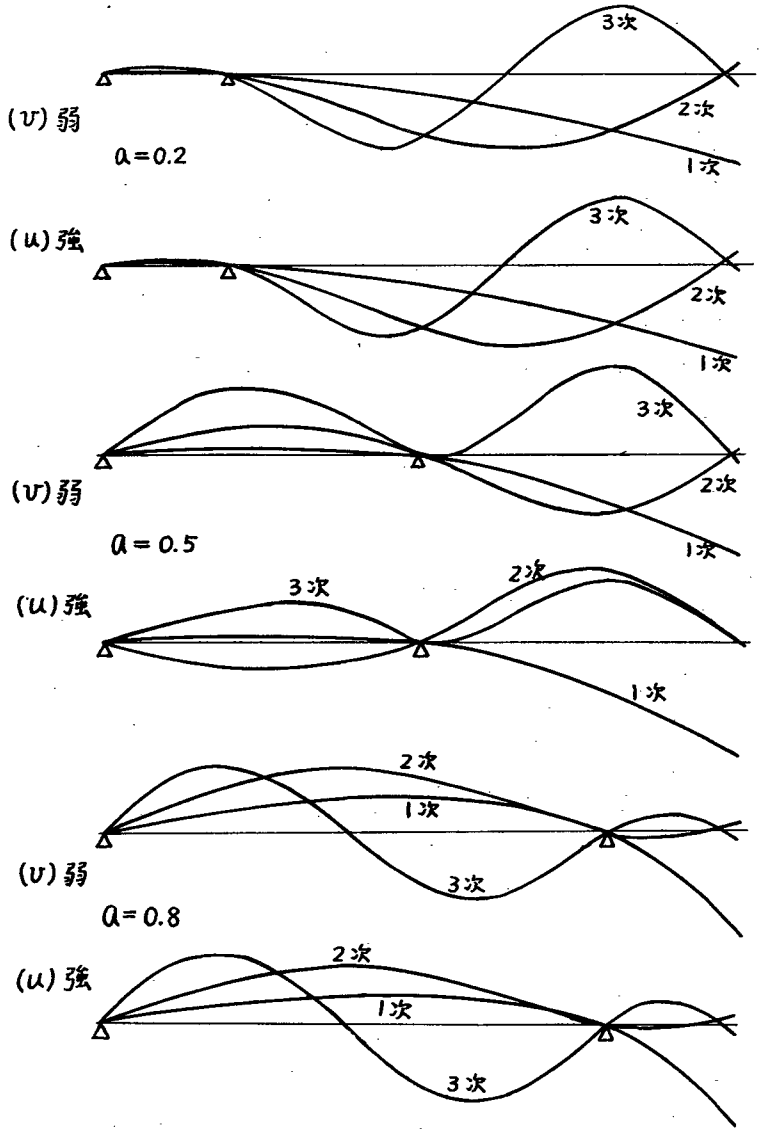


図3-6. 規準モード $\left(\begin{matrix} I_1/I_2=0.8 \quad I_3/I_4=1,\ N=1 \\ C=0.2 \end{matrix}\right)$

第4節 自由振動の安定

(3-11), (3-13) 式から

$$\sigma_0^4 - \frac{1}{2}(\Gamma_\xi + \Gamma_\eta)\tau^2 + 2\}\sigma_0^2 + (\Gamma_\xi\tau^2 - 1)(\Gamma_\eta\tau^2 - 1) = 0 \qquad 3\text{-}33$$

を得る。系が安定であるためには、σ_0 が実数であることが必要十分である。したがって、

$$(\Gamma_3\tau^2-1)(\Gamma_4\tau^2-1)>0 \qquad 3\text{-}34$$

があらわす端点は(3-33)式で $\sigma_0=0$ として求まる Ω の値(Ω は Γ に含まれている)に等しい。(3-34)式によって表わされる領域は安定である。ところで,(3-33)式で $\sigma_0=0$ として求まる Ω は synchronous precession の危険速度であるから,2つの危険速度間の領域が不安定領域であるということがわかる。(3-17)式で $\sigma_0=0$ とする Ω は(3-33)式を満足し,(3-34)式の端点となる。(3-17)式で $\sigma_0=0$ とすると,そのときの Ω は,

$$\begin{aligned}
\Omega_{\mu L} &= \mu_L\sqrt{\frac{2}{1+I_1/I_2}} \\
\Omega_{\mu R} &= \mu_R\sqrt{\frac{2I_4/I_2}{A_R/A_L(1+I_1/I_2)}} \\
\Omega_{\nu L} &= \nu_L\sqrt{\frac{2I_1/I_2}{1+I_1/I_2}} \\
\Omega_{\nu R} &= \nu_R\sqrt{\frac{2I_3/I_2}{A_R/A_L(1+I_1/I_2)}}
\end{aligned} \qquad 3\text{-}35$$

となる。

安定領域は,(3-34)を満足する Ω の最小値または最大値よりもそれぞれ,大きいか,または小さい領域であらわされる。したがって,不安定領域はその内側,つまり,(3-35) の Ω の最小値と最大値の間の領域である。最小値を Ω_1,最大値を Ω_2 とすると,不安定領域は,

$$\Omega_1<\Omega<\Omega_2 \qquad 3\text{-}36$$

であらわされる。

$a=0.5$, $N=1$ に対する非対称ー対称段付軸系における不安定領域を,縦軸に段付比 $d_\epsilon=M^2$ をとって図示すると,図3-7となる。また,同じ条件のもとで,対称ー非対称段付軸系における不安定領域を図示すると図3ー8となる。図3ー7(a)におい

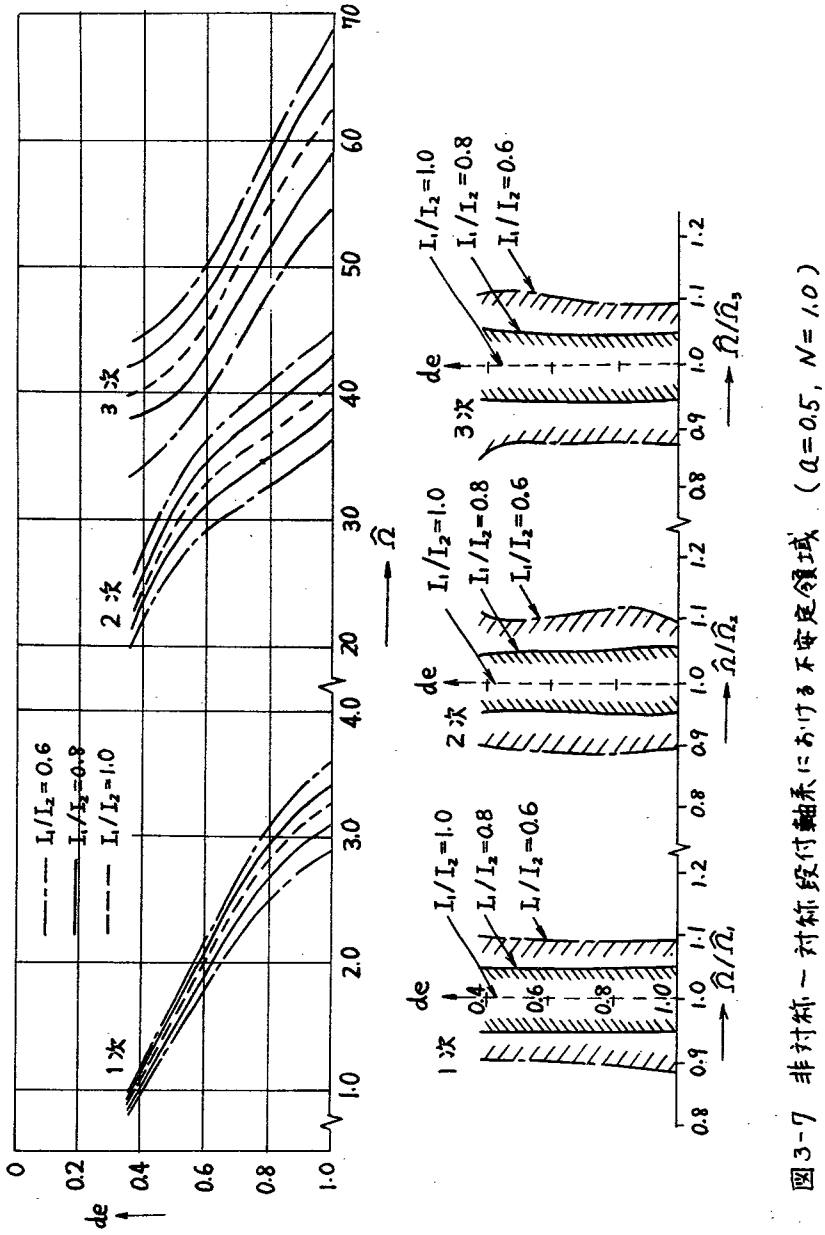


図3-7 非対称－対称段付軸系における不安定領域（α=0.5, N=1.0）

て，同じ線で囲まれた領域がそのモードにおける不安定領域をあらわしている。図中破線で示されている系は，対称－対称段付軸系であるから，危険速度は各モードで1つしかなく，不安定領域はその危険速度に等しい回転数のときだけであり，1点であらわされる。図3－7(b)は各モードのこの危険速度の値で無次元化した不安定領域をあらわしている。

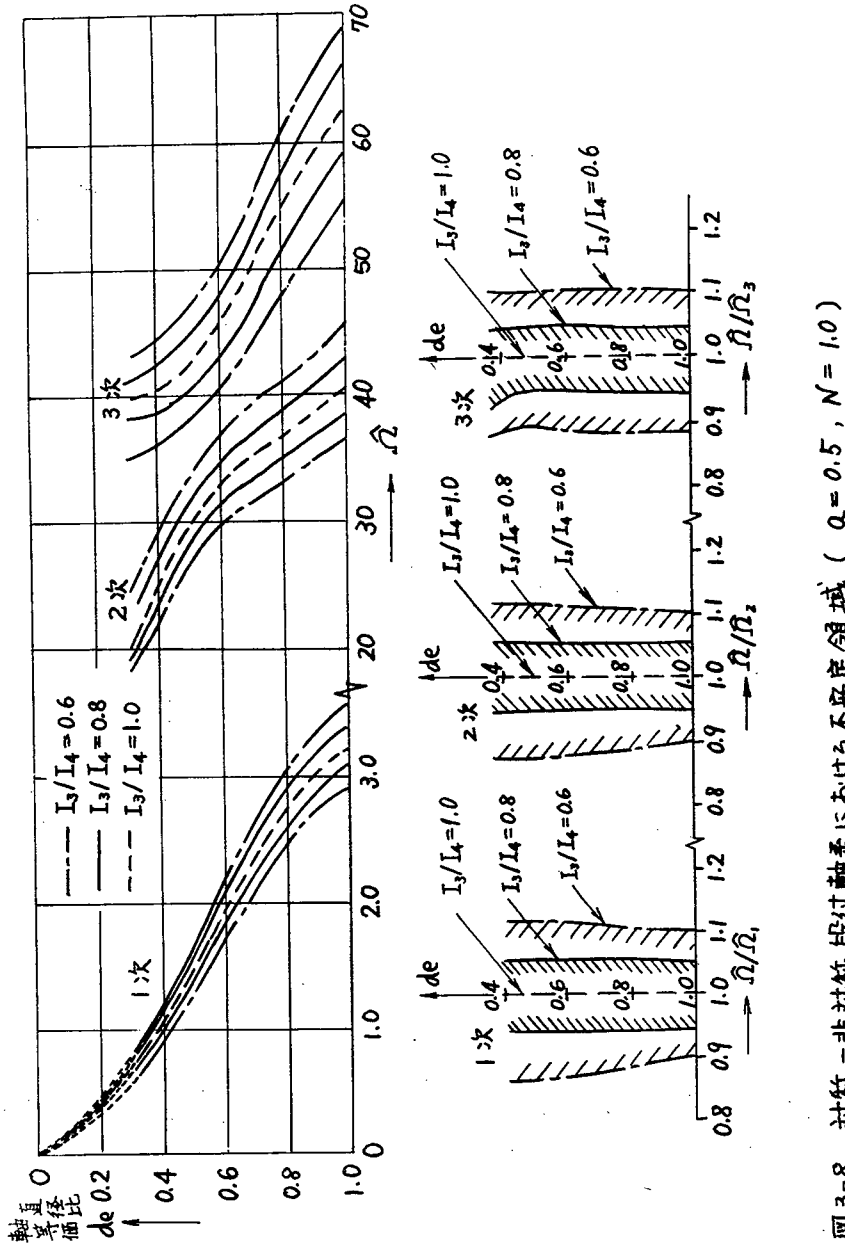


図3-8. 対称－非対称段付軸系における不安定領域（$\alpha=0.5$, $N=1.0$）

図3-8(b)は 前と同様に図3－8(a)の不安定領域を図3－8(a)の対称－対称段付軸系の危険速度で無次元化してあらわしたものである。図3－7も，図3－8も傾向としては変らない。また，絶対値もほとんど変らない。段付比が小さくなるにつれて，不安定領域は急速に低い速度側へ移行する。しかし，段付比が変わっても(b)図で見られるように不安定領域の無次元幅はほとんど変化

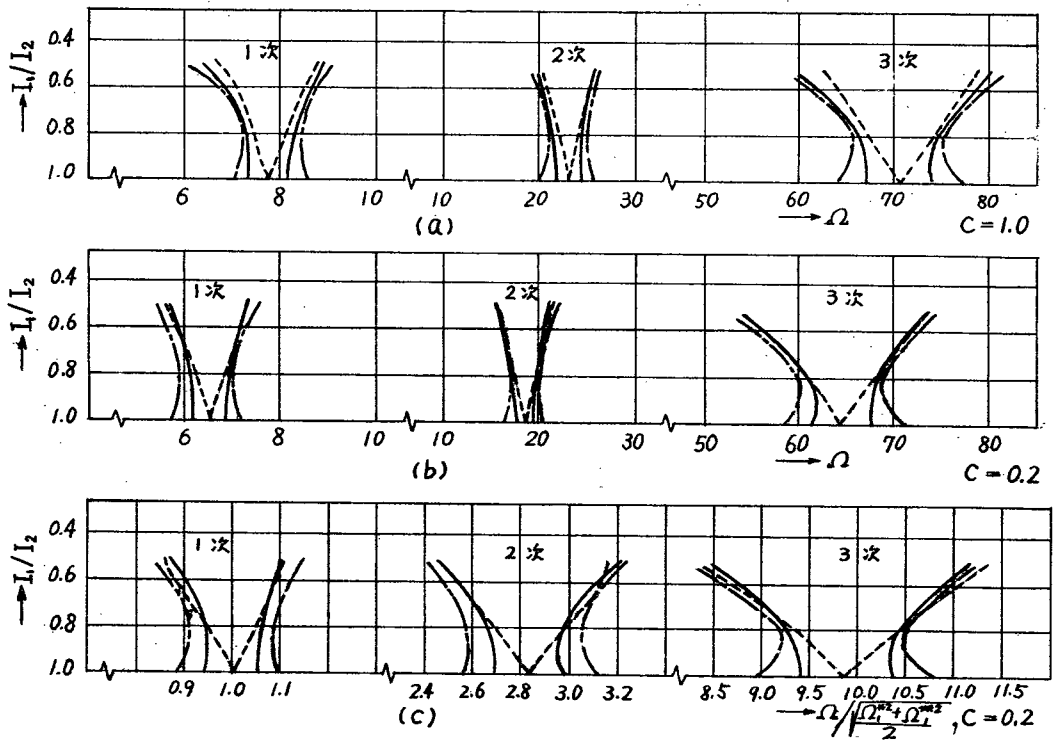


図3-9 非対称－非対称段付軸系における不安定領域（非対称性の影響）（$a=0.8$ $N=1.0$ ---- $I_3/I_4=1.0$, ——— $I_3/I_4=0.8$, —·—·— $I_3/I_4=0.6$ ）

しない。不安定領域の幅は軸の曲げ剛性の非対称性によって大きく変化し，非対称性（I_1/I_2 または I_3/I_4）が 0.8 から 0.6 に増加すると，ほぼ2倍に増大する。なお，図3－7(b)および図3－8(b)の Ω_n は

$$\Omega_n = \sqrt{\frac{\Omega_{1n}^2 + \Omega_{2n}^2}{2}}$$

のことで，対称－対称軸系の危険速度に対応する。

図3－7および図3－8では，軸左側部または軸右側部のどちらかが対称な場合であるが，ここで，段付比を一定にして，I_3/I_4 と I_1/I_2 が不安定領域に及ぼす影響について調べることにする。この非対称－非対称段付軸系について，危険速度を計算して図示したのが，図3－9である。図3－9(a)は段付のない場合で，(b)は段付比＝0.2，(C)は(b)で表わされる不安定領域を1次の対称－

一対称軸系の危険速度で割ったものである。段付比が1のときは不安定領域は I_3/I_4 が小さくなるにつれて広がっているが，段付比が0.2のときは必ずしもそういうことは成立せず，I_1/I_2 が0.6～0.8の範囲では $I_3/I_4=0.8$ の軸の方が $I_3/I_4=1$ の軸よりも不安定領域が狭くなる場合がある。いろいろな I_3/I_4 に対して I_1/I_2 を変えるとき，段が付いていると不安定領域が極小になるような I_1/I_2 の値が存在することがわかる。段がついていない場合でも，このようなことは成立つようであるが，ただ，(b)図のように I_3/I_4 が1.0と0.8で不安定領域が交錯するということはない。

第5節　重力による強制振動の解析

この節では，非対称で一様な断面をもつ軸について，軸の自重とディスクの自重を強制力とした強制振動の解析をおこなう。運動方程式は，(2-11)式でジャイロモーメントと減衰項を無視して(3-5)式と同様に軸右側と左側部を同時に書くと，

$$\frac{EI}{\rho A}\frac{\partial^4\zeta}{\partial s^4}+\frac{\Delta EI}{\rho A}\frac{\partial^4\bar{\zeta}}{\partial s^4}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+2i\omega\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\omega^2\zeta=g\,e^{-i\omega t} \qquad 3\text{-}37$$

(2-25)式と同じように解を，

$$\zeta=U(s)e^{i\omega t}+V(s)e^{-i\omega t} \qquad 3\text{-}38$$

と仮定して，(3-38)式を(3-37)式に代入すると，

$$\begin{aligned} EI\frac{\partial^4U(s)}{\partial s^4}+\Delta EI\frac{\partial^4V(s)}{\partial s^4}&=4\rho A\omega^2U(s)\\ \Delta EI\frac{\partial^4U(s)}{\partial s^4}+EI\frac{\partial^4V(s)}{\partial s^4}&=\rho Ag \end{aligned} \qquad 3\text{-}39$$

(3-39)式から $\frac{\partial^4V}{\partial s^4}$ を消去して，

$$\left(EI-\frac{(\Delta EI)^2}{EI}\right)\frac{\partial^4U}{\partial s^4}-4\rho A\omega^2U=-\frac{\Delta EI}{EI}\rho Ag \qquad 3\text{-}40$$

となる。 一般解は,

$$U(s) = C_1 \cosh\frac{\sqrt{\tau}}{\ell}s + C_2 \sinh\frac{\sqrt{\tau}}{\ell}s + C_3 \cos\frac{\sqrt{\tau}}{\ell}s + C_4 \sin\frac{\sqrt{\tau}}{\ell}s + G \qquad 3-41$$

ただし,

$$\tau = 2\omega\ell^2\sqrt{\frac{\rho AEI}{(EI)^2-(\Delta EI)^2}} \qquad 3-42$$

$$G = \frac{\Delta EI\, g}{4\omega^2 EI} \qquad 3-43$$

軸左側部では,

$$U_L(s) = C_1 \cosh\frac{\sqrt{\tau}}{\ell}s + C_2 \sinh\frac{\sqrt{\tau}}{\ell}s + C_3 \cos\frac{\sqrt{\tau}}{\ell}s + C_4 \sin\frac{\sqrt{\tau}}{\ell}s + G \qquad 3-44$$

軸右側部では,

$$U_R(s) = D_1 \cosh\frac{\sqrt{\tau}}{\ell}s + D_2 \sinh\frac{\sqrt{\tau}}{\ell}s + D_3 \cos\frac{\sqrt{\tau}}{\ell}s + D_4 \sin\frac{\sqrt{\tau}}{\ell}s + G \qquad 3-45$$

境界条件は第2節と同じく, 左側の軸受で軸は単純支持され, 右端にディスクを有する軸系とする。 したがって,

$$\begin{aligned}
&U_L(0) = U_L''(0) = 0 \\
&U_L(a\ell) = 0 \\
&U_R(0) = U_R''(b\ell) = 0 \\
&U_L'(a\ell) = U_R'(0) \\
&U_L''(a\ell) = U_R''(0) \\
&U_R''(b\ell) = -8\omega^2 m_d \frac{EI}{(EI)^2-(\Delta EI)^2} + 2m_d g \frac{\Delta EI}{(EI)^2-(\Delta EI)^2}
\end{aligned} \qquad 3-46$$

(3-44)(3-45)式を(3-46)式に代入すると, 8つの係数が求まる。 簡単のために次の記号を用いる。

$$\begin{aligned}
&\alpha_{1L} = \cosh a\sqrt{\tau}, \quad \beta_{1L} = \sinh a\sqrt{\tau}, \quad \alpha_{2L} = \cos a\sqrt{\tau}, \quad \beta_{2L} = \sin a\sqrt{\tau} \\
&\alpha_{1R} = \cosh b\sqrt{\tau}, \quad \beta_{1R} = \sinh b\sqrt{\tau}, \quad \alpha_{2R} = \cos b\sqrt{\tau}, \quad \beta_{2R} = \sin b\sqrt{\tau}
\end{aligned} \qquad 3-47$$

他の記号に関しては第2節と同じとする。 (3-46)式を(3-44), (3-45)式に代入すると,

$$C_1 = G/2$$

$$C_2 = \frac{2D_1 - \alpha_{1L} G}{2\beta_{1L}}$$

$$C_3 = G/2$$

$$C_4 = \frac{G(2-\alpha_{2L}) - 2D_1}{2\beta_{2L}}$$

$$D_1 = \frac{(2\alpha_{2R}\beta_{1L}\beta_{2L} - \beta_{1L}\beta_{2R} - \beta_{2L}\beta_{2R} + \alpha_{2L}\beta_{1L}\beta_{2R})(\alpha_{2R}\beta_{1R} - \alpha_{1R}\beta_{2R} - 2\beta_{1R}\beta_{2R}\sqrt{\tau}N)}{\{\beta_{1L}\beta_{2L}(\alpha_{1R}+\alpha_{2R}) - \beta_{2R}(\alpha_{1L}\beta_{2L} - \alpha_{2L}\beta_{1L})\}(\alpha_{2R}\beta_{1R} - \alpha_{1R}\beta_{2R} - 2\beta_{1R}\beta_{2R}\sqrt{\tau}N)}$$
$$\frac{-2\beta_{1L}\beta_{2L}(\beta_{1R}+\beta_{2R})}{-\beta_{1L}\beta_{2L}(\beta_{1R}+\beta_{2R})(1+\alpha_{1R}\alpha_{2R} - \beta_{1R}\beta_{2R} - 2\alpha_{1R}\beta_{2R}\sqrt{\tau}N)}$$

$$D_2 = \frac{G - (1+\alpha_{1R}\alpha_{2R} - \beta_{1R}\beta_{2R} - 2\alpha_{1R}\beta_{2R}\sqrt{\tau}N)D_1}{\alpha_{2R}\beta_{1R} - \alpha_{1R}\beta_{2R} - 2\beta_{1R}\beta_{2R}\sqrt{\tau}N} \qquad 3\text{-}48$$

$$D_3 = G - D_1$$

$$D_4 = \frac{(\alpha_{1R}+\alpha_{2R})D_1 + \beta_{1R}D_2 - G\alpha_{2R}}{\beta_{2R}}$$

これを(3-44)(3-45)式に代入して，$U_L(S)$, $U_R(S)$が求まる。$V_L(S)$, $V_R(S)$は(3-39)式の第2式から，

$$\frac{\partial^4 V_L(S)}{\partial S^4} = \frac{\rho A g}{EI} - \frac{\Delta EI}{EI}\frac{\partial^4 U_L(S)}{\partial S^4}$$
$$\frac{\partial^4 V_R(S)}{\partial S^4} = \frac{\rho A g}{EI} - \frac{\Delta EI}{EI}\frac{\partial^4 U_R(S)}{\partial S^4} \qquad 3\text{-}49$$

したがって，積分すると，

$$V_L(S) = \frac{\rho A g}{24EI}S^4 - \frac{\Delta EI}{EI}U_L(S) + P_L S^3 + R_L S^2 + T_L S + W_L \qquad 3\text{-}50$$

$$V_R(S) = \frac{\rho A g}{24EI}S^4 - \frac{\Delta EI}{EI}U_R(S) + P_R S^3 + R_R S^2 + T_R S + W_R \qquad 3\text{-}51$$

$V(S)$に関する境界条件は次のようになる。

$$V_L(0) = V_L''(0) = 0$$
$$V_R(0) = V_L(a\ell) = 0$$
$$V_L'(a\ell) = V_R'(0) \qquad 3\text{-}52$$
$$V_R''(b\ell) = 0$$

$$V_R'''(b\ell) = -8\omega^2 m_d \frac{EI}{(EI)^2-(\Delta EI)^2} + 2m_d g \frac{\Delta EI}{(EI)^2-(\Delta EI)^2}$$

(3-50)を(3-51)式に代入して8個の係数が求まる。

$$P_R = -\frac{g}{2EI}\cdot \rho A \ell \frac{b+N}{3}$$
$$R_R = \frac{g}{2EI}\cdot \rho A \ell \frac{b\ell}{2}(b+2N)$$
$$P_L = \frac{g}{2EI}\cdot \rho A \ell \frac{1}{60}\{(b^2-a^2)+2bN\}$$
$$T_L = -\frac{g}{2EI}\frac{a\ell^2}{12}\rho A \ell\{(2b^2-a^2)+4bN \qquad 3-53$$
$$T_R = \frac{g}{2EI}\rho A \ell \frac{a\ell^2}{12}\{(4b^2-a^2)+8bN\}$$
$$R_L = W_L = W_R = 0$$

(3-53)式を(3-50)(3-51)式に代入すれば，$V_L(s)$, $V_R(s)$が求まる。(3-44),(3-45),(3-50),(3-51)式から$U_L(s)$, $V_L(s)$, $U_R(s)$, $V_R(s)$が求まり，これで軸の自重とディスクの自重を強制力とした非対称一様断面軸の強制振動の理論解が導かれた。

得られた解は，自重を強制力とする解であるので，第2節で述べた主危険速度で振動振幅が無限大になるということはなく，重力と軸の非対称性による2次的危険速度で振動振幅が無限大となる。この2次的危険速度は，(3-48)式の係数の分母を0にするωの値として求められる。

1自由度系で，重力と軸の非対称性によって生じる2次的危険速度は，

$$\Omega_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\Omega_1^2\Omega_2^2}{2(\Omega_1^2+\Omega_2^2)}} \qquad 3-54$$

で与えられる。

$$a = 0.8\ ,\quad N = 0.8\ ,\quad I_1/I_2 = 0.8\ ,\quad \rho A = 2.487\times10^{-5}\ kg\,s^2/cm^2$$
$$EI_1 = 1.649\times10^6\ kg\cdot cm^2\ ,\quad \ell = 70\ cm$$

で，ディスク端の変位$U_R(b\ell)$, $V_R(b\ell)$を計算すると，図3-10を

得る。 この軸系の危険速度は，2節の計算によって

$$\Omega_1 = 405.5 \quad , \Omega_2 = 453.3 , \quad \Omega_3 = 1121 \quad , \quad \Omega_4 = 1253 \ (rps)$$

となり，(3-54)を用いて2次的危険速度を求めると，

$$\Omega_{\frac{1}{2}} = 214 \ (rps)$$

また，2次モードの2次的危険速度は，

$$\Omega_{\frac{3}{2}} = 592 \ (rps)$$

となり，これを図3-10に破線で示す。(3-54)式と(3-48)式の係数の分母にする値はほとんど変わらない。また，1自由度系で，図3-10に対応するものは，Tondle[22]の教科書に示されており，最初の2次的危険速度(1次主危険速度に対応する)まで傾向は類似している。

第6節 実験

主危険速度および2次的危険速度付近のふれまわりの現象を調べるために実験を行った。実験装置は，図3-11の通りである。

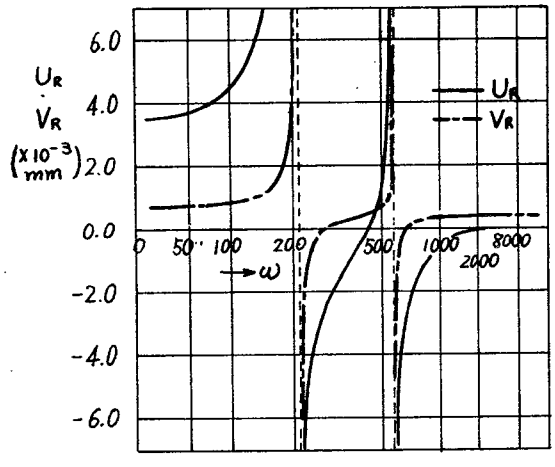
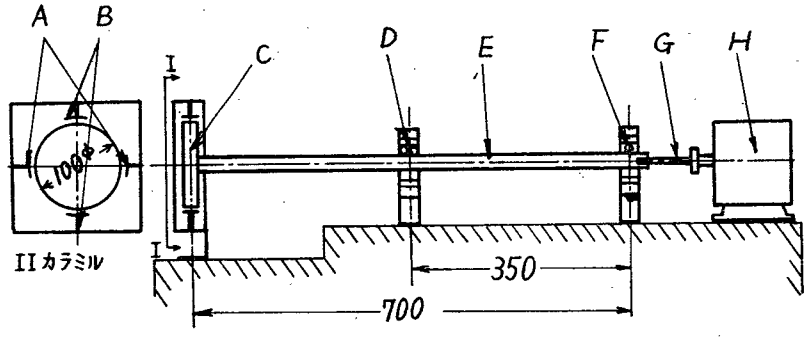


図 3-10. 非対称一様断面軸の重力による強制振動

$\left(\begin{array}{l} a = 0.8 \ , \ \rho A = 2.487 \times 10^{-5} \ (Kg\,s^2/cm^2) \\ N = 0.8 \ , \ EI_2 = 1.649 \times 10^6 \ (Kg \cdot cm^2) \\ I_1/I_2 = 0.8 \ , \quad l = 70 \ (cm) \end{array}\right)$

図3-11において，Aでディスクの水平振幅を，Bで垂直振幅を測定した。測定装置として無接触静電容量型の変換器を使用した。軸の端末にモーメントが加わらないようにGには自在継手を用いた。また，ディスクによって生じるスラストを止めるために，Fにはアンギュラコンタクト型玉軸受が用いられ，軸がここでモーメントの拘束を受けないよう



A：水平振幅測定用静電容量型検出器．　B：垂直振幅測定用静電容量型検出器．C：円板．D：複列自動調心型玉軸受．E：非対称回転軸．F：アンギュラコンタクト型玉軸受．G：自在継手．H：可変速電動機

図3－11．実験装置．

に　Dには複列自動調心型玉軸受が使用された。円板Cは非対称軸Eに垂直に取付けられた。軸材として，みがき棒鋼から軸材を製作した。装置に用いた回転軸の諸元は，次のようである。

スパン比 $a = 0.9$　　質量比 $N = 0.8$

軸長さ $l = 70\,cm$，　　剛性比 $I_1/I_2 = 0.9$

$\rho A = 2.443 \times 10^{-5}\ kg \cdot s^2/cm^2$　　$EI_1 = 1.641 \times 10^6\ kg \cdot cm^2$

実験は水平および垂直方向の出力をシンクロスコープの水平および垂直方向の入力に入れて，リサージュ図形をシンクロスコープのブラウン管上に描かせて写真撮影によって測定をおこなった。回転数は可変速電動機によって連続的に変化させた。写真3－1に可変速電動機および自在継手を示す。写真3－2に回転軸と振動測定用静電容量型検出器を示す。

実験は，可変速電動機によって，回転数を徐々に増加させながら，振動振幅のリサージュ図形を測定していった。その実験結果を図3－12に示す。

なお図3－12には第2節で求められた主危険速度の値を破線で示してある。また，第5節で求めた2次的危険速度も図4－12に破線で図示する。

図3－12には，リサージュ図形も同時に掲げてある。理論によ

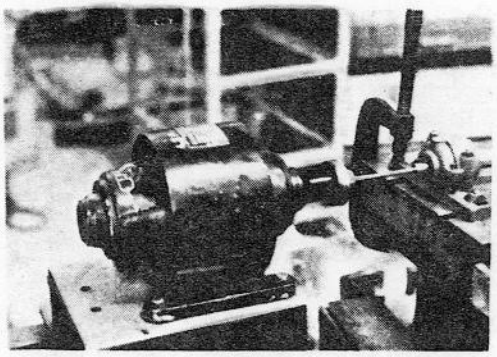


写真5-1. 可変速電動機

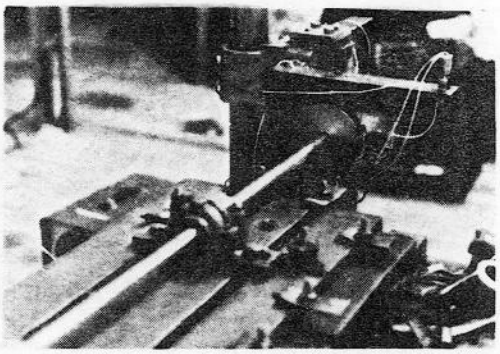


写真5-2. 回転軸および振幅測定用
静電容量型検出器

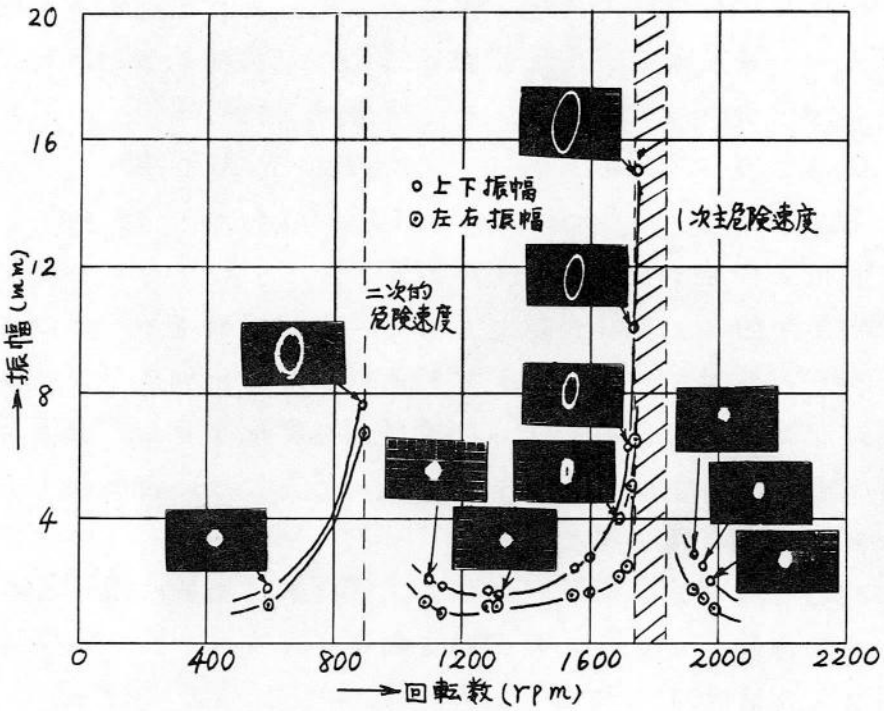


図3-12 振幅応答曲線およびふれまわり

って求められた主危険速度の値は

$\omega_1 = 1732$ (rpm)　　$\omega_2 = 1827$ (rpm)

であり，2次的危険速度は第4節によれば，889 rpm であり，実験結果とよく一致している。図の斜線部は2つの主危険速度の間の領域で，不安定領域であり，その領域より少し高い回転数においても定常な振幅を得ることはできなかった。振巾は2次的危険速度において，軸の一回転に2回のふれまわりが確認された。1次の主危険速度の近傍では軸の1回転に1回のふれまわりとなる。なお，この系では2次の主危険速度は高いので，2次の2次的危険速度と，1次の主危険速度の間では，極めて静粛な運転が可能であった。このようなふれまわりの様相は，E. H. Hull [7] の実験結果とよく一致していた。

第7節　まとめ

以上の解析および計算の結果を検討すると，次のことが言える。

1) 非対称軸と対称軸とは，非対称軸に不安定領域があることを除けば，定性的には，同じ傾向を示す。

2) 段付比の値として，$C = (I_3 + I_4) / (I_1 + I_2)$ を用いると，非対称－対称軸，対称－非対称軸および非対称－非対称軸のいずれの系においても，対称－対称軸系の特性根の値はほとんど変らない。したがって，段付比についても，対称－対称軸系で考えることができる。

3) 段がついている場合と，ついていない場合とは，定性的に，ほぼ同じであるが，危険速度の値および間隔は異なる。

4) 非対称軸系においても，対称軸系と同じように，スパン比と段付比との間には，共通の関係があり，互いに変換することができる。

5) 非対称－対称軸系の非対称部の弱い側と強い側の主軸におけるモード型は，いずれの側の危険速度においてもほぼ同じである。

6) 非対称－対称軸系も対称－非対称軸系も不安定領域の傾向は

変らない.

7) 重力による強制振動の場合，オーバハング部があるため，重力による強制力が長手方向に非対称であり，2次的危険速度が2次にも生じる.

8) 実験と理論による不安定領域および2次的危険速度の値はよく一致した．ふれまわりを調べた結果，2次的危険速度の低い側で，軸1回転に2回のふれまわりが生ずることを確認した.

付録1　オーバハング部先端の境界条件

(1) ジャイロモーメントおよび回転慣性を考慮した境界におけるモーメントのつりあい式の導出

ジャイロモーメントおよび回転慣性を回転座標系で導く．回転座標系では，モーメントは図A-1のようになる．ここでMの肩にGがついているのは，ジャイロモーメントと回転慣性の和である．ここで M_ξ^G , M_η^G は

$$M_\xi^G = I_p\omega\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}-\omega\eta\right) - I_D\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+2\omega\frac{\partial\xi}{\partial t}-\omega^2\eta\right)$$

$$M_\eta^G = I_p\omega\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}+\omega\xi\right) + I_D\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-2\omega\frac{\partial\eta}{\partial t}-\omega^2\xi\right)$$

で与えられる.

つぎに境界条件は

$$M_\eta = M_\eta^G \qquad \text{ここに} \quad M_\eta = -EI_3\left.\frac{\partial^2\xi_R}{\partial s^2}\right|_{s=b}$$

$$M_\xi = M_\xi^G \qquad \text{ここに} \quad M_\xi = -EI_4\left.\frac{\partial\eta_R}{\partial s^2}\right|_{s=b}$$

となる．I_p は極慣性モーメントであり，I_D は直径まわりの慣性モーメントである．上の関係から

$$\frac{EI_4}{\ell}H_R''(b) = I_p\omega\{-\lambda_0\Xi_R'(b)-\omega H_R'(b)\} - I_D\{-\lambda_0^2H_R'(b)-2\lambda_0\omega\Xi_R'(b) - \omega^2H_R'(b)\}$$

$$-\frac{EI_3}{\ell}\Xi''(b) = I_p\omega\{\lambda_0H_R'(b)+\omega\Xi_R'(b)\} + I_D\{-\lambda_0^2\Xi_R'(b)-2\lambda_0\omega H_R'(b) - \omega^2\Xi_R'(b)\}$$

となる。ここでディスクが薄いとして、$I_P = 2I_D$ とすると、

$$H_R''(b) = \frac{\lambda_0^2 - \omega^2}{EI_4} I_D H_R'(b)$$

$$\Xi_R''(b) = \frac{\lambda_0^2 - \omega^2}{EI_3} I_D \Xi_R'(b)$$

となり、(4-23)の第1式′, 第2式′を得る。

(2)境界におけるせん断力のつりあい式′の導出

ξ 方向のせん断力を Q_ξ とすれば、

$$Q_\xi = -EI_3 \frac{\partial^3 \xi_R}{\partial s^3}$$

が成り立つ。ディスクのところでは、このせん断力が慣性力とつり合うから

$$Q_\xi|_{s=bl} = -m_d \left(\frac{\partial^2 \xi_R}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial \eta_R}{\partial t} - \omega^2 \xi_R \right)_{s=bl}$$

したがって、

$$EI_3 \frac{\partial^3 \xi_R}{\partial s^3} = m_d \left(\frac{\partial^2 \xi_R}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial \eta_R}{\partial t} - \omega^2 \xi_R \right)_{s=bl}$$

同様にして、η 方向も

$$EI_4 \frac{\partial^3 \eta_R}{\partial s^3} = m_d \left(\frac{\partial^2 \eta_R}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial \xi_R}{\partial t} - \omega^2 \eta_R \right)_{s=bl}$$

これに(3-7)式′を代入すると、

$$EI_3 \Xi_R'''(bl) = -m_d \{ (\lambda_0^2 + \omega^2) \Xi_R(bl) + 2\lambda_0 \omega H_R(bl) \}$$

$$EI_4 H_R'''(bl) = -m_d \{ (\lambda_0^2 + \omega^2) H_R(bl) + 2\lambda_0 \omega \Xi_R(bl) \}$$

となる。この式に(3-13)式′の関係を用いると

$$\Xi_R'''(b) = -\frac{m_d \omega^2}{EI_3} \{ (1 + \sigma_0^2) \Xi_R(b) + 2\sigma_0 H_R(b) \}$$

$$H_R'''(b) = -\frac{m_d \omega^2}{EI_4} \{ (1 + \sigma_0^2) H_R(b) + 2\sigma_0 \Xi_R(b) \}$$

となり、(3-23)式′の第3式′, 第4式′を得る。

付録2. 非対称－対称，対称－非対称，非対称－非対称の場合の特性根の値.

$a=0.8$, $N=1.0$

$\frac{I_1}{I_2}$	C	de	$\frac{I_3}{I_4}$	1次 $\sqrt{\nu_L}$	1次 $\sqrt{\nu_R}$	2次 $\sqrt{\nu_L}$	2次 $\sqrt{\nu_R}$	3次 $\sqrt{\nu_L}$	3次 $\sqrt{\nu_R}$
		0.473	1.0	2.063	3.000	4.041	5.876	7.900	11.489
	0.05	0.472	0.8	2.055	3.001	4.041	5.900	7.900	11.535
		0.469	0.6	2.024	3.004	4.040	5.996	7.900	11.720
		0.668	1.0	2.560	3.131	4.308	5.267	8.037	9.828
1.0	0.2	0.688	0.8	2.556	3.138	4.306	5.287	8.037	9.868
		0.664	0.6	2.535	3.164	4.300	5.367	8.035	10.030
		1.000	1.0	2.788	2.788	4.793	4.793	8.415	8.415
	1.0	0.998	0.8	2.787	2.798	4.790	4.810	8.413	8.447
		0.992	0.6	2.783	2.840	4.778	4.876	8.404	8.577
		0.474	1.0	2.071	3.000	4.045	5.858	7.903	11.446
	0.05	0.473	0.8	2.063	3.000	4.041	5.876	7.900	11.489
		0.470	0.6	1.992	3.012	4.023	6.085	7.892	11.935
		0.670	1.0	2.567	3.127	4.317	5.258	8.043	9.796
0.8	0.2	0.668	0.8	2.560	3.131	4.308	5.267	8.037	9.828
		0.664	0.6	2.506	3.187			8.010	10.190
		1.000	1.0	2.790	2.779	4.800	4.781	8.423	8.389
	1.0	1.000	0.8	2.788	2.788	4.793	4.793	8.415	8.415
		0.993	0.6	2.772	2.883	4.747	4.937	8.368	8.703
		0.477	1.0	2.106	3.001	4.062	5.788	7.911	11.273
	0.05	0.476	0.8	2.134	2.984	4.061	5.678	7.911	11.061
		0.473	0.6	2.063	3.000	4.041	5.876	7.900	11.489
		0.676	1.0	2.593	3.108	4.355	5.219	8.067	9.667
0.6	0.2	0.673	0.8	2.610	3.069	4.358	5.124	8.068	9.486
		0.668	0.6	2.560	3.131	4.308	5.267	8.037	9.828
		1.000	1.0	2.797	2.741	4.827	4.730	8.455	8.285
	1.0	1.005	0.8	2.802	2.694	4.837	4.651	8.461	8.135
		1.000	0.6	2.788	2.788	4.793	4.793	8.415	8.415

第4章

オーバハング部を有する対称軸弾性ロータの設計法

第1節 まえがき

第3章では，オーバハングを有する非対称軸ロータの振動について解析し，対称軸の場合と危険速度，特性根の性質など同じであることを明らかにしたので，本章では，対称軸について設計法を考えることにする。

オーバハング部を有する対称回転軸の理論的解析として，著者の知る主な研究には，第3章でも述べたが，それを設計の立場から見ると，次のようである。小堰[27]はオーバハングを有する回転軸系を2自由度の集中質量系に近似して解析をおこない，危険速度を決定する方法を述べている。また，R. F. Wojnowski[8]，T. C. Haung[33]らは，系を分布質量系として解析している。R. F. Wojnowskiは系を無次元化し，種々のパラメータ変化に対する固有値の変化を定性的に求め，オーバハングディスクの回転慣性を考慮した解析もおこなっている。また，文献(8)の討論中でF. R. Wunderらは，軸受部で段がついたオーバハング部を有する回転軸の解析をおこなっている。また，T. C. Huangは，回転慣性，ジャイロモーメント，せん断力変形を考慮した解析をしている。

しかし，以上の解析は，いずれも系の性質が明らかにされただけで，振動的見地からオーバハング部を有する回転軸の設計に直接役立つものでない。一方このような回転軸は，高速化され，危険速度以上で作動される場合が多くなってきている。したがって，軸の設計の際，運転回転数を1次危険速度の上，下どちらにするかということが問題となる。また，1次危険速度以上で作動させる場合には，設計時の危険速度算出の誤差，および使用回転速度にある一定の幅を持っている場合があるといった理由により，1次と2次の危険速度の間隔を大きくして運転速度が多少変化して

も軸の振動にはあまり影響がないように，両者の中央に使用回転速度を持ってくることが望ましい。

ここでは，一般的な設計法を考えるために，無次元量を用いてオーバハングディスクの回転慣性，ジャイロモーメントの影響を考慮し，理論的解析をおこない，種々のパラメータを変えて計算をおこなっている。また，上述の設計時の問題点を考慮してオーバハングを有する回転軸を設計する方法について述べる。

第2節　理論解析

第3章では，軸の剛性が非対称であるから，解析の簡単のために回転座標系に関して解析をした。本章では，対称軸を扱うので，解析の簡単のために静止座標系に関して解析をおこなう。

図4-1に示す対称回転軸を考える。軸AB間，BC間でそれぞれ一様断面であり，A点，B点で単純支持され，自由端Cにおいて，集中質量を持っているものとする。系の減衰を考慮しなければ，静止座標系における運動方程式は，

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(EI\frac{\partial x^2}{\partial s^2}\right)+\rho A\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=0 \qquad 4\text{-}1$$

境界条件は，A点をAB間の解析の際の原点とし，B点をBC間の解析の際の原点とすると，

A点では，　$x_L(0,t)=0$ ，　$\dfrac{\partial^2 x_L(0,t)}{\partial s^2}=0$

B点では，　$x_L(al,t)=0$ ，　$\dfrac{\partial x_L(al,t)}{\partial s}=\dfrac{\partial x_R(0,t)}{\partial s}$ 　4-2

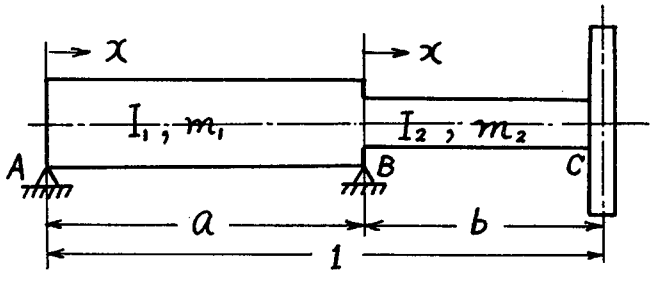


図4-1. 振動系

$$\chi_R(0,t) = 0 , \qquad \frac{\partial^2 \chi_L(al,t)}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 \chi_R(0,t)}{\partial s^2}$$

C点では、

$$V_e = -EI_2 \frac{\partial^3 \chi_R(bl,t)}{\partial s^3} = m_e \chi_e(bl,t)\omega^2$$

$$M_e = -EI_2 \frac{\partial^2 \chi_R(bl,t)}{\partial s^2} = I_D \omega^2 \frac{\partial \chi_R(bl,t)}{\partial s}$$

となる。(4-1)式をAB間とBC間に分けて、それぞれの区間で変数分離すると、AB間では、

$$\frac{d^4 \Xi_L(s)}{ds^4} - p^4 \Xi_L(s) = 0 \qquad 4\text{-}3$$

ただし、

$$p = \sqrt[4]{\frac{\rho A_1 \omega^2}{EI_1}}$$

BC間では、

$$\frac{d^4 \Xi_R(s)}{ds^4} - q^4 \Xi_R(s) = 0 \qquad 4\text{-}4$$

ただし、

$$q = \sqrt[4]{\frac{\rho A_2 \omega^2}{EI_2}}$$

となる。(4-3),(4-4)式の解はそれぞれ次のように仮定できる。

AB間: $\Xi_L(s) = C_1 \cosh ps + C_2 \sinh ps + C_3 \cos ps + C_4 \sin ps$ 4-5

BC間: $\Xi_R(s) = D_1 \cosh qs + D_2 \sinh qs + D_3 \cos qs + D_4 \sin qs$ 4-6

(4-2)式も変数分離できるから、モードに関する変数とおくことができて、(4-5),(4-6)式を用いて、

$$C_1 + C_3 = 0$$

$$p^2 C_1 - p^2 C_3 = 0$$

$$C_1 \cosh pal + C_2 \sinh pal + C_3 \cos apl + C_4 \sin pal = 0$$

$$pC_1 \sinh pal + pC_2 \cosh pal - pC_3 \sin pal + pC_4 \cos pal = qD_2 + qD_4$$

$$p^2 C_1 \cosh pal + p^2 C_2 \sinh pal - p^2 C_3 \cos pal - p^2 C_4 \sin pal = q^2 D_1 - q^2 D_3$$

$$D_1 + D_3 = 0 \qquad 4\text{-}7$$

$$q^3 D_1 \sinh qbl + q^3 D_2 \cosh qbl + q^3 D_3 \sin qbl - q^3 D_4 \cos qbl$$
$$= -\frac{m_e}{EI_2}(D_1 \cosh qbl + D_2 \sinh qbl + D_3 \cos qbl + D_4 \sin qbl)$$

$$g^2D_1\cosh gbl + g^2D_2\sinh gbl - g^2D_3\cos gbl - g^2D_4\sin gbl$$
$$= -\frac{I_D\omega^2}{EI_2}(gD_1\sinh gbl + gD_2\cosh gbl - gD_3\sin gbl + gD_4\cos gbl)$$

(4-7)式の係数が0でないためには，(4-7)式の係数行列式が，0であればよい。したがって，それより次式を得る。

$$\frac{Na}{M^5}pl\Big[2M\sinh apl\cdot\sin apl\Big\{\sinh\frac{b}{M}pl\cos\frac{b}{M}pl - \sin\frac{b}{M}pl\cdot\cosh\frac{b}{M}pl$$
$$-\frac{I_D\omega^2}{gEI_2}\Big(1-\cos\frac{b}{M}pl\cdot\cosh\frac{b}{M}pl\Big)\Big\}$$
$$+(\cos apl\cdot\sinh apl - \cosh apl\cdot\sin apl)\Big\{2\sin\frac{b}{M}pl\cdot\sinh\frac{b}{M}apl$$
$$+\frac{I_D\omega^2}{gEI_2}\Big(\sin\frac{b}{M}pl\cdot\cosh\frac{b}{M}pl - \sinh\frac{b}{M}pl\cdot\cos\frac{b}{M}pl\Big)\Big\}\Big]$$
$$+2M\sinh apl\sin apl\Big\{1+\cos\frac{b}{M}pl\cdot\cosh\frac{b}{M}pl$$
$$+\frac{I_D\omega^2}{gEI_2}\Big(\sin\frac{b}{M}pl\cdot\cosh\frac{b}{M}pl + \sinh\frac{b}{M}pl\cdot\cos\frac{b}{M}pl\Big)\Big\}$$
$$+(\cos apl\cdot\sinh apl - \cosh apl\cdot\sin apl)$$
$$\times\Big(\sin\frac{b}{M}pl\cdot\cosh\frac{b}{M}pl - \sinh\frac{b}{M}pl\cdot\cos\frac{b}{M}pl - \frac{I_D\omega^2}{gEI_2}\cos\frac{b}{M}pl\cosh\frac{b}{M}pl\Big)$$
$$=0 \qquad 4-8$$

つぎに振動モードを求めるために，(4-7)式の$D_1=1$とおいて，(4-7)式の連立方程式を解いて，各係数を求めると，

$$C_1=0,\quad C_3=0,\quad D_1=1,\quad D_3=1$$

$$C_2=\frac{g^2}{p^2}\cdot\frac{1}{\sinh apl}$$

$$C_4=-\frac{g^2}{p^2}\cdot\frac{1}{\sin apl}$$

$$D_2=\frac{\Big[g(\cos gbl+\cosh gbl)+\frac{I_D\omega^2}{EI_2}(\sin gbl+\sinh gbl)+\frac{g}{p}(-\coth apl+\operatorname{ctnh} pal)(-g\sin gbl+\frac{I_D\omega^2}{EI_2}\cos gbl)\Big]}{g(\sin gbl+\sinh gbl)+\frac{I_D\omega^2}{EI_2}(\cosh gbl-\cos gbl)}$$

$$D_4=\frac{\left[\begin{array}{l}\beta(\cos\beta bl+\cosh\beta bl)+\frac{I_D\omega^2}{EI_2}(\sin\beta bl+\sinh\beta bl)\\ +\frac{\alpha}{\beta}(-\mathrm{ctn}\,\beta al+\mathrm{ctnh}\,\beta al)(\beta\sinh\beta bl+\frac{I_D\omega^2}{EI_2}\cosh\beta bl)\end{array}\right]}{\beta(\sin\beta bl+\sinh\beta bl)+\frac{I_D\omega^2}{EI_2}(\cosh\beta bl-\cos\beta bl)}$$

