Title	量子論理について
Author(s)	森, 匡史
Citation	カルテシアーナ. 1997, 1, p. 3-13
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/66871
rights	
Note	

「研究ノート」

量子論理について

森　　　匡　　史

一

バーコフとフォン・ノイマンが量子力学の実験命題の間に成り立つ論理の非古典性を主張して〔1〕以来、多数の量子論理の体系が提出された。ライヘンバッハの仕事〔6〕からしばらく量子論理への関心はとだえていたが、1960年代にはいって量子論理による量子力学の基礎の研究および量子論理に結びつく数学的構造の研究が再び盛んに行われるようになった。後述するように「量子論理」の研究はライヘンバッハに発する流れとバーコフとフォン・ノイマンに発する流れに分かれるが、このうち現在では後者が主流である〔3, p86〕。

バーコフとフォン・ノイマンは「ヒルベルト空間の成す束（lattice）から論理を読みとる」という方法を採った。そして分配法則をしりぞけ、モデュラー法則をこれに代えたが、最近ではこのモデュラー法則も捨てられ、さらに弱いオルソ・モデュラー法則（弱いモデュラー法則、或いは準モデュラー法則とも呼ばれる）に代えられた。これは当然の変化である。なぜなら、量子力学に用いられる無限次元複素ヒルベルト空間の部分空間の成す「束」はオルソ・モデュラー束であってモデュラー束ではないからである。他方、ヒルベルト空間ではなく、いわゆる「フィルター」或いは「Yes-Noテスト」に論理構造を求める方向も存在し、ここではモデュラー束よりもさらに弱い「部分順序集合（Poset）」が量子論理の代数的構造とされることが多い。以上のいずれかが最近の量子論理学の研究のすべてが一致して到りついている代数的構造である。

しかしながら、このような「量子論理」に対し、つよい疑問が多数提出

されてきた。まず、ポパーは批判する〔5〕。すなわち、バーコフとフォン・ノイマンは束の一意的な補元ということを語っているが、束の補元が一意的に定まるならば、その束は分配束であり、従ってブール束であって、その量子論理は古典論理に化する、と。しかしこの批判は正しくない。なぜなら、バーコフとフォン・ノイマンは命題の否定を、その命題に結びつく元のオルソ補元に対応せしめており、元は一つ以上のオルソ補元を持ちうるからである。のみならず、さらに一般的な相補束においても、直交条件が定義されるならば、補元を一意的に選び出すことができる。

そこで最も根本的な疑問は次の二つに集約されよう。量子論理は真の意味で「論理」と言い得るのか。そして、そう言い得るとすれば、古典論理の普遍的な正しさが脅かされることになるのか。

前者の疑問について言えば、いったい形式化された理論は代数的研究の対象となることができる。これは論理学の理論についてはもちろんのこと、物理学の理論についても言い得ることである。ところで、古典論理学はブール代数（束）という形式的構造を持っている。そうすると、量子力学の理論の中に、ブール代数ではない、前述のような構造が見い出されたならば、そこから直ちに量子力学の中に、非古典論理学が見い出された、と言い得るであろうか。そうではない。例えば射影幾何学の公理系のひとつは、「委員会の数学」としても「色彩論」(カルナップ）としても解釈できる。しかし、幾何学的形象と委員と色とが全く同一であり、幾何学的形象と委員と色、このそれぞれの間の関係が全く同一である、とは言えない。全く抽象的な公理系に対して、三つの内容的なモデルが与えられただけのことである。従って或る理論の用いているのが古典論理学であるのか、それとも非古典論理学なのかという問いは、この理論が、古典論理学と同じ代数的構造に包摂されるのか、それとも古典論理とは異なる代数的構造に包摂されるのかという問いによっては解決されえない。代数的構造を論理とみなしうるためには、まずその元に対して言明ないし文を構成しなければならない。それとともに、できれば量記号を含む、複合言明を構成するための構文論的規則をつくらねばならず、さらに、論理記号のそれぞれを意味

論的に解釈しなければならない。最後に、その論理学を計算とみるだけでは足りず、それが意味論的に完全であることが示されなければならない。このためには真理概念ならびに意味論的帰結の概念を定義することが必要である。しかるに、これまで提出された量子論理の体系は、これらの条件を殆んど満たしていない。それらはせいぜい「論理学に似た計算」にすぎないと言い得るであろう。

ところが最近出されたB.C.ヴァン・フラーセンの一連の仕事〔2，3〕は、量子論理を真の論理学とする上でも、またこれと古典論理との関係をはっきりさせる上でも、画期的なものとみとめられる。われわれはまずその基本的な考想が打ち出され、過去の多様な体系に一応の整理をつけている「The Labyrinth of Quantum Logics」について述べて、量子論理学が上述の条件を満たすための基礎が作られたことを明らかにし、次に、それをバーコフとフォン・ノイマン流に論理的結合子の定義を中心に整備した形をみることにより、量子論理に関する後者の疑問、すなわちその古典論理との関係に、いささかの光を投じたい。