となる。したがって，左側部モード関数 Ξ_L および右側部モード関数 Ξ_R は（4－9）式で得られた $C_1 \cdots C_4$，$D_1 \cdots D_4$ を(4-5)(4-6)式に代入することによって得られる。ジャイロモーメントの影響を考慮しない場合には，諸式において，$I_D=0$ とおけばよい。

第3節　パラメータが固有値　および　モードに及ぼす影響

固有値を求める（4－8）式，およびモード型を求める式を用いて　以下の計算をし，考察する。

3－1　スパン比，質量比の影響

スパン比 α の変化に対する固有値 $p\ell$ の変化を図4－2に示す。この図は，オーバハング質量と軸の質量の比 N をパラメータとしている。図より，1次，2次の固有値ともNの増加に伴い，固有値は減少している。また，スパン比の影響については，1次の固有値で α の増加に伴い，固有値は増大するが，オーバハングディスクの質量が少なく，スパ

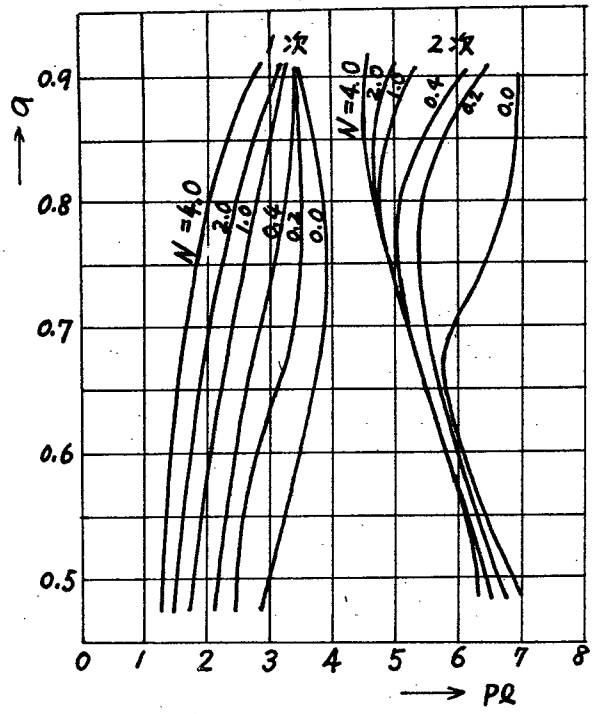


図4-2. α，N に対する固有値の変化

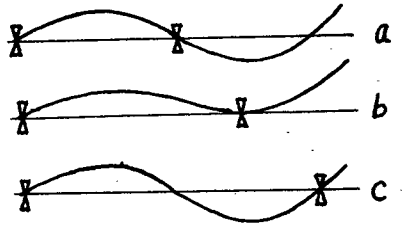


図4-3. スパン比の変化に対する2次モード形の変化

ン比が大きいとき，固有値は極大値をもち，以後αの増加に伴い減少する。これは，オーバハング部が大きいときは，その部分の方がたわみやすいが，軸受間長さが長くなるにしたがって，軸受間部の方がたわみやすくなる。その中間領域の時に極大値を持つと考えられ，それ以上αが大きくなれば，ますます軸受間部がたわみやすくなり，固有値は減少する。2次の固有値についても同じような考え方ができ，それは図4－3に示すようにして理解できる。すなわち，スパン比の増加にともない固有値は減少するが，図のbからcへの移行の途中に，節が軸受間部に生じ，固有値は極小値を持つ。以後，αの増加に伴い固有値は増加する。

3－2　段付比の影響

図4－4にパラメータをαとして，$N=0.4$ のときの段付比の変化に対する固有値の変化を示している。この図より，段付比が固有値に与える影響は次のようである。すなわち，段付比の減少にともない，（オーバハング部の軸径が小さくなる程）1次，2次の固有値とも，単調に減少している。オーバハング部の軸径が小さくなれば，その部分がたわみやすくなり，固有値が減少すると考えられる。

段付比の変化と，スパン比の変化とは　オーバハング部の連続の条件の不一致を無視すれば，互いに関係づけられるものである。それは，図4－2と図4－4を比較することによって，理解できる。

3－3　段付比とスパン比の変換

オーバハング部の軸径が変化することは，オーバハング部長さが変化することに，近似的に変換できると考えられる。したがって，段付比の変化をスパン比変化に変換する方法を考える。すなわち，図4－5のaからbに変換を行う。ただし，(a)，(b)の危険速度は等しく，オーバハングディスク質量 m_e は変換後も等しいという条件のもとでおこなう。

3－3－1　軸受間長さを一定とした場合の変換

固有値より危険度を得る式は（4－3）あるいは（4－4）式より，次のようになる．

$$\omega = (p\ell)^2 \frac{1}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI_1}{\rho A_1}} \qquad 4\text{-}10$$

また，変換後の軸の長さをℓ'とすれば，

$$\omega' = (p\ell')^2 \frac{1}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI_1}{\rho A_1}} \qquad 4\text{-}11$$

変換前後で危険速度は等しいから，

$$\frac{p\ell}{p\ell'} = \frac{\ell}{\ell'} \qquad 4\text{-}12$$

また，変換前後で$a\ell$は変らないから，

$$ap\ell = a'p\ell'$$

となる．種々のパラメータに対して，上の関係を満たす点をプロットしたのが図4－6である．この図において，横軸はスパン比a，縦軸は各質量比N，軸径比deに対する$a'p\ell'$をとっている．各相当するNと軸径比1の各スパン比aに対する$ap\ell$を横軸に平行に引いた直線との交点より，変換後のスパン比a'が得られる．また，$a\ell = a'\ell'$より，変換後の軸長さ，オーバハング部長さも決まる．

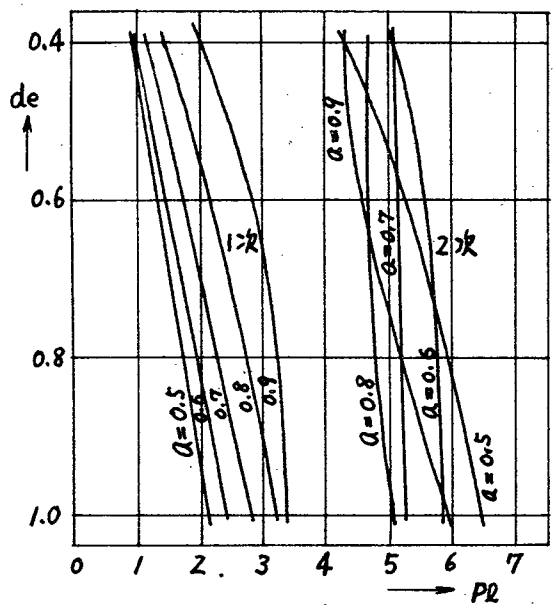


図4-4. 段付比が固有値に与える影響

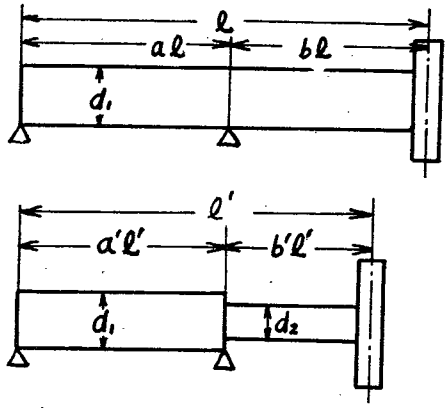


図4-5. 軸径比をスパン比へ変換する系の図

〔例〕変換前のスパン比$a = 0.5$，質量比$N = 0.4$の回転軸を変換後の軸径比を$de = 0.8$にした場合，変換後のスパン比a'はいくらか．

〔解〕図4－6において，変換前のスパン比 $a = 0.5$ で，軸径比（変換後の）$de = 0.8$ の線（イ）と変換の $de = 0.8$ のときの質量比 $N = 0.4$ の線（ロ）との交点（ハ）から縦軸に平行に下へ降し，横軸との交点を（ニ）とすれば，（ニ）の点の a' の値が求めるスパン比 a' の値である。このとき，オーバハング部の長さは

$$b'l' = \frac{(1-a')al}{a'}$$

となる。

3－3－2　軸長さ一定とした場合の変換

(4-12) 式と同様に

$$\frac{pl}{pl'} = \frac{l}{l'}$$

また，軸長さが一定であるから，

$$pl = pl' \qquad (4-14)$$

種々のパラメータに対して，上の関係を満たす点をプロットしたのが図4－7である。この図において，横軸はスパン比 a，縦軸は各質量比 N，軸径比 de に対する pl' をとり，その結果得られた曲線と，各相当する N，および軸径比1の各スパン比に対する pl を横軸に平行に引いた直線との交点より，変換後のスパン比 a' が得られる。$l = l'$ より変換後の軸受間長さ，オーバハング部長さが決まる。

〔例〕（3－3－1）の例と同じ例について，同様に考えれば，（イ），（ロ），（ハ），（ニ）の点の順に a' を求めることができる。この場合，変換後のオーバハング部長さは

$$b'l = (1-a')l$$

となる。

3－4　ジャイロモーメントが固有値に与える影響

(4-8) 式の I_D にオーバハングディスクの慣性モーメントの値を入れて，固有値を求めた場合と，ジャイロモーメントを無視した

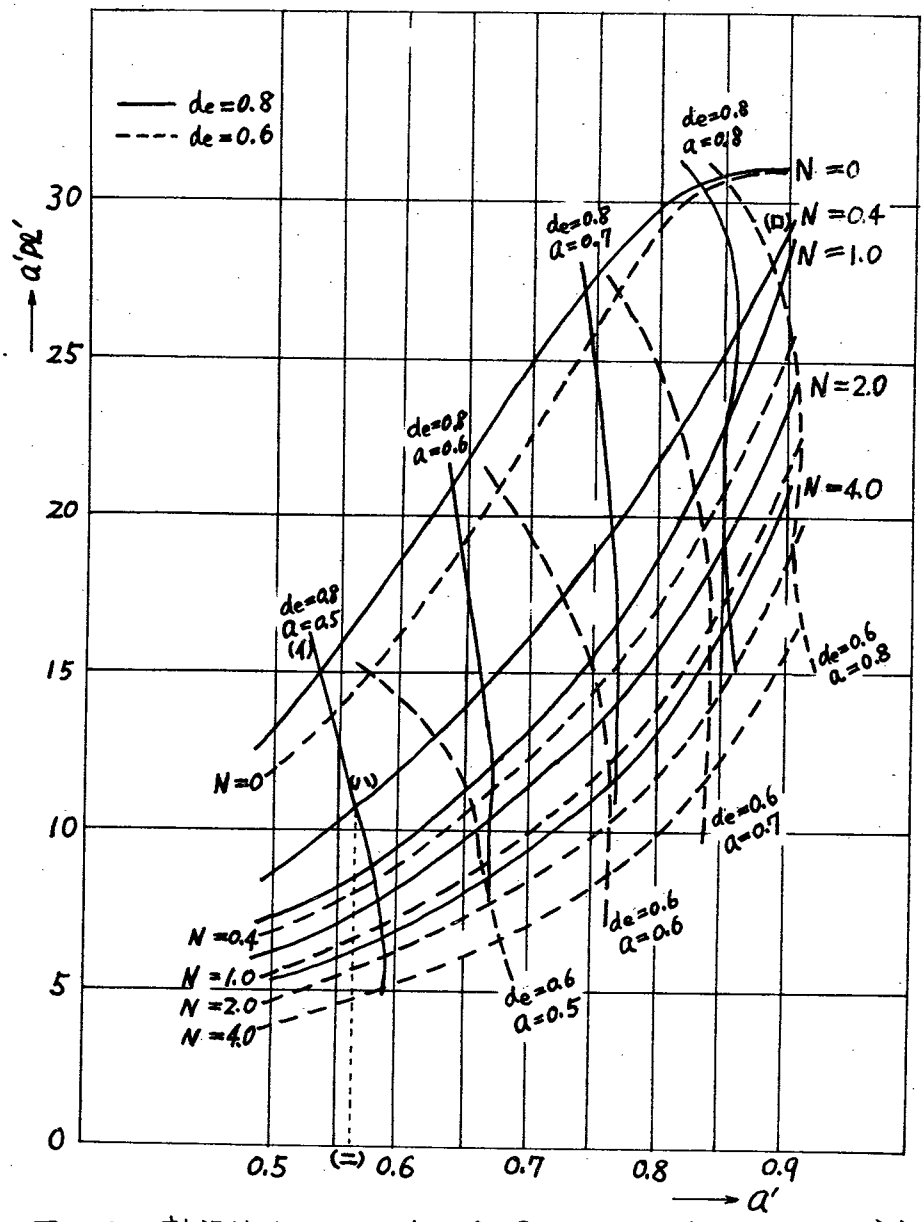


図4-6. 軸径比をスパン比へ変換する図（軸受間長さ一定）

場合の比較を図4－8に示す。ジャイロモーメントの影響によって固有値が大きくなるのはよく知られているが，オーバハング部のスパン比については，1次モードでは，スパン比aが大きくなるほどジャイロモーメントがよくきいている。また，2次モードでは，スパン比a＝0.7の付近ではほとんどきかず，そこを境に両側で影響が大きいのは，モード形を考えてみれば理解できる。

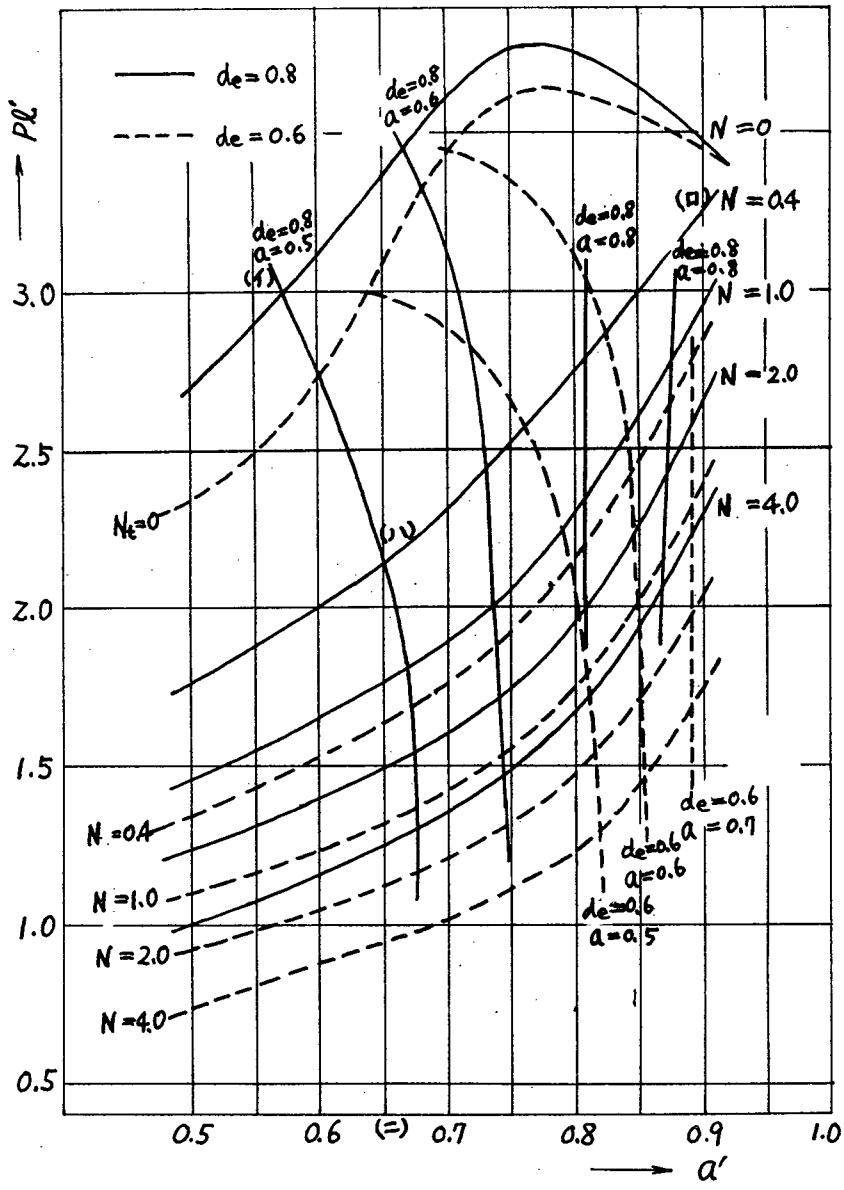


図4-7. 軸径比をスパン比へ変換する図（軸長さ一定）

他のN，deの場合にも，ほぼ a = 0.7 のところで影響が非常に小さくなっている。

第4節　設計法

4－1　設計上の分類

オーバハングロータを設計する場合に，ロータの使用目的によって　性能の観点から寸法を変えられない部分があると考えられ

る。たとえば，ある種の送風機では，オーバハング部の長さは，流体力学的および構造力学的見地から一方的に決ってしまう場合がある。このような場合には，他の寸法を適当に決めて，使用運転速度で振動が少なくなるようにしなければならない。以上のような考えにもとずいてオーバハングを有するロータは，次の3つの場合が考えられる。

1. 全軸長さが変更できない場合
   例：送風機，ポンプ
2. オーバハング部長さが変更できない場合
   例：送風機，ポンプ
3. 軸受間長さが変更できない場合
   例：タービン，発電機

以上のような場合について，設計する方法を考える。

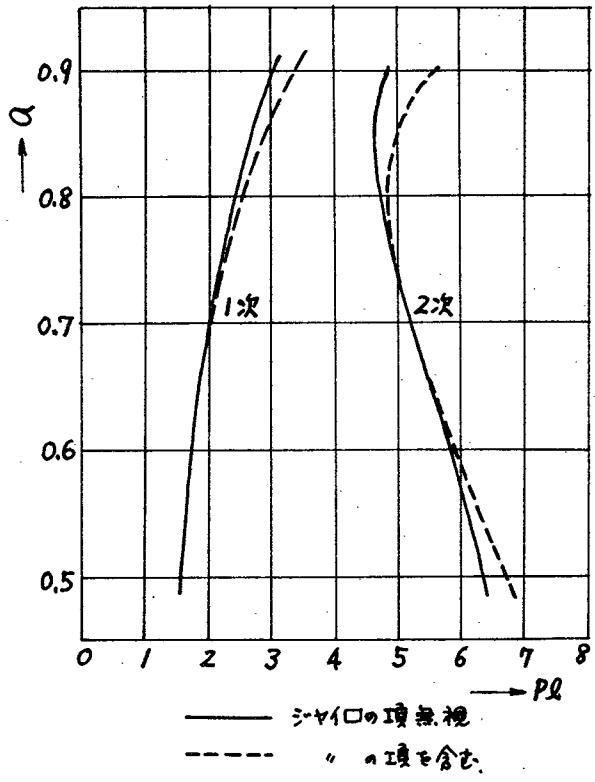


図4-8 ジャイロモーメントの影響

4－2. 設計の方法.

ロータの使用回転数 ω_u は，性能，効率などから決められるから，設計にあたって，まず ω_u を1次危険速度 ω_1^* よりも低いところにするか，または，ω_1^* と ω_2^* の間にするかを決定しなければならない。振動の共振曲線から，1次危険速度以下で運転する場合には，$0.7\omega_1^*$ 以下，または，1次と2次の危険速度以下で運転する場合には，$1.3\omega_1^* \sim 0.8\omega_2^*$ の範囲で運転するようにロータを設計することが望ましいと考えられる。また運転速度は，ω_1^* と ω_2^* の中央で，ω_1^* と ω_2^* の間隔が大きい程，運転速度の変動に対して静粛な運転状態が得られるので望ましい。

回転軸の危険速度 ω_n^* は，(4-3),(4-4) 式より．

$$\omega_n^* = (pl)_n^2 \frac{d_1}{4l^2}\sqrt{\frac{E\cdot g}{\gamma}}\cdot\frac{30}{\pi} \quad (rpm) \qquad 4-15$$

ただし，n は次数．

となる。したがって，回転軸の危険速度 ω_n^* は 回転軸の形状(軸長さ l，軸径 d_1)が決まれば，無次元危険速度 $\Omega_n^* = (pl)_n^2$ から求めることができる。

前述の考えにもとづいて設計する場合に，次のような図が必要となる。

(1) 1次危険速度の 0.7 の値を知るための，スパン比 a と，$0.7\Omega_1^*$ との関係を示す図4-9．

(2) 使用回転数の限界を示すスパン比 a と $1.3\Omega_1^*$ および $0.8\Omega_2^*$ の値を表わしている図4-10．

(3) 使用回転数に最も適していると考えられる $1.3\Omega_1^*$ と $0.8\Omega_2^*$ の値の平均値 Ω_c とスパン比 a の関係を示す図4-11．

(4) $1.3\Omega_1^*$ と $0.8\Omega_2^*$ の範囲を示すための $\Omega_D = 0.8\Omega_2^* - 1.3\Omega_1^*$ とスパン比 a との関係を示す図4-12．

(4-1) の分類にしたがって，諸元がわかれば，図4-13 のブロック線図のような手続きでロータの設計をすることができる。

各変量に対する無次元使用回転数 Ω_u を (4-17) 式で $\Omega_n^* = (pl)^2$ として計算する。この値より，図4-9，図4-10 を用いて危険速度以下 または，以上で作動させるかを判別し，図4-11 より $1.3\Omega_1^*$ と $0.8\Omega_2^*$ の中央点で使用するように諸量を決定する。もしこの決定した値が与えられた諸元を十分に満たしていない場合には，もう一度やり直さなければならない。つぎに，図4-12を用いて $1.3\Omega_1^*$ と $0.8\Omega_2^*$ の間隔が大きくなるように a を決める。この結果得られた諸量を，適当な軸径比，スパン比に変換する。これは，図4-6，図4-7によっておこなうことができる。

4-3. 設計例．

4-3-1 全軸長さが変更できない場合

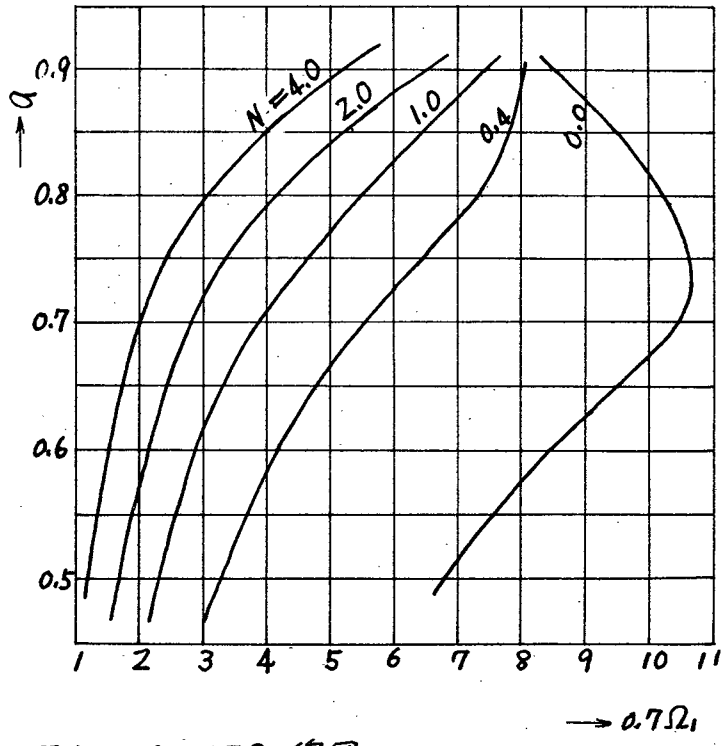


図4-9. Q－0.7Ω1 線図

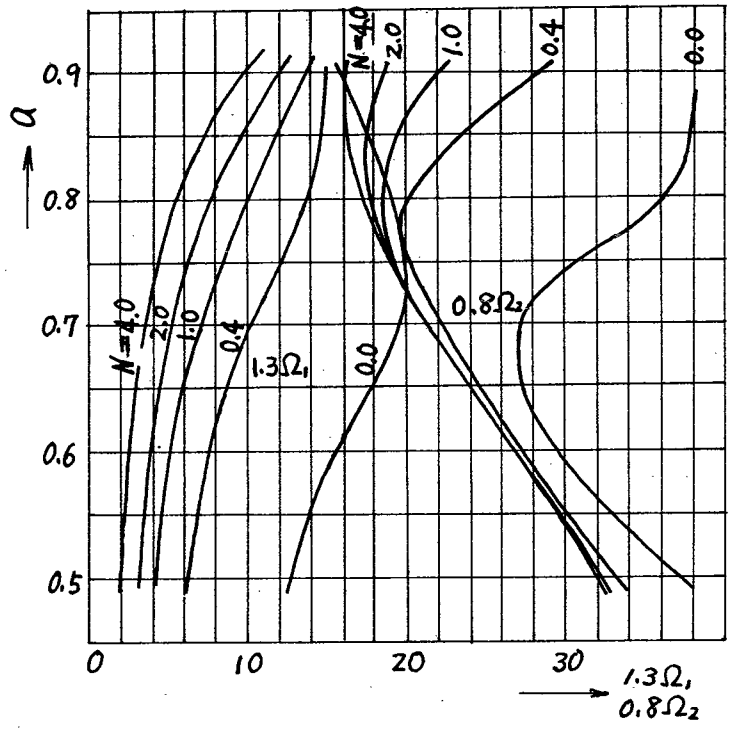


図4-10. Q＝1.3Ω1 , 0.8Ω2 線図

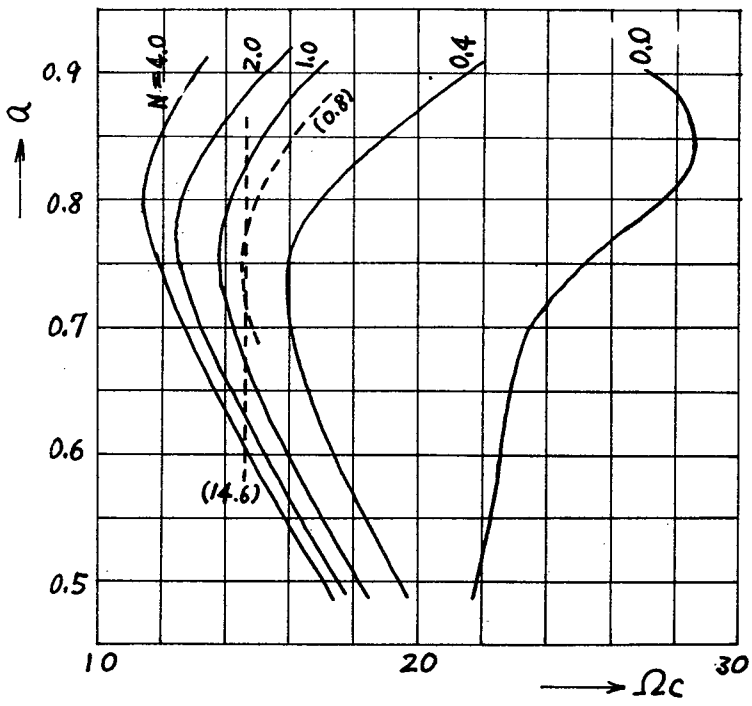


図4-11. a − Ω_c 線図

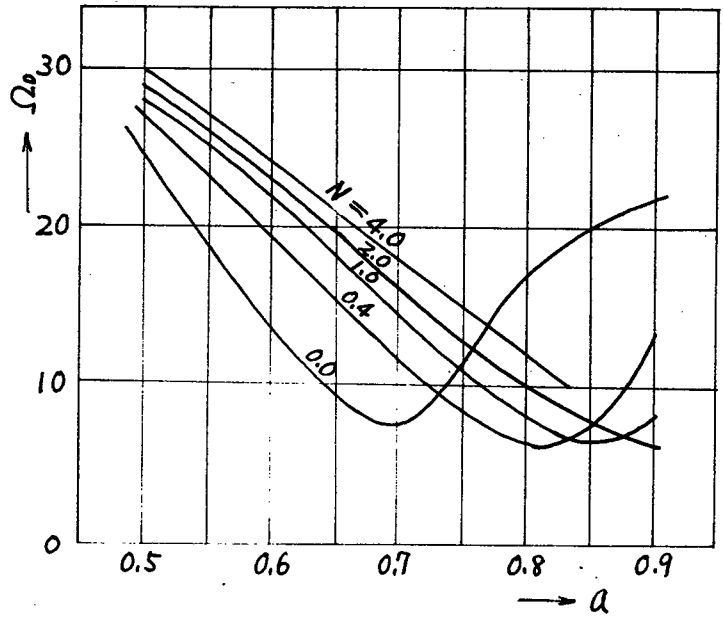


図4-12. a − Ω_D 線図

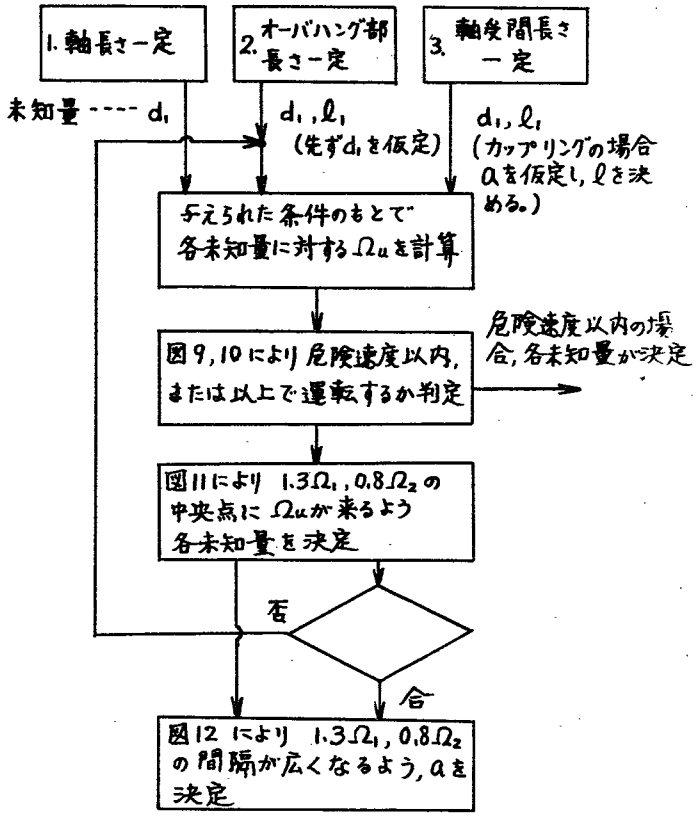


図 4-13. 設計の手順を示すブロック線図

例として．次のような数値が与えられたとする。

使用回転数 $\omega_u = 7000\ rpm$

軸長さ $l = 80\ cm$

オーバハングディスク質量 $me\,g = 2.5\ kg$

決定すべき量は，d_1 である。軸径 d_1 に対する無次元使用回転数 Ω_u，および，質量比 N は，それぞれ次式で求まる。

$$\Omega_u = \frac{\omega_u \, 4l^2}{d_1 \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}} \cdot \frac{\pi}{30} \qquad 4\text{-}15'$$

$$N = \frac{me \cdot g}{\frac{\pi}{4} d_1^2 \, l \, \gamma} \qquad 4\text{-}16$$

(4－15)′，(4－16) 式に，適当と考えられる軸径 d_1 を与えて，d_1，N，Ω_u の表を作ると，表4－1のようになる。表4－1と図4－9とから，N に対する $0.7\Omega_1^*$ の関係によって，ロータを1次危険速度以下，または以上で作動させているかを決める。

$\Omega_u < 0.7\Omega_1^*$ のときは，1次危険速度以下で，$\Omega_u > 0.7\Omega_1^*$ のときは，1次と2次危険速度の中間で作動させる。表4－1より，この例では，$d_1 = 5.0$ の場合を除いては $\Omega_u > 0.7\Omega_1^*$ となる。したがって今の場合は，1次危険速度以上で作動させるものと考える。

表4－1の各 N に対する Ω_u の値と，図4－11の相当する N に対する Ω_c の値との交点を見出すことによって，軸径 d_1 を決定する。この例では，図4－11の破線で示されるように2つの交点が得られる。この得られた値より，図4－12によって，スパン比 $\alpha = 0.725$ の方がより Ω_D が大きいので，$\alpha = 0.725$ とする。

以上，得られた結果は次のようで

表4.1 各 d_1 に対する N，Ω_u の値

軸径 d_1	質量比 N	無次元使用回転数 Ω_u
1.5	2.25	24.40
2.0	1.27	18.34
2.5	0.81	14.64
3.0	0.56	12.20
3.5	0.41	10.46
4.0	0.32	9.16
5.0	0.20	7.32

ある。

$d_1 = 2.5\ cm$

$a = 0.725$

この得られた回転軸の危険速度は，$1.3\omega_1^* = 4210\ rpm$，$0.8\omega_2^* = 10100\ rpm$ であり，与えられている使用回転数 $\omega_u = 7000 rpm$ を満たしている。

オーバハング部長さ bl は $(1-a)l = (1-0.725) \times 80 = 22cm$ であり，オーバハング部長さを変更したい場合には，前述の3－3の説明により，オーバハング部の軸系を変化させることによって，適当に変えられる。この例では，軸長さ l は変更できないので，図4－7の変換図より，軸径比＝0.8とすれば，$a' = 0.825$ が得られる。この時のオーバハング部長さは，

$$bl = (1-a')l = (1-0.825) \times 80 = 14\ cm$$

となる。

4－3－2．オーバハング部長さが変更できない場合

この場合決定すべき量は，軸径 d_1，軸長さ l であるが，d_1 を与えれば，4－3－1と同様な設計法が使用できる。この場合は，まず d_1 を固定して，適当な l の値を探す。得られた結果が求める値にあわない場合には，d_1 を少し変えて与えなおさねばならない。

例題として，次のような数値を用いる。

使用回転数 $\omega_u = 7000\ rpm$

オーバハング部長さ $bl = 20\ cm$

オーバハングディスク質量 $me \cdot g = 2.5\ Kg$

今，$d_1 = 2.5\ cm$ として，軸長さ l に対する質量比 N，無次元使用回転数 Ω_u を（4－15）′，（4－16）から求めて表にすると表4－2となる。

この表より，前の例と同様な手順で，l，a を決定する。得られた結果は

$l = 80$ cm

$a = 0.75$

である。この得られた回転軸の危険速度は $1.3\omega_1^*$ $= 4530$ rpm, $0.8\omega_2^*$ $= 9300$ rpm で与えられた使用回転数 $\omega_u = 7000$ rpm を満たしている。これは一様な軸の場合であるから，軸受のところに段をつけて，軸受間部を太くしようとすれば，前と同様に変換すればよい。

表4.2 各 ℓ に対する N, Ω_u の値

軸長さ ℓ	軸受間長さ $a\ell$	スパン比 a	質量比 N	無次元使用回転数 Ω_u
40	20	0.50	1.622	3.66
50	30	0.60	1.300	5.73
60	40	0.67	1.080	8.25
70	50	0.71	0.928	11.21
80	60	0.75	0.812	14.64
90	70	0.77	0.721	18.55
100	80	0.80	0.649	22.90

4－3－3　軸受間長さが変更できない場合

2極発電機，タービン，ファン等のカップリングがこの場合と考えられる。この場合は軸受間部にくらべてオーバハング部の質量は非常に小さいので，質量比 N は0に近い。また，ジョイント部の長さも，あまり長くする必要はないと考えられる。図4-12の $a - \Omega_D$ 曲線より，N が小さい場合には，スパン比が大きければ，Ω_D は大きくなる。この場合も軸受間長さが与えられると，適当にスパン比 a を定めて* 4－3－1の場合と同じ手順で設計をすることができる。

5. 実験とその考察

上に述べた設計法で得られた回転軸系の危険速度が理論値と実験値でどれ程異なるかを調べ，軸受が単純支持の条件に近い場合には，このような方法で設計できることを示す。

5－1　実験装置

写真1に実験装置全景を示す。駆動は，A.C. 2HP の誘導電動機にコップの無段変速機をつけ，約540 rpm ～ 5400 rpm まで速度が連続的に変えられるようにし，ベルトで2倍に増速している。

* スパン比 a は N が小さい場合には，図4-12より，0.8～0.9くらいにすればよい。

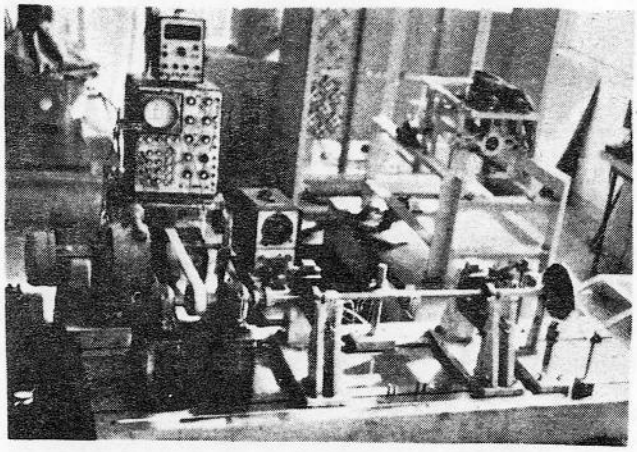


写真4-1　実験装置全景

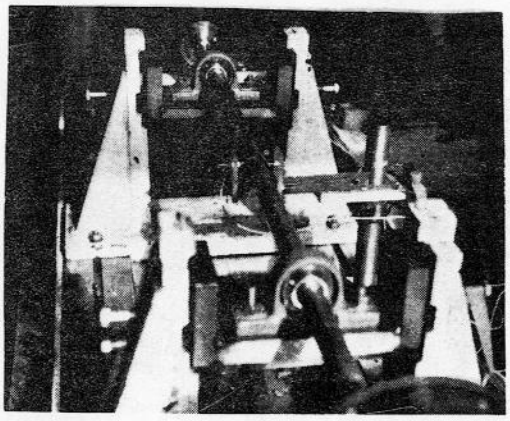


写真4-2　回転軸を軸方向から見たところ

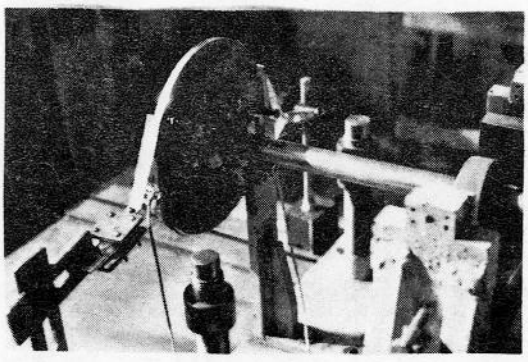


写真4-3　オーバハング部のディスクの変位測定用ピックアップ

回転数は振動軸と無接触ピックアップとの間隔の変化による容量変化を電気信号に変換し(写真2)，ディジタルカウンタに入れて測定している．振巾は軸受間の中央と，オーバハングディスクの2個所で無接触型の変位測定器から，シンクロスコープに入れて測定している。実験に用いたロータは軸受間部の軸径が25 mmのものを使用し，オーバハングディスクは厚さ9 mm，直径160 mm，200 mmのものを使用した。(写真4－3)

5－2　実験結果および考察

実験は1次危険速度の1.5倍あたりまでおこなった。実験に用いた回転軸の諸元および理論的危険速度と実験によって得られた危険速度を表4－3に示している。表中の1，2は実験と理論との危険速度の差を示す1つの例として掲げてある。3，4は4-2の設計方法にもとづいて設計した軸の危険速度である。段付の変換前と変換後がそれぞれ3，4である。表4－3より，理論値は実験値とかなりよく一致している。一般に実験値は理論値より2～3%低い値となっている。この原因として，(1) 理論式において，減衰の影響を無視していること，(2) 軸受の弾性を無視して単純支持の条件を用いていること，などが考えられる。また，表4－3の4においては，ジャイロモーメントの影響を考えていない理論値にくらべると，危険速度は高い。しかし，ジャイロモーメントを考慮した時の理論値と実験値とはよく一致している。この場合においても，実験値は理論値よりも1.3%低く，前述の

表4.3　実験値と理論値の比較

実験番号	軸長 l	軸径 d_3	質量比 N	スパン比 a	段付比 de	実験値の危険速度	理論値の危険速度
1	100	20	0.6	0.6	1.0	1490 rpm	1580 rpm
2	100	20	0.6	0.8	1.0	2810	2900
3	80	20	0.78	0.725	1.0	3250	3300
4	80	20	0.83	0.825	0.8	3850	3250 *3900

＊印はジャイロモーメントを考慮した場合

ような原因が考えられる。また，1次危険速度の0.7倍まで，および，1.3倍以上では明らかに振巾は小さくなっていることを確認できた。

6. まとめ

振動の立場から考えた場合のオーバハング部を有するロータの理論的な設計法を示した。軸受の影響，ジャイロモーメントの影響等は無視している。この方法を用いると，設計の初期の段階では，かなり有効であると考えられる。また，軸受間とオーバハング部とに段がついている場合に，危険速度をそのままにして，その段の比を変える変換図を作った。これは，回転軸に限らず，一般の段付ビームの振動系の変換にも使用できる。

第5章
有限駆動力をもつ非対称軸ロータの危険速度通過について.

第1節. まえがき.

ロータの危険速度通過に関する問題は, 危険速度以上で運転するロータの場合には, 考慮しなければならず, これに関するかなり多くの研究がなされている。その研究方法としては, 主に2つに分けられる; 第1は, エネルギ源が理想的な駆動力をロータに与えるのみで, 何らロータからは作用を受けないと仮定する場合であり, 第2は, 余り余裕のないエネルギ源でロータが駆動され危険速度を通過する際に, エネルギ源とロータが著しく相互作用をおこすため, エネルギ源の特性を考慮しなければならない場合である。前者の研究の最近のものとして A.S. Qazi と A.G.J. MacFarlane[32] の研究がある。彼等は, アナログ計算機を用いてトルク, 減衰率, 偏心の大きさ等をパラメータとした計算結果を示し, タービンロータの危険速度通過時の振幅制御方法について考察している。後者の研究は, V.O. Kononenko[18] が Bogoliubov の漸近的方法を用いて種々の振動体に対して系統的におこなっている。また, W. Hübner[24] は簡単な機械的振動モデルについて解析をおこない, 定量的な安定条件を得ている。

一方, 非対称な曲げ剛性を有するロータの振動は, 危険速度付近で回転速度の危険速度領域が大きくなるため, 危険速度を通過する際の過渡的な振幅も大きくなり, 安全に通過するために必要なトルクも対称軸に比べて大きくなると考えられる。したがって, 非対称な曲げ剛性を有するロータを危険速度を通過させて運転する際に必要なトルクの大きさ, あるいはトルク特性と振幅の関係を調べておくことは, ロータの始動, 停止時には必要なことである。

この章では, V.O. Kononenko と同様に漸近的方法を用いて,

非対称曲げ剛性を有するロータの主危険速度近傍の安定解析ならびに主危険速度通過時の非定常振動の解析をおこない，トルク特性，剛性比，減衰率等をパラメータとして数値計算をおこない，実験を加えて，エネルギ源との相互作用を考慮した場合の非対称な曲げ剛性を有するロータの危険速度通過時の状態を明らかにし，実験によって，重力による2次的危険速度通過の現象も調べる。

第2節　運動方程式

ロータの非定常振動の様相は，分布質量ロータに対しても，中央集中質量ロータに対しても，定性的には同じと考えられるので，ここでは簡単のために，集中質量系のモデルについて考える。

図5−1に示すように座標系をとる。軸は質量を持たず，x軸，y軸それぞれの方向にばね定数 $k+\Delta k^*$，$k-\Delta k^*$（Δk は小さいとする）を持ち，円板は剛体であるとし，質量 m と慣性モーメント I_P を有するとする。また，モータの回転子は慣性モーメント I_M を持つとする。$I_T = I_P + I_M$ として，全慣性モーメントを表わす。

運動のエネルギ T，ポテンシャルエネルギ U，および消散関数 D はそれぞれ次のようになる。

$$2T = m\{(\dot{x}-\varepsilon\dot{\varphi}\sin(\varphi+\psi))^2+(\dot{y}+\varepsilon\dot{\varphi}\cos(\varphi+\psi))^2+I_T\dot{\varphi}^2$$

$$2U = k(x^2+y^2) + \Delta k\{(x^2-y^2)\cos 2\varphi + 2xy\sin 2\varphi\} + 2mgy \qquad 5-1$$

$$2D = b_e(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + b_i\{(\dot{x}+\dot{\varphi}y)^2+(\dot{y}-\dot{\varphi}x)^2\}$$

一般力 Q_k は，

$$Q_k = L(\dot{\varphi}) - g(\dot{\varphi})$$

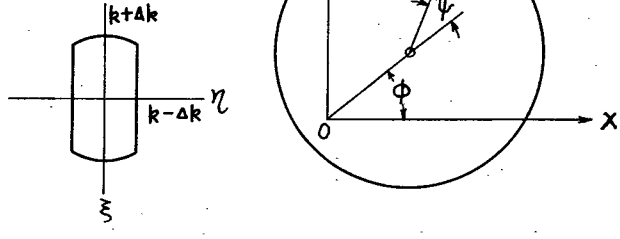


図5−1.　座標系

とする。ここで，$U(\dot{\varphi})$はモータの原動トルク，$g(\dot{\varphi})$は振動負荷以外の抵抗トルクである。T，U，D，Q_kをラグランシュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{g}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial g_k} + \frac{\partial D}{\partial g_k} + \frac{\partial U}{\partial g_k} = Q_k$$

に代入すると，次の運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} + kx &= m\varepsilon\dot{\varphi}^2\cos(\varphi+\psi) - (b_e+b_i)\dot{x} - b_i\dot{\varphi}y \\
&\quad - \Delta k(x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi) \\
m\ddot{y} + ky &= m\varepsilon\dot{\varphi}^2\sin(\varphi+\psi) - (b_e+b_i)\dot{y} + b_i\dot{\varphi}x \\
&\quad - \Delta k(x\sin 2\varphi - y\cos 2\varphi) - mg \qquad 5\text{-}2 \\
I\ddot{\varphi} &= L(\dot{\varphi}) - g(\dot{\varphi}) - b_i(\dot{x}y - x\dot{y}) - b_i\dot{\varphi}(x^2+y^2) \\
&\quad - k\varepsilon(x\sin(\varphi+\psi) - y\cos(\varphi+\psi)) + \Delta k\{(x^2-y^2)\sin 2\varphi \\
&\quad - 2xy\cos 2\varphi\}
\end{aligned}$$

(5-2) 式を無次元化すると次式となる。

$$\begin{aligned}
\ddot{X} + X &= \dot{\phi}^2\cos(\phi+\psi) - 2(D_1+D_2)\dot{X} - 2D_2\dot{\phi}Y - 2\mu(X\cos 2\phi \\
&\quad + Y\sin 2\phi) \\
\ddot{Y} + Y &= \dot{\phi}^2\sin(\phi+\psi) - 2(D_1+D_2)\dot{Y} + 2D_2\dot{\phi}X \qquad 5\text{-}3 \\
&\quad - 2\mu(X\sin 2\phi - Y\cos 2\phi) \\
\dot{\Phi} &= \delta^2[R - S\dot{\phi} - T\dot{\phi}^2 - 2D_2(\dot{X}Y - X\dot{Y}) - 2D_2\dot{\phi}(X^2+Y^2) \\
&\quad - (X\sin(\phi+\psi) - Y\cos(\phi+\psi)) + 2\mu\{(X^2-Y^2)\sin 2\phi - 2XY\cos 2\phi\}]
\end{aligned}$$

ただし，無次元量は次のものとする。

$X = x/\varepsilon$ ，$Y = y/\varepsilon$ ：無次元 x，y 座標.

$\tau = \omega t$ ：無次元時間.

D_1，D_2 ： $= b_e/2m\omega$ ，$b_i/2m\omega$

$\mu = \Delta k/2k$ ：軸の曲げ剛性の非対称性を示すパラメータ

$\eta \cong \dot{\varphi}/\omega$ ：平均的無次元回転数

$R - S\dot{\phi} = L(\dot{\varphi})/k\varepsilon^2$ （R，S は定数）

$T\dot{\phi}^2 = g(\varphi)/k\varepsilon^2$

$G = g/\varepsilon\omega^2$ ：無次元重力

$\delta = \varepsilon/j$ ：モータの大きさをも考慮に入れた偏心率

（ここで $j=\sqrt{I/m}$ は相当回転半径とし，モータの偏心は考えない）

複素数

$$Z = X + iY \quad , \quad \bar{Z} = X - iY$$

を用いて，上の方程式を書くと，

$$\ddot{Z} + Z = \dot{\phi}^2 e^{i(\phi+\psi)} - 2(D_1+D_2)\dot{Z} + 2iD_2\dot{\phi}Z - 2\mu\bar{Z}e^{i\phi} - iG \qquad 5-4$$

$$\ddot{\phi} = \delta^2\left[R - S\dot{\phi} - T\dot{\phi}^2 + iD_2(Z\dot{\bar{Z}} - \dot{Z}\bar{Z}) - 2D_2\dot{\phi}Z\bar{Z}\right.$$
$$-\frac{1}{2}\{(Z+\bar{Z})\sin(\phi+\psi) + i(Z-\bar{Z})\cos(\phi-\psi)\}$$
$$\left.+\mu\{(Z^2+\bar{Z}^2)\sin 2\phi + i(Z^2-\bar{Z}^2)\cos 2\phi\}\right] \qquad 5-5$$

第3節　解析

3－1．漸近的方法による近似式の導出

ロータの過渡振動はおもに，主危険速度で大きくなるため，主危険速度近傍において　重力はロータに一定たわみを起させるのみで，ふれまわりに対する影響は小さいので，この場合は無視する。

(5－4),(5－5)式において，右辺は左辺にくらべ小さいと仮定して，つまり，振幅，位相角，回転数がゆるやかに変化するとしてBogoliubovの漸近的方法を用いる。

今，解を次のようにおく．

$$Z = A\cos\phi + B\sin\phi \quad , \quad \bar{Z} = \bar{A}\cos\phi + \bar{B}\sin\phi$$
$$\dot{Z} = -A\sin\phi + B\cos\phi \quad , \quad \dot{\bar{Z}} = -\bar{A}\sin\phi + \bar{B}\cos\phi \qquad 5-6$$

ここで，A, Bは，複素振幅を表わし，$\bar{A}$，$\bar{B}$はその共役複素数である。(5－6)式は　危険速度近傍での解と仮定して，$\dot{\phi}\cong 1$とおいている。(5－6)式を(5－4),(5－5)式に代入することによって，ABϕに関する次式が得られる。

$$\frac{dA}{d\tau} = (1-\dot{\phi})B - [\dot{\phi}^2 e^{i(\phi+\psi)} + 2(D_1+D_2)(A\sin\phi - B\cos\phi) + 2iD_2\dot{\phi} \times (A\cos\phi + B\sin\phi) - 2\mu\{i\sin 2\phi(\bar{A}\cos\phi + \bar{B}\sin\phi) + \cos 2\phi(\bar{A}\cos\phi + \bar{B}\sin\phi)\}]\sin\phi \qquad 5-7$$

$$\frac{dB}{d\tau} = -(1-\dot{\phi})A + [\dot{\phi}^2 e^{i(\phi+\psi)} + 2(D_1+D_2)(A\sin\phi - B\cos\phi) + 2iD_2\dot{\phi} \times (A\cos\phi + B\sin\phi) - 2\mu\{i\sin 2\phi(\bar{A}\cos\phi + \bar{B}\sin\phi) + \cos 2\phi(\bar{A}\cos\phi + \bar{B}\sin\phi)\}]\cos\phi \qquad 5-8$$

$$\frac{d\dot{\phi}}{d\tau} = \delta^2[R - S\dot{\phi} - T\dot{\phi}^2 + iD_2(A\bar{B} - \bar{A}B) - 2iD_2\dot{\phi}\{A\bar{A}\cos^2\phi + B\bar{B}\sin^2\phi + (\bar{A}B + A\bar{B})\sin\phi\cos\phi\} - \frac{1}{4}\{i(A-\bar{A}) + (B+\bar{B}) + i(A+iB)e^{-2i(\phi+\psi)} - i(\bar{A}-i\bar{B})e^{2i(\phi+\psi)}\} + \mu[\{(A^2+\bar{A}^2)\cos^2\phi + (B^2+\bar{B}^2)\sin^2\phi + (AB+\bar{A}\bar{B})\sin 2\phi\}\sin\phi + i\{(A^2-\bar{A}^2)\cos^2\phi + (AB-\bar{A}\bar{B})\sin 2\phi + (B^2-\bar{B}^2)\sin^2\phi\}\cos 2\phi]] \qquad 5-9$$

(5-7), (5-8), (5-9) 式に Bogoliubov の漸近的手法を使用すると，解は次のようにおける。

$$\begin{aligned} A &= A_1 + \varepsilon U_1(\tau, A_1, B_1, \bar{A}_1, \bar{B}_1, \eta) \\ B &= B_1 + \varepsilon U_2(\tau, A_1, B_1, \bar{A}_1, \bar{B}_1, \eta) \\ \dot{\phi} &= \eta + \varepsilon U_3(\tau, A_1, B_1, \bar{A}_1, \bar{B}_1, \eta) \end{aligned} \qquad 5-10$$

ここで，この解の主要部分，A_1, B_1, η は第1近似式によって計算される。ε の項は，微小項である。第1近似式は，A, B, ϕ の変化が振動1周期に対して ゆるやかであるとして，フーリエ0次近似，つまり，振動1周期に対する平均をとることによって得られる。

$$\frac{dA_1}{d\tau} = (1-\eta)B_1 - \{(D_1+D_2)A_1 + iD_2\eta B_1 + \frac{\eta^2}{2}(\rho_2 - i\rho_1) - \frac{\mu}{2}(i\bar{A}_1 - \bar{B}_1)\} \qquad 5-11$$

$$\frac{dB_1}{d\tau} = -(1-\eta)A_1 + \{(D_1+D_2)B_1 - iD_2\eta A_1 + \frac{\eta^2}{2}(\rho_1 + i\rho_2) + \frac{\mu}{2}(\bar{A}_1 + i\bar{B}_1)\} \qquad 5-12$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \delta^2[R - S\eta - T\eta^2 + D_2(A_1\bar{B} - \bar{A}_1B) - D_2\eta(A_1\bar{A}_1 + B_1\bar{B}_1) - \frac{1}{4}\{(A_1+\bar{A}_1)\sin\phi + (B_1+\bar{B}_1)\cos\phi + i\{(A_1-\bar{A}_1)\cos\phi - (B_1-\bar{B}_1)\sin\phi\}]$$

$$+\frac{\mu}{4}\{(A_1B_1+\bar{A}_1\bar{B}_1)+\frac{i}{2}(A_1^2-\bar{A}_1^2)-(B_1^2-\bar{B}_1^2)\}]] \qquad 5-13$$

(5-11),(5-12),(5-13) 式が求める近似式であり，以下では，この式を用いて解析を行う。

3－2　定常状態

定常状態では時間に関する変化がないから，$dA_1/d\tau = dB_1/d\tau = d\eta/d\tau = 0$ である。ここで A_1，B_1，$\bar{A}_1$，$\bar{B}_1$ を計算するために実数部と虚数部に分けて次のように表示する。

$$\begin{cases} A_1 = A_r + iA_i & \bar{A}_1 = A_r - iA_i \\ B_1 = B_r + iB_i & \bar{B}_1 = B_r - iB_i \end{cases} \qquad 5-14$$

(5-14) 式を用いて (5-11),(5-12) 式から A_1, B_1 を求めると次式が得られる。

$$A_1 = A_r + iA_i = \frac{\eta^2[\{(1-\eta-\mu)\cos\psi + D\sin\psi\} + i\{D\cos\psi - (1-\eta+\mu)\sin\psi\}]}{2[(1-\eta)^2-\mu^2+\{D_1+D_2(1-\eta)\}^2}$$

$$B_1 = B_r + iB_i = \frac{\eta^2[\{D\cos\psi - (1-\eta-\mu)\sin\psi\} + i\{(1-\eta-\mu)\cos\psi + D\sin\psi\}]}{2[(1-\eta)^2-\mu^2+\{D_1+D_2(1-\eta)\}^2} \qquad 5-15$$

(5-15) 式は，危険速度のごく近傍において，

$$2(1-\eta) \fallingdotseq (1+\eta)(1-\eta) = 1-\eta^2$$

とおくと，よく知られた振幅に関する厳密解となり，近似式が危険速度の近傍で正しいことがわかる。

$$A_1 = \frac{\eta^2[[\{(1-\eta^2)-2\mu\}\cos\psi + 2D\sin\psi\} - i\{2D\cos\psi - \{(1-\eta^2+2\mu\}\sin\psi]]}{(1-\eta^2)^2-(2\mu)^2+4\{D_1+D_2(1-\eta)\}^2}$$

$$B_1 = \frac{\eta^2[[2D\cos\psi - \{(1-\eta)^2+2\mu\}\sin\psi] + i[\{(1-\eta)^2-2\mu\}\cos\psi + 2D\sin\psi]]}{(1-\eta^2)^2-(2\mu)^2+4\{D_1+D_2(1-\eta)\}^2} \qquad 5-15'$$

(5-15),(5-15') 式において

$$A_r = B_i \quad , \quad B_r = -A_i$$

つまり，　$B_1 = iA_1$

であり，無次元化された元の座標点 (X, Y) は次のようにあらわ

され，円運動をしていることがわかる。

$$X = a\cos(\phi+\xi)$$
$$Y = a\sin(\phi+\xi)$$

ここで，ϕ，ξは次式で与えられる。

$$a=\frac{\eta^2\sqrt{\{D_1+D_2(1-\eta)\}^2+(1-\eta)^2+\mu^2-2\mu(1-\eta)\cos 2\phi-\{D_1+D_2(1-\eta)\}\mu\sin\phi}}{2\{(1-\eta)^2-\mu^2+\{D_1+D_2(1-\eta)\}^2\}}$$

$$\cos\xi=\frac{Ar}{\sqrt{Ar^2+Br^2}} \qquad 5-17$$

$$\sin\xi=\frac{-Br}{\sqrt{Ar^2+Br^2}}$$

一方，回転数についても同様にして，

$$R-S\eta-T\eta^2+2D_2(1-\eta)(A_r^2+A_i^2)+A_i\cos\psi-A_r\sin\phi-2\mu A_rA_i=0 \qquad 5-18$$

(5-18)式は回転数ηが原動機のトルク$R-S\eta$と抵抗トルク$-T\eta^2$と振動による負荷トルクの関係において，回転数ηが決まることを示している。これは，Kononenkoが対称軸を持つ系について導いた式

$$L(\dot{\varphi})-g(\dot{\varphi})-K\omega a^2=0$$

に相当すると考えられる。この式と，(5-18)式とを比較することによって，定常状態の非対称ロータのトルクに関する影響がわかる。

第4節　系の安定性

近似式(5-11)，(5-12)，(5-13)を用いて系の定常状態の安定性を解析する。重心は定常状態において，円運動をしているから，A_iのみをとり，実数部と虚数部を分けて考える。したがって，次の方程式の系を解析すればよい。

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \delta^2\{R - S\eta - T\eta^2 + 2D_2(A_r^2 + A_i^2) + A_r\cos\psi - A_r\sin\psi - 2\mu A_r A_i\}$$
$$= \Phi_1(\eta, A_r, A_i) \qquad 5\text{-}19$$

$$\frac{dA_r}{d\tau} = -(1-\eta-\mu)A_i - \{D_1 + D_2(1-\eta)\}A_r + \frac{\eta^2}{2}\sin\psi = \Phi_2(\eta, A_r, A_i) \qquad 5\text{-}20$$

$$\frac{dA_i}{d\tau} = (1-\eta-\mu)A_r - \{D_1 + D_2(1-\eta)\}A_r - \frac{\eta^2}{2}\cos\psi = \Phi_3(\eta, A_r, A_i) \qquad 5\text{-}21$$

定常状態の微小変動に対する安定性を研究するために，つぎのようにおく。

$$\eta = \eta_s + \eta_1, \quad A_r = A_{rs} + A_{r1}, \quad A_i = A_{is} + A_{i1} \qquad (5\text{-}22)$$

ここで，添字 s は定常値，添字 1 は微小変動を表わす。(5-22)式を(5-19)(5-20)(5-21)式に代入して，次の形の式を得る。

$$\frac{d\eta_1}{d\tau} = b_{11}\eta_1 + b_{12}A_{r1} + b_{13}A_{i1}$$
$$\frac{dA_{r1}}{d\tau} = b_{21}\eta_1 + b_{22}A_{r1} + b_{23}A_{i1} \qquad 5\text{-}23$$
$$\frac{dA_{i1}}{d\tau} = b_{31}\eta_1 + b_{32}A_{r1} + b_{33}A_{i1}$$

ただし，

$$\|b_{ij}\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial A_r} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial A_i} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial A_r} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial A_i} \\ \frac{\partial\Phi_3}{\partial\eta} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial A_r} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial A_i} \end{vmatrix}$$

したがって，この場合，b_{ij} はそれぞれ次のようになる。

$$b_{11} = -\delta^2\{S + T\eta + 2D_2(A_r^2 + A_i^2)\}$$
$$b_{12} = \delta^2\{4D_2(1-\eta)A_r - 2\mu A_i\}$$
$$b_{13} = \delta^2\{4D_2(1-\eta)A_i - 2\mu A_r + 1\}$$
$$b_{21} = A_i + D_2 A_r \qquad 5\text{-}24$$
$$b_{22} = -\{D_1 + D_2(1-\eta)\}$$

$$b_{23} = -(1-\eta-\mu)$$

$$b_{31} = -A_r + D_2 A_i - \eta$$

$$b_{32} = 1 - \eta + \mu$$

$$b_{33} = -\{D_1 + D_2(1-\eta)\} = b_{22}$$

(5-23)式より，系の特性方程式を次のようにあらわすことができる。

$$\lambda^3 + B_1\lambda^2 + B_2\lambda + B_3 = 0$$

ここで，

$$B_1 = -(b_{11} + b_{22} + b_{33})$$

$$B_2 = b_{11}b_{33} + b_{11}b_{22} + b_{22}b_{33} - b_{32}b_{23} - b_{12}b_{21} - b_{13}b_{31}$$

$$B_3 = b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33} + b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{22}b_{33} - b_{12}b_{23}b_{31} - b_{13}b_{21}b_{32}$$

Hurwitz の安定条件により，系が安定であるためには，次の条件を満足すればよい。

$$B_1 > 0 \quad , \quad B_1B_2 - B_3 > 0 \quad , \quad B_3 > 0 \qquad 5\text{-}25$$

数値例として，下記のデータによって数値計算をすると，図5-2に示す安定領域を示す線図が得られる。

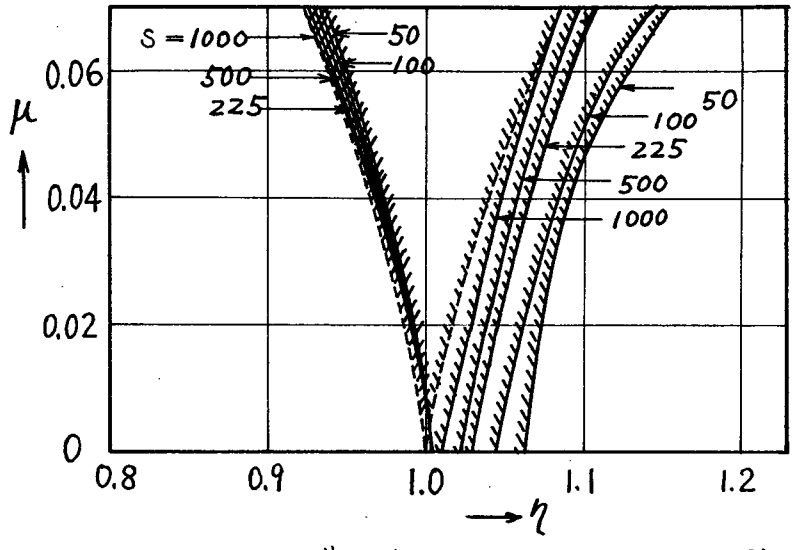


図5-2 (a) 不安定領域　($D_1=0.01$, $D_2=0.001$, $\varphi=0°$)

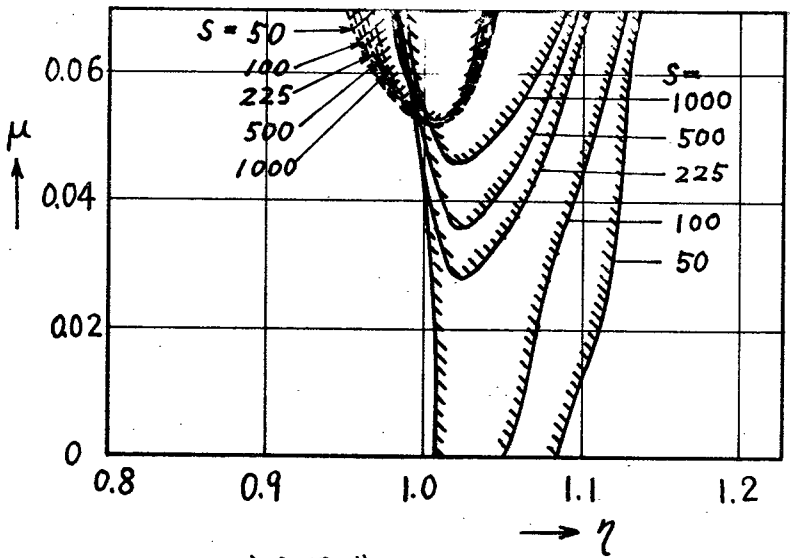


図5-2 (b) 不安定領域 ($D_1 = 0.05$, $D_2 = 0.005$, $\varphi = 0°$)

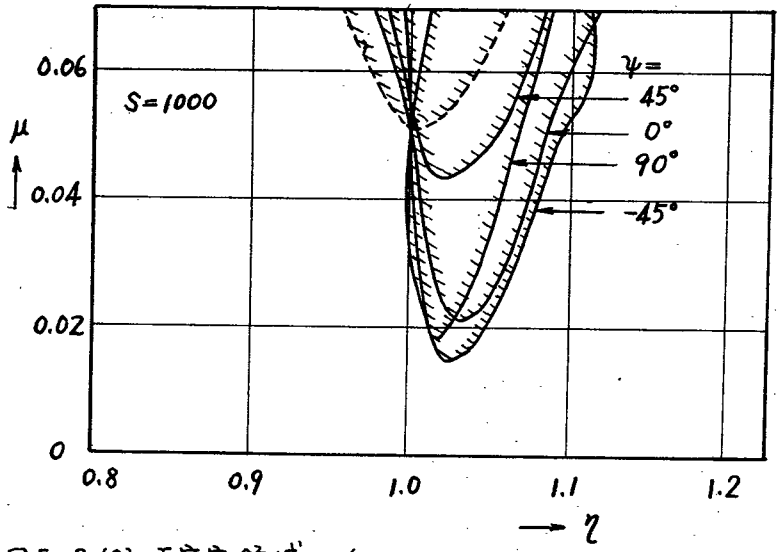


図5-2 (C) 不安定領域 ($D_1 = 0.05$, $D_2 = 0.005$)

$\delta = 0.003$, $S = 50, 100, 225, 500, 1000$, $T = 0$

図5-2において横軸は無次元回転数 η, 縦軸は, ロータの曲げ剛性の非対称性を示すパラメータ μ である。図5-2aは, 偏心の位相角 $\varphi = 0$, 減衰率 $D_1 = 0.01$, $D_2 = 0.001$, 図5-2bは $D_1 = 0.05$, $D_2 = 0.005$ の場合を示している。両者の場合, $B_1 > 0$ は常に満足され, $B_1B_2 - B_3 > 0$ のグラフは破線で, $B_3 > 0$ のグラフは実線

で示している。破線による不安定領域は，おもに原動機のトルクが有限であることを考慮に入れない場合の非対称ロータ特有の不安定領域を示している。$B_3>0$を示す実線の不安定領域は，原動機を考慮したことによってあらわれたものであり，原動機のトルク勾配Sの値によって異なり，Sが小さくなるにしたがって危険速度後の不安定領域は増大し，Sを無限大に近づけることによって，$B_1B_2-B_3>0$の不安定領域に一致する。

$B_3>0$の条件による危険速度後の不安定は，回転数に関する不安定であり，Kononenkoが種々の振動体をもつ系について，定性的な説明を与えている。それによると，$B_3>0$はこの場合VLを振動負荷トルクとすると，

$$\frac{d}{d\eta}[R-S\eta-T\eta^2-VL]<0$$

と等価であり，これは一般の回転機械の定常運転のための負荷と駆動トルクの間の条件とみなすことができる。一般に，一部の内燃機関を除いて，原動機は回転数に関して下降トルク特性を示す。たとえば，図5－3において，$S=S_1$のようなトルク特性の原動機で振動体を駆動する場合，徐々にトルクを上げてゆくとB点に到達し，それより少しでもトルクを増加させると回転数はC点へジャンプを起す。これは理想的な原動機（$S=\infty$）を持つ非線型振動体の場合にみられるジャンプ現象と類似である。この説明により線型の振動体の強制振動に対しても原動機の特性によってはジャンプ現象が起り，共振曲線の右肩の部分を実現できないことを示すことができる。ところが，実際一般にはこの種の不安定領域は非常に狭いか，全く起こらない場合が多

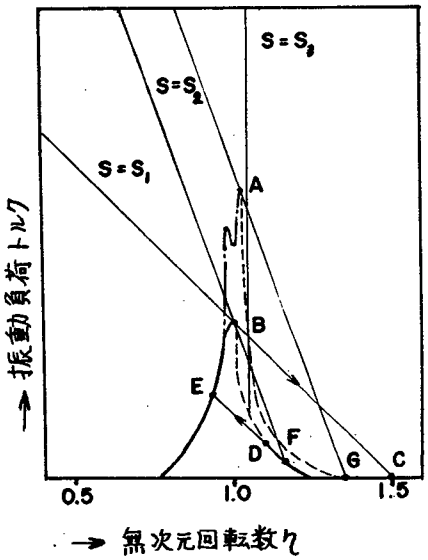


図5-3 振幅とトルクとの関係

い。これは，一般の機械の場合，振動負荷VLにくらべ，$g(\varphi)$が非常に大きいので振動の負荷を除いたみかけのトルク勾配が相当急峻となるからであり，振動負荷VLの大きい振動応用機械や負荷の特性により，みかけのトルク勾配が小さくなったり，右上りになる場合は，この種の不安定領域が存在し，そこでの定常運転は不可能となることに注意せねばならない。

非対称ロータを有する系は　対称ロータを有する系にくらべ定常振幅が大きくなることと，2つの主危険速度が存在することによって，この種の不安定領域が増大する点が，異なるのみで，上記と同様な説明がなされる。

減衰の安定性に与える影響をみるために図5－2(a)と(b)を比較すると，減衰が大きくなるにしたがって，ロータの非対称性による不安定，トルクによる不安定共に減少している。後者は減衰の増加によって定常最大振幅が減少するので，VLが小さくなることからもわかる。

第5節　主危険速度通過時の非定常振動

この節では第3節で得られた主危険速度近傍における系の近似式（5-11），(5－12)，(5－13）または（5－19），(5－20)，(5－21）式を用いて，数値計算した結果を示す。この計算において考察を容易にするため振動負荷以上の抵抗T＝0とおいている。その他の数値は余裕のない原動機で駆動されるという条件のもとで適当に選んだ。計算方法としては，Runge Kutta Gil 法を使用し，時間区間は計算精度の検討の結果$\Delta\tau = 2$とした。

5－1　軸の非対称性の影響

図5－4は$\varphi = 0$，$\delta = 0.003$，$D_1 = 0.01$の場合について，トルク特性 350－225η として$\eta = 0.9$から始まった過渡解の無次元振幅$A = \sqrt{A_r^2 + A_i^2}$と無次元回転数ηの無次元時間τに対する変化の様子を種々の非対称性のロータについて示している。

この図によると，このように外部減衰の小さい場合，定常振幅

のみならず，過渡の振幅もロータの非対称性が増すにしたがって非常に大きくなり，$\mu = 0.04$ の場合には，危険速度を越えることができなかったことを示している。図5－4の上部にこの場合における位相変化を示している。これより位相角が90°の上下を変動しながら90°に近づいており，最大振幅は位相角が90°の場合に起っており，共振状態を示している。この場合，回転数ηと振幅の間の相互作用が著しく表われている。つまり，回転数と振幅の間にエネルギ交換を行なって，独特のうなり状態を示している。回転数が一度，定常状態における低い方の危険速度を越えたあと，低下する現象は，ロータの非対称性が増すに従って著しくなる。

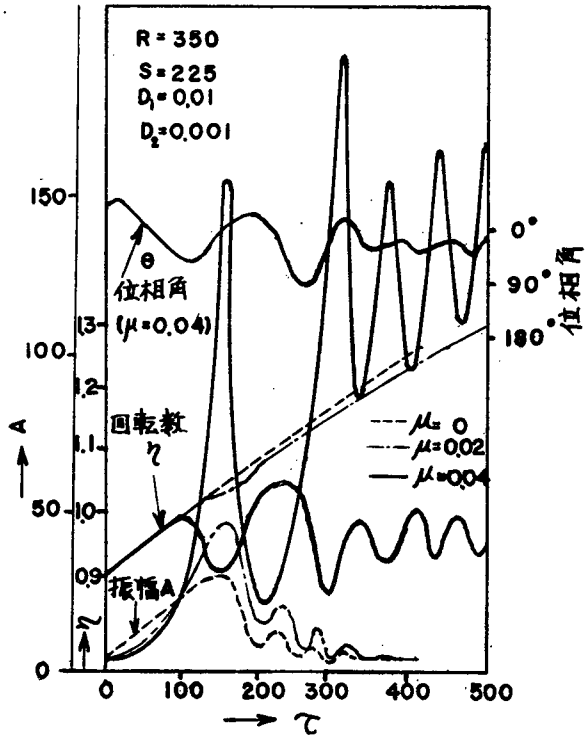


図5-4 非対称性の影響（加速時）

5－2　偏心の位相角の影響

非対称軸系の偏心によって生ずる強制振動は，定常状態において，不つりあいのある位相によって異なることが知られている。このことは，非定常な振動の場合においても当然予想されることである。図5－5には偏心の位相角を種々変えた時の非定常振動の計算結果を示している。

図5－5(a)は減衰の小さな場合である。この場合は，偏心の位相角の影響が顕著である。すなわち，$\varphi = -45°$ と $\varphi = 90°$ のとき，非定常振動の最大振幅が非常に大きく，$\varphi = 45°$，$0°$ のとき，最大振幅はかなり小さい。したがって，$\varphi = -45°$ と $\varphi = 90°$ のときには，振幅と回転速度との間の干渉は非常に強い。

図5－5(b) は減衰の大きな場合である。この場合は，減衰の小さな場合に比べると，非対称性の影響は小さく，対応する定常状態の振幅とよく似ている。

5－3　トルクの大きさの影響

トルクの勾配は同じで，トルクの値を変えた場合の偏心 $\varphi=0$，非対称性 $\mu=0.02$ の場合の危険速度通過時の振幅と回転数の変化のようすを図5－6に示している。R=300の時のように，トルクの余裕が非常に小さいとき，図5－4の $\mu=0.04$ の場合と同様に振幅が大きくなる場合，回転数に対して干渉を起している。ただし，この場合は干渉を起しながら危険速度を通過している。干渉はトルクを大きくするにすれて小さくなっている。

5－4　減衰の影響

図5－7は対称ロータの場合に対して同じトルクで，偏心 $\varphi=0$，減衰を $D_1=0.001$，0.01，0.05 ただし $D_2=0.1D_1$ の場合について過渡振動の計算

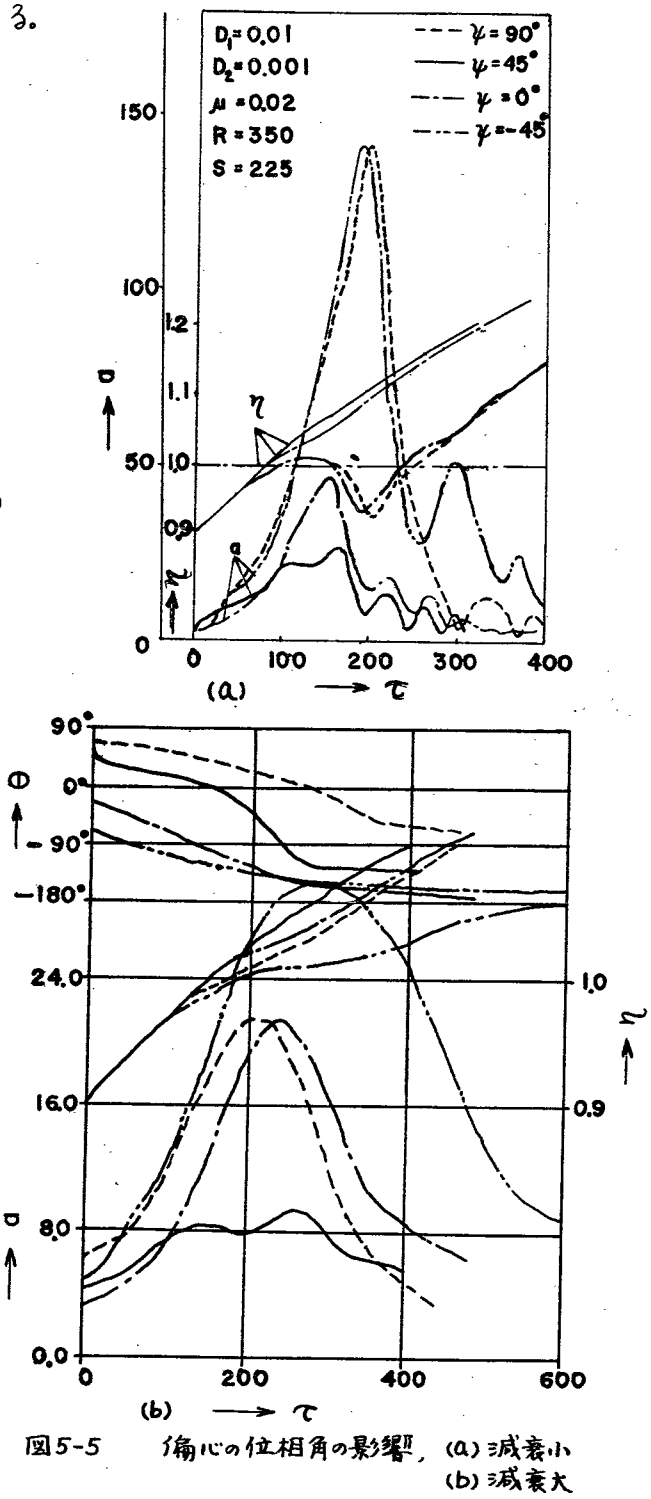


図5-5　偏心の位相角の影響II，(a) 減衰小 (b) 減衰大

結果を示している。減衰が小さいと振幅が大きくなり，対称ロータの場合，振動負荷トルクは $K\omega\alpha^2$ になるので，回転数への干渉は減衰の大きい場合にくらべて著しい。この傾向は上記のように，ロータの非対称性の増加によってさらに大きくなる。

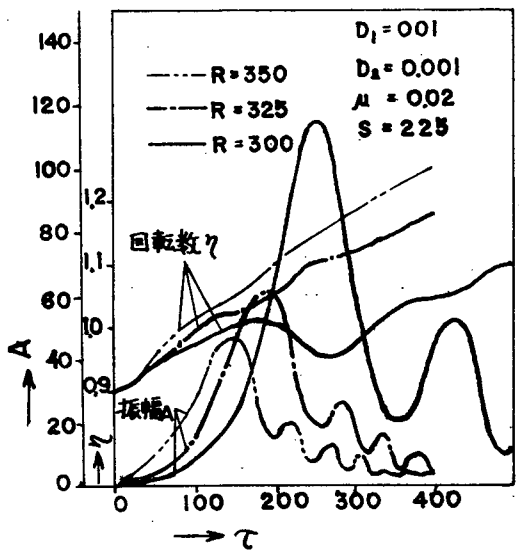


図 5-6 トルクの大きさの影響

5－5 減衰の場合の非定常振動

図5－8は危険速度より上で運転していたロータの駆動力を切った場合を想定した R＝0，S＝0，T＝25で減衰する場合の計算結果を示している。これによると，ロータの非対称性が増すに従って，回転に対する影響が大きくなり，振幅の増大とともに，回転速度が激減している。このような場合に対しては，一定減速度と仮定した場合，実際とは非常に異なった結果が得られると考えられる。

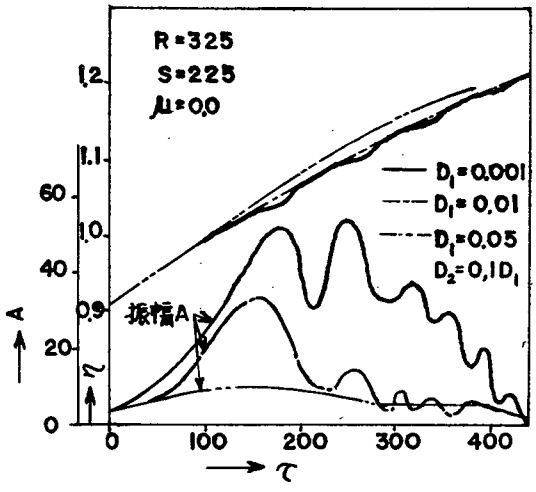


図 5-7 減衰の影響

また，同一の初期条件で減速する場合，ロータの非対称性が大きくなると，高い方の危険速度に早く到達するため，対称ロータよりも先に最大振幅の振動を起す。

図5－9には，減衰時の偏心時の位相角に対する影響を示している。この場合には $\psi = 0°$ と $\psi = -45°$ で最大振幅が大きくなっていて，図5－5の場合と少し異っている。これは，減速時に

まず，高い方の危険速度（剛性の強い方の自然振動数に対応）を通過するからであると考えられる．

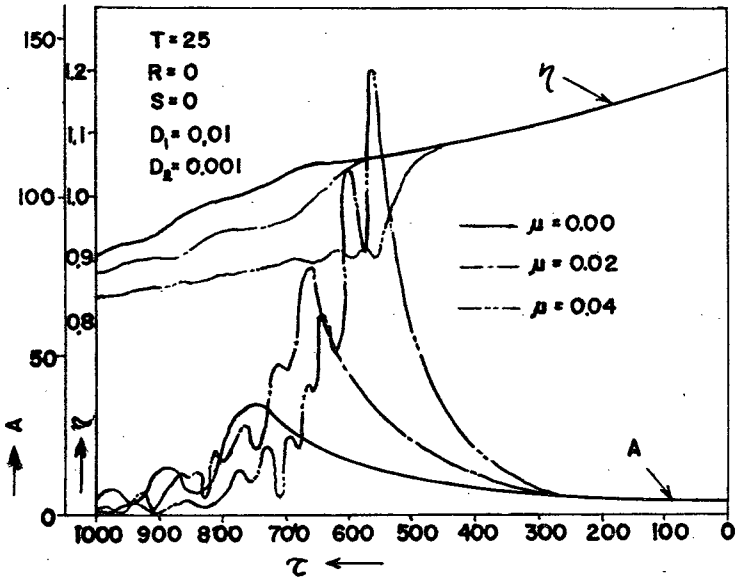


図 5-8 非対称性の影響

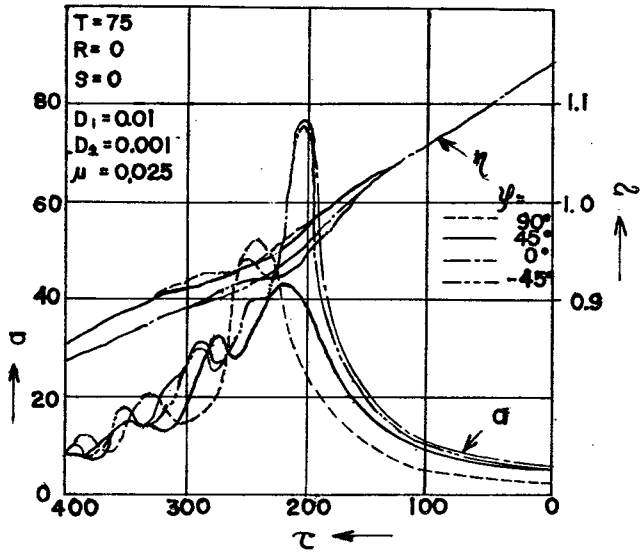


図 5-9 危険速度を減速しながら通過する場合の偏心の位相角の影響

第6節　危険速度通過時の最大振幅

危険速度通過時の最大振幅を推定することは，実際の場合，非常に重要である。この節では，第3節で得た近似式を用いて，非対称ロータの危険速度通過時の最大振幅を与える種々の要因について考察する。

6－1.　偏心の位相角の影響

危険速度通過時の最大振幅を，偏心の位相角を種々変化させて，プロットしたのが図5－10である。加速時と減速時とでは，これらの軌跡の内側の主軸は異っている。第II編第5章図5－2は定常状態の場合で，主軸がちょうど45°方向にあるのに対して，加速時にはそれよりも小さく，また，減速時には，それよりも大きくなっていることがわかる。しかし，概略は定常状態の場合とよく似ている。

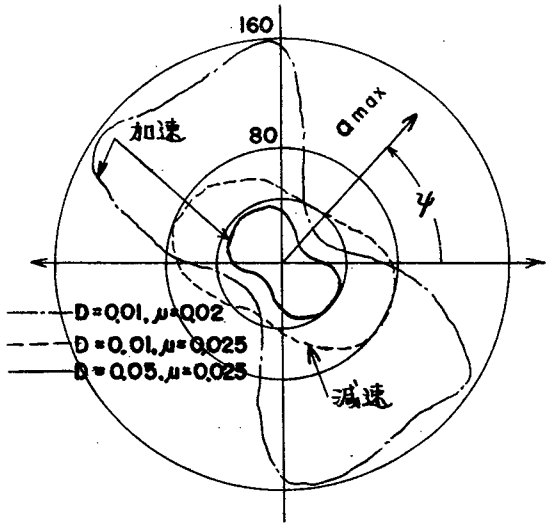


図5－10　ふつりあいの位相角の影響

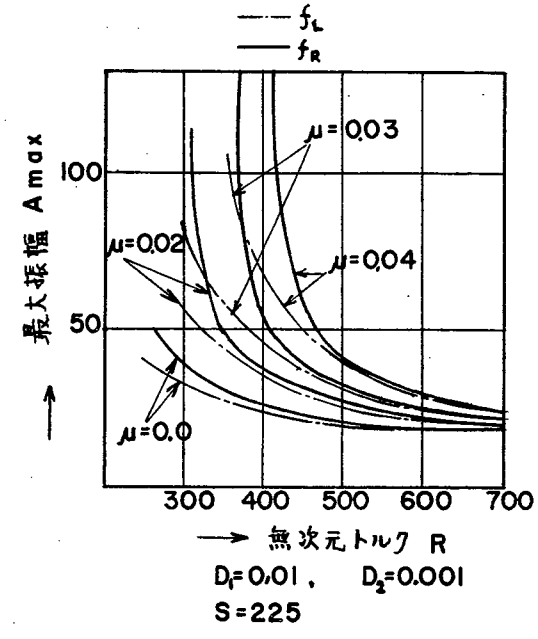


図5－11　非対称性の最大振幅に及ぼす影響

6－2　ロータの非対称性による影響

図5－11は $\psi=0$，$\delta=0.003$，$D_1=0.01$，$D_2=0.001$ の場合に対して，種々のトルクで危険速度を通過させたときの最大

振幅の大きさを，μをパラメータとして表わしている。実線は原動機のエネルギ源が有限であることを考慮した場合であり，鎖線は，比較の便宜上，$\eta=1$の場合の上の実線の場合のトルク，つまりR－Sで一定加速をおこなった場合の計算結果である。

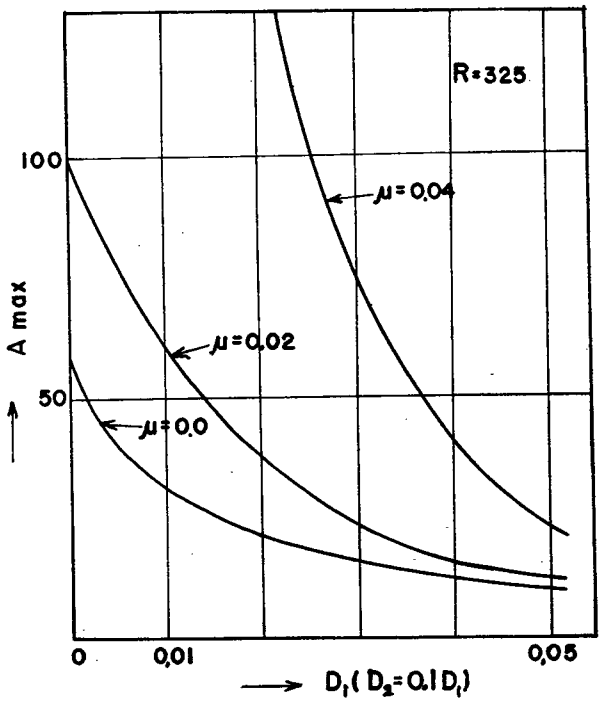
実線をみると，トルクの増大によって，最大振幅の減少することがわかり，その傾向はトルクがある値よりも増大すると小さくなるが，そのようすは，A. S. Quazi[1]らの結果とよく似ている。しかし，トルクが非対称性によって異なるある値以下になると，振幅とトルクとの関係は彼等の結果と非常に異なり，エネルギ源との相互作用を考慮した場合，急激に定常振幅へ近づく。このことは，加速のときに一定加速度とみなせないようなあまり余裕のない原動機で駆動するロータの場合には注意を要する。

原動機を考慮した場合と一定加速度の場合との差は，トルクの増大とともに小さくなる。これは，トルク増大にともなって，振幅の値が小さくなり，原動機に与える影響が減少するためである。

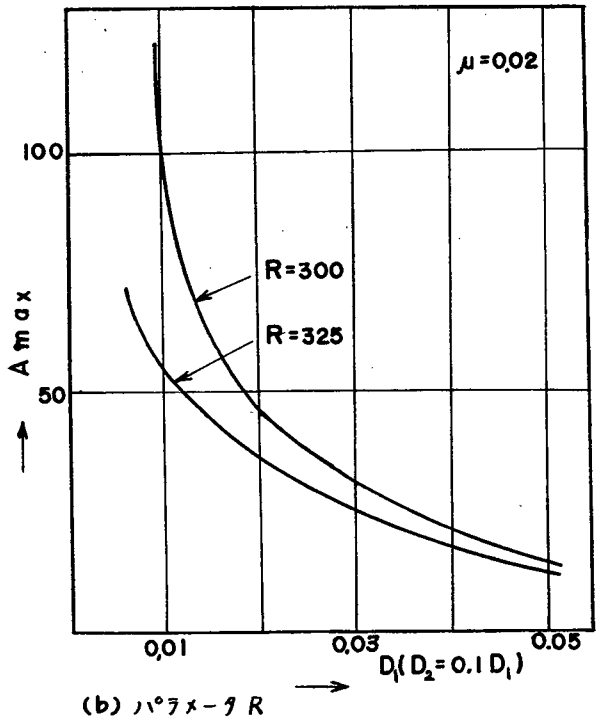
6－3　減衰の影響

図5-12(a)は偏心$\varphi=0$として，トルクR＝325に対して非対称性μをパラメータとして，危険速度通過時の最大振幅に与える減衰の効果を示している。これによると，μの増大は最大振幅に対して減衰の減少と類似の効果をもたらし，その効果は非常に大きい。これは，第3節で示した定常振幅の式からも推察できる。

一方，図5－12(b)は，ロータの非対称性$\mu=0.02$の場合（曲げ剛性比が0.92）で，トルクRを少し変えたときを示し，トルクの減少もまた最大振幅に対して減衰の減少と類似の効果をもたらす。このことは，平野[7]らによる，“振動系の共振域におけるみかけの減衰比”で示されたように，加速度が最大振幅に与える影響をみかけの減衰比として取扱うことが可能であるということを意味している。また，A. S. Quazi[1]らも同様な結論を得ている。減衰が小さい場合，ロータが非対称性を有することと，エネルギ源と振動との相互作用を考慮したことによって，その影響はより大きくなっている。



(a) パラメータ μ



(b) パラメータ R

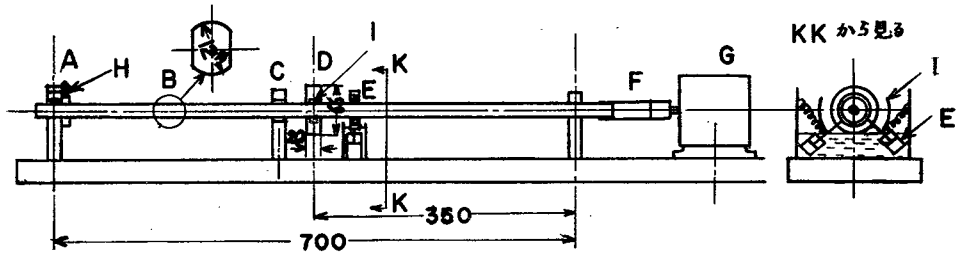
図 5-12 減衰の影響

第7節　実験装置と実験結果

7－1　実験装置

非対称な曲げ剛性を有するロータのエネルギ源を考慮に入れた場合の危険速度通過時の状態を実験的に明らかにするために，図5－10に示す実験装置を用いて実験をおこなった。

図5－13で非対称軸は外径12$^{\phi}$のみがき棒鋼の側面を削り落した種々の曲げ剛性比を有する軸を使用した。軸受は単純支持の条件に近づけるために複列自動調心型玉軸受を用いた。円板Dは，比較的小さいのでロータの質量として，軸の分布質量も等価的に含めている。Eはルーズなピストンを持つオイルダンパであり，油の粘性を変えることによって種々の減衰率を得ることができる。ここで軸の回転による摩擦トルクは軸にくらべ非常にやわらかいばねで釣合せている。Fは内径10$^{\phi}$のゴム管を使用した。Gは500～5000 rpmの可変速モータで1/16 PSであり，回転トルクの調節は微小変化をおこなわせる為，スライダックを用いた。Hは回転マークを出させるための静電容量型の変換器であり，Iは振幅測定用静電容量型変換器で，差動型を用いている。HとIからの信号は，Diode Twin T circuitを用いて，電圧信号に変換して，電磁オシログラフに入れて記録をとった。Cは軸の塑性変形を防ぐ保護輪である。



A：内径12$^{\phi}$複列自動調心型玉軸受　B：非対称回転軸
C：保護台および保護輪　D：円板　E：減衰器
F：ゴムカップリング　G：可変速モータ（500～5000rpm）
H：位相および回転数検出器（無接触静電容量型）
I：振幅測定用検出器（無接触静電容量型）

図5-13　実験装置

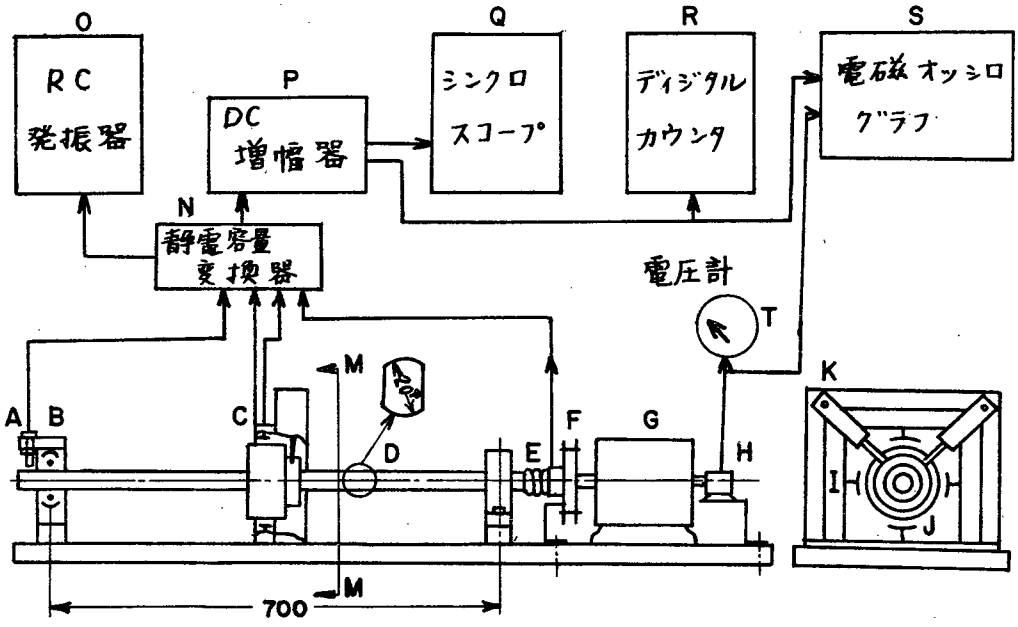


図 5-14　実験装置および測定器

表 5-1　ロータの詳細

No.	シャフト 重量 kg	ディスク 重量 kg	ロータ系の等価 質量 kg	剛性比	自然振動数 rpm
1	1.83	2.74	3.64	0.9	2240, 2360
2	1.83	2.81	3.71	0.8	2050, 2270

測定に用いた装置間の接続は，図 5 - 14 に表す。

また，実験に用いたロータの詳細は表 5 - 1 に示す。

7 - 2　実験結果

(A)定常状態

前節までの解析結果を実験的にためしている。

図 5 - 15 は，偏心の位相角の影響を調べるために，$\psi = 50°$ と $\psi = -40°$ とした場合の図である。この図は，理論的に求められた図 5 - 2 と定性的に一致していることがわかる。トルク特性が点線に示すような形をしているため，この点線の影に相当する部分は，不安定領域となっていて，測定できないことを示している。

図 5 - 16 は，シャフトの非対称性の影響を示している。シャフ

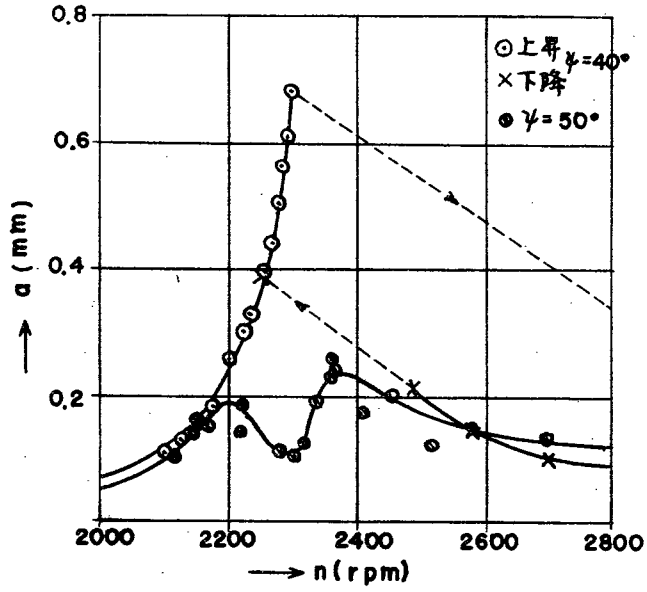


図 5-15　偏心の位相角の影響

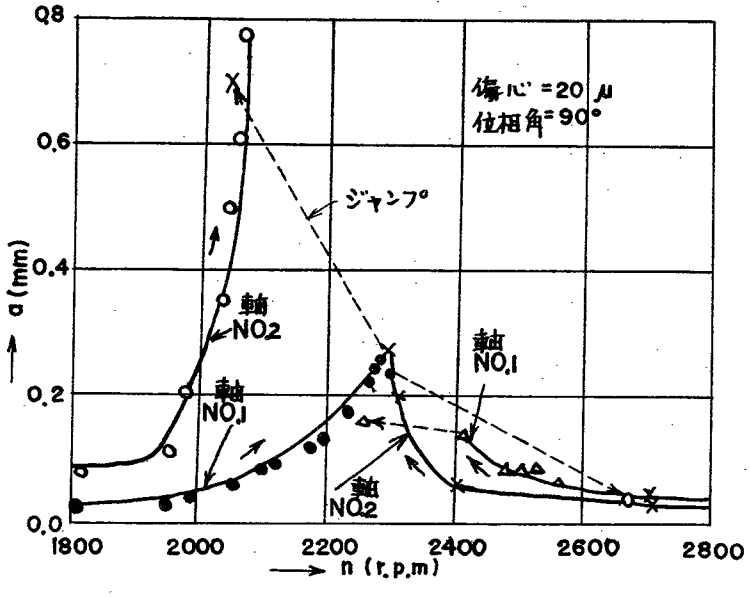


図 5-16　軸の非対称性の影響

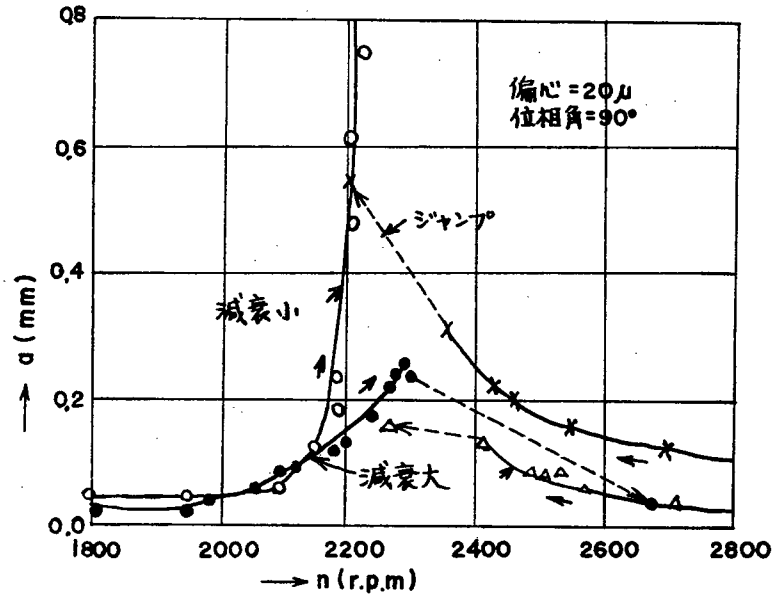


図5-17　減衰の影響

トの非対称性によって，危険速度附近では敏感に振幅が変化することが，実験からも確かめられた。

図5－17は，減衰の影響を示すグラフである。減衰が大きくなると，振幅の最大値は小さくなっている。

b) 主危険速度通過時の過渡振動

図5－18，5－19は，偏心の位相角に対する影響を，加速時および，減速時について調べている。

図5－18(a)，(b)で偏心の位相角に対する影響は，計算値と定性的によく一致している。すなわち，最大振幅と最小振幅は，$\phi=-45°$ と $\phi=45°$ でそれぞれ生じている。このことは，図5-19を見れば，非常によくわかる。また，定常振動と異なって，最大振幅の生じる速度は，加速時は少し高いめに，減速時には少し低いめになっていることが図5－18からわかる。また，振動振幅と回転速度の間の相互干渉もわかる。

図5－20は，減衰と非対称性の影響を示している。横軸は，危険速度よりもずっと下の領域における加速度とトルクの関係からトルクを加速度に変換したものである。また，縦軸は危険速度を

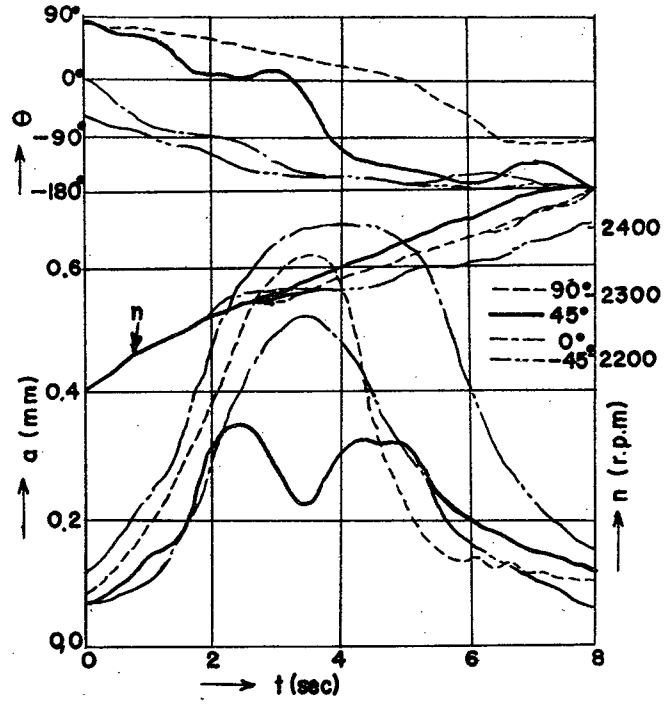


図 5-18 (a) 偏心の位相角の影響 (加速時)

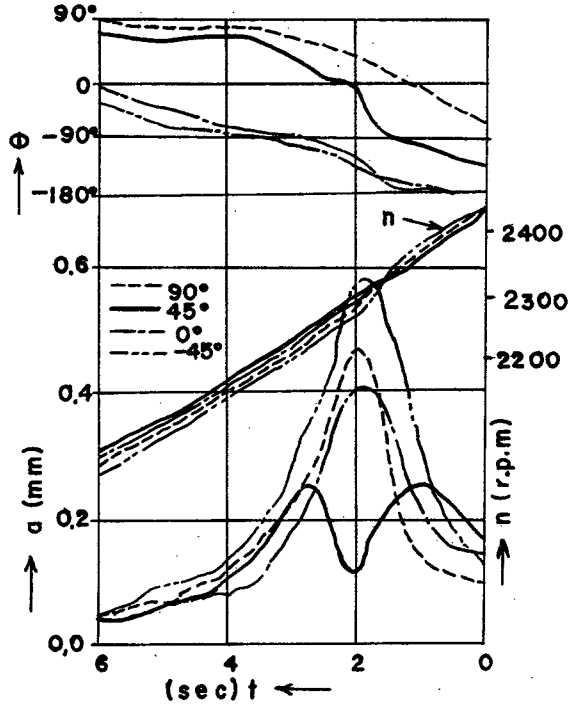


図 5-18 (b) 偏心の位相角の影響 (減速時)

通過する時の最大振幅である。ロータ番号1について，大きなダンピングの場合，小さなダンピングの場合および，ロータ番号2について，大きなダンピングの場合について実験した結果である。この図より，シャフトの非対称性と減衰の増減とは，ほぼ等価であると考えることができる。この場合の，小さなトルクに対する過渡振動は，図5－21に示されている。この図からも回転速度と振幅の干渉が顕著にわかる。

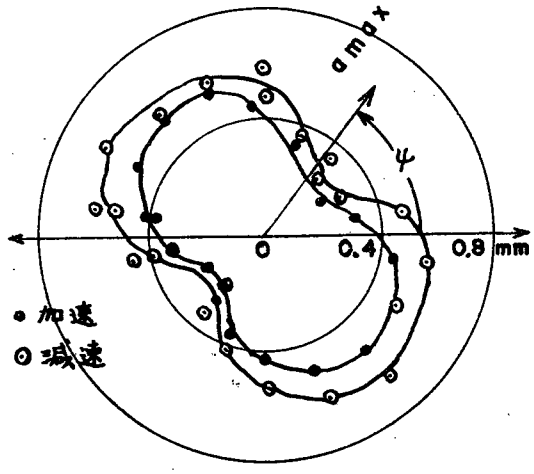


図5－19　偏心の位相角の影響

(c)　重力による2次的危険速度の通過時の過渡振動

図5－22は$\mu = 0.025$の軸を大きいトルクと通過できる限界のトルクで2次的危険速度を通過させたときの振幅と回転数の変化の様子を示す。図中でx印はトルクの小さい時の回転数変化，△印はトルクの大きいときの回転数変化を示し，□，●印は軸の弱い方の，○印は強い方の曲げ剛性の方向を表わす。

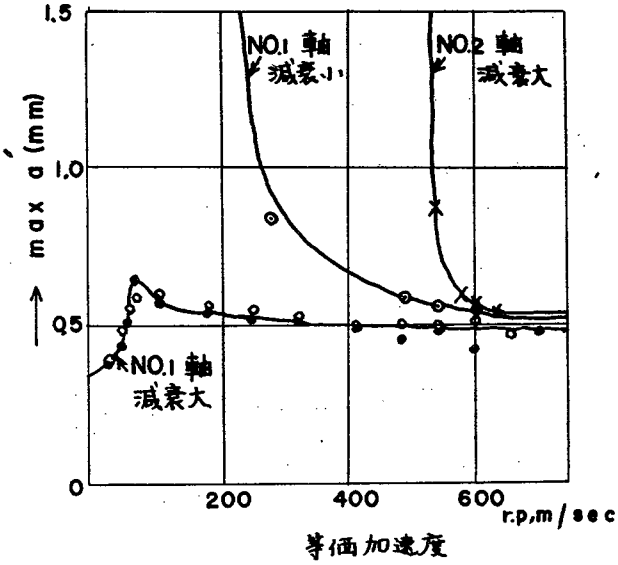


図5－20　減衰と非対称性の影響

この結果より，2次的危険速度通過に際して，先に弱い方の方向の振幅が大きくなり，次に強い方の方向の振幅が大きくなることを示している。そのふれまわりの様子は，第1編第3章第5節

および，Hull[5]やTondl[6]によって示されたように2重円を描いており，その形はおのおのの回転数に対応する定常状態とほぼ一致している。

トルクの増加の最大振幅の減少に対する効果は，主危険速度通過の際と類似している。

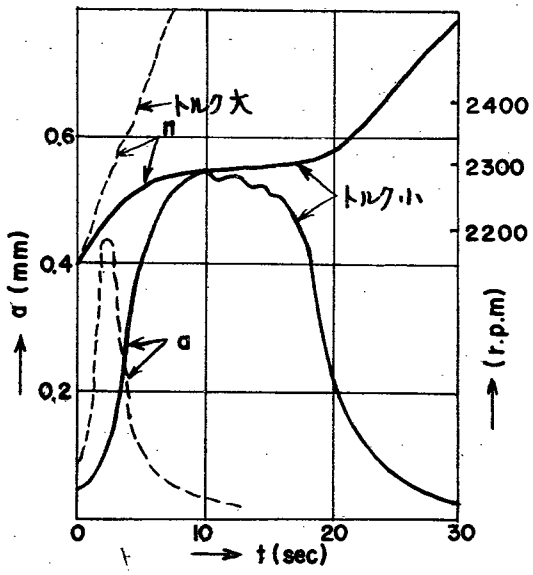


図5-21　種々のトルクに対する非定常振動

また，小さいトルクで2次的危険速度を通過した場合，主危険速度通過時と同様に，振幅の増大は回転数上昇に対して干渉を与えている。しかしその程度は，振幅が小さいので主危険速度通過時にくらべて小さい。ただし，この場合でも軸の非対称性が大きくなると振幅が増大するので干渉が大きくなると考えられる。

以上の事実は2次的危険速度付近において，主危険速度付近と

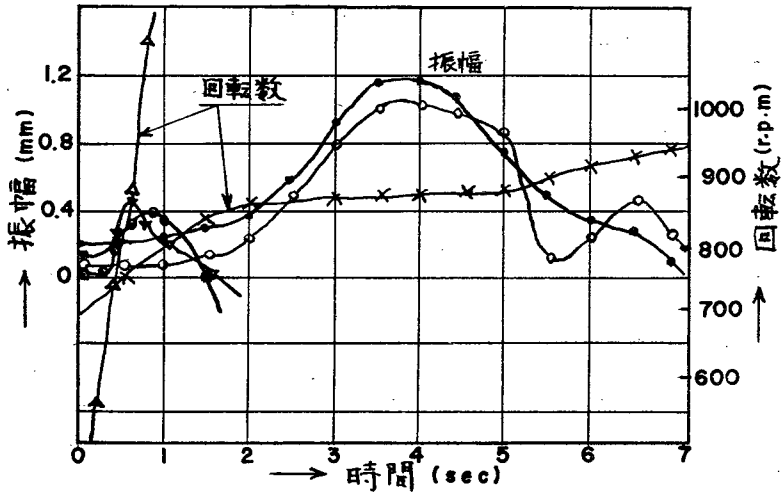


図5-20　2次的危険速度通過の現象

同様な解析をおこなえば説明しうるであろうが，2次的危険速度付近の運動は，静たわみの増加も加わって複雑であり，漸近的方法による解析における仮定 ── 振幅，位相，回転数が振動1周期に対してゆるやかに変化する ── が正しくなくなり，解析は困難なようである。

第8節　まとめ

以上の解析と実験結果をまとめると次のようになる。

(1) あまり余裕のない小さな原動機で駆動される非対称ロータの不安定領域は，非対称ロータ特有の不安定領域と共に，原動機のトルク特性によって，危険速度直後の回転数の不安定領域も存在し，後者も前者と同様にロータの曲げ剛性の非対称性が増すと増大する。

(2) ゆるやかに加速または減速される非対称ロータの危険速度付近における運動の計算結果より，ロータの非対称性が増すにともない，原動機との相互作用を著しく起こし，余裕がほとんどないトルクの場合には回転数の減少がみられる。非対称性の大きい場合，定常状態における2つの危険速度の低い方の危険速度を通過した後でも回転数が下がることがある。

(3) あまり余裕のない小さな原動機で駆動されるロータが危険速度を通過する場合，最大振幅は，一定加速度で通過した場合にくらべ大きくなり，より定常振幅に近づく。

(4) ロータの非対称性の増加が，危険速度通過時の最大振幅に与える影響は減衰の減少と類似である。

第6章
有限駆動力をもつ非対称回転軸の危険速度通過現象の解析

第1節　まえがき

第5章においては，有限駆動力をもつ非対称回転軸の危険速度通過の状態について解析をおこない，種々の興味ある現象を知った。本章においては，前章の興味ある現象を前章と異なった一般的手法を用いて運動を理論的に解明することを目的としている。解析の方法として，過渡現象がよく理解できる Tracking Function 法[30]と Lyapunov の安定判別法を用いている。Tracking Function 法は，位相面法にもとずいているものであり，位相面によって系の運動状態を知るとともに，Practical stability の領域を決定するのによく利用されている。この方法は，任意の状態変数の関数が時間とともに，どのように変化するかということを調べることによって　位相面を容易に書けるようにするものである。また，このような任意の関数として，Lyapunov の安定判別法のようにエネルギに相当するものを選べば，その関数は，Lyapunov 関数となる。Tracking Function 法においては，エネルギに相当するものが時間に関係なく一定である軌跡として得られる。いま，任意に定めた関数を運動方程式の拘束条件のもとに時間で微分する。このような時間微分が0になる軌跡を描けば，その関数は，その軌跡上では，時間に対して変化しない。また，この時間微分が正の領域では増加，負の領域では減少の方向に向かう。したがって，任意の関数を特に注目している関数に選べば，その関数の増加，減少の状態がよくわかる。

本章では，この方法が過渡振動の物理的解釈をするのにすぐれていることを示すとともに，この方法を用いて非対称回転軸の危険速度通過の際の安定，不安定の状態の物理的解釈をおこなっている。そして，前章で得な種々の現象を説明している。

第2節　過渡振動の解析法

一般に，次のような常微分方程式で表わされる運動を行なう系について考える。

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2 \cdots x_n, t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2 \cdots x_n, t) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2 \cdots x_n, t)
\end{aligned} \qquad 6\text{-}1$$

この系に対して，任意の関数 $E_j(x_1, x_2 \cdots x_n, t)$ を考える。これらの関数は，x_i に関する簡単な関数の方がよい。いま，関数 E_j の時間に関する増減を知るために，時間微分をとると，

$$\frac{dE_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}$$

ここで (6-1) 式の条件を満たしながら E_j は変化するので，

$$\frac{dE_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \cdot f_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \qquad 6\text{-}2$$

となる。

$dE_j/dt = 0$ は，関数 E_j が時間に対して変化しないことを意味している。すなわち，$E_j = const.$ であることを意味している。したがって，$dE_j/dt = 0$ なる軌跡を位相面上に描けば，その面上での (6-1) 式の運動のトラジェクトリは，$dE_j/dt = 0$ の軌跡上では，$E_j = const.$ の軌跡になるはずである。また，$dE_j/dt > 0$ の領域では，E_j が増大するように，$dE_j/dt < 0$ の領域では，E_j が減少するように状態点は動くはずである。

いま仮りに，E_j としてエネルギをとれば，$dE_j/dt = 0$ の軌跡は，エネルギが一定の軌跡であり，$dE_j/dt > 0$ の領域では，エネルギが増加する領域であり，$dE_j/dt < 0$ の領域では，エネルギ

が減少する領域である。同様にして，振幅と位相について E_j をとったとすれば，振幅および位相について同様な領域が決まる。したがって，知りたい状態変数の関数を E_j ととることによってその状態変数の動きが位相面上で把握できる。

第3節　非対称回転軸の過渡状態の解析

有限な駆動力を有する非対称回転軸の挙動を現象的に理解するため，前節で説明した解析方法を用いる。解析にあたり，使用する方程式は，前章でボゴリューボフの漸近的方法によって述めた (5-19),(5-20),(5-21)式とする。すなわち，

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \delta^2\{R - S\eta - T\eta^2 + 2D_2(A_r^2+A_i^2) + A_i\cos\psi - A_r\sin\psi - 2\mu A_rA_i\} \qquad 5\text{-}19$$

$$\frac{dA_r}{d\tau} = -(1-\eta-\mu)A_i - \{D_1+D_2(1-\eta)\}A_r + \frac{\eta^2}{2}\sin\psi \qquad 5\text{-}20$$

$$\frac{dA_i}{d\tau} = (1-\eta-\mu)A_r - \{D_1+D_2(1-\eta)\}A_i - \frac{\eta^2}{2}\cos\psi \qquad 5\text{-}21$$

上式の振幅の絶対値 a を計算すると，

$$a = \sqrt{A_r^2 + A_i^2} \qquad 6\text{-}3$$

であるから，a の時間 τ に関する微分は，

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{A_r^2+A_i^2}}\left\{A_r\frac{dA_r}{d\tau} + A_i\frac{dA_i}{d\tau}\right\}$$

$$= \frac{1}{a}\left\{2\mu A_rA_i - D(A_r^2+A_i^2) + \frac{\eta^2}{2}(A_r\sin\psi - A_i\cos\psi)\right\} \qquad 6\text{-}4$$

つぎに，(5-19),(5-20),(5-21)式から，位相角 θ を計算すると，

$$\tan\theta = \frac{A_i}{A_r} \qquad \therefore\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_i}{A_R}\right) \quad (A_r \neq 0) \qquad 6\text{-}5$$

θ の時間 τ に関する微分は，

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{A_r^2+A_i^2}\left\{\frac{dA_i}{d\tau}A_r - \frac{dA_r}{d\tau}A_i\right\}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left\{(1-\eta+\mu)A_r^2 - \frac{\eta^2}{2}\cos\psi\cdot A_r + (1-\eta-\mu)A_i^2 - \frac{\eta^2}{2}\sin\psi A_i\right.$$

6-6

となる。いま，任意の関数 E_j として，系の運動が理解しやすい関数として，振幅，位相角，回転速度をとると，

$$E_1 = a \quad , \quad E_2 = \theta \quad , \quad E_3 = \eta \qquad 6\text{-}7$$

となり，これらの微分 $dE_1/d\tau$，$dE_2/d\tau$，$dE_3/d\tau$ はそれぞれ，(6-4)，(6-6)(5-19)式で与えられている。以下にこの考察をおこなう。

a) $dE_1/d\tau = 0$ より

$$A_r^2 - \frac{\eta^2}{2D}A_r\sin\psi + A_i^2 + \frac{\eta^2}{2D}A_i\cos\psi - \frac{2\mu}{D}A_rA_i = 0 \qquad 6\text{-}8$$

(6-8)式を座標変換して $A_r \cdot A_i$ の項をなくした座標を X，Y とすると，

$$(1+\frac{\mu}{2D})X^2 + \frac{\eta^2}{4\sqrt{2}}(\cos\psi-\sin\psi)X + (1-\frac{\mu}{2D})Y^2 + \frac{\eta^2}{4\sqrt{2}}(\cos\psi+\sin\psi)Y = 0$$

6-9

となる。この式より次のことがわかる。

(i) $(1-\frac{\mu}{2D}) > 0$ のとき　　楕円

(ii) $(1-\frac{\mu}{2D}) = 0$ のとき　　放物線.

(iii) $(1-\frac{\mu}{2D}) < 0$ のとき　　双曲線

以上のことより，非対称性 μ と全減衰 $D\ (= D_1 + D_2)$ との関係によって $dE_1/d\tau = 0$ に対する $A_r - A_i$ 曲線は，楕円，放物線，双曲線と変化することがわかる。

また，特別な場合として，対称軸 ($\mu = 0$) の場合について調べると，この場合は，偏心の位相角 $\psi = 0$ とおいても一般性は失われないので $\psi = 0$ とおくと，(6-8)式は円の方程式となることがわかる。

b) $dE_2/d\tau = 0$

(6−6)式より,

$$\frac{dE_2}{d\tau} = \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{a^2}\left\{(1-\eta+\mu)A_r^2 - \frac{\eta^2}{2}\cos\psi A_r + (1-\eta-\mu)A_i^2 - \frac{\eta^2}{2}\sin\psi A_i = 0\right. \tag{6-10}$$

となる。この式は，A_r, A_i軸を主軸とする2次曲線であり，回転数ηの値によって 楕円 → 放物線 → 双曲線 → 放物線 → 楕円と変化する。すなわち,

(i) $\eta < 1-\mu$ のとき　楕円
(ii) $\eta = 1-\mu$ のとき　放物線
(iii) $1-\mu < \eta < 1+\mu$ のとき　双曲線
(iv) $\eta = 1+\mu$ のとき　放物線
(v) $\eta > 1+\mu$ のとき　楕円

となる。

したがって，危険速度より離れた範囲では，楕円となり，危険速度では双曲線となり，その中間に放物線となる速度範囲が存在することがわかる。

c) $dE_3/d\tau = 0$

(5−19)式より,

$$\frac{dE_3}{d\tau} = \frac{d\eta}{d\tau} = \delta^2\left\{R - S\eta - T\eta^2 + 2D_2(A_r^2+A_i^2) + A_i\cos\psi - A_r\sin\psi - 2\mu A_r A_i\right\} = 0 \tag{6-11}$$

である。座標を45°回転して新しい座標をX, Yとすると,

$$(2D_2-\mu)X^2 + (2D_2+\mu)Y^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\cos\psi-\sin\psi)X + (\cos\psi+\sin\psi)Y\right\} + (R - S\eta - T\eta^2) = 0 \tag{6-12}$$

となる。したがって，(6−12)式より

(i) $2D_2 > \mu$ のとき　楕円
(ii) $2D_2 = \mu$ のとき　放物線

(iii) $2D_2 < \mu$ のとき　　双曲線

となる。したがって，減衰係数D_2と非対称性μとによって軌跡は3種類の型となるが，一般にD_2はかなり小さいので，$\mu > 2D_2$となる場合が多く，そのときは，双曲線となる。

以上の解析結果をもとにして，Ar－Ai面に軌跡を描くと，図6－1，6－2となる。図6－1は，$\dot{e}=0$の軌跡を非対称性μをパラメータとして描いたものである。減衰率を一定とした場合に非対称性μを変えることによって楕円から放物線双曲線へと軌跡が変化していくのがわかる。図6－2は減衰率，非対称性を一定にして，回転速度を変化させたときの$\dot{E}_1=0$，$\dot{E}_2=0$，$\dot{E}_3=0$の軌跡である。$\dot{E}_1=0$の軌跡は一点鎖線で，$\dot{E}_2=0$の軌跡は実線で，$\dot{E}_3=0$の軌跡は破線で示している。回転速度について考えない定常状態の状態点は，$\dot{E}_1=0$，$\dot{E}_2=0$の両軌跡の交点として得られる。この図では$\dot{E}_2=0$の軌跡が危険速度付近で急

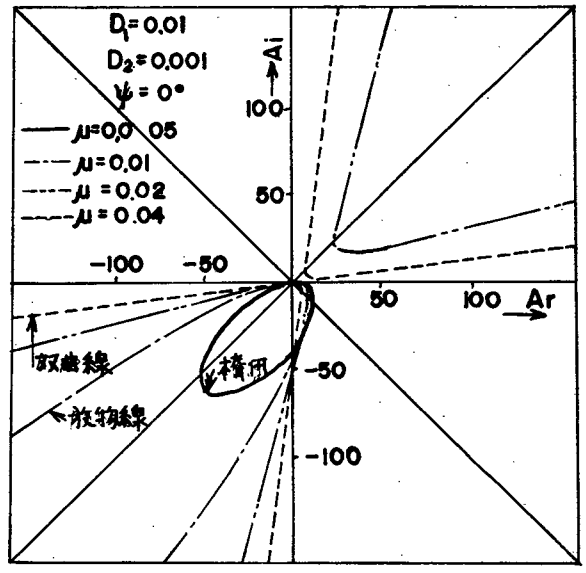


図6－1　$\dot{a}=0$に対するAr－Ai位相面

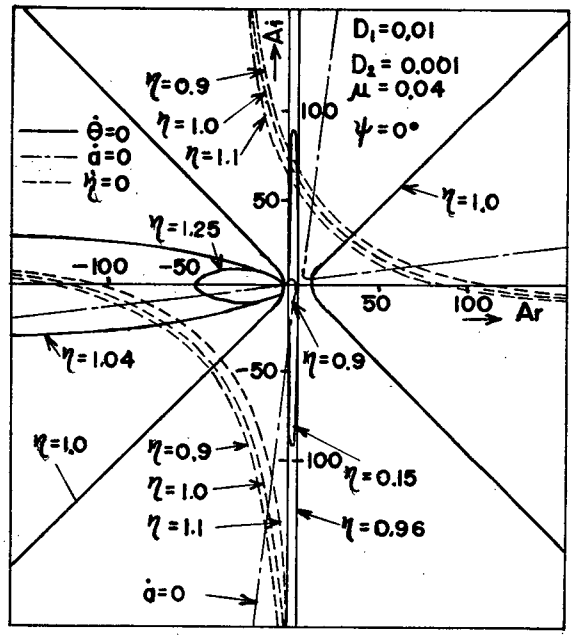
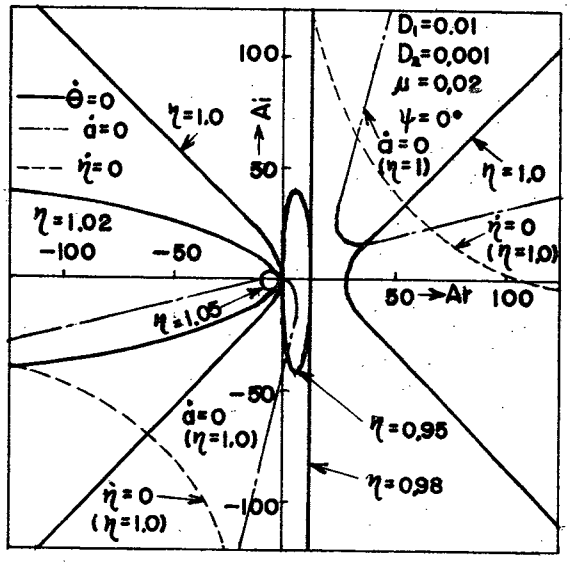


図6－2　$\dot{E}_1=\dot{E}_2=\dot{E}_3=0$に対するAr－Ai曲線

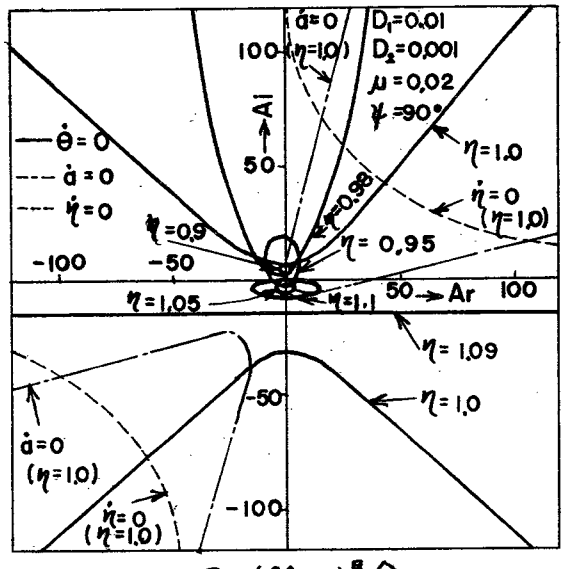
数に変化して，定常状態の不安定とは，この両軌跡の交点がないことからも知ることができる。

図6－3は偏心の種々の位相角に対して計算した結果の軌跡である。この図より，偏心の位相角 $\dot{\varepsilon}_1=0$，$\dot{\varepsilon}_3=0$ の軌跡にはあまり変化を与えず，$\dot{\varepsilon}_2=0$，すなわち，位相角の変化を示す軌跡が変化することがわかる。したがって，偏心の位相角の変化によって，振幅が大きく変化するのは，振動時における振動の位相ずれと密接な関係があるということができる。

また，図6－2，図6－3のような図を，各回転速度について描けば，非定常なときの状態点の動こうとする方向がわかる。



(a) $\psi=0$，$R=400$ の場合

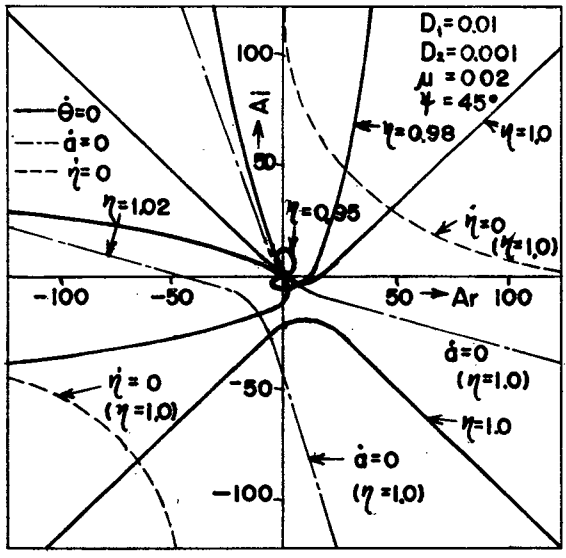


(b) $\psi=90°$，$R=400$ の場合

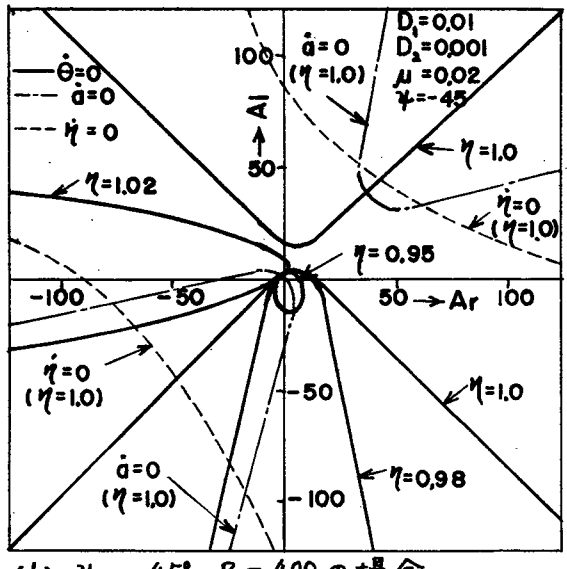
図6－3　回転速度をパラメータとした位相面

図6－4は，過渡状態の状態点の動きを，系が危険速度を通過できた場合と通過できなかった場合について示している。すなわち，実線は通過できた場合を示し，一点鎖線は通過できなかった場合である。通過できなかった場合には，図6－3で $\dot{\varepsilon}_1=0$ と $\dot{\varepsilon}_2=0$ の交点が無限遠点にあるとすれば，その無限遠点に向って進

んでいく様子がよくわかる。また，非定常状態では，状態点は常に定常状態に向かおうとしているが，定常状態が回転速度と共に変化するので追いつくことができず，したがって，早く回転速度が増加すれば，不安定領域があっても，振幅は有限のままで危険速度を通過することができることがわかる。



(c) $\gamma = 45°$, $R = 400$ の場合



(d) $\gamma = -45°$, $R = 400$ の場合

図 6-3 回転速度をパラメータとした位相面

第4節 まとめ

以上の Tracking function を用い，特に E 函数として系の状態をよく表わす振幅，位相，回転速度を用いれば，系がどのような方向に移動しようとしているかを知ることができることがわかった。

非対称回転軸の場合には，軌跡は楕円，放物線，双曲線となり，不安定領域では，振幅の時間微分の軌跡は放物線又は双曲線となって交わらず，定常状態がないことがわかった。また，時間と共に，係数の変化する系における非定常状態では，状態点が定常状態点へ移行しようとしているうちに，定常状態点が移動し，つねにおくれながらついていくような運動であることがわかった。

付録　対称軸の場合の解析

対称軸について，$dE_1/d\tau = dE_2/d\tau = dE_3/d\tau = 0$ の $A_r - A_i$ 曲線の式を求めると，次のようになる．

a) $dE_1/d\tau = 0$ より

$$A_r^2 + A_i^2 + \frac{\eta^2}{2D} A_i = 0 \qquad A-6-1$$

よって，中心 $(0, -\eta^2/4D)$，半径 $\eta^2/4D$ の円となる．

b) $dE_2/d\tau = 0$ より

$$(1-\eta)A_r^2 - \frac{\eta^2}{2} A_r + (1-\eta)A_i^2 = 0 \qquad A-6-2$$

$1-\eta = 0$ のとき　$A_r = 0$

$1-\eta \neq 0$ のとき　円となり

中心 $(\eta^2/4(1-\eta), 0)$，半径 $|\eta^2/4(1-\eta)|$

である．

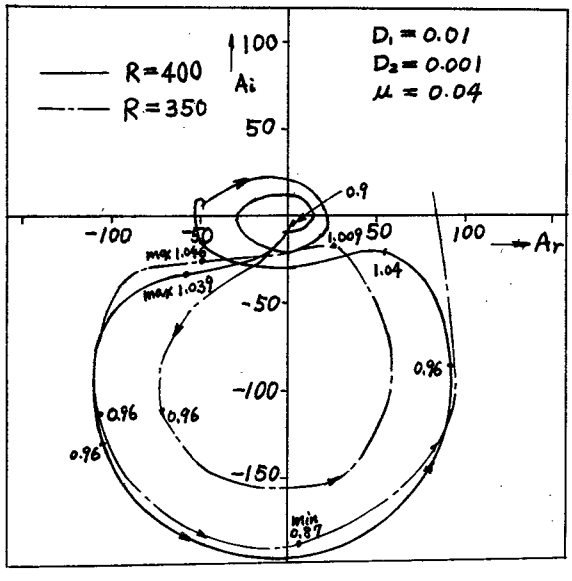


図6-4　トラジェクトリー

c) $dE_3/d\tau = 0$ より,

$$2D_2X^2 + \frac{X}{\sqrt{2}} + 2D_2Y^2 + \frac{Y}{\sqrt{2}} + R - S\eta - T\eta^2 = 0 \qquad A-6-3$$

となり, $D_2 = 0$ のとき, 直線

$D_2 \neq 0$ のとき, 円

となる。

図A-6-1 にこの場合の $dE_1/d\tau = dE_2/d\tau = dE_3/d\tau = 0$ の軌跡を示す。この図と図6-8, 6-9 とを比較すると, 非対称軸の場合に楕円となっていた軌跡が円となることがわかる。また, 双曲線の軌跡は 存在しないことがわかる。すなわち, 対称軸の場合には, 系自体が安定であるので, つねに $dE_1/d\tau = 0$, $dE_2/d\tau = 0$ の両軌跡の交点は存在することが示されている。

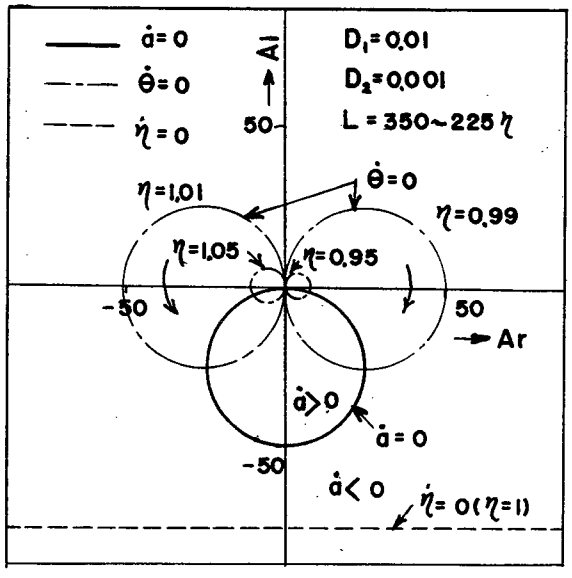


図 A-6-1 対称軸の場合の $A_r - A_i$ 位相面

第 II 編

弾性ロータのつりあわせ

第1章
概説

弾性ロータのつりあわせは，ロータを高速回転で運転するときロータの弾性の影響が入ってくるため，その影響も考慮したつりあわせをおこなわなければならないという理由で，剛性ロータのつりあわせと区別されている。剛性ロータのつりあわせの場合に慣性主軸を回転軸に一致させるように修正おもりをつけるという問題であるが，弾性ロータのつりあわせは，慣性主軸自体が不つりあい力と回転数とによって種々変化するような回転体であり，このようなロータをすべての速度で慣性主軸を回転軸に一致させるように修正おもりをつける問題となる。そして，このような系における問題点は，剛性ロータのつりあわせの概念よりもむしろ，偏心によって生ずる軸のたわみの影響を考慮するようなつりあわせの概念に主目標がある。そしてこの概念は，回転軸の振動に帰着させることができるので，弾性ロータのつりあわせは振動の解析をもとにした研究となる。

いま，回転軸のある位置に単位力が作用したとすれば，その力によって軸はその位置において運動の法則に従って，ある振幅で平衡状態となる。また，他のある位置に単位力が働いたとすれば，同様にその力によって，その位置に相応した振幅でふれる。つまり，同じ単位力が作用しても，その作用する位置によって振動の振幅が異なるのである。それゆえ，ふつりあいのある位置によって，ふつりあいの相対的な大きさが異なり，また，位置による振幅の影響もモードによって異なるので，つりあわせには，多くの影響を考慮しなければならず，そこに弾性ロータのつりあわせの困難さがあり，剛性ロータと区別しなければならない理由があるのである。

弾性ロータのつりあわせの研究は，主に R.E.D. Bishop らによって行われている。彼らの研究は，振動モードは互いに直交して

いることを利用して各モードごとにつりあわせをとるというモーダルバランス法にもとづいている。この方法は，危険速度をつりあわせ速度とするために，測定しようとするモード成分はよくでて，振幅が大きくなるので測定精度もよいが，また反対に，減衰の小さなロータでは，振幅が非常に大きくなりすぎて測定が不可能となる欠点がある。彼らが研究しているロータ系は，軸受支持の影響，軸断面の一様でない場合，非対称回転軸の場合等種々のロータである。これらの系について，すべてモードごとにつりあわせを行う方法を用いるのであるが，非対称回転軸の場合は危険速度が2つできるので，モーダルバランスをおこなうのは困難なように思われる。

また，モーダルバランス法以外に，Church らの提案しているいくつかの危険速度付近で振幅の影響係数を測定してつりあわせる方法や，機械全体の振動の自乗平均値を最小にするようにする方法等もあるが，あまり実用的でないようである。とくに後者の方法は，巨視的に機械全体をながめているため振動の発生原因を明らかにするのが困難であり，回転軸の形状が複雑な場合や非対称回転軸の場合や，軸受の影響が入る場合には，不可能であると思われる。

以下の章では，これらの欠点を解決するつりあわせ方法を提案し，実用上必要な種々のロータ形式のものについて，新しい解決策を提案している。

第2章は，剛性ロータのつりあわせ理論の一般的説明と剛性ロータと弾性ロータのつりあわせ方法のちがいについて説明している。第3章はロータが剛軸受台で支持されている場合のつりあわせで，軸受反力を0にする評価函数を用いたつりあわせ法を用いて，モーダルバランス法とのつりあわせ効果の比較をおこなっている。また，必要な修正面位置の数についても論じている。第4章は軸受台がばねで支持されているようなつりあわせ試験機を用いた場合のつりあわせ方法について検討して，実験的にその効果

をためしている。第5章は非対称軸弾性ロータの解析をおこない，その結果非対称回転軸は，対称な軸のつりあわせとは異なる特別な方法でつりあわせを行わなければならないということを示し，新しいつりあわせ方法を示している。また，理論的および実験的にそのつりあわせ効果を調べている。第6章は，オーバハング部を有する弾性ロータのつりあわせについて，検討している。検討の結果ふつりあいがオーバハング部あるいは軸受間部にある場合に，それぞれ修正面を逆の部分に選ぶとふつりあいがかえって大きくなることもあることを示し，つりあわせ前の振動調査からふつりあい位置がどちらの部分であるかを調べる方法を示している。第7章は弾性ロータのつりあわせの基準をどのような形式で決めたらよいかについて述べている。そして，原則として剛性ロータの場合と対応できるような形式で，つりあわせ許容値の基準を決める方法を提案している。

第2章
弾性ロータと剛性ロータ

第1節 まえがき

一般のロータは，つりあわせの際に弾性の影響まで考慮すべきか，それとも剛体としてつりあわせればよいか判断しなければならない。もし，剛性ロータとしてつりあわせるだけでよければ，修正面は，2面あれば十分であり，つりあわせの行程も簡単である。しかし，弾性ロータとしてつりあわさなければつりあわせのとれないものを2面でつりあわせる場合にいくら努力しても振幅は減少しないことがよく経験されている。これには，ロータの使用回転数と危険速度の関係，ロータの形状，軸受のばね定数等が関係してきて，剛体としてつりあわせるか，弾性ロータとしてつりあわせるかを区別するのは，非常に困難なようである。

この章では，剛性ロータのつりあわせおよび，弾性ロータのつりあわせの原理を述べ，ある与えられたロータをいずれのロータとしてつりあわせればよいか判定するための指針を与える。

第2節 剛性ロータのつりあわせ

Oを原点とする固定座標系 $O-xyz$ に対し，任意な運動をする点O'を原点とする回転座標系 $O'-\xi\eta\zeta$ に関する剛体の角運動量方程式について考える。いま，O'の速度を v_0，O'に対する P_ν の相対速度を v，剛体の質量および回転座標系の角速度をそれぞれ，Mおよび ω，剛体の任意の質点 P_ν の質量を m_ν，重心をGとし，$\overrightarrow{OO'}=r_0$，$\overrightarrow{OG}=r_G$，$\overrightarrow{O'P_\nu}=\rho_\nu$ とすれば，固定点Oに関する剛体の角運動量 $\mathbb{L}$ は，つぎのようになる。

$$\mathbb{L}=\sum_\nu (r_0+\rho_\nu)\times m_\nu (v_0+v+\omega\times\rho_\nu)$$

$$=Mr_0\times(v_0+v+\omega\times r_G)+Mr_G\times(v_0+v)+\sum_\nu m_\nu\rho_\nu\times(\omega\times\rho_\nu)$$

2-1

両辺をtについて静止座標系に関して微分すると,

$$\dot{\mathbb{L}} = M\frac{D}{Dt}\{r_0 \times (v_0 + v + \omega \times r_G)\} + M\frac{D}{Dt}\{r_G \times (v_0 + v)\}$$
$$+ \frac{D}{Dt}\{\mathcal{I}\omega\} \qquad 2\text{-}2$$

ただし,

$$\mathcal{I}\omega = \mathbb{L}_r = \sum_\nu m_\nu r_\nu \times (\omega \times r_\nu) \qquad 2\text{-}3$$

となる。これが一般のモーメントに関する式である。

つぎに,点O'に関する剛体の運動量の方程式を考える。運動量Bは,

$$B = \sum_\nu m_\nu (v_0 + v + \omega \times r_\nu) \qquad 2\text{-}4$$

両辺を時刻tについて静止座標系に関して微分して, $r_G = const.$ すなわち, $\sum m_\nu v = 0$ とすれば,

$$\dot{B} = M\frac{D}{Dt}\{v_0 + \omega \times r_G\}$$
$$= M\left\{\frac{dv_0}{dt} + \omega \times v_0 + \dot{\omega} \times r_G + \omega \times (\omega \times r_G)\right\} \qquad 2\text{-}5$$

となる。

つぎに,剛体のロータのつりあわせについて考える。ロータは軸も含めてすべて剛体であるとし,軸受は,回転のみが可能で変位のない理想的なものであると仮定する。つりあわせに必要な軸受反力等は,回転座標系で測定が可能であるとする。

角運動量に関する方程式は,(2-2)式において, $v_0 = v = r_0 = 0$ とおくことによって得られる。すなわち,

$$\frac{D}{Dt}(\mathcal{I}\omega) = N \qquad 2\text{-}6$$

となり,回転座標系O'-ξηζに関して微分演算をして,

$$\mathcal{I}\frac{d\omega}{dt} + \omega \times \mathcal{I}\omega = N \qquad 2\text{-}7$$

となる。剛体の力学系の原点Oに関するモーメントNを,抗力系の合モーメントN^wとそれ以外の力系,すなわち,作動系の合モー

メントN⁽²⁾とに便宜上わけると，(2-7)式は，

$$\mathcal{J}\frac{d\omega}{dt} + \omega \times \mathcal{J}\omega = N^{(1)} + N^{(2)} \qquad 2\text{-}8$$

となる。つぎに，運動量の式(2-5)において軸が固定されているという条件より，$v_0 = v = 0$ を代入して，抗力系の合力 $F^{(1)}$ と作動系の合力 $F^{(2)}$ とに分けると，

$$M\{\dot{\omega} \times r_G + \omega \times (\omega \times r_G)\} = F^{(1)} + F^{(2)} \qquad 2\text{-}9$$

となる。

いま，(O'-ξηζ)座標系に関する基本ベクトルを e_1, e_2, e_3 とすれば，軸対の仮定より，e_1, e_2 の方向の回転ベクトルは0であるから，$\omega = \omega_\zeta e_3$ である。したがって，その微分は，

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}_\zeta e_3 \qquad 2\text{-}10$$

となり，$\mathcal{J}\omega$ を成分に分けると，

$$\mathcal{J}\omega = (I_{13}e_1 + I_{23}e_2 + I_{33}e_3)\omega_\zeta \qquad 2\text{-}11$$

(2-10)，と(2-11)式を(2-7)式に代入して，e_1, e_2, e_3 の3成分に分けて書きかえると，

$$\begin{aligned} I_{13}\dot{\omega}_\zeta - I_{23}\omega_\zeta^2 &= N_\xi^{(1)} + N_\xi^{(2)} \\ I_{23}\dot{\omega}_\zeta + I_{13}\omega_\zeta^2 &= N_\eta^{(1)} + N_\eta^{(2)} \\ I_{33}\dot{\omega}_\zeta &= N_\zeta^{(2)} \end{aligned} \qquad 2\text{-}12$$

となる。ただし，回転軸に関する力のモーメントは作動力のみによると考えてよいから，$N_\zeta^{(1)} = 0$ としている。

つぎに，$r_G = \xi_G e_1 + \eta_G e_2 + \zeta_G e_3$ とすると，上と同様に，(2-9)式に代入して，e_1, e_2, e_3 の3方向成分に分けて書きかえると，

$$-M(\dot{\omega}_\zeta \eta_G + \omega_\zeta^2 \xi_G) = F_\xi^{(1)} + F_\xi^{(2)}$$

$$M(\dot{\omega}_\zeta \xi_G - \omega_\zeta^2 \eta_G) = F_\eta^{(1)} + F_\eta^{(2)} \qquad 2-13$$

$$F_\zeta^{(1)} + F_\zeta^{(2)} = 0$$

が得られる。

つりあわせの場合，作動力としては，$N_\zeta^{(2)}$ が与えられるだけで他はすべて0である。また，回転駆動の場合 $N_\zeta^{(2)}$ が必要であるが測定を一定速度の回転のときに行うとして，まさつその他によるエネルギ損失がないものとすれば，$N_\zeta^{(2)}$ も0となる。また，測定によって，$N_\xi^{(1)}$, $N_\eta^{(1)}$, $F_\xi^{(1)}$, $F_\eta^{(1)}$, ω_ζ がわかるから，これらの値を (2-12),(2-13) 式に代入して，慣性モーメントの諸量を求めることができる。以上のことより，(2-12),(2-13) 式は，

$$-I_{23}\omega_\zeta^2 = N_\xi^{(1)}$$

$$I_{13}\omega_\zeta^2 = N_\eta^{(1)} \qquad 2-14$$

$$-M\omega_\zeta^2 \xi_G = F_\xi^{(1)}$$

$$-M\omega_\zeta^2 \eta_G = F_\eta^{(1)} \qquad 2-15$$

となる。(2-14),(2-15) 式より I_{23}, I_{13}, ξ_G, η_G が計算できる。この式において，(2-14) は動つりあいの式で，(2-15) は静つりあいの式である。

ロータをつりあわせる場合に一般に2つの方法が考えられる。一つは，回転軸を移動させて，慣性主軸に一致させるつりあわせ法で，他の一つは，修正質量をつけることによって，慣性主軸を回転軸に一致させる方法である。この2つの方法について解析をおこなう。

2－1　回転軸を移動させて慣性主軸に一致させるつりあわせ法

慣性主軸を求めるため剛体に固定した座標を図2－1のように決める。(2-14),(2-15) 式の結果から回転軸と重心の距離および，慣性乗積はわかった。したがって，座標を適当に変換することによって変換された軸まわりのモーメントと合力が0になるような座標を求めればよい。すなわち，重心Gを通る回転軸に垂直な面と

回転軸との交点を O' とし，O' を原点として座標系 O'-ξηζ を考える。原点 O' から回転軸に平行に ξ 軸と α の方向に h だけ座標系を平行移動した座標系を G-ξ'η'ζ' とする。つぎに原点 G より ζ' 軸のまわりに φ，η' 軸まわりに θ だけ座標を回転してその座標系を G-ξ''η''ζ'' とする。以下この順に座標の変換を行っていく。

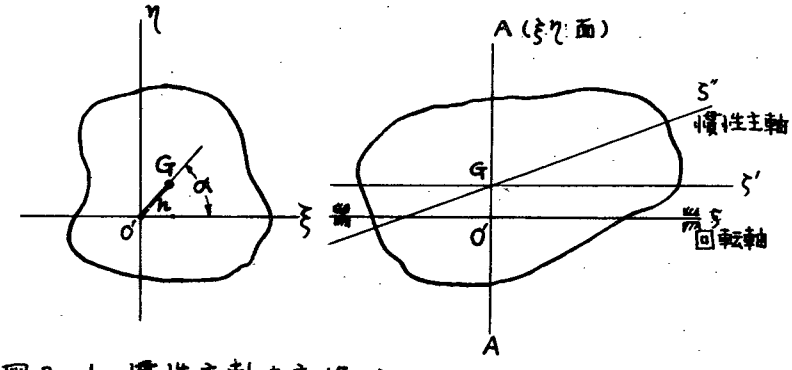


図 2-1 慣性主軸を変換するつりあわせ方法の場合の座標

O'-ξηζ 座標から G-ξ'η'ζ' 座標への平行移動によって (2-7) 式の $\mathcal{J}$ は，

$$\mathcal{J}_{(G-\xi'\eta'\zeta')} = \mathcal{J}_{(O'-\xi\eta\zeta)} + M \begin{pmatrix} \eta_G^2+\zeta_G^2 & -\xi_G\eta_G & -\zeta_G\xi_G \\ -\xi_G\eta_G & \zeta_G^2+\xi_G^2 & -\eta_G\zeta_G \\ -\zeta_G\xi_G & -\eta_G\zeta_G & \xi_G^2+\eta_G^2 \end{pmatrix} \quad 2\text{-}16$$

ただし，

$$\begin{pmatrix} \xi_G \\ \eta_G \\ \zeta_G \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。つぎに，$\mathcal{J}_{(G-\xi'\eta'\zeta')}$ を ζ' 軸まわりに φ だけ回転し，その後，新しくできた η' 軸について θ だけ座標を回転すると，

$$\mathcal{J}_{(G-\xi''\eta''\zeta'')} = R'_{\eta'}\, R'_{\zeta'}\, \mathcal{J}_{(G-\xi'\eta'\zeta')}\, R_{\zeta'} R_{\eta'} \quad 2\text{-}17$$

となる。ただし，$R'_{\zeta'}$，$R'_{\eta'}$ はそれぞれ $R_{\zeta'}$，$R_{\eta'}$ の逆行列で $R_{\zeta'}$，$R_{\eta'}$ は次式で与えられる。

$$R_{\zeta'} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2-18$$

$$R_{\eta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad 2-19$$

(2-16)～(2-19)式の変換を行なった結果をみると，変換後の慣性モーメントおよび慣性乗積 I_{ij} ($i=1,2,3$, $j=1,2,3$) は変換前の I_{ij} に係数 $k, \alpha, \varphi, \theta$ がかかっていることになる。したがって変換後の I_{ij} を(2-14),(2-15)式に代入して $N_\xi^{(1)}$, $N_\eta^{(1)}$, $F_\xi^{(1)}$, $F_\eta^{(2)}$ がすべて0になるように $k, \alpha, \varphi, \theta$ を求めれば，得られた座標系 $G-\xi''\eta''\zeta''$ の ζ'' 軸に回転軸を一致させればよい。

2－2. 修正おもりをつける方法

図2-2のように回転軸に垂直な任意の修正面 A，B および重心を通る面Gを考える。G面とA面およびB面との距離をそれぞれ l_1, l_2 とし，A面，B面上で，ξ 軸との角度がそれぞれ α_1, α_2 で半径 r_1, r_2 の位置に修正おもり m_1, m_2 をつけるとする。この修正おもりをつけることによって重心がGから O' へ移ることが必要であるから，次式が成立すればよい。

$$\int \xi \, dm = 0 \quad , \quad \int \eta \, dm = 0 \qquad 2-20$$

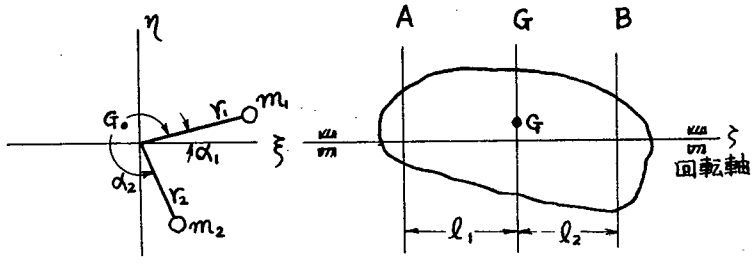


図 2-2 修正質量をつけるつりあわせの場合の座標

また，修正おもりをつけることによって，慣性主軸が回転軸に一致することが必要であるから，この条件から次式が得られる。

$$\int \xi\eta\, dm = 0 \quad , \quad \int \eta\zeta\, dm = 0 \qquad 2\text{-}21$$

(2-20)式はつぎのようにロータ本体と修正おもりに分けて考えることができる。

$$\int \xi\, dm = \int_{body} \xi\, dm + \int_{B.W.} \xi\, dm$$

$$= M\xi_G + m_1 r_1 \cos\alpha_1 + m_2 r_2 \cos\alpha_2 = 0 \qquad 2\text{-}22$$

$$\int \eta\, dm = \int_{body} \eta\, dm + \int_{B.W.} \eta\, dm$$

$$= M\eta_G + m_1 r_1 \sin\alpha_1 + m_2 r_2 \sin\alpha_2 = 0$$

また，(2-21)式についても同様にして，

$$\int \xi\zeta\, dm = \int_{body} \xi\zeta\, dm + \int_{B.W.} \xi\zeta\, dm$$

$$= I_{13} + m_1 l_1 r_1 \cos\alpha_1 + m_2 l_2 r_2 \cos\alpha_2 = 0$$

$$\int \eta\zeta\, dm = \int_{body} \eta\zeta\, dm + \int_{B.W.} \eta\zeta\, dm \qquad 2\text{-}23$$

$$= I_{23} + m_1 l_1 r_1 \sin\alpha_1 + m_2 l_2 r_2 \sin\alpha_2 = 0$$

となる。回転軸の合力およびモーメントは，(2-14)(2-15)式において，ξ_G, η_G および I_{13}, I_{23} が0であれば，0となるから，(2-22)および(2-23)を満たすように α_1, α_2 および $m_1 r_1$, $m_2 r_2$ を決めれば回転軸のつりあいがとれたことになる。

2－3　ふつりあいの形態

a) 円板状ロータの場合

図2－3に示すように，つりあいのとれた円板状ロータの回転軸から r(mm) だけ離れたところに重量 w(g) のおもりを付けたとする。このロータが角速度 ω で回転するとすれば，遠心力Pは，

$$P = \frac{mr\omega^2}{g}$$

であり，これは軸受に力を与える。このロータの力のつりあいをとるためには，ふつりあいのついている質量と反対向きに mr をつければよい。この量を偏心重量といい，$U = mr$ で表わすことにする。これは，静的なふつりあいを表わす量であって，「静ふつりあい」という。

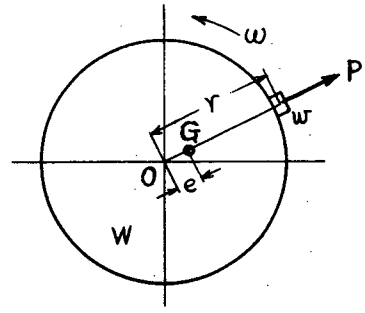


図2-3 静つりあいの場合

実際の使用状態で機械におよぼすふつりあいの効果は，偏心重量とロータの重量との比によって定まるので偏心量を

$$\varepsilon = \frac{U}{W_R} = \frac{wr}{W} \qquad 2\text{-}25$$

で表わし，「偏重心」と呼ぶ。w を (g)，r を (mm)，W を (kg) で表わすと，ε は $1/1000\ (mm) = \mu$ の単位で与えられる。

b)軸方向に長い一般ロータの場合

図2－4に示すロータを3つに輪切りして，図2－4の円板が3つ並んだものと考える。そのおのおのに向きと大きさを異にするふつりあい U_1, U_2, U_3 があるものとする。いま，ロータの両端面 L，R においてふつりあいを修正除去するものとすれば，U_1 を静力学の法則に従って L，R 面上のベクトル U_1', U_1'' に分解すると，

$$U_1' = \left(1 - \frac{a_1}{\ell}\right) U_1$$

$$U_1'' = \frac{a_1}{\ell} U_1 \qquad 2\text{-}26$$

となる。U_2, U_3 についても同様に分解すると，3つのふつりあい，U_1, U_2, U_3 は，L 面上の合ベクトル $U_L = U_1' + U_2' + U_3'$ と R 面上

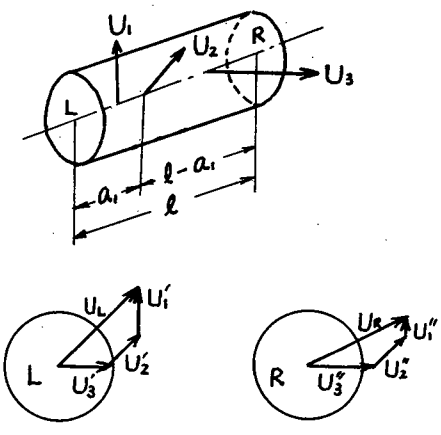


図2-4.偶力つりあいの場合

の合ベクトル $U_R = U_1'' + U_2'' + U_3''$ との2つの独立な不つりあいに置きかえることができる。このように適当に選んだ2つの修正面上で，互いに独立なベクトルで表わされるようなふつりあいの状態を「動ふつりあい」という。

動ふつりあいは，次のような性質がある。

(動ふつりあい) = (静ふつりあい) + (偶力ふつりあい)

ここで，偶力ふつりあいとは，2つの修正面上で互いに大きさ等しく向きが反対である1対のふつりあいをいう。

この種のロータのふつりあいは，(2-25)式の考え方にもとずいて表わそうとすれば，修正面の位置によって偏心量が異なるので，修正面における偏心量で表わさなければならない。すなわち，

$$\varepsilon_L = \frac{U_L}{W_L} \quad , \quad \varepsilon_R = \frac{U_R}{W_R} \qquad 2\text{-}27$$

ただし，W_L, W_R は，ロータ重量が2つの修正面位置に集中したとして分配した等価重量で表わし，この ε のことを「修正面偏心」という。

この定義によれば，円板状ロータにおける偏重心は，修正面偏心にて両修正面が合致したときの特別な場合と考えることができ，本質的には，両者は同じものである。

第3節 弾性ロータと剛性ロータ

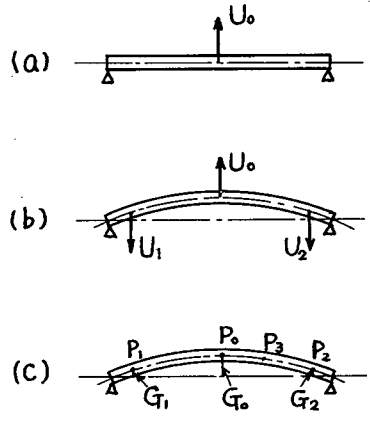
剛性ロータのつりあわせに関しては前節で述べた。しかし，低速でこのようなつりあわせ方法で正確につりあわせを行なっても実際に運転してみるとふつりあいを生ずる場合がある。ISO (International Organization for Standardization) ロータのつりあわせ部門ではこのようなロータを一般に弾性ロータと呼んでいる。このようなことが起る原因は主にロータがたわむことにある。

いま，図2-5(a)のように，両端単純支持されたロータにふつりあい U_0 があるとすると，前節のつりあわせ方法によれば，任

意の位置に修正面を選ぶことができるから，両軸受付近に選ぶとすれば，修正質量 U_1, U_2 が定まる。しかし，このロータが一次危険速度付近の回転速度に近ずくと，図2-5(b)のようにたわむ。したがって，つりあわせにおいてロータのたわみの影響を入れなければならない。このために影響係数を考える。図2-5(c)で点 P_0, P_1, P_2 に単位質量をつけたときの点 P_3 のたわみ量，すなわち，影響係数をそれぞれ G_0, G_1, G_2 とすれば，点 P_0, P_1, P_2 にそれぞれ U_0, U_1 U_2 のふつりあいのある場合の P_3 点のたわみ量は，

$$G_0U_0 - G_1U_1 - G_2U_2$$

である。ここで，U_0 が初期ふつりあい量であり，U_1, U_2 が修正量である場合に，剛性ロータのつりあわせの条件では，上式を0にする条件が入っていないため必ずしも0にならない。したがって，剛性ロータのつりあわせだけをおこなってもつりあわせがとれないのである。このような場合には，軸の弾性も考慮したつりあわせ方法を考えなければいけない。この問題については，次章以下で述べることにし，ここでは，剛性ロータと弾性ロータの境界領域に存在するようなロータの例をあげて説明し，いずれの方法でつりあわせをとるべきか判断するための指針を与える。



G：影響係数

図2-5 弾性ロータの影響係数

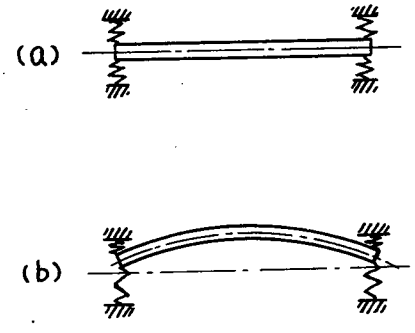


図2-6. 軸支持が弾性の場合の弾性ロータ

すべり軸受を有するロータの場合，軸受の弾性がかなり大きく，図2-6(a)に示す系におきかえることができる。このようなロータ系では，1次危険速度付近では図2-6(b)のように軸と軸受部とがたわむことになる。この場合，軸が軸受よりも十分剛であれば剛性ロータとしてつりあわせが可能であり，逆に軸受が軸より十分剛であれば，弾性ロータとしてつりあわせを行わねばならない。その中間領域では，使用回転速度との関係が密接になる。図2-7には，図2-6(a)の軸の軸受ばね定数とロータの危険速度との関係を示している。図の横軸は，ロータ系の危険速度とロータを単純支持したときの危険速度の比とし，縦軸は，軸受のばね定数とロータを支持したときの等価ばね定数との比である。この図より軸受ばね定数と危険速度の関係がよくわかる。図2-8には，図2-7中の点A，B，Cにおける1次モードを示している。

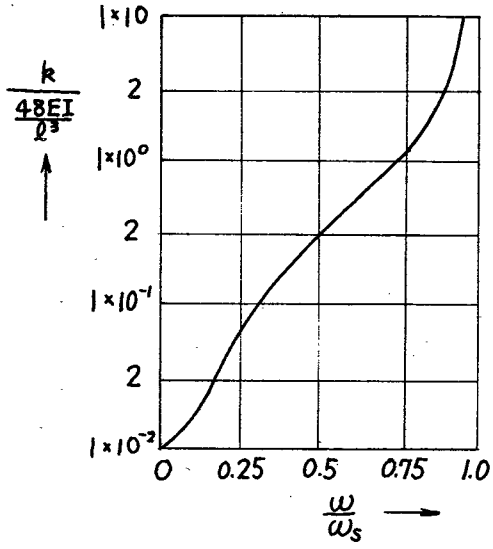


図2-7. バネ支持の強さと危険速度との関係

図2-9(a)はロータの中央の剛性の高い部分と両端の剛性の弱い部分とからできているロータである。このようなロータでは両端単純支持の条件を満たす軸受であっても，ふつりあいの分布は中央部で感度が高いため，図2-9(b)，(c)のようなモード型となり，これは中央の部分だけ考えると剛性ロータと同じになるので，2面でつりあわせが可能である。

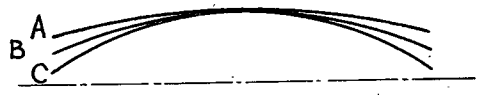


図2-8. バネ支持されている場合の振動モード

以上のように，形状または，

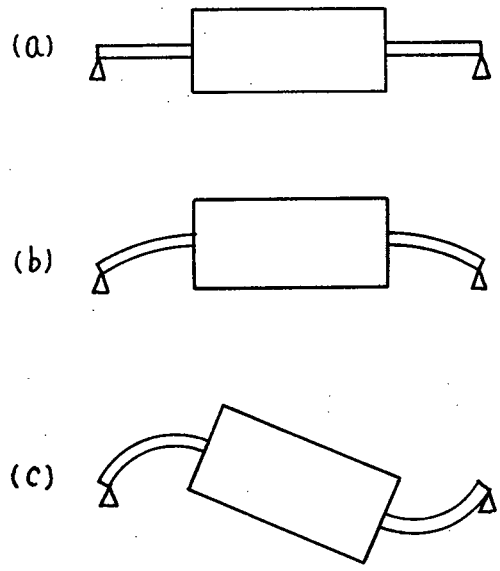


図2-9. 剛体と弾性軸とから成るロータの振動モード

ロータ系によってつりあわせの方法が異なるとともに，使用する回転速度によっても異なる。ISO/TC108/WG6では，使用回転速度が1次危険速度の60%以下の場合を剛性ロータのつりあわせ方法の適用できる範囲としている。しかし，前述のような理由によって，一概にそう結論ずけることはできない。

結局，弾性ロータと剛性ロータの区別は，ロータ系全体の振動特性と運転速度との関係および，ロータの形状との関係で決まるといえる。以下の章では，ロータの形状の効果にはふれず，一様なロータと仮定したときの種々の解析を行なっている。

第3章
弾性ロータのつりあわせ（I）
（剛軸受台で支持される場合）

第1節　まえがき

弾性ロータをつりあわせる方法として，一般に2つの方法が考えられる。一つは，剛軸受台を用いる方法で，その場合は，一般に使用されているものとほぼ同じ軸受を用い，軸受台は剛である。他の一つは，軸受は前者と同様であるが，軸受台が剛体のつりあわせ試験機と同様にやわらかいばねで支えられた軟軸受台を用いる方法である。

剛な軸受を用いたつりあわせの方法は，R.E.D. Bishop ら[4],[6],[14] あるいは，A.H. Church ら[10]によって研究されている。この方法では，次数の低い正規モードから順番に必要なモード数だけつりあいをとれば，それで望みのモードまでは，理想的には，つりあいがとれることがわかっている。しかし，R.E.D. Bishop らの方法によれば，つりあわせのためにはつりあわせるモードの危険速度上で運転しなければならず，それは実際上非常に危険なことである。また，A.H. Church らの方法によれば 軸の振幅を測定しなければならず，タービンやファンのような場合には 振幅の測定はほとんど不可能である。実際的な面を考えたつりあわせの方法としては，振動は軸受で測定し，つりあわせ速度は，危険速度以外のところに設定することが望ましい。

本章では，軸受反力を零にするつりあわせ方法について検討し，この方法とモーダルバランスの方法のつりあわせ効果について比較検討する。また，弾性ロータのつりあわせの条件に，静つりあいと動つりあいの条件を入れること，および，残留不つりあい分をとり去るために1つのつりあわせ速度を付加する方法等について論じる。そして，その方法が従来提案されている Federn，Bishop 等の方法よりもすぐれていることを示す。

第2節　つりあわせの方法

つりあわせをおこなう場合，つりあいの条件を明確にしておくことが必要である。回転機械の性能上の見地から考えれば，それは次の要求を満たすことになる。

1)軸受にロータの自重以外の力が作用しない。

2)ふれまわりを起こさない。

以上の条件を満たすつりあわせの方法について以下で一様な断面を有する軸について説明をおこなう。

2－1　軸受力を零にするつりあわせ方法.

危険速度以外では，不つりあいの位置が非対称であれば，軸受反力の大きさは異なる。したがって，つりあわせ方法として，不つりあいが左右対称な場合と非対称な場合に分けることができる。また，静つりあいと動つりあいの条件を加えた場合があるのでこれらの方法について説明を行う。

2－2－1　不つりあいが左右対称の場合

この場合は，右側軸受と左側軸受の力が等しいので，軸の長手方向の半分について考えれば十分である。したがって，軸系を図3－1のように軸全長を2ℓ，不つりあいの位置を中央から左右へℓ_0のところにとる。修正質量も同様に左右へ$\ell_1, \ell_2 \cdots \ell_n$とつけるとする。このようにすれば，単位ふつりあい力によって，左右軸受にかかる力は，Ωの回転速度では，

$$f_L = f_R = G_s(\sqrt{\Omega}, \frac{\ell_0}{\ell}) + U_1 G_s(\sqrt{\Omega}, \frac{\ell_1}{\ell}) + \cdots \cdots + U_n G_s(\sqrt{\Omega}, \frac{\ell_n}{\ell}) \qquad 3\text{-}1$$

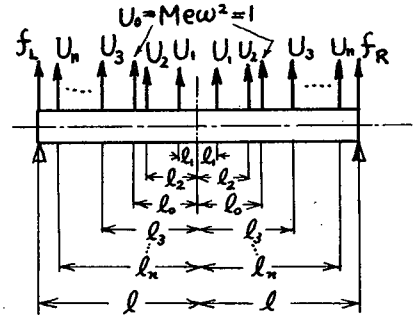


図3-1. 不つりあいが対称な場合の軸受反力を0にするつりあわせ

ただし,

$$G_s(\sqrt{\Omega}, \frac{l_i}{l}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\beta l_i}{\cos\beta l} + \frac{\cos\beta l_i}{\cosh\beta l}\right) \qquad (i=0\sim n)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\omega^2 \times \frac{A\rho}{EI}} \quad , \quad \omega = \Omega \times \omega_i^* \qquad 3-2$$

つりあいの条件として，軸受にかかる自重以外の力を0にするようにすれば，(3-1)式の左辺が0になるようにすればよい。l_0, l_1, …… l_n は設定することができるから，未知量は，$U_1 \cdots U_n$ である。未知数がn個あれば，方程式もn個必要であるから，回転数をn個設定しなければいけない。そうすれば，n個の未知数とn個の方程式で解が確定する。すなわち，中央を原点として対称に l_0 の位置にふつりあい $Me\omega^2 = 1$ があるとき，$l_1, \cdots l_n$ で修正しようとすれば，修正質量 $U_1 \cdots U_n$ を求める式は，

$$\begin{cases} G_s(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l_0}{l}) + U_1 G_s(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l_1}{l}) + U_2 G_s(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l_2}{l}) + \cdots + U_n G_s(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l_n}{l}) = 0 \\ G_s(\sqrt{\Omega_2}, \frac{l_0}{l}) + U_1 G_s(\sqrt{\Omega_2}, \frac{l_1}{l}) + U_2 G_s(\sqrt{\Omega_2}, \frac{l_2}{l}) + \cdots + U_n G_s(\sqrt{\Omega_2}, \frac{l_n}{l}) = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad 3-3 \\ G_s(\sqrt{\Omega_n}, \frac{l_0}{l}) + U_1 G_s(\sqrt{\Omega_n}, \frac{l_1}{l}) + U_2 G_s(\sqrt{\Omega_n}, \frac{l_2}{l}) + \cdots + U_n G_s(\sqrt{\Omega_n}, \frac{l_n}{l}) = 0 \end{cases}$$

となる。

2－1－2 不つりあいが非対称な場合

この場合は，軸受左右に働く力は一般に異なる。したがって，軸全長を l として，左右の軸受力を同時に評価しなければならない。今，軸系を図3－2のように 左側軸受を原点として そこからふつりあい質量のある位置までを l_0，ふつりあい量を $Me\omega^2 = 1$，また，修正質量のある位置までを $l_1, l_2 \cdots l_{2n}$ とし，修正質量を $U_1, U_2 \cdots U_{2n}$ とすれば，

$$f_L = G(\sqrt{\Omega}, \frac{l-l_0}{l}) + U_1 G(\sqrt{\Omega}, \frac{l-l_1}{l}) + U_2 G(\sqrt{\Omega}, \frac{l-l_2}{l}) + \cdots + U_{2n} G(\sqrt{\Omega}, \frac{l-l_{2n}}{l})$$

$$f_R = G(\sqrt{\Omega}, \frac{l_0}{l}) + U_1 G(\sqrt{\Omega}, \frac{l_1}{l}) + U_2 G(\sqrt{\Omega}, \frac{l_2}{l}) + \cdots + U_{2n} G(\sqrt{\Omega}, \frac{l_{2n}}{l}) \qquad 3-4$$

として，軸受反力を求めることができる。ただし，

$$G(\sqrt{\Omega}, \frac{l_i}{l}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\beta l_i}{\sin\beta l} + \frac{\sinh\beta l_i}{\sinh\beta l}\right)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\omega^2 \cdot \frac{A\rho}{EI}}, \qquad \omega = \Omega \times \omega_i^* \qquad 3-5$$

（付録参照）とする。

つりあわせについては，前項と同様にある設定された回転速度で軸受反力が零となる条件として，つりあわせ速度を n 個設定したとすれば，$2n$ 個の未知数と $2n$ 個の方程式より，未知数が一価に決まる。すなわち，修正質量を求める連立方程式は，

$$\begin{cases}
G(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l-l_0}{l}) + U_1 G(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l-l_1}{l}) + U_2 G(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l-l_2}{l}) + \cdots + U_{2n} G(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l-l_{2n}}{l}) = 0 \\
G(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l_0}{l}) + U_1 G(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l_1}{l}) + U_2 G(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l_2}{l}) + \cdots + U_{2n} G(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l_{2n}}{l}) = 0 \\
G(\sqrt{\Omega_2}, \frac{l-l_0}{l}) + U_1 G(\sqrt{\Omega_2}, \frac{l-l_1}{l}) + U_2 G(\sqrt{\Omega_2}, \frac{l-l_2}{l}) + \cdots + U_{2n} G(\sqrt{\Omega_2}, \frac{l-l_{2n}}{l}) = 0 \\
G(\sqrt{\Omega_2}, \frac{l_0}{l}) + U_1 G(\sqrt{\Omega_2}, \frac{l_1}{l}) + U_2 G(\sqrt{\Omega_2}, \frac{l_2}{l}) + \cdots + U_{2n} G(\sqrt{\Omega_2}, \frac{l_{2n}}{l}) = 0 \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
G(\sqrt{\Omega_n}, \frac{l-l_0}{l}) + U_1 G(\sqrt{\Omega_n}, \frac{l-l_1}{l}) + U_2 G(\sqrt{\Omega_n}, \frac{l-l_2}{l}) + \cdots + U_{2n} G(\sqrt{\Omega_n}, \frac{l-l_{2n}}{l}) = 0 \\
G(\sqrt{\Omega_n}, \frac{l_0}{l}) + U_1 G(\sqrt{\Omega_n}, \frac{l_1}{l}) + U_2 G(\sqrt{\Omega_n}, \frac{l_2}{l}) + \cdots + U_{2n} G(\sqrt{\Omega_n}, \frac{l_{2n}}{l}) = 0
\end{cases} \qquad 3-6$$

となる。したがって，対称な不つりあいがあるときに比べて連立方程式の数は2倍になるが，修正質量の数は，実際にとりつけるときには，同じ数である。

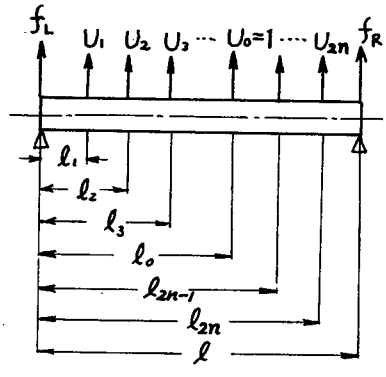


図3-2. 不つりあいが非対称な場合の軸受反力を0にするつりあわせ

軸受反力を0にするつりあわせでは，つりあわせをする回転速度を任意に選ぶことができるので，使用回転速度で軸受力を0にすることが可能である。しかし，その反面，危険速度以上の1次モードから2次モードが同程度にでてくる速度で不つりあい量の大きさに関係なく軸受反力が0になる速度があり，そのような回転速度でつりあわせを行うと，大きな失敗をすることになる。

つりあわせは一般に実現できる振幅の範囲で最も大きい振幅の回転速度にすることが望ましいと考えられる。したがって，1次2次…の危険速度付近を選ぶと，効果的なつりあわせができる。また，修正質量の位置は，各モードの腹にくるように，軸の長手方向にほぼ一様に分布することが望ましい。

2－2　モーダルバランス法.

連続体の振動は，直交するモードの合成によって表わすことができ，各々のモードは独立である。したがって，各モードごとにつりあいをとれば，理論的に回転軸のつりあいはとれるはずである。このように各モードごとにつりあいをとる方法をモーダルバランス法という。この際，1次，2次危険速度付近における運転に対しては，1次，2次モードが優性であり，3次以上のモードについては，その寸を野をひろうことになる。したがって，つりあわせについては，使用運転速度までのモードまたは，それより1つ上のモードまでのつりあわせをすることで満足している。

図3－3の軸系について，つりあわせの方法を述べる。i次モードについて，l_jの位置に単位不つりあいをつけたときの影響係数を$G(\sqrt{\Omega}_i, l_j)$とすれば，l_0の位置に不つりあいがあるとき，$l_1 \cdots l_n$の位置に修正質量をつけてn個の危険速度でつりあいをとるための方程式は，

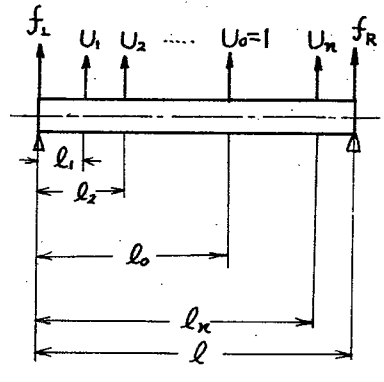


図3-3. モーダルバランス

$$G_M(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l_0}{l}) + U_1 G_M(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l_1}{l}) + U_2 G_M(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l_2}{l}) + \cdots + U_n G_M(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l_n}{l}) = 0$$

$$G_M(\sqrt{\Omega_2}, \frac{l_0}{l}) + U_1 G_M(\sqrt{\Omega_2}, \frac{l_1}{l}) + U_2 G_M(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l_2}{l}) + \cdots + U_n G_M(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l_n}{l}) = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad 3-7$$

$$G_M(\sqrt{\Omega_n}, \frac{l_0}{l}) + U_1 G_M(\sqrt{\Omega_n}, \frac{l_1}{l}) + U_2 G_M(\sqrt{\Omega_n}, \frac{l_2}{l}) + \cdots + U_n G_M(\sqrt{\Omega_1}, \frac{l_n}{l}) = 0$$

である。ただし，$G_M(\sqrt{\Omega_i}, \frac{l_j}{l})$ は一様断面軸で，両端単純支持のときは，

$$G_M(\sqrt{\Omega_i}, \frac{l_j}{l}) = \sin \frac{i\pi l_j}{l} \qquad 3-8$$

で与えられる。

実際のつりあわせについては，上述のようにしても行えるが，各モードごとにつりあわせを行なう方法もある。すなわち，第1回目のつりあわせ速度の軸受力が0または最小になるように第1回目のつりあわせ量を決める。つぎに第2回目のつりあわせ速度で，第1回目のつりあわせ速度のモードのつりあわせを乱さないという条件で，軸受力を0または最小になるようなつりあわせ量を決める。第3回目以下も同様にして，以前につりあわせたモードのつりあいを乱さないという条件のもとでつりあわせを行なう。

2－3　静つりあいと動つりあいの条件

一般にふつりあい量が軸長手方向に分布しているとして，それを $U_1, U_2 \cdots U_n$ の修正量で静的つりあいをとるとすれば，

$$\int_0^l \varepsilon(s)\, ds + \sum_{j=1}^{n} U_j = 0 \qquad 3-9$$

また，動的つりあいをとるための条件は，

$$\int_0^l \varepsilon(s) \cdot s\, ds + \sum_{j=1}^{n} U_j l_j = 0 \qquad 3-10$$

である。

ところで，弾性ロータのつりあわせを行う前に，静的つりあわせと動的つりあわせがとられているならば，(3-9),(3-10) 式は，

$$\sum_{j=1}^{n} U_j = 0 \qquad 3-11$$

$$\sum_{j=1}^{n} U_j \cdot l_j = 0 \qquad 3-12$$

となる。

この条件を，軸受力を0にするつりあわせ方法に加えると，n速度のつりあわせに対して，つりあわせ面が $2n+2$ になる。

ふつりあいが左右対称な場合は，動的不つりあいが生じず，その場合のつりあわせの式は，(3-3),(3-11),(3-12)より，

$$\sum_{j=0}^{n+1} U_j = 0$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} U_j \cdot l_j = 0 \qquad 3-13$$

$$\sum_{\substack{j=0 \\ i=1}}^{m+1} U_j G_s(\sqrt{\Omega_i}, l_j) = 0$$

となる。ただし，$U_0 = 1$ とする。

また，左右非対称な不つりあいを持つ場合には，動的つりあいの条件も入ってきて，(3-6),(3-11),(3-12)式より，

$$\sum_{j=0}^{n+2} U_j = 0$$

$$\sum_{j=0}^{n+2} U_j l_j = 0$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=0}}^{n+2} U_j G(\sqrt{\Omega_i}, \frac{l-l_j}{l}) = 0 \qquad 3-14$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=0}}^{n+2} U_j \cdot G(\sqrt{\Omega_i}, \frac{l_j}{l}) = 0$$

となる。ただし，$U_0 = 1$ とする。

つぎに，モーダルバランス法の場合には，n速度でつりあわせを行うとすれば，(3-7),(3-11),(3-12)式より，

$$\sum_{j=0}^{n+2} U_j = 0$$

$$\sum_{j=0}^{n+2} U_j \cdot l_j = 0 \qquad 3\text{-}15$$

$$\sum_{i=1}^{n+2} \sum_{j=0}^{n+2} U_j \cdot G_M(\sqrt{\Omega_i}, \frac{l_j}{l}) = 0$$

となる。ただし、$U_0 = 1$ とする。

第3節 つりあわせ効果の検討

前節のつりあわせ方法にもとずいて計算した結果について検討する。

図3-4は、ふつりあいが対称な場合で、$l_0/l = 0.5$ の位置に $M\varepsilon\omega^2 = 1$ のふつりあいがついているときの軸受応答である。対称であるので、偶数次モードの振動は共振していない。

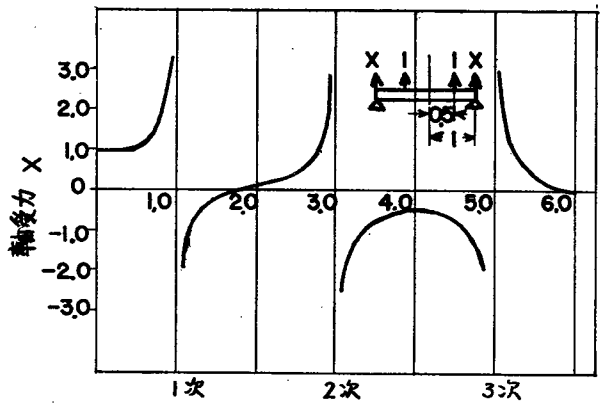


図3-4 不つりあい力の応答曲線

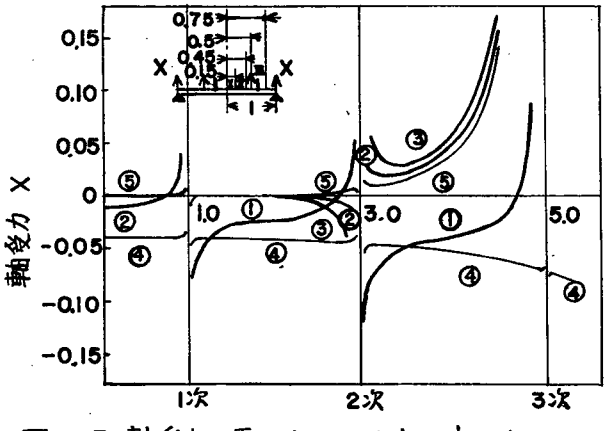


図3-5 軸受力を零にするつりあわせ法によるつりあわせ応答
(左右対称のふつりあいの場合

図３－５は，図３－４のようなふつりあい状態を修正面 l_i/l ＝ 0.15，0.45，0.75 の６面で修正した場合の軸変応答である。この場合３つのつりあわせ速度 $\sqrt{\Omega_i}$ の選び方として，表3-1 の５つとした。また，修正量についても記してある。この図において，

表3-1 図3-5のつりあわせ速度および修正量

	つりあわせ速度			修正量		
	$\sqrt{\Omega_1}$	$\sqrt{\Omega_2}$	$\sqrt{\Omega_3}$	U_1	U_2	U_3
1	0.8	2.8	4.8	0.0757	−0.9340	−0.1524
2	0.8	1.2	2.8	0.1241	−1.0525	−0.0716
3	0.6	0.9	1.1	0.1338	−1.0678	−0.0660
4	0.999	2.999	4.999	0.0686	−0.9236	−0.1864
5	0.001	0.999	2.999	0.0956	−0.5822	−0.6211

2，3は３次危険速度以下ではつりあわせがよくとれている。この理由として，$\sqrt{\Omega_1}$ ＝ 0.8，0.6 は，あまり弾性ロータの影響はでていず，静つりあいと動つりあいのつりあわせ効果もかなりあることがわかる。4，5は，危険速度に接近させてつりあわせたときで，５の $\sqrt{\Omega_1}$ ＝ 0.001 は静つりあいと動つりあいの条件に相当している。１，４のつりあわせ速度では，静つりあいと動つりあいの条件が満たされていない。したがって，低速回転における振動が少し生じている。

図３－６は，ふつりあい量が l_0/l ＝ 0.65 の位置にあるときの軸変応答である。図３－７は，図３－６のふつりあいを３速度でつりあわせた場合で 表３－２の３種類について計算をおこなっている。そのときの修正量も表３－２に記してある。この図において，２，３は低速回転においてよくつりあいがとれている。図3-5 とくらべるとき，縦軸が 1/100 になっていることに注意を要する。２では，２次危険速度付近まで静かな運転が期待できる。１から対称な場合と同様に，静つりあいと動つりあいは，つりあ

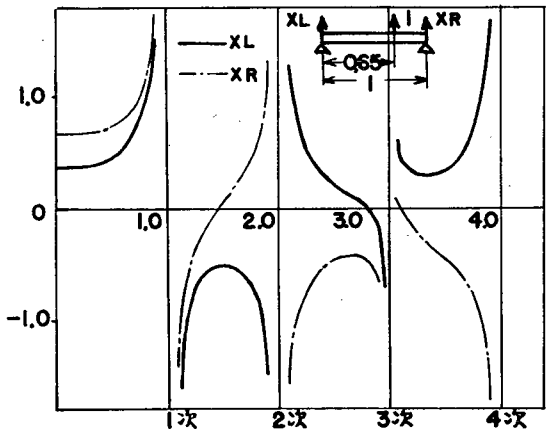


図3-6 不つりあい応答曲線

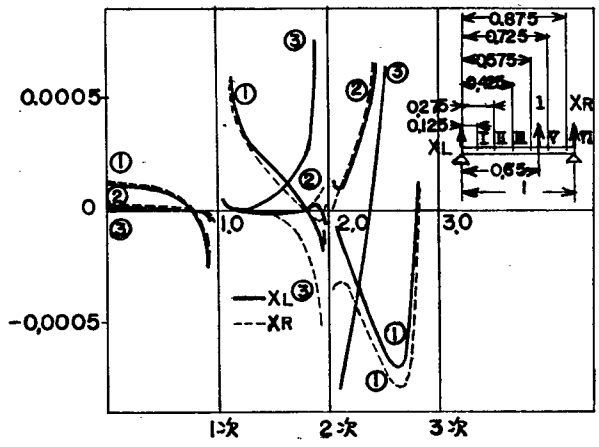


図3-7 軸受力を零にするつりあわせ法によるつりあわせ応答
(左右非対称)

表3-2 図3-7のつりあわせ速度と修正面

	つりあわせ速度			修正量					
	$\sqrt{\Omega_1}$	$\sqrt{\Omega_2}$	$\sqrt{\Omega_3}$	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
1	0.8	1.8	2.8	0.0177	-0.0916	0.2590	-0.7727	-0.4531	0.0409
2	0.8	1.2	1.8	0.0146	-0.0847	0.2573	-0.7819	-0.4420	0.0368
3	0.6	0.9	1.1	0.0174	-0.0982	0.2848	-0.8119	-0.4247	0.0326

わせ後も満たしておくことが望ましいと考えられる。

図3-8には，図3-6のふつりあいをモーダルバランス法によってつりあわせた場合の効果が示してある。つりあわせ速度は，

危険速度であり，つりあわせ速度と，静つりあいと動つりあいを含めた場合と含めない場合，および，それらの修正量を表3－3に示す。この図より，静つりあいと動つりあいの条件が入っていなければ，低速度における不つりあいは大きいことがわかる。また，モーダルバランス法では，つりあわせたモードの振動は0であってもそれより上のモードがかなりきいていて，つりあわせた最高速度よりも少し上の速度では，振幅は急激に大きくなる。

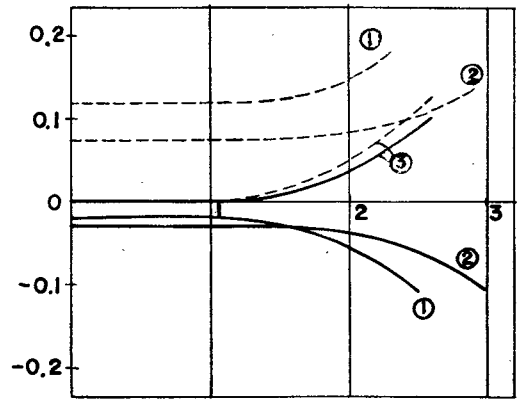


図3-8 モーダルバランス法によるつりあわせ応答

以上の計算による検討結果から，全運転速度範囲で良好なつりあわせを得るための条件として，次のことが言える。

1) 弾性ロータとしてのつりあわせを完了した後において，剛体としての静的つりあわせと動的つりあわせの条件を満たしていること。

2) 図3－5の⑤と，②，③との比較および，図3－8の検討により，運転速度範囲内の危険速度のモードがつりあわされていること。

3) 上記(1)および(2)の条件を満足している場合でも，最高回転速

表3-3 図3-8のつりあわせ速度と修正量

		つりあわせ速度	修正量			
			U_1	U_2	U_3	U_4
1	2面2速度	1次，2次危険速度	0.3189	0.809		
2	3面3速度	1次，2次，3次危険速度	-0.1448	0.5237	0.6642	
3	4面2速度	1次，2次危険速度	0.0399	-0.8207	1.6784	0.1025

度が高いときには，更に高次のモード成分のすそ野をひろって振動が生じる可能性がある。このようなとき，最高回転速度よりも上にあるいくつかの危険速度のモードも小さくする必要がある。

第4節　前節の条件を満たすためのつりあわせ方法

前節の条件を満たすとともに，つりあわせ作業の実行にあたっては，影響係数の測定などを考慮して，つりあわせ面の数の小ないことが強く要求されている。したがって，モーダルバランス法が，つりあわせ面の数からいって有利である。また，最高回転速度以上のつりあわせには，軸受力を零にするつりあわせ法が，一度に多くのモード成分を考慮するから，有利である。以上のことから，次のようなつりあわせ法を提案する。

1) 剛体の静つりあい及び動つりあいの条件式を入れたモーダルバランスの式(3-15)，または，軸受反力を零にする式(3-14)を用いる。

2) 高速回転の場合には，最高速度以上のつりあわせとして，軸受反力を0にする方法を使用する。その場合のつりあわせの式は，

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{j=0}^{n+4} U_j = 0 \\
\displaystyle\sum_{j=0}^{n+4} U_j \cdot \ell_j = 0 \\
\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ j=0}}^{n+4} U_j G_M\left(\sqrt{\Omega_i}, \frac{\ell_j}{\ell}\right) = 0 \\
\displaystyle\sum_{j=0}^{n+4} U_j G\left(\sqrt{\Omega_{n+1}}, \frac{\ell-\ell_j}{\ell}\right) = 0 \\
\displaystyle\sum_{j=0}^{n+4} U_j G\left(\sqrt{\Omega_{n+1}}, \frac{\ell_j}{\ell}\right) = 0
\end{cases}
\qquad 3-16
$$

となる。ただし，第1，2式は静つりあいと動つりあいの式で，

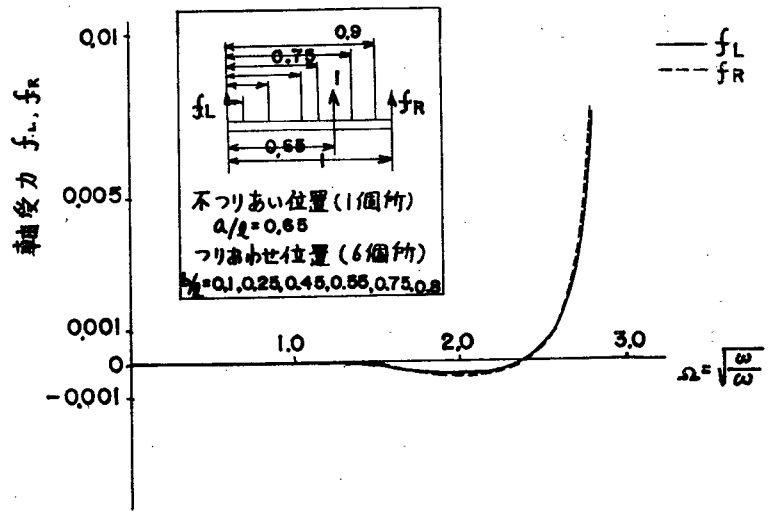


図3-9 改良型つりあわせ法によるつりあわせ後の応答

第3式はモーダルバランスの式で，第4，5式は，軸受反力を零にする3式である。

(3-16)式にもとづいて，ふつりあい位置 $\ell_0/\ell = 0.65$ のときのつりあわせをおこなった計算結果が図3-9である。この結果より，修正面6面では，図3-7よりもよい結果が得られていることがわかる。また，図3-8では，修正面が少なくてすむが，一つ上の危険速度まで上げてつりあわせることになるので実際的には困難な場合が多いと思われる。また，このつりあわせ方法は第2節のつりあいの条件を満たしていることがわかる。

つぎに，つりあわせ面の数について検討する。

前述の(1)では，モーダルバランス法を用いれば，静つりあいと動つりあいの条件を入れて $n+2$ 面であり，軸受力を零にする方法では $2n+2$ 面となる。また，(2)では，(3-16)式でわかるように，$n+4$ 面必要である。

第5節 まとめ

本章では，剛軸受台で支持される弾性ロータのつりあわせ方法について論じ，特に，一様な断面を有する回転軸の場合のつりあ

わせ効果について論じ，以下の結論を得た。

1) 弾性ロータとしてのつりあいが完了した後において，剛体としての静つりあいと動つりあいの条件を満たしていること。

2) 運転速度範囲内の危険速度のモードがつりあわされていること。

3) ふつりあいの許容量が小さい場合には，最高回転速度以上のモードを消すために，最高回転速度以上の速度でつりあわせをすること。

4) 以上の条件を満たすつりあわせ方法として，(3-16)式の方法が適していること。

5) (3-16)式のつりあわせ方法は，第2部のつりあわせの条件によく一致していること がわかった。

付録 影響係数の求め方

断面一様な回転軸が 偏心 $\varepsilon(s)$ の状態で分布しているときの回転軸の振動は，静止座標系で書けば次のようになる。

$$\frac{EI}{A\rho}\frac{\partial^4 x}{\partial s^4}+\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\omega^2\varepsilon(s)\cos\omega t \qquad A-3-1$$

境界条件として 軸受が単純支持の条件を満たすものとすれば，

$$\begin{aligned} &s=0 \text{ において}, \quad x=0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}=0 \\ &s=\ell \text{ において}, \quad x=0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}=0 \end{aligned} \qquad A-3-2$$

である。

以上の回転軸系の軸受に対する影響係数として，単位力がある位置に加わったときの軸受にかかる力を考える。これは右辺の遠心力の項を静的な単位力 f でおきかえたときの軸受にかかる力としてよい。(図A-1参照)。したがって，

$$\frac{d^4X}{ds^4}-\beta^4 X=0 \qquad A-3-3$$

なる式が $x=\ell_0$ のところで 単位のせん断力を受ける場合と同じになる。したがって，この式の解を求めればよい。

(A-3-3)式において解を次のようにおく．

$$X = A_1(\cosh\beta s + \cos\beta s) + A_2(\sinh\beta s + \sin\beta s) + A_3(\cosh\beta s - \cos\beta s) + A_4(\sinh\beta s - \sin\beta s) \qquad A-3-4$$

(A-3-4)式に $S=0$ の点の境界条件と $S=\ell_0$ の点においてせん断力に 1 の大きさの跳躍を持つ条件を入れると，

$$\begin{aligned} X(s) &= A_2(\sinh\beta s + \sin\beta s) + A_4(\sinh\beta s - \sin\beta s) \quad (0\leqq s\leqq \ell_0) \\ &= A_2(\sinh\beta s + \sin\beta s) + A_4(\sinh\beta s - \sin\beta s) \qquad A-3-5 \\ &\quad + \frac{1}{EI}\beta^{-3}(\sinh\beta(s-\ell_0) - \sin\beta(s-\ell_0)) \quad (\ell_0<s<\ell) \end{aligned}$$

となる。(A-3-5)式に $S=\ell$ における境界条件を代入して，A_2, A_4 を求めることができる。すなわち，

$$X|_{x=\ell} = A_2(\sinh\beta\ell + \sin\beta\ell) + A_4(\sinh\beta\ell - \sin\beta\ell) + \frac{1}{EI}\beta^{-3}(\sinh\beta(\ell-\ell_0) - \sin\beta(\ell-\ell_0)) = 0 \qquad A-3-6$$

$$X''|_{x=\ell} = A_2\beta^2(\sinh\beta\ell - \sin\beta\ell) + A_4\beta^2(\sinh\beta\ell + \sin\beta\ell) + \frac{1}{EI}\beta^{-1}(\sinh\beta(\ell-\ell_0) + \sin\beta(\ell-\ell_0)) = 0$$

となる。この式より A_2, A_4 を求めて，$S=0$ における反力を求めると，

$$G_L = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\beta(\ell-\ell_0}{\sin\beta\ell} + \frac{\sinh\beta(\ell-\ell_0)}{\sinh\beta\ell}\right) \qquad A-3-7$$

また，対称性により，$S=\ell$ の点の反力は，

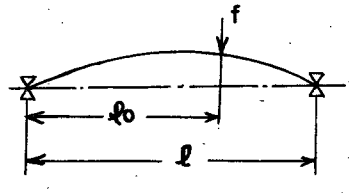


図 A-3-1 座標の図

$$G_R = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\beta l_0}{\sin\beta l} + \frac{\sinh\beta l_0}{\sinh\beta l}\right) \qquad A-3-8$$

となる。 この G_L, G_R が影響係数である。

いまかりに, $s = l_0$ なる点に $\varepsilon(l_0)$ なる偏心があるとすれば, そのとき 軸受にかかる反力は. (A-3-7), (A-3-8) 式を用いて,

$$w_L = A(l_0)\rho\varepsilon(l_0)\omega^2 \cdot G_L \qquad A-3-9$$

$$w_R = A(l_0)\rho\varepsilon(l_0)\omega^2 G_R \qquad A-3-10$$

となる。

第4章
弾性ロータのつりあわせ（II）
（軟軸受台で支持される場合）

第1節　まえがき

第3章では剛軸受台で支持された弾性ロータのつりあわせの考察をおこなった。本章では，軟軸受台で支持された場合について考察する。この種のつりあわせ方法の研究は，J.B. Wilcox によって示されている。しかし，軟軸受台の特性をよく理解し，その特徴を十分発揮できるように解析的に明らかにすることは望ましい。たとえば，軸受台のばね定数と軸受台の質量の関係，また，それらをばね質量系と考えた場合に，その固有振動数によって振動モードがどのように変わり，つりあわせをとる場合に，どの程度までとれるか　ということがある程度わかれば都合がよい。

そこで，本章では，軟軸受台をもつ弾性ロータのつりあわせ試験機として，両端の軸受台が水平方向にばねで支持され，垂直方向には両端単純支持のような非対称な軸受条件の回転軸の振動を解析し，軸受台の質量および支持ばねの固有値に与える影響，および，それらが回転軸のたわみと支持台のたわみの割合に及ぼす影響等の解析結果をもとにして，軟軸受台をもつつりあわせ試験機を用いたつりあわせ方法を検討する。また，一般の動つりあわせ試験機を弾性ロータのつりあわせに使えるように改造して，実験的につりあわせ方法について確かめている。

第2節　理論解析

軟軸受台を用いた弾性ロータのつりあわせ試験機を図4－1のようなモデルとして考える。また，解析の簡単化のために，ロータは長手方向に一様であり，柔に減衰はなく，ジャイロモーメントは微小であると仮定する。静止座標の2主平面をばね支持方向とそれに垂直な単純支持方向にとり，ロータの両端の支持条件は

等しいとする。このような仮定のもとで，静止座標系の運動方程式は，第Ⅰ編（2-9）式より２方向の運動方程式はそれぞれ独立するから，今後の解析に関係の深いばね支持の方向のみについて考えることにする。運動方程式は，

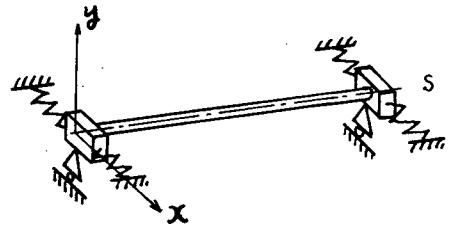


図4-1. ロータ系のモデル図

$$\frac{EI}{A\rho}\frac{\partial^4 x}{\partial s^4} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \omega^2 \varepsilon(s)\cos\omega t \qquad 4-1$$

境界条件は，$S=0$ において

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^3 x}{\partial s^3} = -N x(0,t)$$

$S=\ell$ において． 4-2

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = 0 \qquad \frac{\partial^3 x}{\partial s^3} = N x(\ell,t)$$

ただし，

$$P = \left(k - \frac{W_B}{g}\omega^2\right)/EI$$

$$= \mu^4 \ell \rho \left\{\left(\frac{\omega_B}{\omega}\right)^2 - 1\right\} \qquad 4-3$$

である。以上の条件のもとに，自由振動のモードと強制振動の応答について計算する。

自由振動のモードを求めるために，（4-1）式の右辺＝0とおいて，解を変数分離型で次のようにおく．

$$x(s,t) = \phi(s)\,g(t) \qquad 4-4$$

ただし，$\phi(s)$ は s のみの関数で，$g(t)$ は t のみの函数とする。（4-4）式を（4-1）式に代入すると，モードに関する式は，

$$\frac{d^4\phi(s)}{ds^4} - \mu^4\phi(s) = 0 \qquad 4-5$$

ただし，

$$\mu = \sqrt[4]{\frac{A\rho\omega^2}{EI}} \qquad 4-6$$

となり，(4-5)式は，一般に次の型の解を持つ。

$$\Phi(s) = C_1\cosh\mu s + C_2\sinh\mu s + C_3\cos\mu s + C_4\sin\mu s \qquad 4-7$$

(4-7)式に境界条件の式(4-2)を代入して，$C_1, C_2 \cdots C_4$ に関する連立方程式が得られる。この式が0以外の根を持つためには，係数行列式が0でなければならない。すなわち，

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ \cosh\mu l & -\sinh\mu l & -\cos\mu l & -\sin\mu l \\ P' & 1 & P' & -1 \\ P'\cosh\mu l-\sinh\mu l, & P'\sinh\mu l-\cosh\mu l, & P'\cos\mu l-\sin\mu l, & P'\sin\mu l+\cos\mu l \end{vmatrix} = 0 \qquad 4-8$$

ただし，$P' = \dfrac{P}{\mu^3} = \mu l\rho\left\{\left(\dfrac{\omega_B}{\omega}\right)^2 - 1\right\}$

したがって，(4-8)式を計算すると，特性方程式は，

$$2P'^2\sin\mu l\cdot\sinh\mu l - 2P'(\sin\mu l\cdot\cosh\mu l - \cos\mu l\sinh\mu l) - \cos\mu l\cdot\cosh\mu l + 1 = 0 \qquad (4-9)$$

また，モードについては，連立方程式の未知数 C_i ($i=1\sim4$) のうちの1つを1とおいて解くと，

$$\Phi(s) = \left(\frac{\sinh\mu l - \sin\mu l}{2P'\sin\mu l + \cos\mu l - \cosh\mu l}\right)(\cos\mu s + \cosh\mu s) + \sinh\mu s + \left\{\frac{2P'(\sinh\mu l - \sin\mu l)}{2P'\sin\mu l + \cos\mu l - \cosh\mu l} + 1\right\}\sin\mu s \qquad 4-10$$

が得られる。したがって，(4-9)式を満たす μ の値が求まれば，その値を(4-10)式に代入して，Sを変化させることによってモード形が得られる。

つぎに強制振動の応答の計算について考える。また，偏心がフ

一リエ級数で表わせるとして,

$$\varepsilon(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \phi_i(s) \qquad 4-11$$

ここで $\varepsilon_i = \int_0^{\ell} \varepsilon(s)\, \phi_i(s)\, ds$ 4-12

ただし, $\phi_i(s)$ は 直交関数であるとする。

つぎに, 強制振動の解を (4-1) 式の右辺を考慮して,

$$\chi(s,t) = \phi(s) \cos \omega t \qquad 4-13$$

とおいて, (4-1) 式に代入すると,

$$\frac{d^4\phi(s)}{ds^4} - \mu^4 \phi(s) = \mu^4 \varepsilon(s) \qquad 4-14$$

となる。 この同次方程式の解は一般に

$$\phi_0(s) = C_1 \cosh \mu's + C_2 \sinh \mu's + C_3 \cos \mu's + C_4 \sin \mu's \qquad 4-15$$

とかける。 偏心 $\varepsilon(s)$ をフーリエ級数で

$$\varepsilon(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{\ell} s + b_n \sin \frac{2n\pi}{\ell} s \right) \qquad 4-16$$

とすれば, 特解を次のように仮定できる。

$$\phi_p(s) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2n\pi}{\ell} s + B_n \sin \frac{2n\pi}{\ell} s \right) \qquad 4-17$$

(4-17) を (4-14) 式に代入して, 直交条件を用いて, A_0, A_n, B_n を求め, 特解を得る。 したがって, 一般解は, (4-15) 式と (4-17) 式の和として表わされる。 すなわち,

$$\phi(s) = C_1 \cosh \mu's + C_2 \sinh \mu's + C_3 \cos \mu's + C_4 \sin \mu's - \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{\ell} s + b_n \sin \frac{2n\pi}{\ell} s \right) \qquad 4-18$$

ただし,

$$E_n = \frac{\mu^4}{\left(\frac{2n\pi}{\ell}\right)^4 - \mu^4} \qquad 4-19$$

ここで境界条件式(4-2)を(4-18)に適用すれば，次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \mu'^2 & 0 & -\mu'^2 & 0 \\ \mu'^2\cosh\mu'l & \mu'^2\sinh\mu'l & -\mu'^2\cos\mu'l & -\mu'^2\sin\mu'l \\ P & \mu'^3 & P & -\mu'^3 \\ \mu'^3\sinh\mu'l-P\cosh\mu'l, & \mu'^3\cosh\mu'l-P\sinh\mu'l, & \mu'^3\sin\mu'l-P\cos\mu'l, & -\mu'^3\cos\mu'l-P\sin\mu'l \end{pmatrix}$$

$$X\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_2 \\ M_2 \\ M_3 - NM_1 \\ M_3 + NM_1 \end{pmatrix} \qquad 4-20$$

ただし，

$$M_1 = -\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n a_n$$

$$M_2 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(\frac{2n\pi}{l}\right)^2 a_n \qquad 4-21$$

$$M_3 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(\frac{2n\pi}{l}\right)^3 b_n$$

(4-20)式を解くと，係数は次のようになる。

$$C_1 = C_2 + \frac{M_2}{\mu'^2}$$

$$C_2 = \frac{\{2P\sin\mu'l + \mu'^3(\cos\mu'l - \cosh\mu'l)\}C_2 + \mu'M_2(1-\cosh\mu'l) - \sin\mu'l\left(M_3 - PM_1 - \frac{PM_2}{\mu'^2}\right)}{\mu'^3(\sinh\mu'l - \sin\mu'l)}$$

$$C_3 = \frac{\begin{bmatrix} \mu'^3(\sinh\mu'l - \sin\mu'l)\{M_3 + PM_1 - \frac{M_2}{\mu'^2}(\mu'^3\sinh\mu'l - P\cosh\mu'l)\} \\ +\mu'M_2(1-\cosh\mu'l)\{\mu'^3(\cos\mu'l - \cosh\mu'l) + P(\sin\mu'l + \sinh\mu'l)\} \\ +(M_3 - PM_1 - \frac{PM_2}{\mu'^2})\{\mu'^3(\sin\mu'l\cosh\mu'l - \cos\mu'l\sinh\mu'l) - 2P\sin\mu'l\sinh\mu'l\} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2P\{\mu'^3(\sin\mu'l\cosh\mu'l - \cos\mu'l\sinh\mu'l) - 2P\sin\mu'l\sinh\mu'l\} \\ +\mu'^3(\cos\mu'l - \cosh\mu'l)\{\mu'^3(\cosh\mu'l - \cos\mu'l) - P(\sin\mu'l + \sinh\mu'l)\} \\ +\mu'^3(\sinh\mu'l - \sin\mu'l)\{\mu'^3(\sin\mu'l + \sinh\mu'l) - P(\cos\mu'l + \cosh\mu'l)\} \end{bmatrix}}$$

$$C_4 = \frac{\{2P\sinh\mu'l + \mu'^3(\cos\mu'l - \cosh\mu'l)\}C_2 + \mu M_2(1-\cosh\mu'l) - \sin\mu'l\left(M_3 - PM_1 - \frac{PM_2}{\mu'^2}\right)}{\mu'^3(\sinh\mu'l - \sin\mu'l)}$$

4-22

したがって，偏心によるたわみは，(4-18)式に(4-22)式の係数を用いて計算できる。また，軸受にかかる反力の無次元化して，

$$f = \frac{Fg}{M\varepsilon\omega^2}$$

ただし，$M\varepsilon$ は集中ふつりあい．

とすれば，左右の軸受応答は，

$$f_L = \left(EI\frac{d^3\phi}{ds^3}\right)_{s=0} / A\rho\omega^2 = -EIP\phi(0)/A\rho\omega^2$$

$$f_R = \left(EI\frac{d^3\phi}{ds^3}\right)_{s=\ell} / A\rho\omega^2 = EIP\phi(\ell)/A\rho\omega^2$$

となる．

第3節　つりあわせに関する検討．

前節の理論解析にもとづいて計算した結果について検討する。

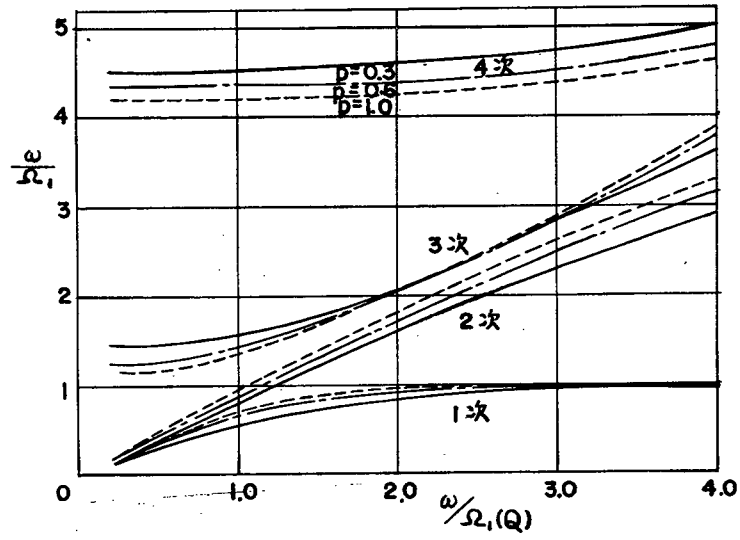


図4-2　支持台と固有振動数の関係

軸受台の場合の固有振動数は，同じロータであっても軸受台の質量と支持ばねの強さによって変る．図4－2にロータの重量と軸受台の重量の比Nが，0.3，0.6，1.0 のときの，4次までの固有振動が支持ばねの強さによってどのように変るかを示している．横軸は回転軸が単純支持のときの1次危険速度 ω_1^{**} と軸受台のばね質量系の固有振動 ω_B の比 ω_B/ω_1^{**} で，縦軸は ω_1^{**} に対するばね支持のときの各次固有振動数の比 $\omega_i^{*}/\omega_1^{**}$ である．この図より，支持ばねが強くなるにしたがって，ばね支持の1次から4次の固有振動の値が単純支持のそれぞれの値に漸近していることがわかる．しかし，次数が高くなる

にしたがって，支持ばねは相対的に弱くなり，単純支持の固有振動数に近づけるには，強いばねにしなければならないことがわかる。また，ロータの質量W_Sと軸受台の質量W_Bとの比Nの値については，Nが大きくなるにつれて1次，2次の固有振動は上がるのに対して3次，4次の固有振動は下がっていることがわかる。

図4－3ははじめの4つの固有振動数に対するモード型を$N=0.3$，$Q=0.2$，1.2，4.0の場合について描いている。この図より，つりあわせをとる際，単純支持の1次モードのつりあわせをとろうとすれば，図の(a)では，3の場合はほぼよいが，1の場合には，ロータの弾性を考慮したつりあわせはできない。しかし，この場合には，ほぼロータを剛体と考えたときの静的つりあいがとれることがわかる。また，このような場合には，図(c)－1が曲率からいってほぼ単純支持に近いので，単純支持のつりあいがとれる可能性がある。しかし，この場合，影響係数は両軸受付近で逆符号になっているため，そこをつりあわせ面に選定した場合には単純支持の条件のときと逆方向のつりあわせおもりをつけてしまう可能性がでてくる。また，同様のことが2次と4次との間で言える。そして，図3(b)の1，2の場合には，ほぼ剛体の動的つりあわせをするのと同じ効果になっていることがわかる。

(4－24)式で求めた偏心による軸受の応答fを用いて，次のような式を考える。

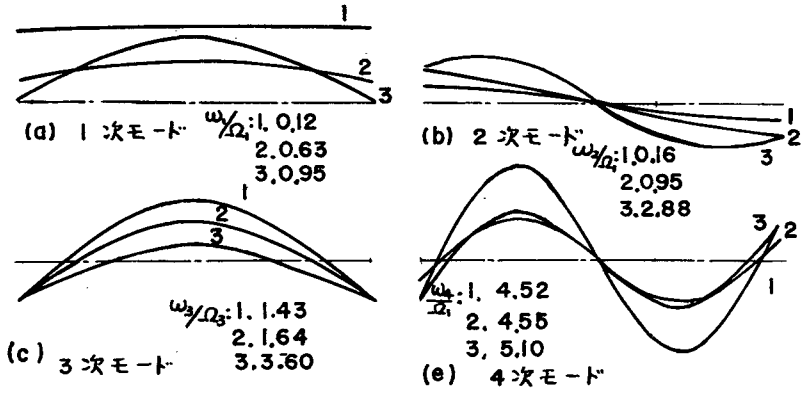


図4-3 正規モード($P=0.3$， 1) $\frac{\omega_B}{\Omega_1}=0.2$， 2) $\frac{\omega_B}{\Omega_1}=1.2$， 3) $\frac{\omega_B}{\Omega_1}=4.0$)

$$F = \frac{f_2 - f_1}{f_1} \qquad 4\text{-}25$$

ただし，f_1は軸端から$1/4\,\ell$および$3/4\,\ell$の位置に単位不つりあいをつけたときの軸受の応答，f_2は軸端から$1/2\,\ell$の位置に2倍単位不つりあいをつけたときの軸受応答とする。

このようにすると，Fはロータの曲率に相当した量を示すことがわかる。たとえば，軸が支持ばねに比べてはるかに剛なときには，f_1とf_2とはほぼ等しい値になる。これに反して，軸に対して支持ばねが剛なときは，$1/4\,\ell$および$3/4\,\ell$と$1/2\,\ell$の位置の影響係数は異なり，Fがある値を持つ。したがって，Fが大きくなるにしたがって，弾性ロータに近づき，Fが小さくなる程剛体のロータに近づく。FとQの関係を1次モードについて調べたのが図4－4である。図より支持ばねが強くなるにしたがって，単純支持の条件に近づくことがわかる。この図から，つりあわせに関する情報として，例えば，Q＝4.0の支持台の条件でつりあわせを行う場合を考える。図4－4から，1次モードでは，単純支持の1次モードの90％のモード成分でつりあわせたことになり，かなり単純支持に近い条件でつりあわせができると考えられる。しかし，モード形のところで説明したように，この条件のもとで2次モードをつりあわせるのは必ずしも十分でない。なぜならば，2次モードの場合は，おおまかに言えば，軸の長さが半分になったような場合に相当するので，支持ばねに比べて軸が剛になったことになる。したがって，単純支持でつりあわせたときとかなり異なることが予想される。このことは，図4－3 a，bの3の場合から直感的に理解できる。

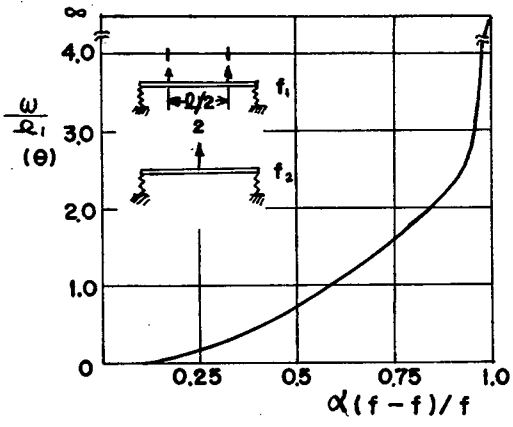


図4-4. 軸と軸受台の剛性の関係

3次，4次のモードについては，

図4－3(c)の3次モードでは，ばねが強くなるにつれて節点間の距離が小さくなり，単純支持の3次モードに近づく。また，ばねが弱いと，両端自由の場合の振動モードに近づき，それは，両端単純支持のモードと似てくる。しかし，平衡点の位置が異っているので，影響係数は異っている。図4－3(d)の4次モードについても同様なことが言えて，単純支持の2次モードと対応させられる。

したがって，つりあわせに際しては，軸受台の支持ばねを強くして1次と2次でつりあわせをする場合と，極端に弱くして，3次と4次でつりあわせる場合が考えられる。前者の場合，単純支持のときよりも低い速度でつりあわせることになり，後者の場合は単純支持のときよりも高い速度でつりあわせることになる。

以上のことより，軸受台がばねで支えられている場合には，単純支持の各モードごとのつりあわせを考えることは困難で，むしろ，剛体の静的および動的つりあわせと，単純支持の1次から何次までの不つりあい成分を同時に除去する方法を考える方が有利である。例えば，図4－3に着目して，モードの特徴をとらえてみる。Q＝1.2のモードについて考えると，1次モードでつりあわせると完全ではないが，剛体の静つりあいと，不完全な単純支持の1次モードでのつりあいが同時にとれる。2次モードでつりあわせると同様にして，偶力のつりあわせができ，さらに，3次モードでつりあわせると，完全ではないが，単純支持の1次モードに相当するつりあいがとれる。したがって，このことから，これら3つのモードで同時につりあいをとれば，軟軸受の特徴を生かしたつりあわせができると考えられる。しかも，このようなつりあわせ方法においては，1次，2次モードでほぼ，静的および偶力のつりあわせをとることになるが，一般の剛体用つりあわせ試験機のように，2次以上の速度でつりあわせをせず，危険速度上でつりあわせをおこなうので，振幅が大きく，測定精度がよいといえる。したがって，理論的なつりあいのよさと同時に，実用

上も適していると考えられる。

今仮りに，モーダルバランスの方法を用いて，つりあわせをおこなおうとすれば，回転軸に固定してある座標を決めて，j 番めの点にある不つりあい量と角度をそれぞれ，U_j，θ_j とし，i 次の危険速度で回転させたときの不つりあいによって生ずる軸受力を F_i，その位相角を ϕ_i とする。さらに i 次の危険速度で j 点につけた単位不つりあいによって生ずる軸受の反力の影響係数を α_{ij} とすると，一般につぎのようなつりあわせに関する式を得る。

$$F_i = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} U_j \qquad 4-26$$

(4-26) 式において，F_i，α_{ij} はともに実験によって求められる。この式でつりあわせ速度とつりあわせ面との数が同じであれば，解が得られる。また，つりあわせ面は，つりあわせをとるべきモードの効果的な位置，すなわち，つりあわすべきモードの影響係数の大きな位置を選ぶことが望ましい。

図4－5のロータ系について3速度3面つりあわせをした場合の理論的な計算結果を表4－1および図4－6に示す。表4－1(a)および(b)をそれぞれ図4－6で実線および一点鎖線で示している。(c)もほぼ同じ傾向を示しているので省略する。破線はつりあわせ前の応答を示している。この計算結果より，単純支持の1次危険速度以下ではほぼ完全に不つりあいがなく

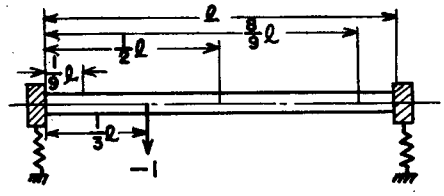


図4－5 ふつりあいおよび修正面位置

表4.1 不つりあいが1/3ℓのところに−1あるときの修正おもりの量

	$P=\frac{W_B}{W_S}$	$Q=\frac{\omega_B}{\Omega_1}$	修正おもり		
			U_1 (1/9ℓ)	U_2 (1/2ℓ)	U_3 (8/9ℓ)
a	0.3	0.3	0.4102	0.7063	−0.1160
b	0.3	1.0	0.4220	0.7062	−0.1229
c	1.0	0.3	0.4122	0.7089	−0.1206

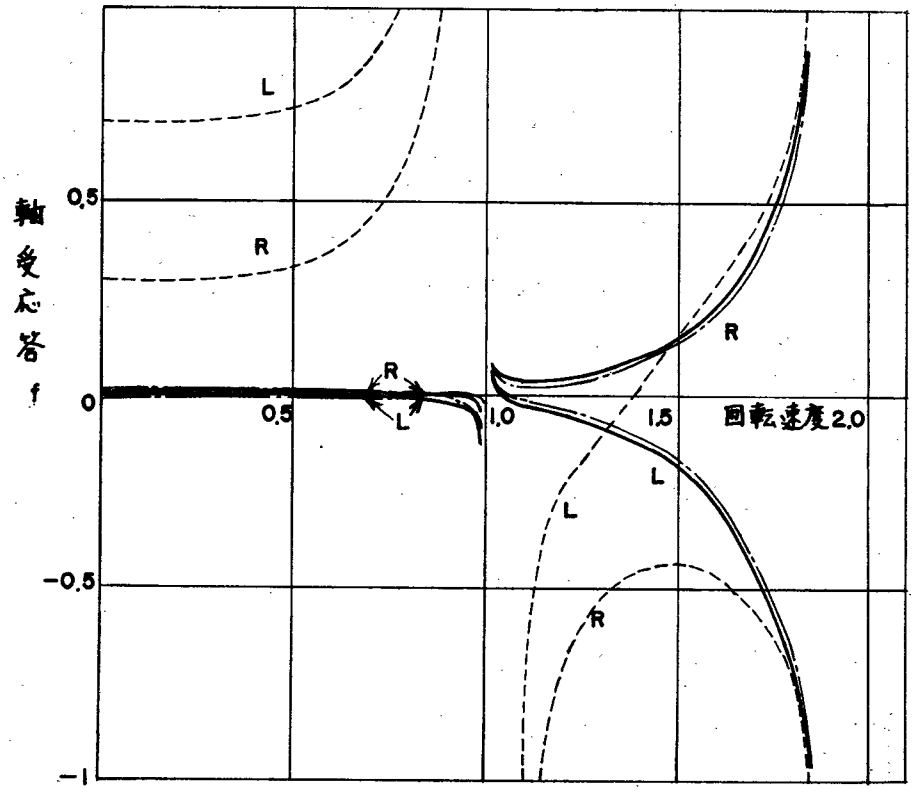


図4-6 理論計算によるつりあわせ前後の軸受力応答
R：右側軸受 , L：左側軸受

なっているのに対して，危険速度以上では，2次の危険速度に近づくにつれて，振幅が大きくなっていることがわかる。これは，3速度3面のつりあわせをして，剛体の静的および動的つりあわせと，両端単純支持の1次モードのつりあわせをした第3章図3-8と定性的によく似ている。

また，N，Qの値に関しては，ここで用いた数値の範囲内では，ほとんど影響がない。したがって，ある定まった軸受台に種々の重量および曲げ剛性のロータを取り付けても，つりあわせの際にはそれ程影響がなく，ほぼ同程の効果が期待できると考えられる。

第4節 実験および考察

本実験では，最も普及している剛体用つりあわせ試験機の軸受を少し改造して実験した。つりあわせの一例として，単純支持の

1次モードでのつりあいをばね支持で実験的につりあいをとって，その効果を調べてみる。回転軸の不つりあいを3修正面に代表させて考える。この修正面の位置はばね支持の1次，2次，3次モードを除去するのに効果的な位置を選ぶ。ここでは，修正面を両端に近い2面と，中央面の3面とし，つりあわせ速度をばね支持のときの1次，2次，3次危険速度にした。

4－1　実験装置

実験装置全景を写真4－1に示す。動つりあわせ試験機は長浜製作所製ND－100E型を用い，軸受がローラでは高速回転のとき危険であるから玉軸受をのせるように改造し，軸受支持ばねの硬

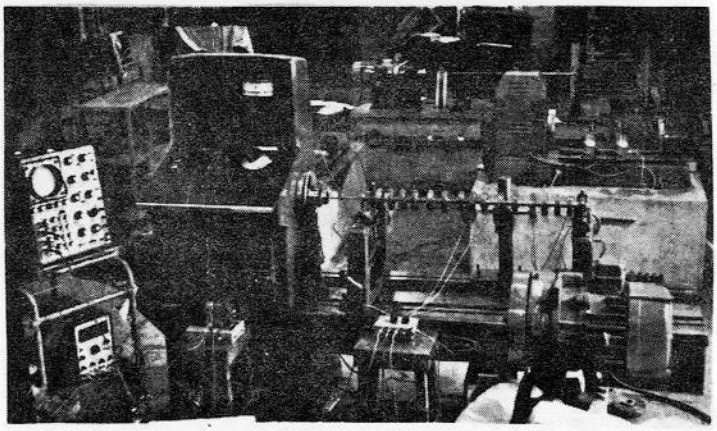


写真 4-1　実験装置全景

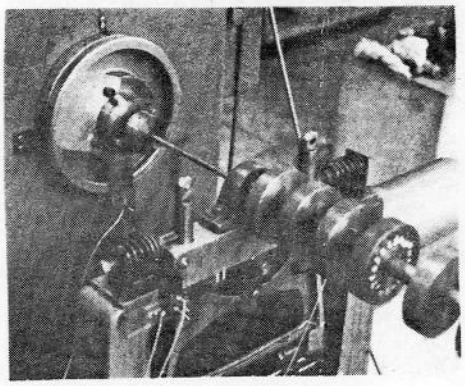


写真4-2　左側軸受部

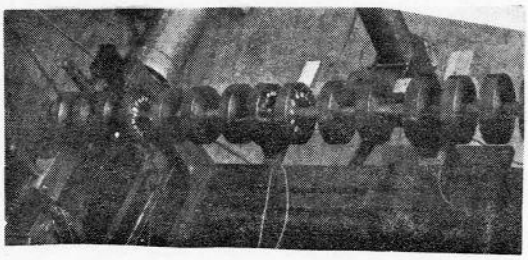


写真4-3　回転軸中央部

さを自由に選べるように，水平方向にコイルばねがつけられるようにした。回転数は，静電容量型ピックアップからディジタルカウンタに通して測定した。また，つりあわせ後のつりあいの良さを調べるために，両軸受とロータの中央に静電容量型ピックアップをとりつけ，振幅の測定をした。

写真４－２は左側軸受部分を示している。軸受台はアルミで鋳造した。付加ばねは左右の軸受の条件が等しくなるように注意して，４組のばね係数が変えられるようにした。

回転軸は写真４－３のように，軸受間距離90 cm，重量16.17kgのものを使用した。実験用に，軸に円板をとりつけたものを使用し，円板につりあわせおもり（M5ボルト，ナット）が付加できるように半径37 mm の円周上に穴をあけてある。

また，影響係数の大きさおよび位相の測定には，つりあわせ試験機についている装置をそのまゝ使用した。

４－２　実験結果

実験に必要な数値の理論的計算値と実験値とを表２に示す。危険速度の理論値と実験値との差は，軸受支持のばね力，質量，マサツ力等の誤差と軸受条件およびジャイロモーメントの影響と考えられる。

つりあわせ速度は表４－２の実験によって得られた危険速度とし，修正面は $\ell = 5$ cm，45 cm，85 cm とした。実験は，最初修正面に既知の質量（20 g·cm）をとりつけて，各つりあわせ速度で影響係数を調べ，つぎに，不つりあい量を測定して(4-26)式によって，修正おもりを決定した。修正した後，単純支持の境界条件（つりあい試験機で軸受台をクランプにする）のときのつりあわせ前後の軸受中央の振幅を

表4-2 実験装置およびロータの特性

軸受台特性	$P(=W_B/W_S)=0.297$, 軸受台重量 4.8 kg		
	$\omega_B = 16.9$ c/s, 減衰係数 0.426 kg·sec/cm		
	$\omega_B/\Omega_1 = 1.065$, はね定数 $C=83.0$ kg/cm		
危険速度		理論値(c/s)	実験値(c/s)
	単純支持 1次	18.4	17.6
	軟軸受台 1次	10.2	10.5
	〃 2次	14.7	15.1
	〃 3次	29.0	28.1

比較すると，図4－7のようになる。この図において黒丸はつりあわせ前であり，白丸はつりあわせ後である。1回のつりあわせ操作で約1/2になっている。

4－3　実験に対する考察

危険速度の値は，理論値と実験値では約5%の差で，かなりよく一致している。しかし，動つりあわせ試験機は，高速回転用に設計されていないために，高速時に軸受から発生すると考えられる振動を生じた。たとえば，軸受台が薄い板ばね2枚で支えられているために，軸長手方向の力に対して非常に弱く，その方向の振動が生じた。また，動つりあわせ試験機が高速回転用に設計されていないために，機械全体から生じる振動も大きく，それらの振動は外乱となり，測定の精度を悪くしている。したがって，動つりあい試験機を高速回転にも使えるようにしておきさえすれば，この結果よりもよいつりあわせができると考えられる。

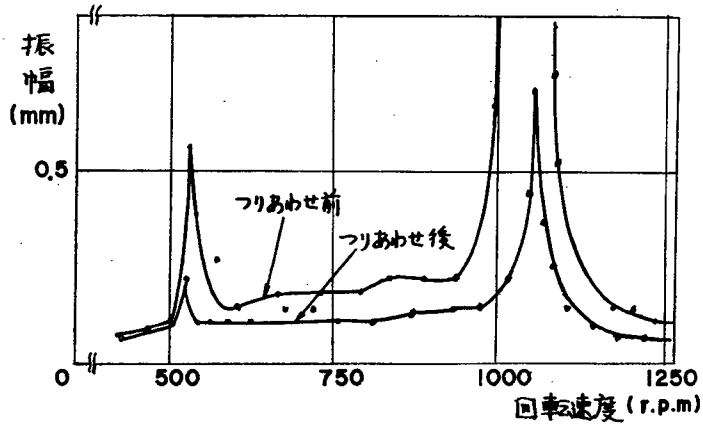


図4-7 つりあわせ前後の軸中央の振幅応答

図4－7のつりあわせ前後の振幅曲線より，1回のつりあわせでかなりつりあいがとれていることがわかる。また，1次危険速度のちょうど1/2のところで振幅が増大しているのは，検討を要する。

5.　まとめ

軟軸受台を有する弾性ロータの振動系の解析的結果から，軸受台の固有振動数ω_Bと，ロータの単純支持のときの1次振動との比と，系全体の固有振動との関係を明らかにした。（図4－2参照）また，規準モードおよびロータと軸受台の剛性の関係から，つりあわせについての考察をおこなった。そして，軟軸受台の場合に

適したつりあわせ方法として，剛体のつりあわせを1次，2次でとり，3次以上で弾性ロータとしてのつりあわせをとる方法が，実際的にはかなりよいことを，3速度3面つりあわせの場合について理論的および実験的に考察した。

第5章
非対称軸弾性ロータのつりあわせ

第1節　まえがき

第3章，第4章で述べたように，対称軸のロータのつりあわせに関しては，かなり研究が進んでいる。たとえば，Federn の提案している方法，R.E.D. Bishop の方法，A.H. Church の方法および，第3章の方法，第4章の方法などである。しかし，このいずれの方法も非対称軸ロータのつりあわせに際しては，厳密には有効でない。なぜならば，非対称軸ロータの場合には，主軸方向の剛性に差があるため，ふつりあいのついている位相とたわみの方向とは一致せず，少しずれるから，対称軸と同じ考え方で影響係数を定義できないからである。また，R.E.D. Bishop のモーダルバランスの方法では，各モードの危険速度が各々2個生じるため，いずれを基にすればよいかわからない。

一方，非対称軸ロータのつりあわせについては，R.E.D. Bishop & A.G. Parkinson[25] のものがある。しかし，これは，非対称軸ロータの危険速度の考察がおもで，つりあわせに関しては，その問題点を明らかにしたに過ぎない。

本章では，非対称軸ロータの不つりあいの位相とたわみの位相の関係を明らかにし，A.H. Church[10] のつりあわせの方法を拡張した非対称軸弾性ロータのつりあわせの方法を提案し，この方法を用いて理論的なつりあわせの可能性と実験による考察をおこなっている。

第2節　偏心による強制振動の解析

2－1　運動方程式

第I編，第2章の座標系を用いて，ふつりあい位置を図5－1のようにして，次の仮定をおく。

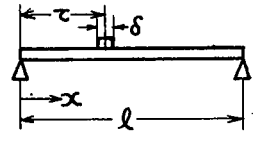


図5-1. ロータ系のモデル

1) 曲げ剛性 EI_1, EI_2 および質量 $A\rho$ は，軸の長手方向に沿って，一定である。

2) 軸系の初期たわみ，内部減衰，回転慣性，ジャイロモーメントを無視する。

3) 外部減衰は速度に比例する。

4) 重力の強制力の影響は無視する。

以上の仮定によって，第I編（2-10）式は，

$$\frac{EI_1}{A\rho}\frac{\partial^4\xi}{\partial s^4} + \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - 2\omega\frac{\partial\eta}{\partial t} - \omega^2\xi + \frac{be}{A\rho}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t} - \omega\eta\right) = \varepsilon_\xi(s)\omega^2$$

$$\frac{EI_2}{A\rho}\frac{\partial^4\eta}{\partial s^4} + \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + 2\omega\frac{\partial\xi}{\partial t} - \omega^2\eta + \frac{be}{A\rho}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t} + \omega\xi\right) = \varepsilon_\eta(s)\omega^2 \qquad 5-1$$

となる。また，解析の簡単化のために，軸の両端の軸受は，理想的な端末条件として，単純支持されているとする。

したがって，回転軸の ξ, η 2方向の固有函数は等しくなり，ξ, η は

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n\xi}(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}s$$

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n\eta}(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}s \qquad 5-2$$

となる。

2-2 解析

(5-2)式を(5-1)式に代入し，両辺に $\sin\frac{n\pi}{\ell}s\,ds$ をかけて，0から ℓ まで積分すると，(5-1)式は

$$\frac{EI_1}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4\varphi_{n\xi} + \frac{d^2\varphi_{n\xi}}{dt^2} - 2\omega\frac{d\varphi_{n\eta}}{dt} - \omega^2\varphi_{n\xi} + \frac{be}{A\rho}\left(\frac{d\varphi_{n\xi}}{dt} - \omega\varphi_{n\eta}\right)$$
$$= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varepsilon_\xi(s)\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}s\,ds$$

$$\frac{EI_2}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4\varphi_{n\eta} + \frac{d^2\varphi_{n\eta}}{dt^2} + 2\omega\frac{d\varphi_{n\xi}}{dt} - \omega^2\varphi_{n\eta} + \frac{be}{A\rho}\left(\frac{d\varphi_{n\eta}}{dt} + \omega\varphi_{n\xi}\right) \qquad 5-3$$
$$= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varepsilon_\eta(s)\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}s\,ds$$

偏心による強制力がS軸の任意の断面 l_i に作用しているときの，他の断面における振動を調べるために，軸の長手方向に分布している偏心 $\varepsilon_\xi(s)$，$\varepsilon_\eta(s)$ を $s=l_i$ の断面に微小な有限幅 δ をもって存在する。いいかえれば，偏心は，$s=l_i-\delta/2$ と $s=l_i+\delta/2$ の間にのみあるとすると，(5-3)の積分はできて，

$$\frac{EI_1}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\varphi_{n\xi}+\frac{d^2\varphi_{n\xi}}{dt^2}-2\omega\frac{d\varphi_{n\eta}}{dt}-\omega^2\varphi_{n\xi}+\frac{be}{A\rho}\left(\frac{d\varphi_{n\xi}}{dt}-\omega\varphi_{n\eta}\right)$$
$$=\frac{2}{l}\delta\,\varepsilon_\xi(s)\,\omega^2\sin\frac{n\pi}{l}l_i$$

$$\frac{EI_2}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\varphi_{n\eta}+\frac{d^2\varphi_{n\eta}}{dt^2}+2\omega\frac{d\varphi_{n\xi}}{dt}-\omega^2\varphi_{n\eta}+\frac{be}{A\rho}\left(\frac{d\varphi_{n\eta}}{dt}+\omega\varphi_{n\xi}\right)\qquad 5-4$$
$$=\frac{2}{l}\delta\,\varepsilon_\eta(s)\,\omega^2\sin\frac{n\pi}{l}l_i$$

となる。(5-4)式の強制振動解は，過渡解と定常解とからなるがつりあわせには，定常解のみが必要であるので，定常解を求めると，

$$\varphi_{n\xi}=\frac{2\delta\omega^2\left[\left\{\frac{EI_2}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4-\omega^2\right\}\varepsilon_\xi+\frac{be}{A\rho}\omega\varepsilon_\eta\right]\sin\frac{n\pi}{l}l_i}{l\left[\left\{\frac{EI_2}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4-\omega^2\right\}\left\{\frac{EI_1}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4-\omega^2\right\}+\left(\frac{be}{A\rho}\omega\right)^2\right]}$$

$$\varphi_{n\eta}=\frac{2\delta\omega^2\left[\left\{\frac{EI_1}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4-\omega^2\right\}\varepsilon_\eta-\frac{be}{A\rho}\omega\varepsilon_\xi\right]\sin\frac{n\pi}{l}l_i}{l\left[\left\{\frac{EI_2}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4-\omega^2\right\}\left\{\frac{EI_1}{A\rho}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4-\omega^2\right\}+\left(\frac{be}{A\rho}\omega\right)^2\right]}\qquad 5-5$$

ところで，ξ軸，η軸に関する1次の固有振動数を $\omega^*_{1\xi}$，$\omega^*_{1\eta}$ とすると，

$$\frac{EI_1}{A\rho}\left(\frac{\pi}{l}\right)^4=\omega^{*2}_{1\xi}$$
$$\frac{EI_2}{A\rho}\left(\frac{\pi}{l}\right)^4=\omega^{*2}_{1\eta}\qquad 5-6$$

となる。さらに次の記号を用いる。

$$\frac{\omega^{*2}_{1\eta}}{\omega^{*2}_{1\xi}}=\frac{EI_2}{EI_1}=K\ (\text{定数}),\qquad \omega^{*2}=\frac{\omega^2_{1\xi}+\omega^2_{1\eta}}{2}$$

$$\frac{\omega}{\omega^*}=\Omega\ ,\quad \frac{b_e}{Af}\cdot\frac{1}{\omega^*}=D\ ,\quad \varepsilon_\xi=\varepsilon\cos\theta\ ,\quad \varepsilon_\eta=\varepsilon\sin\theta$$

(5-5)式の分母，分子に軸の単位長さ重量 Apg をかけて，上の式を用いて変形すると，

$$\varphi_{n\xi}=\frac{2\left\{\left(\frac{2Kn^4}{1+K}-\Omega^2\right)\cos\theta+D\Omega\sin\theta\right\}\Omega^2\sin\frac{n\pi}{\ell}li\cdot Apg\varepsilon\delta}{Apgl\left\{\left(\frac{2n^4}{1+K}-\Omega^2\right)\left(\frac{2Kn^4}{1+K}-\Omega^2\right)+(D\Omega)^2\right\}}$$

$$\varphi_{n\eta}=\frac{2\left\{\left(\frac{2n^4}{1+K}-\Omega^2\right)\sin\theta-D\Omega\cos\theta\right\}\Omega^2\sin\frac{n\pi}{\ell}li\,Apg\varepsilon\delta}{Apgl\left\{\left(\frac{2n^4}{1+K}-\Omega^2\right)\left(\frac{2Kn^4}{1+K}-\Omega^2\right)+(D\Omega)^2\right\}}\qquad 5-7$$

となる。また，複素数を用いて表わせば，

$$\varphi_{n\xi}+i\varphi_{n\eta}=\Phi_n e^{i\psi_n}\qquad 5-8$$

ただし，

$$\Phi_n=\sqrt{\varphi_{n\xi}^2+\varphi_{n\eta}^2}$$

$$=\frac{2\left[\left\{\left(\frac{2Kn^4}{1+K}-\Omega^2\right)\cos\theta+D\Omega\sin\theta\right\}^2+\left\{\left(\frac{2n^4}{1+K}-\Omega^2\right)\sin\theta-D\Omega\cos\theta\right\}^2\right]^{1/2}\Omega^2\sin\frac{n\pi}{\ell}li\cdot Apg\varepsilon\delta}{Apgl\left\{\left(\frac{2n^4}{1+K}-\Omega^2\right)\left(\frac{2Kn^4}{1+K}-\Omega^2\right)+(D\Omega)^2\right\}}\qquad 5-9$$

$$\psi_n=\tan^{-1}\frac{\left(\frac{2n^4}{1+K}-\Omega^2\right)\sin\theta-D\Omega\cos\theta}{\left(\frac{2Kn^4}{1+K}-\Omega^2\right)\cos\theta+D\Omega\sin\theta}\qquad 5-10$$

ところで，(5-2)式に示したように 回転座標でのたわみ ξ，η は与えられるから，複素表示すると，

$$\zeta=\xi+i\eta=\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_{n\xi}+i\varphi_{n\eta})\sin\frac{n\pi}{\ell}s\qquad 5-11$$

となり，この式に(5-8)式を代入すると，次のようになる。

$$\zeta=\xi+i\eta=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n e^{i\psi_n}\sin\frac{n\pi}{\ell}s\qquad 5-12$$

ただし，Φ_n と ψ_n は(5-9)(5-10)式で与えられる。

(5-12)式は，$S=l_i$ なる断面に偏心 ε が存在するときの他の断面でのたわみを与える式である。

2－3　ふつりあいの位相角とたわみの振幅との関係

ふつりあいの位相角 θ と，振幅 $\overline{x}_1$ の関係を調べるために，(5-9)式の分子で θ を含む項を f とおく。すなわち，

$$f=\left\{\left(\frac{2kn^4}{1+K}-\Omega^2\right)\cos\theta+D\Omega\sin\theta\right\}^2+\left\{\left(\frac{2n^4}{1+K}-\Omega^2\right)\sin\theta-D\Omega\cos\theta\right\}^2 \qquad (5\text{-}13)$$

とおく。(5-17)式で無次元回転数 Ω をパラメータとみなし，f を θ の関数であると考えて，$\partial f/\partial\theta=0$ とおくと，

$$\tan 2\theta=\frac{D\Omega}{n^4-\Omega^2} \qquad 5\text{-}14$$

となる。(5-14)式より，$\partial f/\partial\theta=0$ を満足する θ は，非対称性を示す K の値に関係しないことがわかる。いま，$n=1$ の1次固有振動の付近でふつりあいの位相角とたわみの振幅との関係を調べる。

(1)粘性減衰が作用しない場合（$D=0$）

$\partial f/\partial\theta=0$ から，$\sin 2\theta=0$ すなわち，$\theta=0,\ 90°$ で $\overline{x}_1$ は極値をもつ。$\partial^2 f/\partial\theta^2$ の正負から，

$\Omega<1$	のとき	$\theta=0°$ で $\overline{x}_1$ は最小
		$\theta=90°$ で $\overline{x}_1$ は最大
$\Omega=1$	のとき	すべての θ で $\overline{x}_1$ は一定
$\Omega>1$	のとき	$\theta=0°$ で $\overline{x}_1$ は最大
		$\theta=90°$ で $\overline{x}_1$ は最小

となることがわかる。同様にして，

(2)粘性減衰が作用する場合（$D\neq 0$）

$\partial f/\partial\theta=0$ から，

$$\tan 2\theta=\frac{D\Omega}{1-\Omega^2}$$

となり

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{D\Omega}{1-\Omega^2}\right) \pm \frac{m\pi}{2} \qquad (m = 0, 1, 2\cdots) \quad 5\text{-}15$$

で $\bar{x}_1$ は極値をとる。(5-15)式より，減衰のために，極値をとる θ の値は，$\theta = 0°, 90°$ から少しずれることがわかる。また，$\partial^2 f / \partial\theta^2$ の正負から振幅の最大，最小は次のようになる。

$\Omega \ll 1$ のとき　$\theta = 0$ で $\bar{x}_1$ は最小
　　$\theta = 90°$ で $\bar{x}_1$ は最大

$\Omega = 1$ のとき　$\theta = 45°$ で $\bar{x}_1$ は最小
　　$\theta = -45°$ で $\bar{x}_1$ は最大

$\Omega \gg 1$ のとき　$\theta = 0$ で $\bar{x}_1$ は最大
　　$\theta = 90°$ で $\bar{x}_1$ は最小

となることがわかる。非対称軸ロータの場合には，このようにふつりあいおもりのある位相によって振幅が異なる。

つぎに，この関係を図に示すと，図5－2のようになる。この図では，$\theta = 90°$ のときの $\bar{x}_1$ の値を1として，他の角度における $\bar{x}_1$ の値を無次元化している。図の左半平面は，系に減衰のない場合であり，$\Omega < 1$ では，弱い方の軸の危険速度に近いため，弱い方の軸がよくたわみ，$\Omega > 1$ では，強い方の軸の危険速度に近いため，強い方の軸がよく

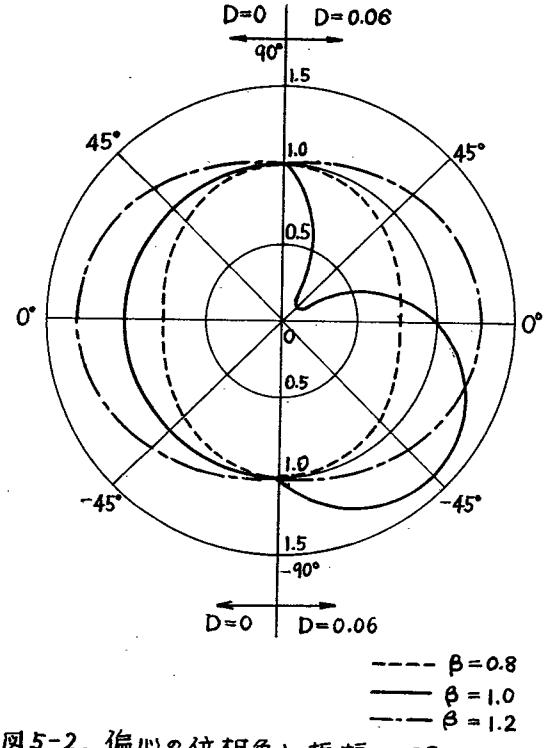


図5-2. 偏心の位相角と振幅の関係

たわんでいることがよくわかる。また，右半平面は，減衰のある場合であり，原点に関して対称な図である。$\Omega \ll 1$ あるいは $\Omega \gg 1$ では，減衰の影響による位相ずれがないので，減衰のない場合と同様であるが，$\Omega = 1$ の場合は，減衰による位相ずれの効果がでて，45° と −45° に極値をもつ図になっている。この図によれば，危険速度で仮りにつりあわせをしようとしても，ふつりあいのついている位相によって振幅が変わるので，うまくできないと考えられる。

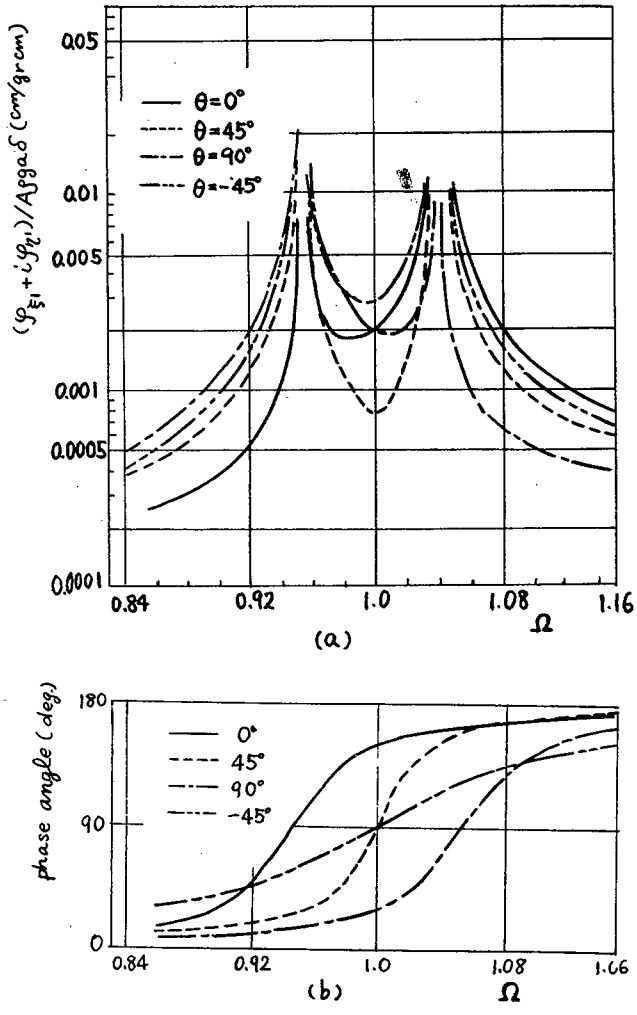


図5-3　非対称な軸の振幅と位相角の関係
(K=0.8)

つぎに，回転速度と振幅の関係を図5-3に示す。
図5-3(a),(c)はそれぞれ $n=1$，$K=0.9$，$D=0.06$ および $n=1$，$K=0.8$，$D=0.06$ の場合の回転数と振幅の関係を示している。不つりあい質量のつく位相角によって，応答の変わる様子がこの図からもよくわかる。とくに危険速度上では，その差がいちじるしくちがい，また，軸の剛性の弱い側と強い側で危険速度を中心に振幅の大きさの傾向は異っている。

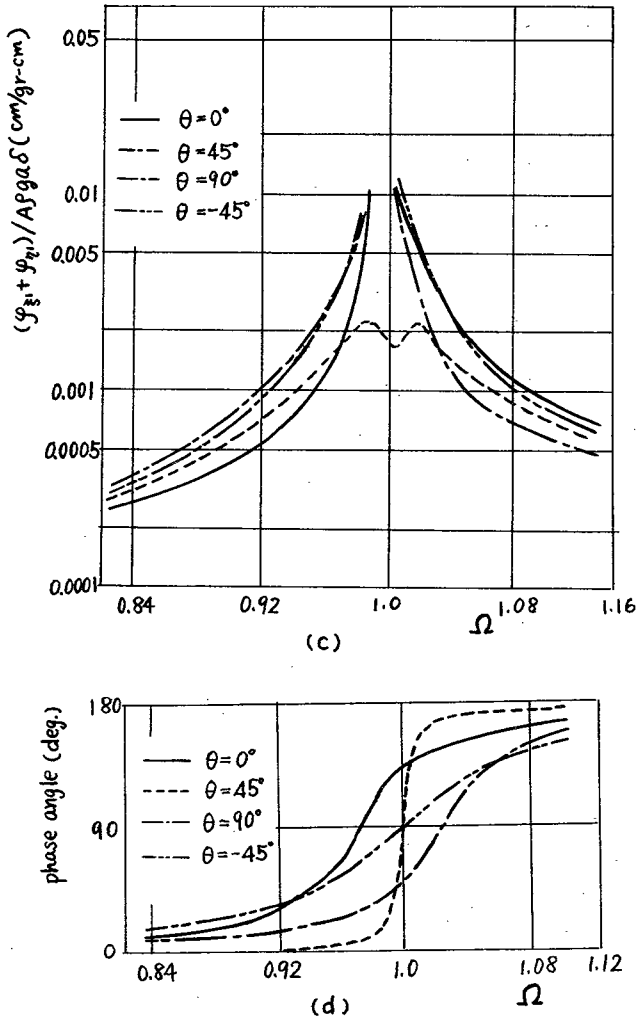


図5-3　非対称な軸の振幅と位相角の関係
（K=0.9）

2－4　ふつりあいの位相とたわみの位相の関係

ふつりあいの位相角θとたわみの位相角ψ₁との関係は(5-10)式で与えられる。この式で減衰のない場合を考えると，そのときのθとψ₁から，軸の非対称性によって生じるふつりあいとたわみとの位相ずれがわかる。この減衰のない場合のθとψ₁の関係を示すと，図5－4のようになる。図からわかるように，Ω＝0.8のような1次危険速度以下の速度では，ξ軸方向にたわみにくいので，その結果たわみの位相は，η軸に近ずく方向にずれ，ψ₁はθより大きくなる。Ω＝1.2のように1次の危険速度を越えると，たわみの位相は，強い方がよくたわむので，逆にη軸からはなれる方向にずれ，ψ₁はθより小さくなっている。剛性のちがいが大きい程（Kの値が小さい程）その傾向は強くなる。

図5－3 (b)(d)は，回転速度と位相の関係を示している。この図より，ふつりあいのついている位相によって，位相の変わり方も異っていることがわかる。また，振幅と位相の関係では，位相が90°のとき，振幅が最大となる。

また，θとψ₁との位相のずれが90°となるときのΩの値は，ふつりあいの位相θによって異なる。位相ずれが90°になるのは，たとえば，

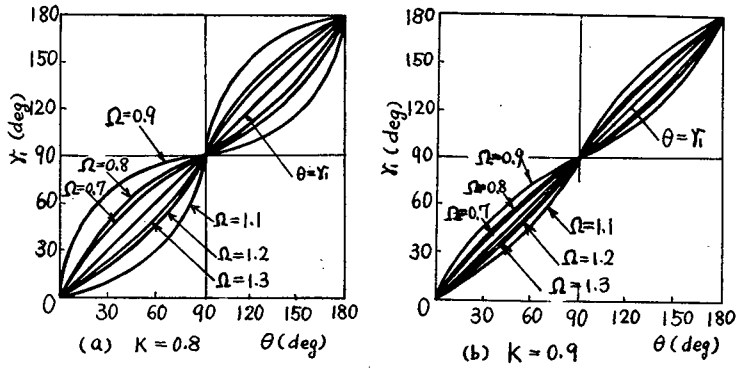


図5-4. 位相ずれと偏心の位相角の関係

$\theta = 0$ のとき　　$\Omega = \sqrt{\frac{2K}{1+K}}$

$\theta = \pm 45°$ のとき　　$\Omega = 1$

$\theta = 90°$ のとき　　$\Omega = \sqrt{\frac{2}{1+K}}$

である。丸軸の場合は常に $\Omega = 1$ のとき $90°$ 位相がずれるので，非対称軸と丸軸とは異なる。

第3節. 非対称軸のつりあわせ方法.

3－1　対称軸のつりあわせ.

Church & Plunket のつりあわせの方法[10]を非対称軸の場合に拡張しているので，この方法を簡単に説明する。

軸の任意の断面 l_1 に $\vec{U}_1$ なるふつりあいがある場合，そのふつりあいによって，他の断面 S_1 に生じるたわみは，回転速度によって異なるので，その速度も考慮して応答変位を応答係数と考える。すなわち，速度 Ω_1 で $S = l_1$ にあるふつりあいベクトル $\vec{U}_1$ によって生じた $S = S_1$ でのたわみベクトルを Y_1 とするとき，

$$Y_1 = \alpha_{11} \vec{U}_1 \qquad 5-16$$

とあらわせるとする。この α_{11} を応答係数と呼ぶ。

また，$\vec{U}_1$ と別にもう一つのふつりあい $\vec{U}_2$ が，$S = l_2$ にあるとすると，重ねあわせによって，

$$Y_1' = \alpha_{11} \vec{U}_1 + \alpha_{12} \vec{U}_2 \qquad 5-17$$

とかける。別な速度 β_2 では，応答係数が変わり，そのときの $S = S_1$ でのたわみ Y_2 は，

$$Y_2 = \alpha_{21} \vec{U}_1 + \alpha_{22} \vec{U}_2 \qquad 5-18$$

とあらわせる。このとき，一般に，α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22} は，既知なので，Y_1, Y_2 を測定して，(5-17), (5-18) 式に代入すれば，(5-17),

(5-18)式は，$\vec{U}_1$，$\vec{U}_2$ に関する２元連立方程式となるので，$\vec{U}_1$と$\vec{U}_2$は求まる。この場合，実際には，分布が未知で，大きさも未知であるふつりあいによって，生じたたわみ Y_1'とY_2を $x=l_1$ なる位置の$\vec{U}_1$とl_2なる位置の$\vec{U}_2$という２つのふつりあいによって生じたたわみとみなすということになる。

このようにして求まった$\vec{U}_1$，$\vec{U}_2$と位相を180°逆にした修正おもりをつけることにより，速度Ω_1とΩ_2でのたわみを小さくすることができ，したがって，他の速度でも，全体的に振動が小さくなる。

3－2　非対称軸のつりあわせ.

非対称軸の場合には，ふつりあいがl_iにあるときのxの位置での振幅と位相は，(5-12)式で与えられる。この応答は，ふつりあいの位置l_i，応答位置S_i，回転速度Ωによって変わることは対称軸の場合と同じであるが，非対称軸の場合は，不つりあいの位相θによっても変化する。ふつりあいの位相は，いいかえれば，修正おもりの位相（180°回転させることによって）であり，これは決定すべきものであって未知のものである。したがって，丸軸の場合のように応答係数として求められない。

そこで，非対称軸の場合は，次のように考える。(5-7)，(5-11)式を書きなおせば，ξ方向のたわみY_ξ，η方向のたわみY_ηは，

$$Y_\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(\frac{2Kn^4}{1+K}-\Omega^2\right)\Omega^2\sin\frac{n\pi}{\ell}l_i\sin\frac{n\pi}{\ell}s}{A\rho g\ell\left\{\left(\frac{2n^4}{1+K}-\Omega^2\right)\left(\frac{2Kn^4}{1+K}-\Omega^2\right)+(D\Omega)^2\right\}}A\rho g\varepsilon\delta\cos\theta$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2D\Omega^3\sin\frac{n\pi}{\ell}l_i\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}s}{A\rho g\ell\left\{\left(\frac{2n^4}{1+K}-\Omega^2\right)\left(\frac{2Kn^4}{1+K}-\Omega^2\right)+(D\Omega)^2\right\}}A\rho g\varepsilon\delta\sin\theta$$

5-19

$$Y_\eta=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2D\Omega^3\sin\frac{n\pi}{\ell}l_i\sin\frac{n\pi}{\ell}s}{A\rho g\ell\left\{\left(\frac{2n^4}{1+K}-\Omega^2\right)\left(\frac{2Kn^4}{1+K}-\Omega^2\right)+(D\Omega)^2\right\}}A\rho g\varepsilon\delta\cos\theta$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(\frac{2n^4}{1+K}-\Omega^2\right)\Omega^2\sin\frac{n\pi}{\ell}l_i\sin\frac{n\pi}{\ell}s}{A\rho g\ell\left\{\left(\frac{2n^4}{1+K}-\Omega^2\right)\left(\frac{2Kn^4}{1+K}-\Omega^2\right)+(D\Omega)^2\right\}}A\rho g\varepsilon\delta\sin\theta$$

となる。(5-19)式によって ふつりあいのξ軸，η軸成分によって生じる軸の振幅が求まる。そして，$A\rho g\varepsilon\delta\cos\theta$，$A\rho g\varepsilon\delta\sin\theta$

の前にかかっている係数，すなわち応答係数は既知となる。

この場合は，以前の議論では，ふつりあいの位相θが応答係数の中に含まれていたのが，ふつりあいと振幅をξ，η方向成分に分けることによって，ふつりあいにθを含めたということになる。そしてこの場合応答係数は，スカラー量である。

一般にふつりあいがr個あるとき，$s=\ell_i$ でのふつりあいのξ軸方向，η軸方向の成分を $U_{\xi j}$, $U_{\eta j}$ とし，$s=s_i$ での軸の応答変位のξ軸方向，η軸方向の成分を $Y_{\xi i}$, $Y_{\eta i}$ とすれば，$Y_{\xi i}$ と $Y_{\eta i}$ は次のように表わせる。

$$Y_{\xi i}=\sum_{j=1}^{r}\left(\alpha_{\xi ij}U_{\xi j}+\alpha'_{\eta ij}U_{\eta j}\right)$$
$$Y_{\eta i}=\sum_{j=1}^{r}\left(\alpha'_{\xi ij}U_{\xi j}+\alpha_{\eta ij}U_{\eta j}\right) \qquad 5-20$$

ただし，

$$\alpha_{\xi ij}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(\frac{2Kn^4}{1+K}-\Omega^2\right)\Omega^2\sin\frac{n\pi}{\ell}s_i\sin\frac{n\pi}{\ell}\ell_i}{A\rho g\ell\left\{\left(\frac{2n^4}{1+K}-\Omega^2\right)\left(\frac{2Kn^4}{1+K}-\Omega^2\right)+(D\Omega)^2\right\}}$$

$$\alpha'_{\eta ij}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2D\Omega^3\sin\frac{n\pi}{\ell}s_i\sin\frac{n\pi}{\ell}\ell_i}{A\rho g\ell\left\{\left(\frac{2n^4}{1+K}-\Omega^2\right)\left(\frac{2Kn^4}{1+K}-\Omega^2\right)+(D\Omega)^2\right\}} \qquad 5-21$$

$$\alpha'_{\xi ij}=-\alpha'_{\eta ij}$$

$$\alpha_{\eta ij}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(\frac{2n^4}{1+K}-\Omega^2\right)\Omega^2\sin\frac{n\pi}{\ell}s_i\sin\frac{n\pi}{\ell}\ell_i}{A\rho g\ell\left\{\left(\frac{2n^4}{1+K}-\Omega^2\right)\left(\frac{2Kn^4}{1+K}-\Omega^2\right)+(D\Omega)^2\right\}}$$

(5-20)式を使えば，分布しているふつりあい量をr個のふつりあいで等価におくことができる。したがって，つりあわせるためには，180°回転した位置にそれぞれの量を修正おもりとしてつければよい。また，一般に，各モードのつりあわせに修正おもりを一つつけるとすれば，r次までのモードの修正が可能である。

つぎに，このつりあわせの手法を用いたつりあわせ方法につい

て説明する。

実際の回転軸は，その使用回転数が決まっているので，それによって何次のモードまでつりあわせが必要であるか決まる。たとえば，1次危険速度より少し高速の回転数で使用する場合には，第3章で述べたように，1次と2次のモードをつりあわせるのがよい。その場合，それぞれのモードが優勢になる回転数でつりあわせを行なうようにすれば，つりあわせの精度は上がる。2速度でつりあわせる場合には，2つの測定面が必要である。そこで，次のように表わす。

速度Ω_1，測定面S_1での振幅のξ軸方向成分を　$Y_{\xi 1}$
速度Ω_1，測定面S_1での振幅のη軸方向成分を　$Y_{\eta 1}$
速度Ω_2，測定面S_2での振幅のξ軸方向成分を　$Y_{\xi 2}$
速度Ω_2，測定面S_2での振幅のη軸方向成分を　$Y_{\eta 2}$
修正面l_1での修正おもりのξ軸方向成分を　$U_{\xi 1}$
修正面l_1での修正おもりのη軸方向成分を　$U_{\eta 1}$
修正面l_2での修正おもりのξ軸方向成分を　$U_{\xi 2}$
修正面l_2での修正おもりのη軸方向成分を　$U_{\eta 2}$

とすれば，(5-20)式を使って，

$$\begin{aligned}
Y_{\xi 1} &= \alpha_{\xi 11} U_{\xi 1} + \alpha'_{\eta 11} U_{\eta 1} + \alpha_{\xi 12} U_{\xi 2} + \alpha'_{\eta 12} U_{\eta 2} \\
Y_{\eta 1} &= \alpha'_{\xi 11} U_{\xi 1} + \alpha_{\eta 11} U_{\eta 1} + \alpha'_{\xi 12} U_{\xi 2} + \alpha_{\eta 12} U_{\eta 2} \\
Y_{\xi 2} &= \alpha_{\xi 21} U_{\xi 1} + \alpha'_{\eta 21} U_{\eta 1} + \alpha_{\xi 22} U_{\xi 2} + \alpha'_{\eta 22} U_{\eta 2} \\
Y_{\eta 2} &= \alpha'_{\xi 21} U_{\xi 1} + \alpha_{\eta 21} U_{\eta 1} + \alpha'_{\xi 22} U_{\xi 2} + \alpha_{\eta 22} U_{\eta 2}
\end{aligned} \qquad 5-22$$

となる。ただし，応答係数は，(5-21)式で与えられるか，または，測定によって得られる。測定した$Y_{\xi 1}$，$Y_{\eta 1}$，$Y_{\xi 2}$，$Y_{\eta 2}$を代入した後，(5-22)式を$U_{\xi 1}$，$U_{\eta 1}$，$U_{\xi 2}$，$U_{\eta 2}$について解けば，修正おもりが，求まる。

3－3　非対称軸のつりあわせの効果

ここでは，あるふつりあいを仮定して，つりあわせの理論にしたがって，修正おもりを求め，そのつりあわせの効果を計算で求

めている。また，修正面の選び方によるつりあわせ効果，および，1面修正と2面修正のつりあわせの効果の差について考察する。

計算にあたり，次の諸量を用いている。

a)計算に使用した軸は，第4節の表5－2のものとしている。また，減衰係数 $D=0.06$ を用いている。

b)ふつりあいの位置は，$s=0.2\ell$ とし，大きさは，ξ 軸，η 軸方向それぞれ 1gr·cm，0.5gr·cm である。

c)1速度のつりあわせでは，その修正速度を $\Omega=0.8$ とし，2速度のつりあわせでは，$\Omega_1=0.8$，$\Omega_2=3.8$ としている。

d)測定面はすべて $s=0.3\ell$ であり，振幅曲線はすべて $s=0.3\ell$ での振幅である。

計算例として4つの場合を用いたが，それを表5－1に示す。また，同時に修正おもりの量も示す。これらの結果から，回転速度と振幅の関係が計算できて，それを図5－5に示している。この図から次のことが言える。

i) $\tau_1=0.4\ell$ 1面でのつりあわせは，つりあわせ速度 $\Omega=0.8$ 付近は効果があるが，1次から2次危険速度にかけては効果がなく，2次モードのふつりあいはほとんどとれていない。

ii) $\tau_1=0.7\ell$ 1面でのつりあわせは，つりあわせ速度 $\Omega=0.8$ 付近は効果があるが，2次モードを(2)の場合よりも励起するおもりとなることがわかる。

iii)2面で修正した場合は，全速度範囲でつりあわせ効果が大きい。

表5-1 図5-5の修正位置および修正量

	修正位置	修正質量	
		$U_{\xi 1}$ (g·cm)	$U_{\eta 1}$ (g·cm)
(2)の場合	$\tau_1=0.4\ell$	−0.635	−0.321
(3)の場合	$\tau_1=0.7\ell$	−0.784	−0.403
(4)の場合	$\tau_1=0.6\ell$	0.062	0.031
	$\tau_2=0.25\ell$	−0.915	−0.457
(5)の場合	$\tau_1=0.5\ell$	0.085	0.043
	$\tau_2=0.25\ell$	−0.951	−0.476

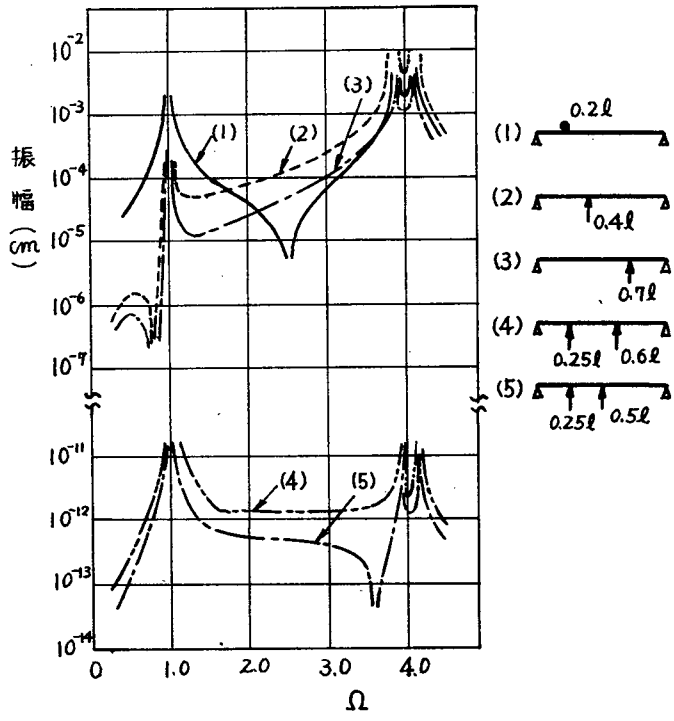


図5-5 理論的なつりあわせ効果

また，2修正面の位置をそれぞれ1次モードと2次モードの振幅が最大になる位置に選んだ(5)の場合の方が効果的である。

第4節 実験とその考察

4-1 実験装置

写真5-1に実験装置全景を示す。この写真で，(A)は実験に使用した軸で，14個の円板をつけている。円板に6mmのタップをたて，そこにボルトを付加して修正おもりをつけられるようにしてある(写真5-2)。(B)は，A.C. 2HPの3相誘導電動機で，無段変速機によって1/3から3倍の間無段で変速が可能である。さらにこのモータと，プリーをベルトで結合し，プリーはこのときの2倍に増速されているので，最終的には，約1100rpm～11000rpmまで速度を連続に変化することができる。プリーの回転は，ユニバーサルジョイント(C)で軸に伝えられる。軸は，両端を自動調心型の玉軸受で支えられている。軸のたわみは，軸にアルミカ

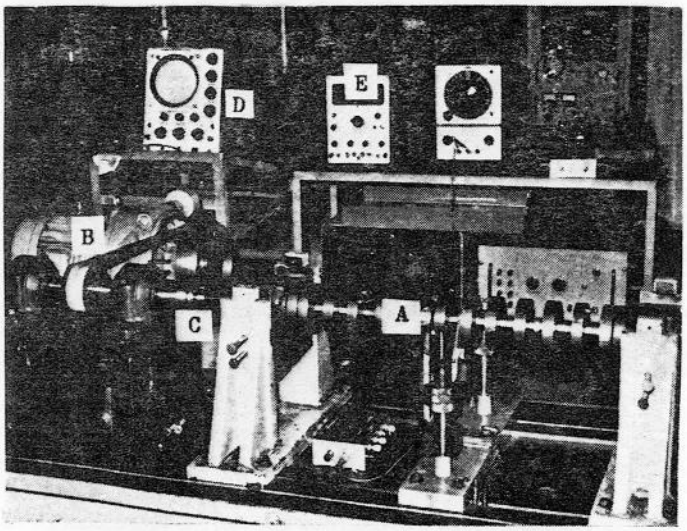


写真 1. 実験装置

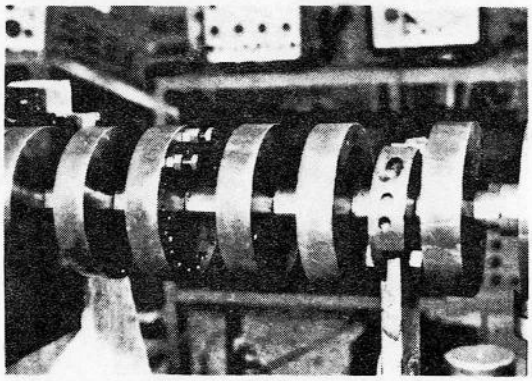


写真 5-2. 軸 および 修正おもり

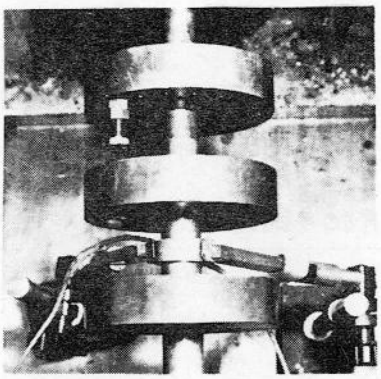


写真 5-3(a) 測定部

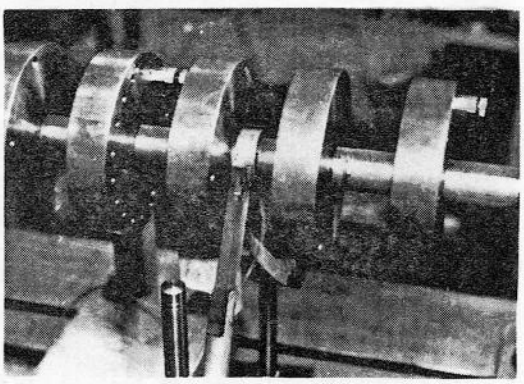


写真 5-3(b) 測定部

ラーをつけ，その周囲から約1mmはなして容量型変位ピックアップ（写真5-3）で検出し，その出力をシンクロスコープ（D）に入れて測定している。また，駆動プリーの1ヶ所にくぼみを作り，そのくぼみによって生ずるパルス状の容量変化をカウンタ（E）で数えて，回転数を測定している。このパルスは，同時にシンクロスコープに入れて，軸の1回転に1度の回転マークとなる。この回転マークと最大変位までの位相角を調べれば，換算することによって位相がわかる。

実験に用いた軸の詳細は，表5-2に示す。この軸は，20φのみがき棒鋼をフライス盤で削って，K=0.9に仕上げたものである。

4-2. 実験

つりあわせの実験に際して，測定面，修正面，修正回転速度は，次のようにして選んだ。

測定面および修正面は，測定の感度および修正の感度のよいところとして，1次と2次の振動モードの腹になるところを選定すると効果的であり，また，回転速度の場合は，1次または2次危険速度の近くを選べば，各次数の振幅が特によくでるので，つりあわせには効果的である。以上の観点から，本実験では，次のように選んだ。

測定面　$S_1 = 0.5\ell$　，　$S_2 = 0.715\ell$

修正面　$\ell_1 = 0.6\ell$　，　$\ell_2 = 0.25\ell$

修正回転速度　$\Omega_1 = 0.941$ ，　$\Omega_2 = 3.47$

実験として，計算によって求めた応答係数を用いて，つりあわせ

表5-2　実験に用いた軸の諸量

K $\left(\frac{EI_2}{EI_3}\right)$	断面図	単位長さの重量 $A\rho g$ (kg/cm)	曲げ剛性 EI_3 (Kg·cm²)	スパン ℓ (cm)	1次固有振動数 ω_3 (rad/s)	1次固有振動数 ω_2 (rad/s)
0.9		0.213	1.64×10^6	70	175	166

を行った場合と，実験的に求めた応答係数を用いてつりあわせを行なった場合について実験した。

a)計算による応答係数を用いた場合

理論式(5-21)の計算によって応答係数を求め，その値を(5-20)式に代入して，ふつりあいの大きさを求める。修正おもりは，求められたふつりあいと180°位相を変えた位置につける。

$\Omega_1 = 0.941$，$\Omega_2 = 3.47$ での計算による応答係数を表5-3に示す。この応答係数により，(5-20)式または(5-22)式で修正おもりを求めた結果，l_1修正面 ($s = 0.6l$) に付加すべきおもり $U_{\xi 1}$, $U_{\eta 1}$ と l_2 修正面 ($s = 0.25l$) に付加すべきおもり $U_{\xi 2}$, $U_{\eta 2}$ はそれぞれ，

$$U_{\xi 1} = 1.54\ \text{gr·cm}\ , \qquad U_{\eta 1} = 5.71\ \text{gr·cm}$$
$$U_{\xi 2} = 3.15\ \text{gr·cm}\ , \qquad U_{\eta 2} = -24.95\ \text{gr·cm}$$

となった。

つりあわせ後の回転速度と振幅の測定結果を図5-6(a)に示す。計算値と実験値のちがいを知るために，軸の横振動の周波数をしらべた。その結果，計算値は 27.9 c/s で，実験値は，27.6 c/s で約1.1％の誤差であった。また，系の外部減衰率を知るために，危険速度付近で回転させたときの位相ずれを調べ，その結果得られた $D = 0.06$ を用いた。

b)実験によって得た応答係数を用いた場合

実験的に応答係数をもとめるために，既知のおもりを修正面の ξ 軸，η 軸方向につけて，測定面で振幅と位相を測定し，そのベクトルからおもりを付加する前のベクトルを引くことによって，おもりによる応答係数を求めた。そのようにして得られた結果，応答係数は，表5-4のようになった。これらの値から修正おもりを求めると，

$$U_{\xi 1} = -5.68\ \text{gr·cm}\ , \qquad U_{\eta 1} = 25.38\ \text{gr·cm}$$
$$U_{\xi 2} = 7.46\ \text{gr·cm}\ , \qquad U_{\eta 2} = -28.76\ \text{gr·cm}$$

表 5-3 計算による影響係数

$\alpha_{\xi 11}$	5.49×10^{-4}	$\alpha'_{\eta 11}$	4.00×10^{-4}
$\alpha_{\xi 12}$	4.08×10^{-4}	$\alpha'_{\eta 12}$	2.97×10^{-4}
$\alpha'_{\xi 11}$	0.65×10^{-4}	$\alpha_{\eta 11}$	0.110×10^{-4}
$\alpha'_{\xi 12}$	-3.77×10^{-4}	$\alpha_{\eta 12}$	-0.143×10^{-4}
$\alpha_{\xi 21}$	-4.00×10^{-4}	$\alpha'_{\eta 21}$	14.2×10^{-4}
$\alpha_{\xi 22}$	-2.97×10^{-4}	$\alpha'_{\eta 22}$	10.6×10^{-4}
$\alpha'_{\xi 21}$	-0.110×10^{-4}	$\alpha_{\eta 21}$	1.53×10^{-4}
$\alpha'_{\xi 22}$	0.143×10^{-4}	$\alpha_{\eta 22}$	-5.24×10^{-4}

単位 cm/gr·cm

表 5-4 実験による影響係数

$\alpha_{\xi 11}$	1.82×10^{-4}	$\alpha'_{\eta 11}$	9.66×10^{-4}
$\alpha_{\xi 12}$	4.96×10^{-4}	$\alpha'_{\eta 12}$	7.31×10^{-4}
$\alpha'_{\xi 11}$	3.25×10^{-4}	$\alpha_{\eta 11}$	1.08×10^{-4}
$\alpha'_{\xi 12}$	-2.68×10^{-4}	$\alpha_{\eta 12}$	-2.61×10^{-4}
$\alpha_{\xi 21}$	-11.5×10^{-4}	$\alpha'_{\eta 21}$	31.1×10^{-4}
$\alpha_{\xi 22}$	-12.3×10^{-4}	$\alpha'_{\eta 22}$	20.1×10^{-4}
$\alpha'_{\xi 21}$	-2.42×10^{-4}	$\alpha_{\eta 21}$	0
$\alpha'_{\xi 22}$	2.55×10^{-4}	$\alpha_{\eta 22}$	-4.84×10^{-4}

単位 cm/gr·cm

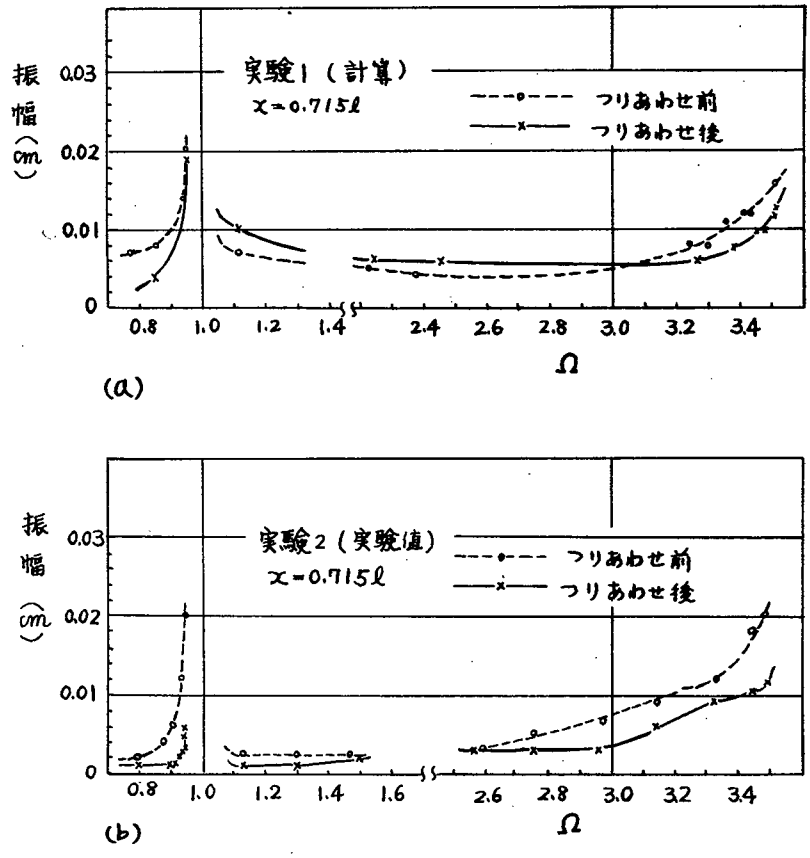


図 5-6 つりあわせ前後の応答曲線

となった。

修正後の回転速度と振幅の関係は，図5-6(b)に示す。

4-3 考察

前節の2通りの実験の結果，つぎのようなことがいえる。

理論計算による応答係数を使ってつりあわせを行う場合には，まず，危険速度と減衰率を正確に決定しなければならない。なぜならば，回転数Ωを1次危険速度の2乗平均値で無次元化しているので，この1次危険速度の計算値が実際とあわなければ，あとの応答係数等は，はずれることになる。とくに応答係数は，危険速度近くで求めるために，回転数の少しの誤差が応答係数には大きくひびく。また，1次危険速度が，よく合っていても，第4章で指摘したように，軸受は，危険速度の次数が上がる程相対的にやわらかくなるので，2次，3次の危険速度が理論のように $\Omega_2=4.0$，$\Omega_3=9.0$ に存在するとは限らない。また，減衰率は正確に測定することが困難な量であるため，この誤差も応答計数の誤差となることが考えられる。以上は，計算によって応答係数を求める場合の問題点であり，この方法は，もとの運動方程式がいかに定量的に系の性質をうまくあらわしているかという問題をも含んでいることがわかる。

一方，実験的にためしおもりをつけて影響係数をもとめる方法は，減衰係数や危険速度が陽には関係せず，振幅測定値から直接応答係数が求まるので，誤差の入るところが少ない。ただ，振幅と位相を正確に測定すればよいことになる。

以上のことから，図5-6(a)(b)で(b)の方がつりあわせの効果がある理由がわかる。

第5節 まとめ.

非対称弾性ロータのつりあわせは，対称軸の場合とは異なることを示した。すなわち，非対称軸の場合には，剛性のちがいのために，たわみの位相と振幅は，速度のみならず，ふつりあいの位

相によって異なるため，その影響を考慮したつりあわせをおこなわなければならない。そのためには，軸断面における主軸方向の影響係数をもとにしたつりあわせを行えばよいことを提案し，理論的および実験的にその方法によるつりあわせ効果を示した。

第6章
オーバハング部を有する弾性ロータのつりあわせ

第1節 まえがき

オーバハング部を有する弾性ロータのつりあわせに関する研究は，あまりおこなわれていないようである。ただ同様の問題である多数の軸受を有する弾性ロータのつりあわせに関しては，R.E.D. Bishop & A.G. Parkinson[12] がモーダルバランス法の拡張として，つりあわせの方針を示している。また，Tang. T.M & Trumpler, P. R.[27] は，軸受の両側にオーバハング部を有する系で，つりあわせについて理論的および実験的に研究している。

しかし，以上は，本格的にオーバハングを有する弾性ロータのつりあわせについて取扱ったものでなく，目的とするところも異なっていて，オーバハングを有するロータのつりあわせに対しては不十分である。

一方，一般に大型のロータの場合には，必然的にカップリングがついていて，それは定性的にはオーバハングロータとしての性質がかなり大きく，つりあわせに際しても オーバハング部が原因で つりあわせに多くの時間を費している。たとえば，某社では，ターボジェネレータのつりあわせに際して 第1段階として先ず軸受間部に修正質量をつけてつりあわせをとれるだけとり，どうしても許容つりあわせ範囲内に入らないときに 初めてオーバハング部に修正おもりをつける。この方法では，何度もロータを回転しなければならず，非常に多くの時間がかかる。

このように，オーバハング部を有するロータは，つりあわせが複雑であるにもかかわらず，試行錯誤的方法でしかつりあわせが行われていない。

ここで著者は，オーバハング部を有する弾性ロータのつりあわせに，第3章で用いたつりあわせの方法を用いて，オーバハン

グロータ特有のつりあわせの困難さの問題点を明らかにするとともに，ふつりあいがオーバハング部と軸受間部のいずれにあるか判定するための指針を与え，軸受反力を零にするつりあわせ方法と，モーダルバランスの方法をオーバハングロータのつりあわせに拡張したときのつりあわせ効果について述べている。また，静つりあいと動つりあいをつりあわせの条件に入れた場合の計算もおこなって，その効果も検討している。また，この種のロータを設計する場合に，どの位置に修正面を選べばよいかについて検討している。そして，以上の計算結果および考察の結果を実験的に確かめている。

第2節　理論解析

対称軸で，オーバハング部を有する弾性ロータの運動方程式は，第Ⅰ編，第4章の運動方程式と同じである。

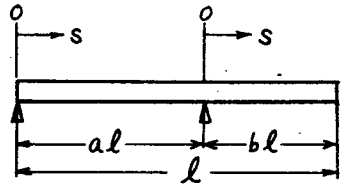


図6-1. ロータ系のモデル

この章では，オーバハング部ディスクを考えないから，図6－1に示す回転軸を考える。軸は，AB間，BC間でそれぞれ一様断面であり，A点，B点で単純支持され，C点は自由端であるとする。系の減衰を考慮せず，軸を一様な断面として，偏心が $\varepsilon(s)$ で分布しているとすれば，静止座標系における運動方程式は，

$$EI\frac{\partial^4 x}{\partial s^4} + \rho A\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \rho A\varepsilon(s)\omega^2\cos\omega t \qquad 6\text{-}1$$

である。つぎに，境界条件として，軸受は理想的な単純支持の条件を満たすものとすれば，境界条件は，

$$\text{A点で}\quad x_L(0,t)=0 \qquad \frac{\partial^2 x_L(0,t)}{\partial s^2}=0$$

$$\text{B点で}\quad x_L(al,t)=0\ ,\ \frac{\partial x_L(al,t)}{\partial s}=\frac{\partial x_R(0,t)}{\partial s} \qquad 6\text{-}2$$

$$\frac{\partial^2 x_L(al,t)}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 x_R(0,t)}{\partial s^2}\ ,\quad x_R(0,t)=0$$

C点で　$\dfrac{\partial^2 \chi_R(bl,t)}{\partial s^2}=0$,　$\dfrac{\partial^3 \chi_R(bl,t)}{\partial s^3}=0$

となる。

偏心による強制振動の解析をおこなう。解析の都合上座標系を軸受間部とオーバハング部に分けているので，偏心についても，軸受間部とオーバハング部に分けて，各々の偏心を $\varepsilon_L(s)$, $\varepsilon_R(s)$ であらわす。したがって，(6-1)式は，軸受間部とオーバハング部で，

$$EI\frac{\partial^4 \chi_L}{\partial s^4}+\rho A\frac{\partial^2 \chi_L}{\partial t^2}=\rho A\varepsilon_L(s)\omega^2\cos\omega t$$

$$EI\frac{\partial^4 \chi_R}{\partial s^4}+\rho A\frac{\partial^2 \chi_R}{\partial t^2}=\rho A\varepsilon_R(s)\omega^2\cos\omega t \qquad 6-3$$

となる。(6-3)式は変数分離が可能であるから，解を次のようにおく。

$$\chi_L=\Xi_L(s)\cos\omega t$$

$$\chi_R=\Xi_R(s)\cos\omega t \qquad 6-4$$

(6-4)式を(6-3)式に代入して，

$$\frac{d^4\Xi_L(s)}{ds^4}-p^4\Xi_L(s)=\frac{\rho A}{EI}\omega^2\varepsilon_L(s)$$

$$\frac{d^4\Xi_R(s)}{ds^4}-p^4\Xi_R(s)=\frac{\rho A}{EI}\omega^2\varepsilon_R(s) \qquad 6-5$$

ただし，$p=\sqrt[4]{\dfrac{\rho A\omega^2}{EI}}$

偏心 $\varepsilon_L(s)$, $\varepsilon_R(s)$は，第I編，第2章と同様にフーリエ級数で次のようにあらわす。

$$\varepsilon_L(s)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{al}s+b_n\sin\frac{2n\pi}{al}s\right)$$

$$\varepsilon_R(s)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\cos\frac{2n\pi}{bl}s+d_n\sin\frac{2n\pi}{bl}s\right) \qquad 6-6$$

したがって，(6－5)式の特解を次のようにおく．

$$Z_{LP}(s) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{2n\pi}{a\ell}s + B_n \sin\frac{2n\pi}{a\ell}s\right)$$

$$Z_{RP}(s) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cos\frac{2n\pi}{b\ell}s + D_n \sin\frac{2n\pi}{b\ell}s\right) \qquad 6-7$$

この式を(6－5)式に代入して直交条件を用いると，次の特解を得る。

$$Z_{LP}(s) = -\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n\left(a_n \cos\frac{2n\pi}{a\ell}s + b_n \sin\frac{2n\pi}{a\ell}s\right)$$

$$Z_{RR}(s) = -\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n\left(c_n \cos\frac{2n\pi}{b\ell}s + d_n \sin\frac{2n\pi}{b\ell}s\right) \qquad 6-8$$

ただし，

$$E_n = \frac{p^4}{\left(\frac{2n\pi}{a\ell}\right)^4 - p^4}$$

$$F_n = \frac{p^4}{\left(\frac{2n\pi}{b\ell}\right)^4 - p^4} \qquad 6-9$$

また，(6－5)式の同次方程式の解は，

$$Z_{LO}(s) = C_1 \cosh ps + C_2 \sinh ps + C_3 \cos ps + C_4 \sin ps$$

$$Z_{RO}(s) = D_1 \cosh ps + D_2 \sinh ps + D_3 \cos ps + D_4 \sin ps \qquad 6-10$$

となるから，(6－5)式の一般解は，特解と同次解との和として，

$$Z_L(s) = C_1 \cosh ps + C_2 \sinh ps + C_3 \cos ps + C_4 \sin ps - \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n\left(a_n \cos\frac{2n\pi}{a\ell}s + b_n \sin\frac{2n\pi}{a\ell}s\right)$$

$$Z_R(s) = D_1 \cosh ps + D_2 \sinh ps + D_3 \cos ps + D_4 \sin ps - \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n\left(c_n \cos\frac{2n\pi}{b\ell}s + d_n \sin\frac{2n\pi}{b\ell}s\right) \qquad 6-11$$

で表わすことができる。(6－11)式に境界条件式(6－2)を適用すると，次の8つの式が得られる。

$$C_1 + C_3 + M_1 = 0$$

$$C_1 p^2 - C_3 p^2 - M_3 = 0$$

$$C_1 \cosh pal + C_2 \sinh pal + C_3 \cos pal + C_4 \sin pal + M_1 = 0$$

$$C_1 p \sinh pal + C_2 p \cosh pal - C_3 p \sin pal + C_4 p \cos pal + M_2 - D_2 p - D_4 p - N_2 = 0$$

$$C_1 p^2 \cosh pal + C_2 p^2 \sinh pal - C_3 p^2 \cos pal - C_4 p^2 \sin pal - M_3 - D_1 p^2 + D_3 p^2 + N_3 = 0 \qquad 6-12$$

$$D_1 p^2 \cosh pbl + D_2 p^2 \sinh pbl - D_3 p^2 \cos pbl - D_4 p^2 \sin bbl - N_3 = 0$$

$$D_1 p^3 \sinh pbl + D_2 p^3 \cosh pbl + D_3 p^3 \sin pbl - D_4 p^3 \cos pbl - N_4 = 0$$

$$D_1 + D_3 + N_1 = 0$$

ただし，

$$M_1 = -\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n a_n$$

$$M_2 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(\frac{2n\pi}{al}\right) b_n$$

$$M_3 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(\frac{2n\pi}{al}\right)^2 a_n$$

$$N_1 = -\frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n c_n \qquad 6-13$$

$$N_2 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left(\frac{2n\pi}{al}\right) d_n$$

$$N_3 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left(\frac{2n\pi}{al}\right)^2 c_n$$

$$N_4 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left(\frac{2n\pi}{al}\right)^2 d_n$$

(6-12)式の $C_1 \cdots C_4, D_1 \cdots D_4$ に関する連立方程式を解くと，(6-11)式の係数が求まる。

$$C_1 = \frac{M_1 p^2 + M_3}{2p^2}$$

$$C_2 = \left[-\frac{M_1 p^2 + M_2}{2p^2}\left(\sin pal + \frac{\cos^2 pal}{\sin pal}\right) - \frac{M_2 - M_1 p^2}{2p^2}\left(\frac{\sinh pal \sin pal}{\sin pal}\right.\right.$$

$$\left.\frac{-\cosh pal \cdot \cos pal}{} + \frac{2(1 + \cosh pbl \cdot \cos pbl}{\cos pbl \sinh pbl - \cosh pbl \sin pbl} \cosh pal\right)$$

$$\left. - \frac{1 + \cosh pbl \cdot \cos pbl}{\cos pbl \sinh pbl - \cosh pbl \sin pbl}\left\{M_1 - N_1 - \frac{1}{p^2}(M_3 - N_3)\right\}\right]$$

$$-\frac{N_1(\cos pbl\cdot\cosh pbl+\sin pbl\cdot\sinh pbl+1)-\frac{N_3}{p^2}(\cosh pbl+\cos pbl)}{\cos pbl\ \sinh pbl-\cosh pbl\cdot\sin pbl}$$

$$+\frac{N_4}{p^3}(\sinh pbl+\sin pbl)$$

$$+\frac{N_2}{p}+\frac{\cos pal}{\sin pal}M_1-\frac{M_2}{p}\Big]\Big/\Big\{\cos pal-\frac{\cos pal\cdot\sinh pal}{\sin pal}$$

$$+\frac{2(1+\cosh pbl\cdot\cos pbl)\sinh pal}{\cos pbl\cdot\sin pbl-\cosh pbl\sin pbl}\Big\}$$

$$C_3=-\frac{M_3+M_1p^2}{2p^2} \qquad 6-14$$

$$C_4=-\frac{\cosh pal(M_3-M_1p^2)-\cos pal(M_3+M_1p^2)}{2p^2\sin pal}-\frac{M_1}{\sin pal}+\frac{\sinh pal}{\sin pal}C_2$$

$$D_1=\frac{M_3-M_1p^2}{2p^2}\cosh pal+\frac{1}{2}\Big\{M_1-N_2-\frac{1}{p^2}(M_3-N_3)\Big\}+C_2\sinh apl$$

$$D_2=-\Big[(\cosh pbl\cdot\cos pbl-\sinh pbl\cdot\sin pbl+1)D_1+N_1-\frac{N_3\cos pbl}{p^2}$$
$$+\frac{N_4\sin pbl}{p^3}\Big]\Big/(\sin pbl\cdot\cos pbl-\cosh pbl\cdot\sin pbl)$$

$$D_3=-\frac{M_3-M_1p^2}{2p^2}\cosh pal-\frac{1}{2}\Big\{M_1-N_2-\frac{1}{p^2}(M_3-N_3)\Big\}C_2\sinh pal-N_1$$

$$D_4=-\Big[(1+\cos pbl\cdot\cosh pbl+\sin pbl\cdot\sinh pbl)D_1-\frac{N_3}{p^2}\cosh pbl$$
$$+N_1(\cos pbl\cdot\cosh pbl+\sin pbl\sinh pbl)+\frac{N_4}{p^3}\sinh pbl\Big]$$
$$/(\cos pbl\cdot\sinh pbl-\sin pbl\cosh pbl)$$

(6-14)式を(6-11)式に代入することによって，各速度における振幅および振動モードの計算できる。

つぎに，両軸受の反力は，解がわかれば，次式から得られる。左側軸受の反力 F_L は，

$$F_L=\left(EI\frac{\partial^3\Pi_n(s)}{\partial s^3}\right)_{s=0}$$

$$=EI\Big\{C_2p^3-C_4p^3-\sum_{n=1}^{\infty}E_n\left(\frac{2n\pi}{al}\right)^3b_n\Big\} \qquad 6-15$$

右側軸受の反力 F_R は，

$$F_R = -\left(EI\frac{\partial^3 \Box_L(s)}{\partial s^3}\right)_{s=al} + \left(EI\frac{\partial^3 \Box_R(0)}{\partial s^3}\right)_{s=0}$$

$$= EI\{-C_1p^3\sinh pal - C_2p^3\cosh pal - C_3p^3\sin pal + C_4p^3\cos pal$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{2n\pi}{al}\right)^3 b_n + D_2p^3 - D_4p^3 - \sum_{n=1}^{\infty} F_n\left(\frac{2n\pi}{bl}\right)^3 d_n\} \qquad 6-16$$

第4章と同じようにして，$M\varepsilon$ を集中ふつりあいとして，軸受反力を無次元化すると，

$$f_L = \frac{F_L}{M\varepsilon\omega^2} \qquad 6-17$$

$$f_R = \frac{F_R}{M\varepsilon\omega^2} \qquad 6-18$$

となる。

第3節 ふつりあいによる軸受応答の検討

ふつりあいによる軸受応答およびモードの計算結果を図示する。図6－2は，スパン比 $a=0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ の場合の1次，2次3次危険速度の振動モードである。図6－3は，スパン比 $a=0.5$ のとき，不つりあい位置と軸受応答の関係を示している。図6-4は，ふつりあいが軸受間の中央にある場合のスパン比の変化に対する応答の関係を，また，図6-5には，オーバハング部先端に不つりあいがある場合のスパン比の変化に対する応答の関係を示している。以上のグラフを以下の順に考察する。

3－1 振動モードと軸受応答の検討

図6－2に危険速度における振動モードを示している。この図において，1次のモード型は一致した性質を示しているが，2次モードでは，スパン比0.7を境にして節の位置が軸受間部とオーバハング部と異なっている。また，3次モードでは，スパン比 $a=0.8$ を境にして節の位置が異なっている。

振動モードの各位置における振幅は，系に与える影響を示していると考えられるから，ふつりあいの位置と振動モードとは，密

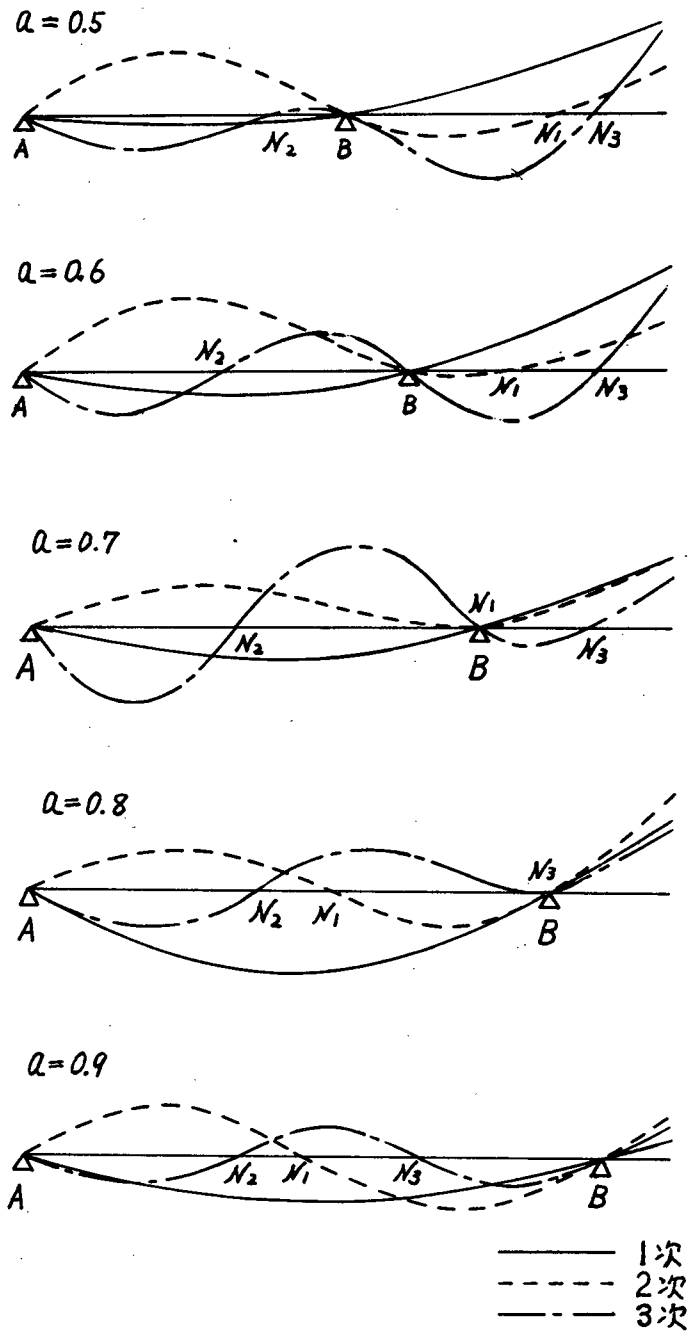
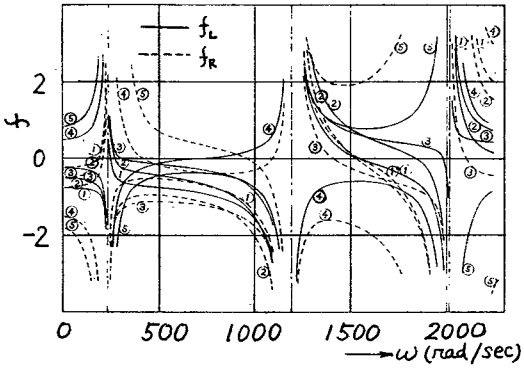


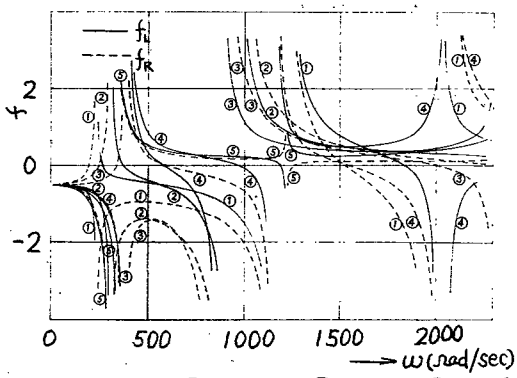
図6-2　スパン比に対する規準モード

接な関係がある。それは，図6-3を図6-2と比較すればよくわかる。軸受間部左側，中央，右側に不つりあいがあるときは，回転速度が1次危険速度よりもはるかに低いときは，不つりあいの位置によって，右側軸受と左側軸受の力の大きさは異なるが，同符号であり，危険速度では，同じ性質を示している。また，ふつりあいがオーバハング部にある場合には，回転速度の低いところでは，右側軸受と左側軸受の符号が異なっている。2次と3次の危険速度の間で，軸受間部にふつりあいがある場合には，必ず振幅が0になる速度があるが，オーバハング部にふつりあいがあるときは，振幅が0になる速度がない(しかし，このことは，他のスパン



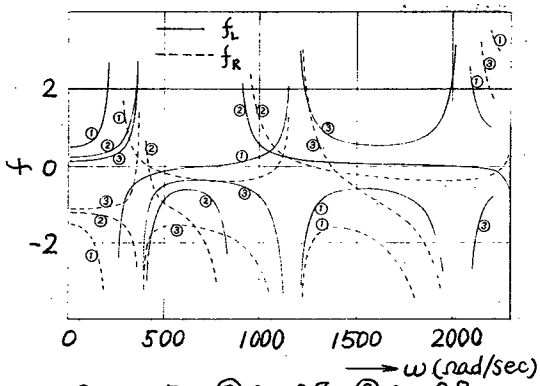
①0.25a/ℓ，②0.5a/ℓ ③0.75a/ℓ ④0.5b/ℓ
⑤1.0b/ℓ.

図6-3．スパン比 a=0.5 の場合の不つりあいの位置に対する軸受応答



① a=0.5，② a=0.6，③ a=0.7，④ a=0.8
⑤ a=0.9.

図6-4．スパン比に対する軸受応答(ふつりあいが軸受中央ある場合.)



① a=0.5，② a=0.7，③ a=0.8

図6-5 スパン比に対する軸受応答(ふつりあいがオーバハング中央にある場合)

比に対して必ずしも正しくない)。

図6－4には，ふつりあいが軸受間中央にある場合のスパン比の変化に対する応答の変化を示している。$a=0.5\sim0.7$では，2次と3次の危険速度の間まではほぼ同じ性質を示し，$a=0.8, 0.9$では，1次危険速度で軸受力が右側と左側で同符号となって，$a=0.5\sim0.7$の場合と異なっている。また，3次危険速度では，$a=0.5\sim0.6$と$a=0.7\sim0.8$とで両軸受力の符号が異なっている。図6-5は，図6-4とふつりあいの位置がオーバハング部先端にあるという点で異っている。この場合も$a=0.5\sim0.7$と$a=0.8, 0.9$の場合と1次危険速度までの状態が異なっている。これは，$a=0.8, 0.9$とオーバハング部が短かくなるに従ってオーバハング部の質量の影響が，軸受間部のそれに比べて小さくなっているからで，両端単純支持のロータの軸受応答曲線に近ずいている。

3－2．ふつりあい位置判定の指針

オーバハングロータのつりあわせの際に重要な問題の一つは，ふつりあいがオーバハング部と軸受間部のどちらにあるかということである。ふつりあいのある部分と，修正おもりをつける部分とが異なれば，修正がうまくできないことが経験的によく知られているし，次節でも計算例で示している。したがって，つりあわせの際に，軸受応答を測定することによってふつりあいが軸受間部とオーバハング部のどちらに主にあるかを知ることは，重要なことである。そこで，ここでは，種々の計算例および図6-4,5の検討結果を整理して，ふつりあいがオーバハング部と軸受間部のどちらにあるか判定する指針を与えている。

3－2－1　1次危険速度以下の場合

a) スパン比aが0.7以下の場合

この場合は，回転速度の低いところで軸受左右の力の符号によって判定できる。すなわち，始め同符号で，途中でオーバハング側の軸受力の符号が逆になるのは，軸受間部にふつりあいがある場合である。また，初めから左側と右側の軸受力の符号が逆のと

きは，オーバハング部にふつりあいがある場合である。

b) スパン比が 0.8 以上の場合

低速領域で左側と右側の軸受力が同符号で，同符号のまま危険速度に近ずく場合は，ふつりあいは，軸受間部にある。また，低速領域で軸受力は異符号で，1次危険速度付近でオーバハング部側の軸受力の符号が変わって，左右の符号が同じになる場合，ふつりあいは，オーバハング部側にある。

3－2－2. 1次と2次危険速度の間にある場合

a) スパン比 a が 0.6 以下の場合

危険速度近くで軸受力は異符号で，オーバハングのない側の軸受力は，回転速度が上がると，符号が変わり，2次危険速度付近で左右の軸受力が同符号になる場合，ふつりあいは，軸受間部 A～B，または，オーバハング部の B～N_1 の部分にある。また，N_1～C の部分にふつりあいのある場合は，軸受間部の符号が異なる。

b) スパン比 $a = 0.7$ の場合

(a)と同じであるが，図6-2において，オーバハング部に節ができないので，オーバハングのない側で軸受力の符号が変わる場合のふつりあいは，軸受間部だけである。

c) スパン比 $a = 0.8$ の場合

左右の軸受力の符号がいずれも，1次と2次の途中で変化する場合，ふつりあいは，A～N_1 の部分にあり，1次と2次の間左右の軸受力の符号が変わらなければ，N_1～B または，B～C の部分にふつりあいがある。

d) スパン比 $a = 0.9$ の場合

オーバハング部側の軸受力の符号は一定で，反対側の軸受力の符号が異なる場合，ふつりあいは，A～N_1 の部分にあり，逆に，オーバハングのない側の軸受力の符号が一定で，反対側の軸受力の符号が異なる場合は，ふつりあいは，N_1～B または，B～C の部分にある。

2次と3次の危険速度の間についても同様の考察ができるが，節がふえて，考察が複雑になるので 省略する。

1次以下の場合と，1次と2次の危険速度の間の場合を綜合して，ふつりあいの位置の検討をおこなえば，ふつりあいのある位置はかなり正確に判定できる。

第4節. つりあわせ方法の検討

4－1 つりあわせ方法.

a)軸受反力を0にするつりあわせ方法.

第3章のつりあわせ方法がそのまま利用できる。図6-6のような修正量とふつりあい量に対して，軸受反力は，

$$f_L = U_0 G_L(\omega_i, l_0) + U_1 G_L(\omega_i, l_1) + U_2 G_L(\omega_i, l_2) + \cdots\cdots + U_{2n} G_L(\omega_i, l_{2n})$$

$$f_R = U_0 G_R(\omega_i, l_0) + U_1 G_R(\omega_i, l_1) + U_2 G_R(\omega_i, l_2) + \cdots\cdots + U_{2n} G_R(\omega_i, l_{2n}) \qquad 6\text{-}19$$

ただし，$G_L(\omega_i, l_i)$ は，回転速度 ω_i のとき，l_j の位置に $M\varepsilon(l_j) \times \omega_i^2 \equiv 1$ のふつりあいがあるときの軸受1（L側）の応答係数であり，(6-17)式から求められる。

(6-19)式において，n速度と2n修正面を決め，ためしおもり法によって G_L, G_R を求め，ふつりあいによる軸受反力 $U_0 G_L(\omega_i, l_0)$ $U_0 G_R(\omega_i, l_0)$ を測定すれば，軸受反力 $f_L = f_R = 0$ という条件がつりあいの条件であるから，2n元1次連立方程式となって，$U_1, U_2 \cdots U_{2n}$ 個の修正量が求まる。すなわち，

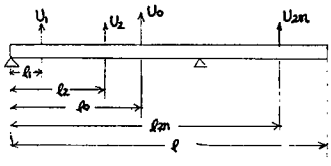


図6-6 軸受反力を零にするつりあわせ法の場合

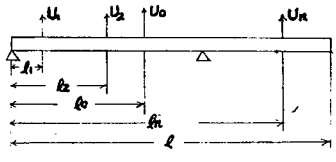


図6-7 モーダルバランス法の場合

$$\begin{cases} U_0 G_L(\omega_1, l_0) + U_1 G_L(\omega_1, l_1) + U_2 G_L(\omega_1, l_2) + \cdots\cdots + U_{2n} G_L(\omega_1, l_{2n}) = 0 \\ U_0 G_R(\omega_1, l_0) + U_1 G_R(\omega_1, l_1) + U_2 G_R(\omega_1, l_2) + \cdots\cdots + U_{2n} G_R(\omega_1, l_{2n}) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ U_0 G_L(\omega_n, l_0) + U_1 G_L(\omega_n, l_1) + U_2 G_L(\omega_n, l_2) + \cdots\cdots + U_{2n} G_L(\omega_n, l_{2n}) = 0 \\ U_0 G_R(\omega_n, l_0) + U_1 G_R(\omega_n, l_1) + U_2 G_R(\omega_n, l_2) + \cdots\cdots + U_{2n} G_R(\omega_n, l_{2n}) = 0 \end{cases} \qquad 2-20$$

となる。また，静つりあいと動つりあいの条件も同時に満たすときも，第3章と全く同じで，(3-14)式となる。

b) モーダルバランスの方法.

図6-7で示すような修正量とふつりあい量に対して，モーダルバランスの場合のつりあわせの条件は次のようになる。

$$\begin{cases} U_0 G(\omega_1, l_0) + U_1 G(\omega_1, l_1) + U_2 G(\omega_1, l_2) + \cdots\cdots + U_n G(\omega_1, l_n) = 0 \\ U_0 G(\omega_2, l_0) + U_1 G(\omega_2, l_1) + U_2 G(\omega_2, l_2) + \cdots\cdots + U_n G(\omega_1, l_n) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ U_0 G(\omega_n, l_0) + U_1 G(\omega_n, l_1) + U_2 G(\omega_n, l_2) + \cdots\cdots + U_n G(\omega_1, l_n) = 0 \end{cases} \qquad (6-21)$$

ただし，$G_i(\omega_n, l_j)$ は n 次の危険速度における i モード型の l_j の位置における振幅である。

(6-21)式において，n 速度では n 修正面あれば，モーダルバランスは可能である。静つりあいと動つりあいを同時に満足させるには，他に2修正面が必要となり，その場合，つりあわせの式は，第3章 (3-15) 式となる。

4-2. つりあわせ効果の検討.

つりあわせ効果を検討するために，オーバハングロータのスパン比 $a=0.5$ と 0.8 の場合について，ふつりあいが軸受間の中央 $(al/2)$ とオーバハング部の中央 $(bl/2)$ にある場合について，軸受反力を0にするつりあわせ方法とモーダルバランスによるつりあわせ方法を用いて計算した。とくに，両つりあわせ方法とも静つりあいと動つりあいの条件を満足させながらつりあわせる方

法も計算している。つりあわせは，1次危険速度に主眼を置いているが，つりあわせ後の応答については，2次危険速度まで求めている。

図6-8，6-9には，スパン比α=0.5で，軸受間の中央にふつりあいがあるとき，軸受間部に修正質量をつけたときと，オーバハング部に修正質量をつけたときとについてつりあわせの効果を示している。静つりあいと動つりあいのための修正質量は，いずれの場合も，軸受間部の軸受の近くに定めている。図6-8はモーダルバランスの方法を用いた場合で，静つりあいと動つりあいの条件を入れない場合は，軸受間部で修正しても余り効果がなく，オーバハング部で修正した場合には，1次モードでは振幅は小さいが，他の部分では，つりあわせ前よりも大きくなっているところがある。1次モードと静つりあいと動つりあいをとれば，軸受間

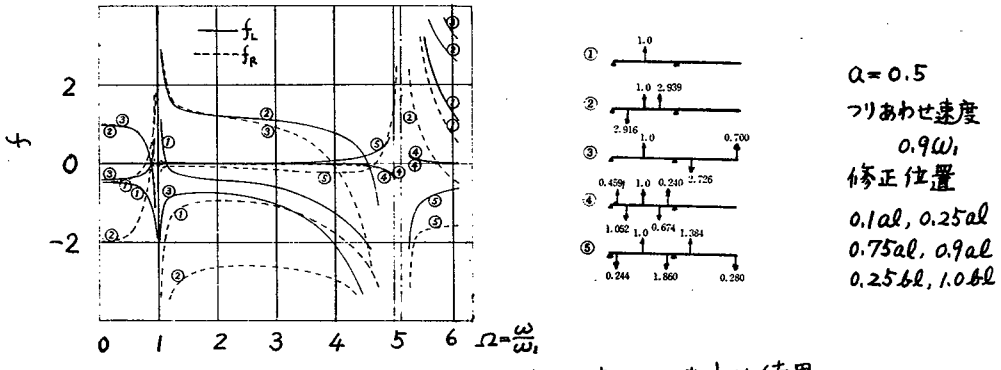


図6-8 軸受反力を0にするつりあわせ法のつりあわせ結果

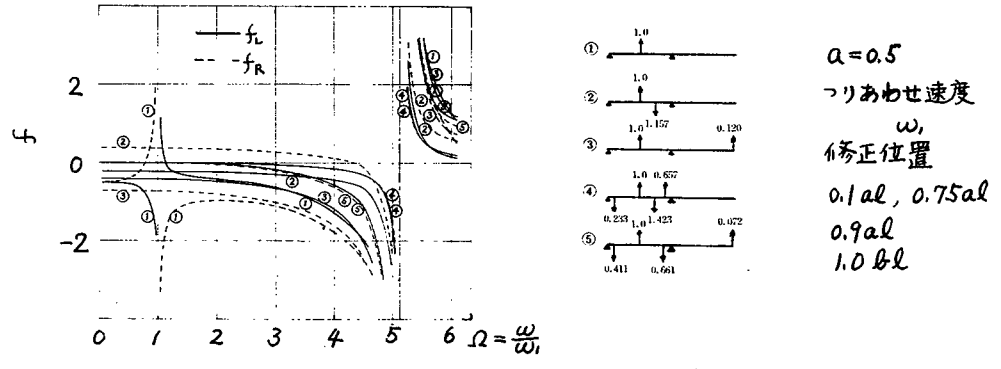


図6-9 モーダルバランス法によるつりあわせ結果

部で修正しても，オーバハング部で修正しても効果はでている。とくに，軸受間部で修正した場合には，かなり高い回転数まで振幅が小さい。図6-9は，軸受反力を0にするつりあわせ方法の場合であり，この場合は，$\Omega=0.95$ とした。静つりあいと動つりあいの条件が入っていない場合は，軸受間部でつりあわせても，オーバハング部でつりあわせても，つりあわせ前よりも大きくなっている。とくに，軸受間部でつりあわせた場合には，オーバハング部でつりあわせたよりも振幅が大きいのは，期待に反しているが，静つりあいと動つりあいの条件を加えると，軸受間部で修正する方がオーバハング部で修正するよりも効果がある。また，図6-8と6-9を比較すると，静つりあいと動つりあいの条件を入れると，軸受反力を0にするつりあわせの方が高速回転までつりあわせの効果があることがわかる。また，オーバハング部のない第3章の結果では，静つりあいと動つりあいをとれば，振幅が小さくなっているのに対して，オーバハング部がある場合には，逆に大きくなることがある。また，スパン比 $a=0.5$ で，ふつりあいがオーバハング部にある場合についても同じ計算をして，同様の結果が得られた。

図6-10，6-11には，スパン比 $a=0.8$ で，オーバハング部の中央にふつりあいがあるとき，軸受間部に修正おもりをつけたときと，オーバハング部に修正おもりをつけたときとについてのつりあわせ効果について示している。図6-10は，モーダルバランスの方法を用いた場合で，この場合も，$a=0.5$ の場合と同様のことが言える。とくに軸受間部で修正している場合，修正位置が1次モードを消去するのにあまり効果的でないためか，静つりあいと動つりあいの条件を入れない場合は，振幅が大きくなっている。図6-11は，軸受反力を0にするつりあわせ条件でつりあわせた場合で，静つりあいと動つりあいの条件を入れた場合でも軸受間部でつりあわせた場合は，1次を越すと振幅は大きくなっているのに対して，オーバハング部でつりあわせた場合には，静つりあい

と動つりあいの条件を入れない場合でもよくつりあいがとれていて，その条件を加えると，振幅は，非常に小さくなっている。以上の考察によって，オーバハングを有するロータのつりあわせに際して，静つりあいと動つりあいの条件を入れることは不可欠であることがわかる。また，ふつりあいがオーバハング部にあるか軸受間部にあるかを知ることもつりあわせを効果的に行うためには必要なことであることがわかる。

第5節　つりあわせ位置の選定

弾性ロータの修正位置は，バランスホールの選定の段階つまり設計の段階で決めなければならない。そのとき，オーバハング部を有するロータでは，軸受間部とオーバハング部にそれぞれ何面バランスホールを設ければよいかということが問題となる。本節

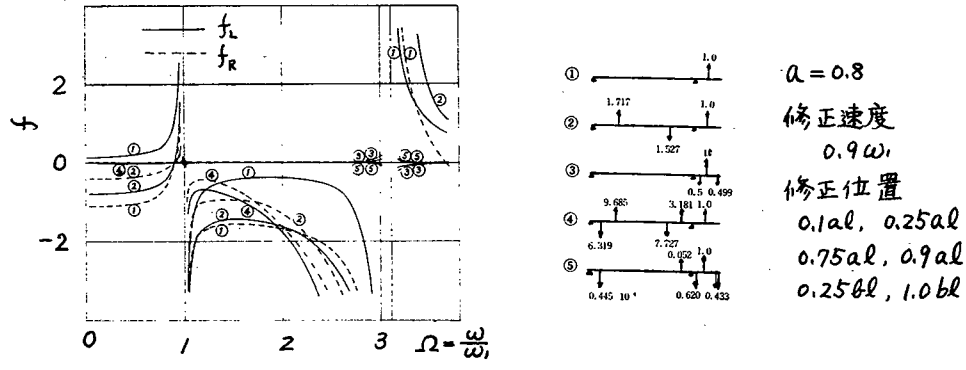


図 6-10 軸受反力を零にするつりあわせ法のつりあわせ結果

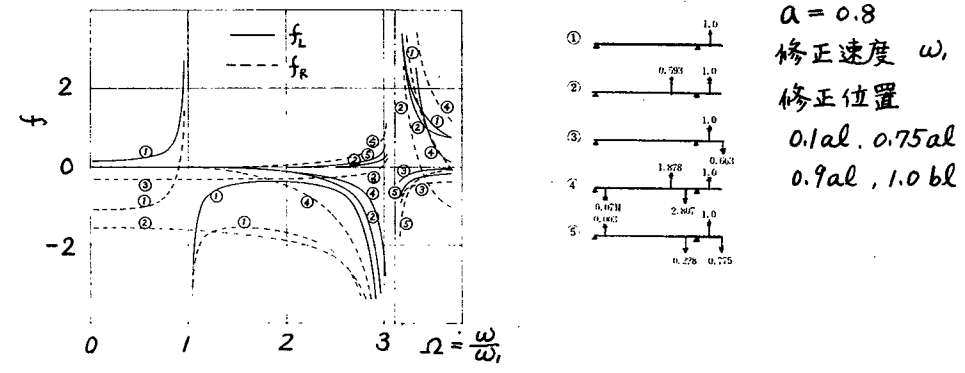


図 6-11 モーダルバランス法によるつりあわせ結果

では，前節のつりあわせ法を用いて，種々のふつりあい例を想定して，バランスホールの選定の資料を作る。

計算にあたり，修正位置は，$U_i = 0.1al$，$0.25al$，$0.5al$，$0.75al$ $0.9al$，$0.25bl$，$0.5bl$，$1.0bl$ を選び，不つりあい位置として，図6-12～15では $U_o = 0.5al$，$0.5bl$ を，図6-16，17では，$U_o = 0.6\ al$，$0.6\ bl$ を用いている。スパン比 $a = 0.5$，0.8 の場合について，以上のふつりあいおよび修正位置の組合せによって，つりあわせ条件にもとずく修正質量を計算し，そのときの軸受応答を計算したのが図6-12～17である。これらのつりあわせ条件には，つねに静および動つりあいの条件を入れている。また，修正

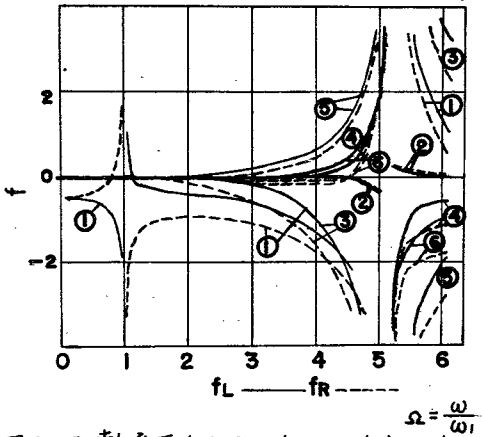


図6-12 軸受反力を0にするつりあわせ法のつりあわせ効果（$a = 0.5$）

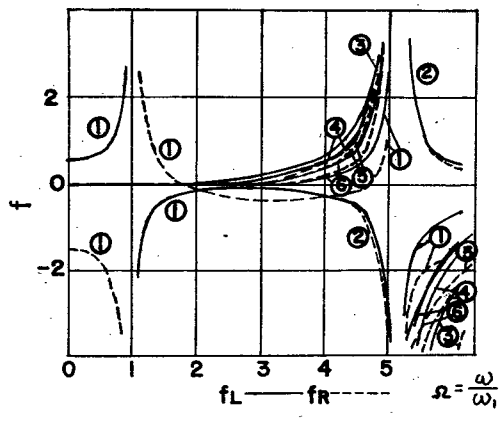


図6-13 モーダルバランス法のつりあわせ効果（$a = 0.5$）

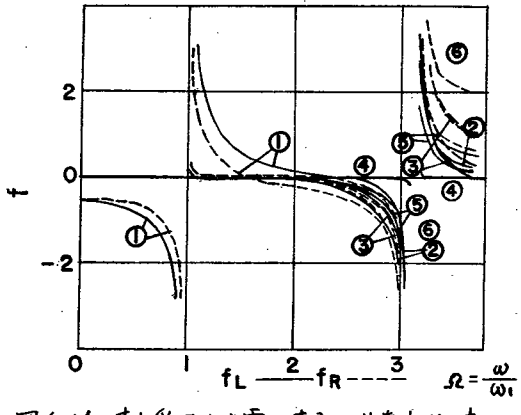


図6-14 軸受反力を零にするつりあわせ法のつりあわせ効果（$a = 0.8$）

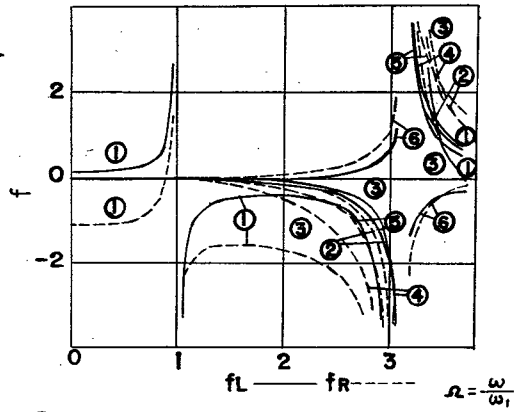


図6-15 モーダルバランス法のつりあわせ効果（$a = 0.8$）

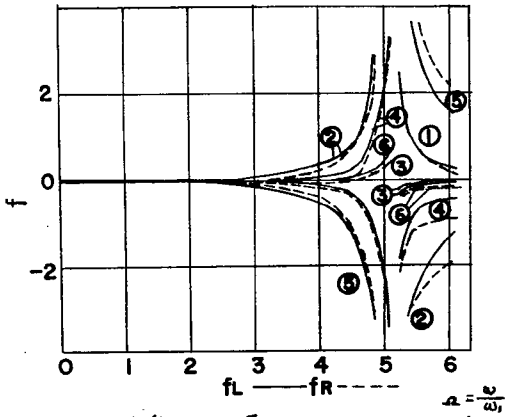


図6-16 軸受反力を零にするつりあわせ法のつりあわせ効果（α＝0.5）

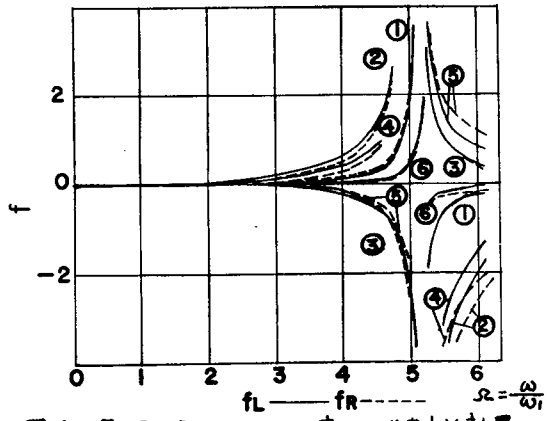
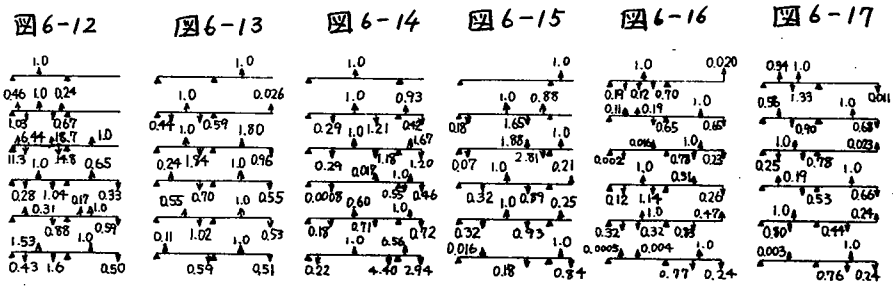


図6-17 モーダルバランス法のつりあわせ効果（α＝0.5）

図6-12 ～ 図6-17 の説明



つりあわせ速度：図6-12,14,16は Ω＝0.9　　図6-13,15,17は Ω＝1
ふつりあい量は $M\varepsilon\omega^2=1$

面位置は 軸受間およびオーバハング部のいずれか，または，いずれをも含むように選んだ。静および動つりあいの条件を考慮する際，その修正位置を軸受のごく近く（$l=0.1al$）と少し離れた位置（$l=0.25al$）にとる2つの場合について考えている。

図6－12，15に示されるように，修正位置を軸受間部にとっている場合は，不つりあいが軸受間にあるときはつりあわせはよくとれているが，オーバハング部にあるときはあまりよくとれていない。したがって，不つりあい位置が未知のときは，修正位置を両方へ分ける必要がある。静および動つりあいのための修正位置は，図6－13，14に示されるように，軸受近傍にあっても軸受から離れていてもあまりつりあわせ効果に変化を及ぼさい。

軸受反力を0とするつりあわせ方法では，図6－12，16に示されているように，$\alpha = 0.5$ で修正面が軸受間に対称に2面，オーバハング部中央とそのα先端に一つづつある場合に不つりあいがいずれの側にあろうとも，修正面が他の場合と比べると，全体的に軸受反力は小さくなっている。$\alpha = 0.8$ の場合も図6－14に示されるように同様のことが言える。モーダルバランス法では，$\alpha = 0.5$ のとき，図6－13，17が示すように，修正面が軸受間中央に一面，オーバハング部に2面ある場合に，ふつりあいがいずれにあろうとも，つりあわせ効果は他の場合と比較してよい。また，図6－15から，わかるように $\alpha = 0.8$ の場合は修正面が軸受間に対称に2面，オーバハング部先端に一面とっているのが，修正面としてよい。

以上のことより，オーバハングを有するロータの修正面を設計の段階で決定する場合には，スパン比と修正位置の関係が密であるので，スパン比によってつりあわせ位置を考える必要がある。たとえば，軸受間に比べてオーバハング部が長い場合には，修正面をオーバハング部に多く設ける必要がある。また，修正位置の多少の変化はあまりつりあわせに影響を及ぼさないので，ロータ全体を見て配分するのが望ましい。

第6節　実験

6－1　実験装置

実験に用いた装置はほぼ，第I編第4章のものと同じである。ただ，軸受反力を測定するために，図6－18に示すような軸受を用いた。軸受とピローブロックとの間にチタン酸バリウムを挿入し，軸受の圧力をそのままとり出した。（付録参照）　装置の概要は　図6－19に示す通りである。

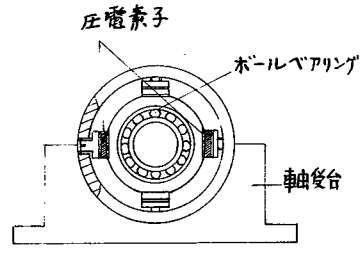


図6-18 軸受力測定装置

修正おもりは，アルミのリングを軸

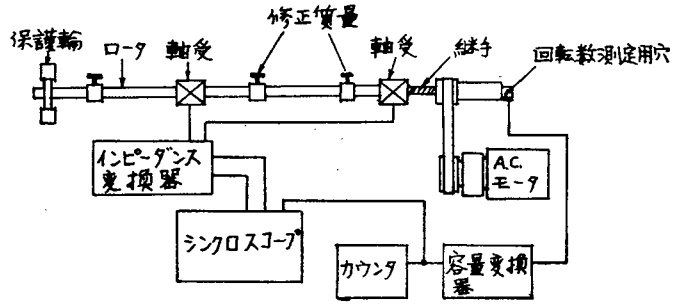


図 6-19 実験装置のブロック図

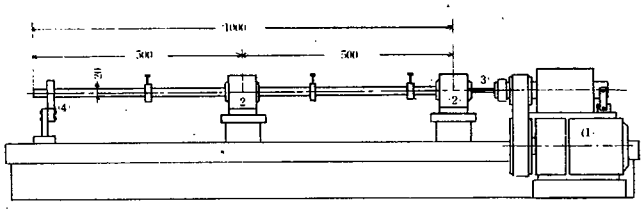


図 6-20 実験装置 ロータ部

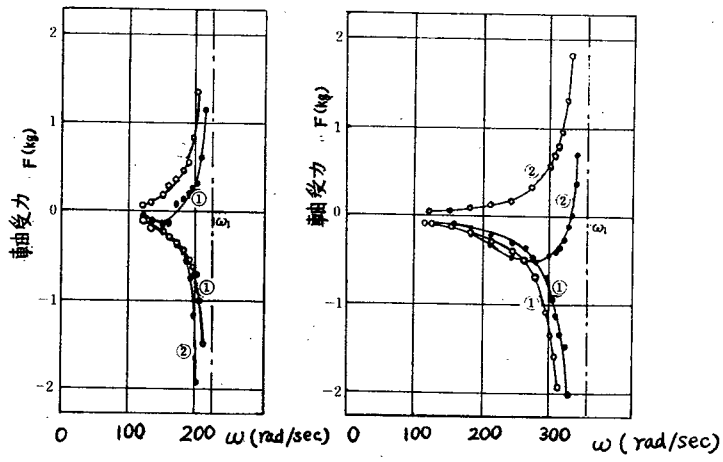
に入れておき，リングにネジを挿入することによって付加された。この場合，ふつりあい量は近似的にネジの重心に半径を掛けた値を用いた。

6－2 実験結果

実験は第3節，第4節，第5節の計算結果を確かめるために行われた。したがって，スパン比は $\alpha = 0.5$ と 0.8 の場合について，実験した。

実験1. 実験においては，高次モードまで十分に修正することができないので，1次危険速度以下の場合についてのみ確認を行なった。スパン比 $\alpha = 0.5$ と 0.8 の場合について，不つりあいが軸受間部及びオーバハング部にある場合について，図6－21(a)(b)に示されている。この図と計算結果とは，非常によい一致を示していることがわかる。

実験2. まず始めに，軸の不つりあいを修正し，ついで，修正位置の影響係数を測定して，その後修正質量をつけて，つりあわせ



(a) 軸受間部にふつりあいのある場合　　b) オーバハング部にふつりあいのある場合

図6-21　ふつりあい位置に対する軸受応答

後の軸受応答を測定した。軸受反力を0にするつりあわせ方法とモーダルバランス法において，つりあわせ速度はそれぞれ0.9および1.0とした。測定結果は図6－22，23に示されている。この図において，ふつりあいのある側で，修正をしなければ，つりあわせ効果があまりないことが計算結果と同様にわかる。計算結果と定性的にはよく似ているが，危険速度以上では，2次モードの残留ふつりあいの影響が入って，計算結果より大きめに出ている。

第7節　まとめ

オーバハング部を有する弾性ロータのつりあわせ方法について理論的な考察と実験的な検討をおこなった。その結果，ふつりあいのある部分と反対の部分でつりあわせをおこなっても，かえって，ふつりあいが大きくなることがある。したがって，あらかじめ，ふつりあいがどちらの部分に沢山存在するかわかれば，つりあわせ操作で非常に有利である。そこで，ふつりあいのある部分を調べる方法を示し，実験によって調べた。

また，軸受反力を0にするつりあわせと，モーダルバランスのつりあわせ方法について検討し，修正面を一般にどの位置に設け

ればよいかについて，理論的および実験的に検討した。

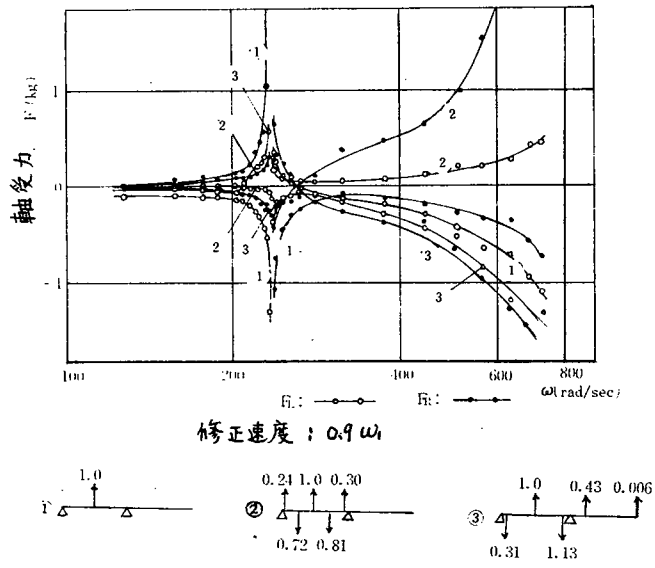


図 6-22 軸受反力を零にするつりあわせ法のつりあわせ結果

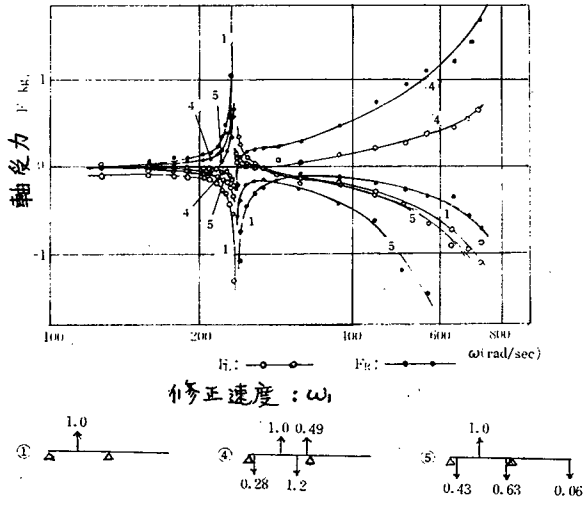
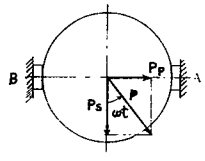


図 6-23 モーダルバランス法のつりあわせ結果

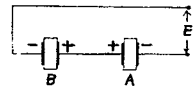
付　録

圧電素子による軸受力の測定法

圧電素子の出力電圧は，圧力のみならずせん断力によっても発生する。軸受反力の測定においては，圧力だけが必要であるのに，回転しているためせん断力によっても電圧を発生してしまう。ここでは，せん断力によって発生する電圧をとり除く方法を示す。



図A-6-1 圧電素子に加わる力.



図A-6-2 圧電素子の接続図

図 6-A-1に示すように，力Pが軸受にかかったとすれば，その成分は，圧力 P_p とせん断力 P_s とに分けられ，その値はそれぞれ，$P\sin\omega t$ と $P\cos\omega t$ である。ここで，圧電素子によって，電圧に変換される係数を，圧力および せん断力の場合それぞれ k_p, k_s とすると，圧力によって発生する電圧 E_p は，

$$E_p = k_p \cdot P\sin\omega t \qquad A-1$$

である。また，せん断力は，圧力によって変化するから，

$$E_s = k'_s\, P\sin\omega t \cdot \cos\omega t \qquad A-2$$

である。ただし，k'_s は，k_s にある係数を掛けたものとする。

したがって，圧電素子A，Bにより発生する出力電圧は，

$$\begin{aligned} E_{AP} &= k_p P\sin\omega t \\ E_{BP} &= -k_p P\sin\omega t \\ E_{AS} &= k'_s P\sin\omega t\cos\omega t = \tfrac{1}{2}k_s' P\sin 2\omega t \\ E_{BS} &= k'_s P\sin\omega t\cos\omega t = \tfrac{1}{2}k'_s P\sin 2\omega t \end{aligned} \qquad A-3$$

となる。したがって，E_{AS}，E_{BS} を除くような回路は図6-A-2

のようになる。この場合，出力電圧Eは

$$E = E_{Ap} + E_{As} - E_{Bp} - E_{Bs}$$
$$= 2kp\,P\sin\omega t \qquad \text{A-4.}$$

となる。

第7章　弾性ロータのつりあわせ基準

第1節　まえがき

弾性ロータと剛性ロータのちがいは，すでに第2章で説明したが，つりあわせの実行段階では，とくに次のようなことによって影響される。すなわち，任意に選んだつりあわせ速度で，つりあわせを行なった場合に，それ以外の速度では振動が大きくなることがあるということである。また，ロータ系を考える場合に，つりあわせの性質は，ロータ自体の剛性，形状およびそれを支えている軸受，軸受支持台および運転速度によって決められるものである。

つりあわせに際しては，これらの条件によって決まるロータ系の性質によって，剛性ロータのつりあわせだけで十分な場合と，やや剛性ロータの性質を考慮したつりあわせと，弾性ロータとしてのつりあわせの方法の3つの分野に分けることができる。このような段階でロータ系を分類することは，つりあわせ作業を行なう場合に必要であるばかりでなく，ロータを含む機械の設計の時点においても必要である。また，これらの分類にもとづいて，許容不つりあいの基準を作ることが，実際上すぐれていると考えられる。

一方，ロータのつりあわせ基準設定については，ISOをもとに世界的に規格化しようという動きが出ている。TC部門では，つりあわせの要求に応じたロータをグループ分けし，グループに適したつりあわせの基準を作るような形式で審議が進んでいる。その中の案の一つとして，英国はモーダルバランス法を根底としたつりあわせ基準のきめ方を提案している。それによれば，ロータ系を使用回転速度と，使用するロータ系の1次危険速度との比により，60％以下，60％以上2次危険速度より十分下，2次危険速度付近またはそれ以上の3つの場合に分けている。また，初期不つりあい量の大きさによって，つりあわせ作業に大きな影響

かあることから，縦軸に許容初期ふつりあい量をとり，横軸に実際に使用するロータ系の危険速度と，ロータを単純支持したときの危険速度との比をとり，それによって，等級を決める方法を提案している。しかし，ロータは，使用する回転速度と振幅の間に密接な関係があるにもかかわらず，この方法では，その関係を軽視しすぎているため，使用回転数によっては，不必要なまでつりあいをとらなければならなくなることも予想される。

本章では，そのような不合理のない一つのロータのつりあわせ基準設定案として，縦軸にロータの使用回転速度をとり，横軸に実際に使用するロータ系の危険速度と，ロータを単純支持したときの危険速度との比をとり，振幅一定の等高線を引いて，それによって，ロータのつりあわせ基準を設定する方法を提案する。本章の考察は，簡単な場合として一様断面を有する軸についておこなっている。

第2節　軸受の弾性と減衰を考慮した弾性ロータ系

第4章では，軸受台がばねで支持されたつりあわせ試験機の場合について解析と検討をおこなった。本章では，実機にロータをとりつけた場合に，軸受の油膜によって生ずる弾性効果について検討することを主な目的とする。

図7－1は油膜の弾性をばねでモデル化した図であり，1次危険速度付近の振動の状況である。(a)図は，軸の剛性に比して油膜の剛性が小さい場合，(b)図は，同程度の大きさの場合，(c)図は，油膜の剛性が大きい場合である。これら3種の振動系をみる場合，(a)では，ロータはほとんど曲がっていないので，たとえこのロータ系を危険速度付近で回転するとしても，剛体のつりあわせだけで十分である。また(c)図では，ばねが剛であるから，両端単純支持の境界条件に等しくなり，弾性ロータとしてのつりあわせをおこなわなければならない。(b)図では，(a)と(c)の中間であり，つりあわせ基準とばね剛性の関係によって修正面の数を決める必要が

ある。

また，油膜の影響は弾性としてだけではなく，減衰器としての効果もあり，その減衰は非常に大きいことが知られている。そこで，減衰の影響についても検討をおこなう。

軸支持のばね定数の大きさを表わすパラメータとして，現実の系における1次危険速度 ω_1 と軸支持部を単純支持としたときのロータの1次危険速度 ω_{s1} との比 ω_1/ω_{s1} を用いる。$\omega_1/\omega_{s1}=0$ はばね定数＝0の場合で，両端が自由となった場合であり，$\omega_1/\omega_{s1}=1$ は，ばね定数＝∞の場合で，両端が単純支持となった場合に相当する。

ここで検討をおこなった条件は次のようである。

1) 静的および動的つりあわせを行なったロータについて，不つりあいの分布を現実の分布に近く仮定する（このロータの不つりあいの分布は，剛性ロータとしてはつりあわされた状態にある。）。

2) 次にこのロータを回転したとき，軸受にくる力をいろいろな ω_1/ω_{s1} の値に対して，各回転速度 ω/ω_{s1} について計算する。（例えば 図7－2参照）

3) この計算結果は次のことを示している。：
計算結果として得られた力が，安全な範囲内にあるような ω_1/ω_{s1} と ω/ω_{s1} の領域では，2面のつりあわせ面によりつりあわせて運転することができる。

次に上記(1)項の仮定の代りに，静的および動的つりあわせと，1次危険速度モード成分の除去を行なった後のロータのふつりあい分布を，現実の分布に近く仮定して，(2)項の計算をおこなえば，上記(3)項と同様にして，3面のつりあわせ面を用いてつりあいを取って運転することができるような ω_1/ω_{s1} と ω/ω_{s1} の領域が得られる。

計算は，一様な断面の軸において，両端に同じ大きさのばね定数の支持があるような系についておこなった。なお，計算方法としては，Holzer法を用いた。棒の長さ方向に10等分に分割して，

計算を行なった。

仮定するふつりあい分布としては，図7－2(a)～(f)に示す4種類について検討をおこなった。いずれの分布も，静的および動的つりあいはとれているという条件は，満たしている。図7－2(a)に示すふつりあいの分布は，左右対称な分布の代表であり，偶数次のモード成分は存在しない。図7－2(b)に示すふつりあいの分布は，左右反対称な分布の代表であり，奇数次のモード成分は存在しない。これは，1次モード成分まで消去したつりあわせの例とも考えることが

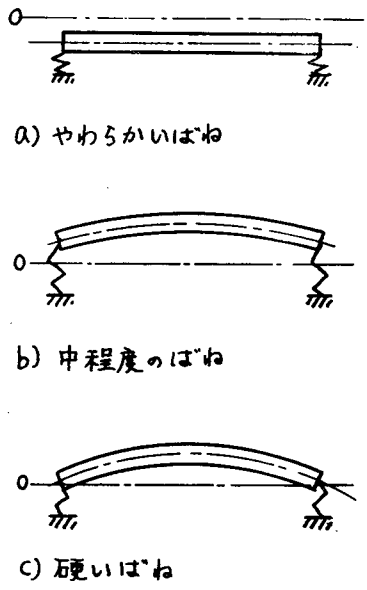


図7-1. ばね支持されたロータの振動モード

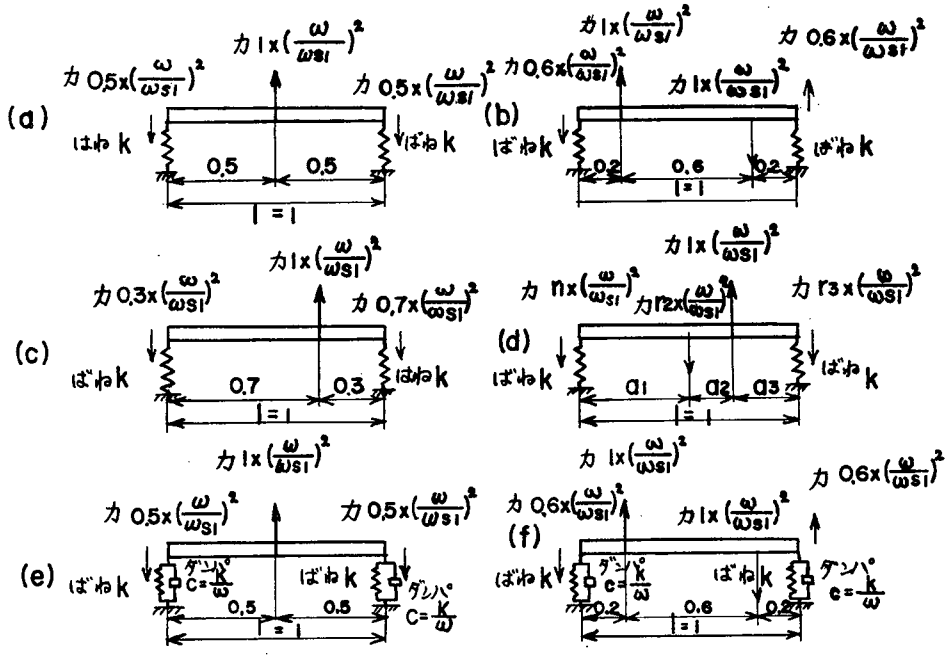


図 7-2. 図7-3～8までの図に対応するロータ系

できる。なお，この2つのふつりあい分布に対する計算結果を適当な比率で重ね合わせることにより，任意のふつりあい分布による応答をある程度推定することも可能である。図7－2(c)に示すふつりあい分布は，集中ふつりあいが $l_0/l = 0.7$ の位置にあるとき，両端につりあわせおもりをつけて，静的および動的つりあわせを取った場合である。図7－2(d)に示すふつりあい分布は，集中ふつりあいが $l_0/l = 0.7$ の位置にあるとき，両端および中央につりあわせおもり U_1, U_2, U_3 をつけて，静的および動的つりあわせと1次モード成分の消去をおこなった場合である（U_1, U_2, U_3 は，支持ばねの強さに応じて，Gを計算した（3-15）式によって決定した）。図7－2(e)，(f)は，固定されたすべり軸受で支持された弾性ロータの1つのモデルとして，ばね力と減衰力が等しいようなばね特性と減衰特性をもつ支持で支えられた弾性ロータである。(e)，(f)はそれぞれ(a)，(b)のふつりあいと同じであり，軸受の条件が異なるだけである。

第3節　計算結果の検討

前節で説明した6つの系について，計算した結果を，縦軸に ω/ω_{s1}，横軸に ω_1/ω_{s1} をとって，一定振幅を結んだ等振幅線が図7－3～8である。これらの図より，使用回転速度が決まれば，誤差0でつりあわせをしたとして，残留するふつりあいによって生ずる軸受力がわかる。したがって，この図をもとにして，どの種のロータ系であれば，いくらの使用回転速度において，軸受にかかるふつりあい量をいくら以内におさめるには，最低何面で修正しなければならない，ということがわかる。

以下，ばねで支持された弾性ロータと，ばねとダンパーで支持された弾性ロータの場合に分けて，計算結果の図について検討した結果を述べる。

3－1.　ばねで支持された弾性ロータ

ばねで支持された弾性ロータについての計算結果は図7－3～

6である。この図の検討結果つりあわせ面の数については，次のことが結論される。

1) ω_1/ω_{s1} が小さいとき，すなわち，ばね定数が小さいときには，1次危険速度より上の回転速度 ω/ω_{s1} において，$\omega_1/\omega_{s1}=1$，すなわち，単純支持の場合にくらべて，軸受力がはるかに小さい。

2) したがって，ある軸受力の許容限を決めると，ω_1/ω_{s1} が小さい場合には，軸受反力の大きさで許容ふつりあいを決めるとすれば，ふつりあいの大きさが適当に小さければ，2面でつりあわせただけでも，1次または2次危険速度より上の速度で運転可能である。

3) このような運転速度範囲は，ω_1/ω_{s1} が小さいほど大きい。

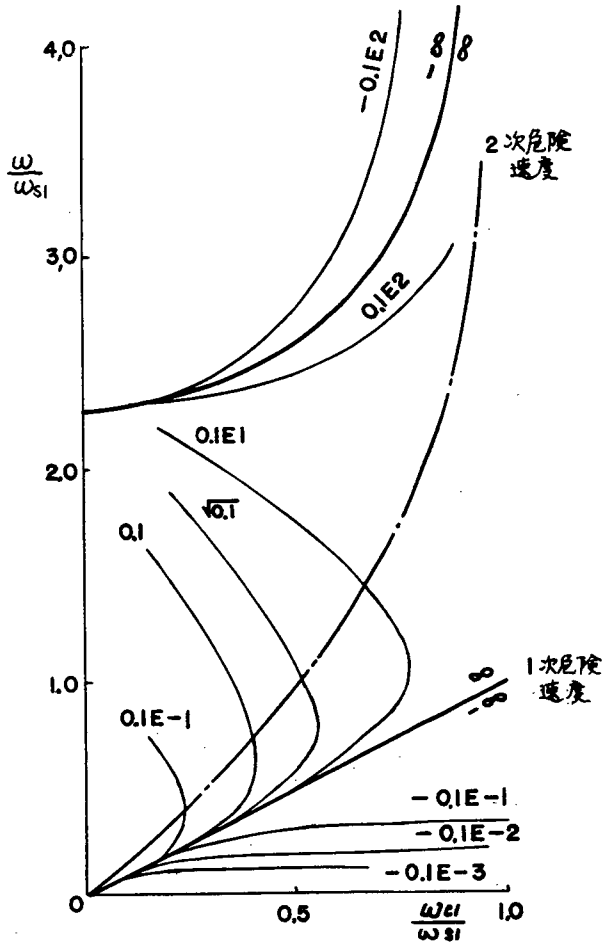


図7-3. 図7-2(a)のふつりあいに対する軸受力一定の線図

4) 以上に述べたことは，弱いばね支持の場合には，1次または2次の危険速度より上の回転速度で運転されても，ふつりあいによって生じるロータの曲がりが小さく，低い速度でとったつりあわせがくずれないためであると解釈できる。

5) したがって，弱いばね支持のロータでは，1次または2次危険速度よりも上の回転速度で運転されるものであっても，つりあわせ面の数 $n+2$ または $n+4$ よりも少ないつりあわせ数でつりあいをとることができる（ただし，n は運転速度範囲内にある危険速度の数とする）。

3－2　ばねおよびダンパーで支持される弾性ロータ

ばねおよびダンパーで支持された弾性ロータについての計算結果は，図7－7～8に示されている。この図の検討結果をまとめると次のようである：

計算結果より，3－1で述べたのと全く同じことがいえる。さらに，軸支持部の減衰の影響により，危険速度における振幅も有限値になっていて，危険速度の影響は小なくなっている。このため，ω_1/ω_{s1}が大きいところでも，第3章で述べたつりあわせ面の数よりも，減らした数でつりあわせをおこなうことができることがわかる。

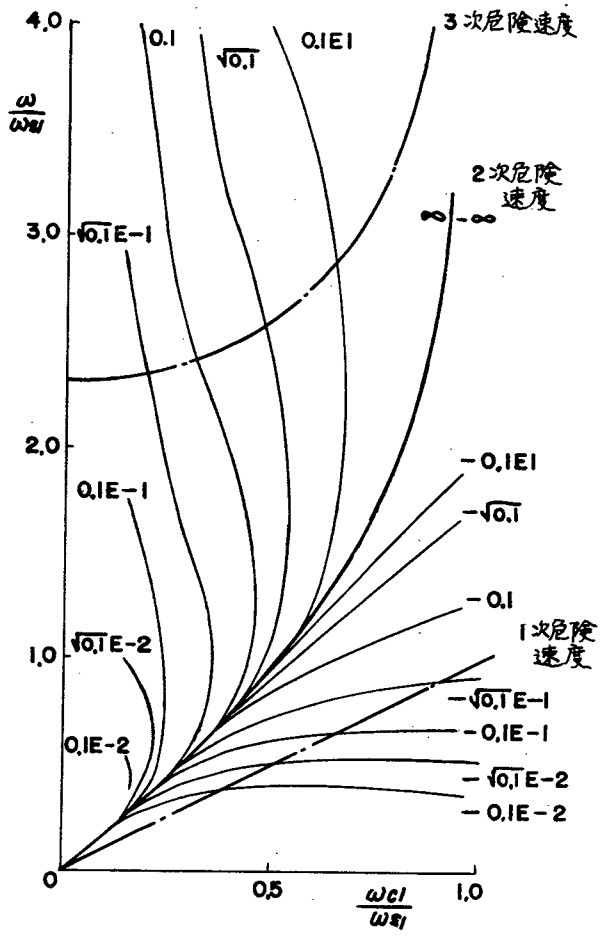


図7-4．図7-2(b)のふつりあいに対する軸受力一定の線図

第4節　つりあわせ基準作成に関する考察

第1節ですでに述べたように，弾性ロータのつりあわせ基準の作成は非常に困難であり，英国から出されている案にも問題点がある。この節では，前節の検討にもとづく，つりあわせ基準の作成方法について述べる。

弾性ロータのふつりあいは，剛性ロータのつりあわせが完了しても，高速度で回転するときに，軸のたわみによって生ずるふつりあいである。したがって，剛性ロータのつりあわせに要した修

正質量が直接，弾性ロータのふつりあいになってくることが多い。したがって，初期ふつりあい（剛性ロータとしてのつりあわせに要した修正量）が，重要な要素となる。また，使用する回転速度，軸受のばね力と減衰力，ロータの形状などは，弾性ロータのつりあわせに重要な要素である。ここでは，議論を簡単にするために，ロータの形状に関する要素を考えないことにして，基準のきめ方について考えると，以下のようになる。

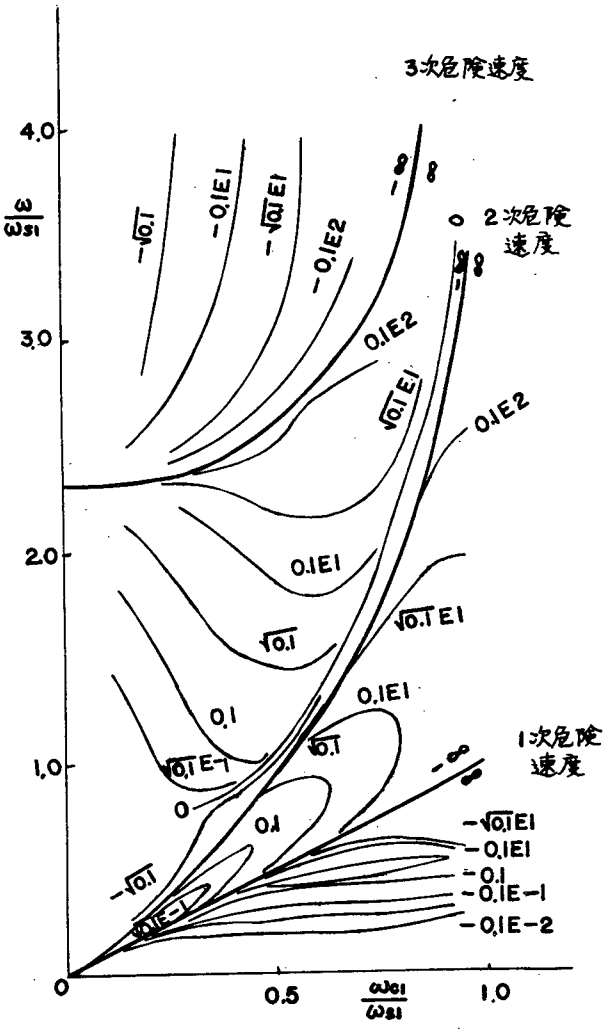


図7-5. 図7-2(c)のふつりあいに対する軸受力一定の線図.

1) ロータの軸受の標準型を決め，そのばね力と減衰力に相当する図を，例えば図7-2(a)，(b)のようなふつりあい量と修正量について，図7-3～8のような座標で描き，軸受力の大きさによって，領域を軸受力の小さい方から，1，2，……と決める。

2) 表1のような表を作り，等級と領域が決まれば，許容し得るロータの初期不つりあい量の許容量が決まるようにする。（注：図7-2の修正面数で，要求する等級に満たない場合は図7-2(b)にすれば，すなわち，修正面数を増加すれば，

表7-1

等級＼領域	1	2	……
1			
2		許容し得る	
……		initial unbalance の量.	

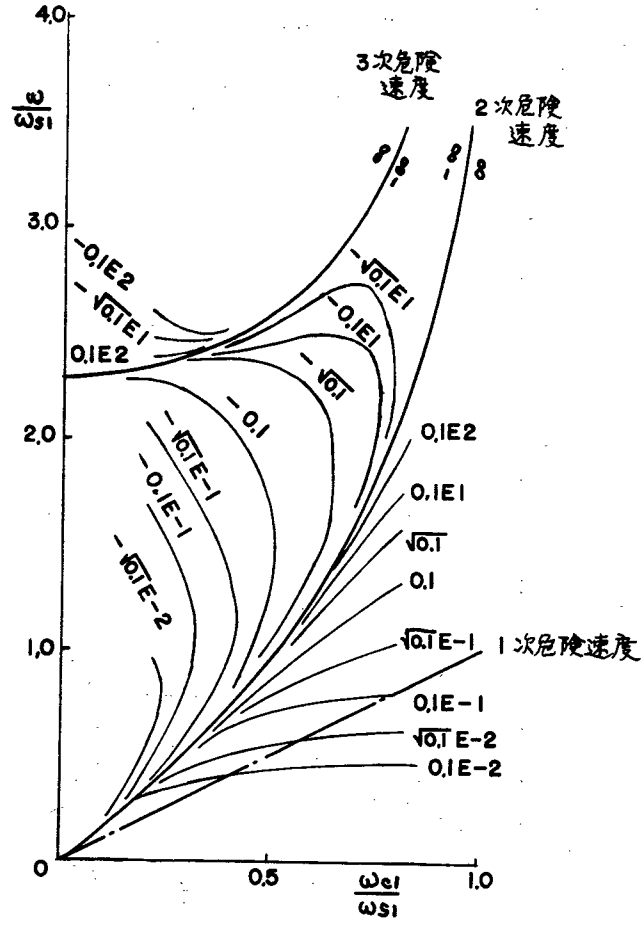


図7-6. 図7-2(d)のふつりあいに対する軸受力一定の線図

許容しうる初期ふつりあい量は増すので，要求する等級になる。)

3) つぎに，図7-2(a)または(b)のような，修正面数と修正位置で，修正をおこなう。

4) 修正後，剛性ロータの等級表と一致した軸受反力になるように，修正をおこなう。

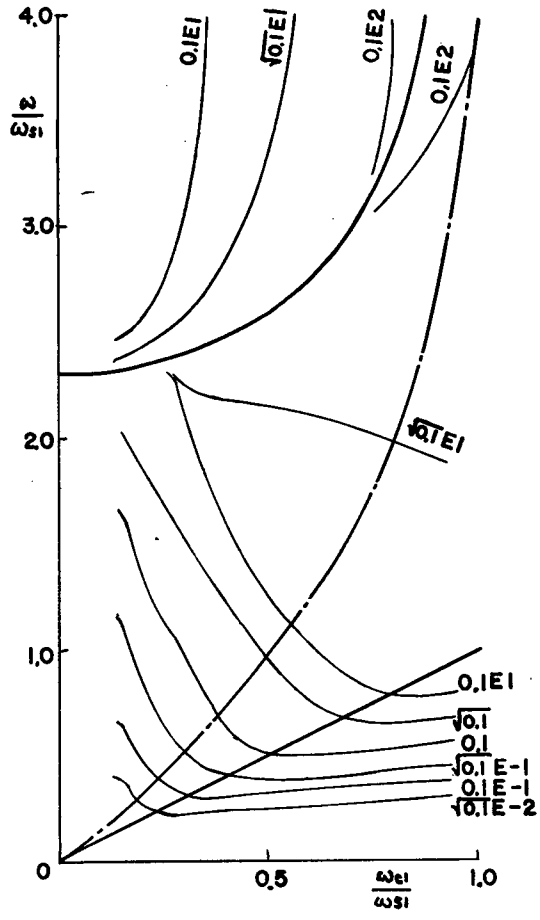


図7-7. 図7-2(c)のふつりあいに対する
軸受力一定の線図

ロータの形状の影響については，1次モードの形状が一様断面軸の場合からどれ程へだたっているかという指数によって，図7-3～8に相当する図の横軸を変換するか，または，縦軸を変換することによって表わす。

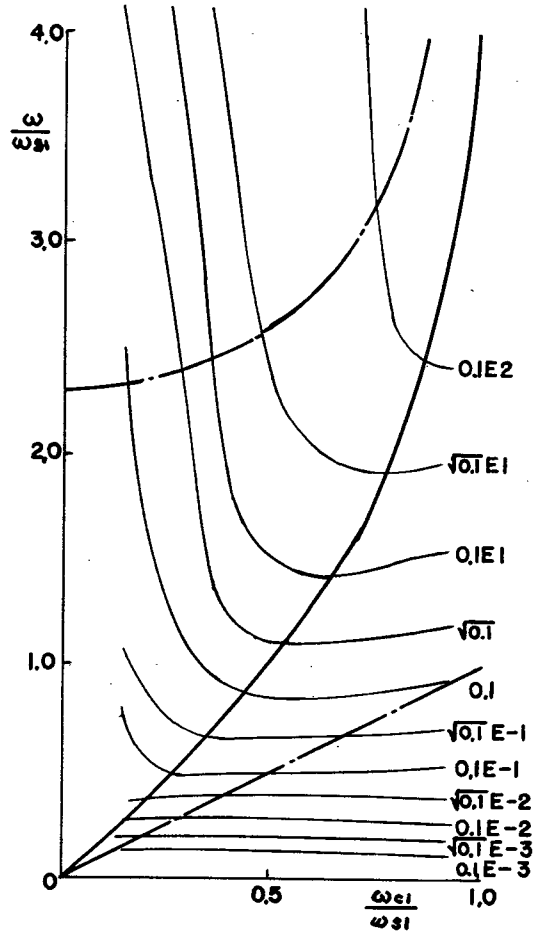


図7-8. 図7-2(f)のふつりあいに対する
軸受力一定の線図

第5節 まとめ

ばね支持，あるいは，ばねとダンパーで支持された場合の弾性ロータにおいて，ふつりあいを有限の修正面で修正した場合に，理想的に修正したとしても残る，残留ふつりあいについて，等振幅線を用いて検討した。その結果，ばねが軸にくらべて軟かい場合には，修正面は少なくてすむことがわかった。また，その図を用いて，弾性ロータのつりあわせ基準の作成の案を示した。

総括

本論文では弾性ロータの振動とその防止法について，理論的および実験的な研究を行ない，種々の有用な結果を得た。論文は主に二つの部分から成っている。第I編は，主に危険速度における振動であり，非対称な断面を有するロータの振動について扱った。第II編は，振動の防止を目的としたものであり，対称および非対称な軸について，つりあわせ方法を示した。その内容を総括すると，次のようになる。

第I編では，非対称軸弾性ロータの定常および過渡振動の解析と，設計段階で振動を少なくするように考慮する設計法について述べた。まず，慣性モーメントの非対称性の影響も含めた非対称回転軸の運動方程式を導いた。次に，その方程式の一般的な解析を行ない，非対称な慣性モーメントの影響について，系に減衰を含まない場合と含む場合について，自由振動と重力による強制振動と，偏心による強制振動の場合について，考察した(第2章)。ついで，オーバハング部を有する非対称回転軸の振動について解析を行ない，オーバハング部の質量と軸受間部の質量とが危険速度に及ぼす影響，オーバハング部の非対称性が系の不安定に及ぼす影響，軸の不連続なステップ状の変化の割合が不安定および固有値の変化に及ぼす影響，等について解析した。また，対称な軸の場合の特性との関係を明らかにし，一部実験による吟味を行なった(第3章)。以上で得られた結果にもとづいて，オーバハング部を有する回転軸の振動を少なくするための設計の方法を示した。この方法は，前章で得られた結果と総合すれば，非対称な回転軸がオーバハング部を有している場合にも適用できることを述べた(第4章)。以上の定常状態における解析に加えて，非対称回転軸が有限な駆動力で危険速度を通過する場合の過渡現象の解析を行なった。また，無次元化量を用いて，危険速度を通過可能な駆動力の限界やその他，非対称性，系の減衰などの影響について考察し，種々の興味深い新しい現象について解析した(第5章)。次

に，Tracking Function 法を過渡現象の解析に用いる有効な方法を示し，第5章で得た新しい現象の，この手法による物理的な解釈を行なった(第6章)。

第II編では，弾性ロータのつりあわせ，とくに，両端で支持されたロータ，オーバハング部を有するロータ，および，非対称な軸剛性を有するロータ系について，つりあわせ方法を与えるとともに，つりあわせ基準設定の方法について提案をした。まず，剛性ロータのつりあわせ方法に関する一般理論を示し，弾性ロータのつりあわせに必要な付加的な条件等について述べた(第2章)。ついで，両端で単純支持の条件を満足するようなロータのモデルにおいて，軸受反力を0にする条件を満たすようなつりあわせ方法を示し，従来用いられているモーダルバランス法とつりあわせ効果について理論的な検討をし，ついで，つりあわせに必要な修正面の数について，計算結果をもとにして考察した。また，軸受反力を0にするつりあわせ方法とモーダルバランス法との特長を生かしたつりあわせ方法を提案した(第3章)。つぎに，動つりあわせ試験機などのように，軸両端が軟軸受台で支持された場合の回転軸系について，解析を行なった。軟軸受台のばねとロータの弾性との関係から，つりあわせに適した両者の間の関係がわかるような関係式を提案した。ついで，つりあわせ方法について検討し，このような系に適したつりあわせ方法を提案した(第4章)。さらに，つりあわせが非常に困難とされている非対称回転軸系について理論的な解析をおこない，このような系のつりあわせがなぜ困難であるかを明らかにするとともに，非対称な軸剛性を持つ回転軸に適したつりあわせ方法を提案した。そして，この方法の有効性を実験によって明らかにした(第5章)。さらに，オーバハング部を有するロータのつりあわせ方法について，第3章において行なったのと同様な検討を行ない，この種のロータでは，修正位置の選択が重要であることを示した。また，ロータのふつりあいの軸受反力の曲線から，ロータに存在するふつりあい位置を推

定する指針を与えた。また，ロータの設計の際に決定すべき修正面の位置の選定法について述べた。以上の結果を実験的にも確かめた(第6章)。最後に，軸受の剛性とロータの回転速度，危険速度の関係を示す図の中に，単位ふつりあい力が作用したときの軸受反力の等しくなる点を結んだ図を作り，それをもとにして，弾性ロータのつりあわせ基準を決めるための指針を簡単に提案した(第7章)。

参考文献

(1) S.Timoshenko,"Vibration Problems in Engineering", 1954, D.Van Nostrand Company,Inc., 1955.

(2) J.P.Den Hartog,"Mechanical Vibrations", 1956,McGraw-Hill.

(3) Klaus Federn,"Grundlagen einer systematischen Schwingungsentstorung wellenelastischer Rotoren", VDI-Berichte, Bd.24, 1957.

(4) R.E.D.Bishop and G.M.L.Gladwell,"The Vibration and Balancing of an Unbalanced Flexible Rotor", J.Mech.Engng.Sci., Vol.1, No.1, 1959.

(5) J.C.Maltback,"The Influence of a Concentrated Mass on the Free Vibrations of Uniform Beam", Int.J.Mech.Sci., Vol.13, pp197-231,1961.

(6) A.G.Parkinson and R.E.D.Bishop,"Vibration and Balancing of Rotating Continuous Shafts", J.Mech.Engng.Sci., Vol.3, 1961.

(7) F.M.Dimentberg,"Flexural Vibrations of Rotating Shafts", 1961, Butterworths.

(8) R.F.Wojnowski and T.R.Faucett,"Critical Speeds of Two Bearing Machines with Overhung Weight", J.Engng.for Ind., pp377-382, 1961.

(9) E.H.Hull,"Shaft Whirling as Influenced by Stiffness Asymmetry", J.Engng. for Ind., pp219-226, 1961.

(10) A.H.Church and R.Plunkett,"Balancing of Flexible Rotors", J.Engng. for Ind., pp383-389, 1961.

(11) 山本敏男，太田 博，"非対称回転体の振動について"，日本機械学会論文集，22-188．(昭和37-4) PP475.

(12) R.E.D.Bishop and A.G.Parkinson,"On the Isolation of Modes in the Balancing of Flexible Shafts", Proc.Instn Mech.Engrs., Vol.117, No.16, 1963.

(13) M.Y.Kushul,"The Self-Induced Oscillations of Rotors",1964, Consultants Bureau.

(14) A.L.G.Lindley and R.E.D.Bishop,"Some Recent Research on the Balancing of Large Flexible Rotors", Proc.Instn.Mech. Engrs., Vol.177,

No.30,1963.

(15) A.G.Parkinson and R.E.D.Bishop,"Some Experiments on the Balancing of Small Flexible Rotors ; Part I- Theory" J.Mech.Engng.Sci., Vol.5, No.1, 1963.

(16) A.G.Parkinson and R.E.D.Bishop,"Some Experiments on the Balancing of Small Flexible Rotors; Part II- Experiments", J.Mech.Engng.Sci., Vol.5,No.2, 1963.

(17) L.S.Moore and E.G.Dodd,"Mass Balancing of Large Flexible Rotors", GEC.J. Vol.31, No.2, 1964.

(18) V.O.Kononenko,"Kolebatel'nye Ogranichennym vor"uzhdeniem", 1964, Nauka, Moskva.

(19) T.P.Goodmann,"A Least-Squares Method for Computing Balance Corrections" J.Engng for Ind., August, 1964, pp273-279.

(20) T.M.Tang and P.R.Trumpler,"Dynamics of Synchronous-Precessing Turborotors with Particular Reference to Balancing; Part I- Theoretical Foundations", J.Applied Mechanics, Vol.31, No.1, 1964.

(21) A.G.Parkinson,"The Vibration and Balancing of Shafts Rotating in Asymmetric Bearings", Soudn and Vibration, Vol.2, No.4, pp477-501, 1965.

(22) A.G.Parkinson and R.E.D.Bishop,"Residual Vibration in Modal Balancing" J.Mech.Engng.Sci., Vol.7, No.1, 1965.

(23) A.Tondl,"Some Problems of Rotor Dynamics", 1965, Chapman & Hall.

(24) W.Hubner,"Die Wechselwirkung zwischen Schwinger und Antrieb bei erzwungenen Schwingungen", Ingeneur Archiv, Bd.34, pp411-422, 1965.

(25) R.E.D.Bishop and A.G.Parkinson,"Second Order Vibration of Flexible Shafts", Phil. Trans. of Royal Sosiety of London, Vol.259, No.1095, 1965.

(26) S.T.Ariaratnam,"The Vibration of Unsymmetrical Rotating Shafts", Trans. of ASME, Vol.32, No.1, 1965.

(27) M.S.Hundal and Harker,"Balancing of Flexible Rotors Having Arbitrary Mass and Stiffness Distribution", Trans. of ASME, Vol.88, No.2,1966.

(28) 小堀与一，"オーバハングを有する車軸の振動"，日本機械学会論文集，32巻 242号，（昭和41-10）

(29) A.G.Parkinson,"An Introduction to the Vibration of Rotating Flexible Shafts", Bull. Mech. Engng. Educ., Vol.6, pp47-62, 1966.

(30) W.O.Paradis and D.D.Perlmutter,"Tracking Function Approach to Practical Stability and Ultimate Boundedness", AIchE Journal, Jan. 1966, Vol.12, No.1.

(31) J.B.Wilcox,"Dynamic Balancing of Rotating Machinary", Pitman Medical Publishing Co.Ltd., 1967.

(32) A.S.Qazi and A.G.J.MacFarlane,"The Controlled Transition of a Rotating Shaft Through its Critical Speed", Int. J. Control, Vol.6, No.4, pp301-315, 1967.

(33) T.C.Huang and F.C.C.Huang,"On Precession and Critical Speed of Two-Bearing Machines With Overhung Weight", J. Engng for Ind., pp713-718, 1967.

(34) 山本敏男，太田博，河野和豊，"非対称回転体の不安定振動に及ぼす軸の偏平性の影響"，日本機械学会論文集，33-51，（昭和42-7），PP1049.

(35) H.F.Black and A.J.Mcternam,"Vibration of a Rotating Asymmetric Shaft Supported in Asymmetric Bearings", J.Mech.Engng. Sci., Vol.10, No.3, pp252-261, 1968.

(36) 平野一郎，松倉欣寿，"振動の共振域におけるみかけの減衰定数について"，日本機械学会関西支部第220回講演会，(昭43-6).

(37) T.M.Tang and P.R.Trumpler,"Dynamics of Synchronous-Precessing Turbo-rotors with Particular Reference to Balancing; Part II- Application", J. Applied Mechanics, March 1968.

(38) T.Iwatsubo and M.Nakamura,"Balancing of Flexible Rotors with Asymmetric Shaft Stiffness",Memoirs of the Faculty of Engng. Kobe Unuv., No.15, 1968.

(39) 川井良次，岩壷卓三，神吉博，"有限駆動力を持つ非対称回転軸の危険速度通過に関する研究"，日本機械学会論文集，35-280,

(昭和44-12), P.P.2325.

(40) 川井良次, 岩壺卓三, 堀英敎, "オーバハングを有する非対称回転軸の振動", 日本機械学会論文集 36-286, (昭和45-6) PP.

(41) 川井良次, 岩壺卓三, "軟軸受台を用いた弾性ロータのつりあわせ", 日本機械学会論文集, 36-299, (昭和45-12), PP

(42) T.Iwatsubo and M.Kurohashi, "Balancing of Flexible Rotor with Overhung Part", Memoirs of Faculty of Engineering, Kobe University, No.16,1970.

(43) T.Iwatsubo, "Design of Rotors with Overhung Part; Part I The Case that the Bearing Condition is Simple Support", Memoirs of the Faculty of Engneering Kobe University, No.17,1971,(to be published).

(44) 大森敏二, 飯田精一, 岩壺卓三, "弾性ロータのつりあわせ方法に関する研究", 日本機械学会論文集, 投稿中.

(45) 川井良次, 岩壺卓三, "非対称回転軸の振動", 日本機械学会論文集, 投稿中.

(46) 川井良次, 岩壺卓三, 神吉博, "有限駆動力をもつ非対称回転軸の危険速度通過現象の解析", 日本機械学会第47期総会, 普通講演, No.700-4. (昭和45-4).

(47) T.Iwatsubo, H.Kanki and R.Kawai, "Vibration of Asymmetric Rotor Through Critical Speed with Limited Power Supply", Journal of Mechanical Engineering Science, (under application)

お礼のことば

この研究の過程で何よりも　川井良次教授（神戸大学工学部）中川憲治教授（大阪大学工学部）の支援と激励が私の研究の支えとなった。

川井先生の公私にわたる御指導がなければ，とうていこのような分野の研究には取り組まなかったであろうし，またできなかったであろう。先生が，弾性ロータのつりあわせ研究分科会の主査をされていて，弾性ロータのつりあわせ方法に関する研究の機会を与えて下さったこと，および，日頃の学恩をここに深く感謝する。

中川先生には，私の卒業研究，大学院修士課程の間，御指導いただいた。先生から学んだ研究へのきびしい態度と，激励がなければ，このような短期間での研究はできなかったであろう。また，阪大へ赴任直後のお忙しい時期に，労をいとわず詳密な校閲をして下さった。ここに深く感謝する。

さらに，御多忙の中，懇篤な校閲をして下さった野本明大阪大学教授に感謝の意を表する。

また，大阪府立大学に在学中より現在に至るまで，津村俊弘助教授（大阪府立大学），室津義定助教授（大阪府立大学），杉山吉秀講師（大阪産業大学）には，私の一連の研究をつねに好意的に批判し，助言してくれたことに感謝する。

研究の遂行にあたり，労をいとわず協力してくれた，当時川井研究室に在籍していた，堀英敎（現三菱重工），中村俊勝（現三菱電機），神吉博（現三菱重工），黒橋道也（現神戸大学大学院）大橋忠晴（現川崎重工），宮崎良信（現椿本チエン）諸氏および，当時川井研究室に在籍していた諸氏に感謝する。

また，この研究の期間中には，文部省昭和43年度科学研究費，および作行会の奨学金などの援助があり，これが重要な経済的支えとなったことを記してお礼のことばにかえる。