二

フラーセンはベートの考想を受け継ぎ、物理学の理論と、そこに内在する論理に対して、意味論的見解を採る。これによって量子力学の論理を明らかにするには三つの概念が必要である。第一は物理系を数学的に表現する手段である。一般に物理系は状態空間（state-space）によって表現される。そしてその空間の元が物理系の状態に対応する。古典物理学ではそのような空間はいわゆる相空間（phase space）である。しかし量子物理学の状態は、フォン・ノイマン以来、ヒルベルト空間Hにおける状態ベクトルによって表現される。第二に、測定可能な物理量すなわちオブザーバブルであり、これを用いて物理学理論の基本表明（elementary statement）が定式化される。mを或る量とすると、この量mが時間tにおいて値rをとるということを「U(m, r, t)」と書く。（時間から独立の場合は変数tが落ちる。以後は便宜上そうする。さらに上の言明をも「U」と略記するこ

とがある。）第三に充足関数hが必要である。これは、基本言明Uに対し、ヒルベルト空間Hの部分集合のうちでUを充足する集合h(U)を振り当てるものである。つまり系の状態がh(U)に属するとき且つそのときにかぎりmが値rをとるような集合h(U)を振り当てるものである。

量子力学ではふつうオブザーバブルmは線型エルミット演算子Mによって表現される。これは状態空間Hのベクトル（従って状態）xのそれぞれに、別のベクトルMxを振り当てるものである。そうすると、

オブザーバブルmは状態xにおいて値rをとる。

という言明は、量子力学の理論においては、等式

$$Mx = rx$$

によってあらわされる。このとき、値rはいわゆる固有値（eigen value）と言われ、xは固有値rに対応する、Mの固有ベクトルと呼ばれる。そしてベクトルxによってあらわされる状態は固有状態である。そうすると、基本言明U＝U(m, r)を充足するベクトルは、

$$h(U) = \{ x : Mx = rx \}$$

によって与えられる。（マトリックス力学では演算子Mが時間の関数であり、波動力学では状態ベクトルが時間の関数になっているが、ふたつの力学の同値が証明されているし、一般性を得るという当面の目的には必要でないので、この点は無視してよい。）

意味論的概念を正確に導入しようと思えば、物理系の記号が必要である。それを「X」とする。そうするといまの量子力学の言語Lqのモデルとは、物理系Xと、系Xにヒルベルト空間Hの元f(x)を振り当てる対〈X,f〉である。量子論理学の意味論は次のようにして与えられる。

(1) 言明U(m, r)がモデル〈X,f〉において真であるのは、状態ベクトルX＝f(x)が条件Mx＝rxを満たすとき、そしてそのときにかぎる。

(2) UがLの妥当な言明であるのは、UがLのあらゆるモデルにおいて真であるとき、そしてそのときにかぎる。

(3) UがLの言明Vから意味論的に帰結するのは、Vを真とするあらゆる

モデルにおいてUが真であるとき、そしてそのときにかぎる。

「偽」を定義するには、まず次の三つの場合を考えなければならない。

(1) $Mx=rx$

(2) $Mx=r'x$(rとは異なる数r′に対して)

(3) $Mx\neq r'x$(如何なる数r′に対しても)

量子力学をヒルベルト空間における演算子の理論としてみるかぎり、(3)を排除することはできない。この場合量mの固有値はないのである。

さて「偽」を「否定の真」と解すとき、その「否定」には二種類ある。第一は、「排他否定(exclusion negation)であって、これによると、ある言明の否定が真であるのは、その言明が真でないとき、そしてそのときにかぎる。これを用いると、Uの偽の定義は次のようになる。

(a) 言明U(m, r)がモデル⟨X,f⟩において偽であるのは、X=f(x)に対して、$Mx\neq rx$ のとき、そしてそのときにかぎる。

この定義によると、Uが偽であるのは先の(2)または(3)のときである。第二に「選択否定(choice negation)」が存在する。この否定は、ある言明以外の言明のひとつが真であるとき、その言明は偽であると解する。「偽」を「否定の真」と解するとき、その「否定」を選択否定ととれば、「偽」はもはや「真でない」と同じではなくなる。これによるUの偽の定義は次のようになる。

(b) 言明U(m, r)がモデル⟨X,f⟩において偽であるのは、或る値$r'\neq r$が存在し、X=f(x)に対して$Mx=r'x$のとき、そしてそのときにかぎる。

(b)を採ると(a)と異なり二値の原理が成立しない。Uは真の定義(1)によれば真でなく、偽の定義(b)によれば偽でもない、という場合があるからである。これは、演算子Mをxに適用してもr′xというベクトルが得られないとき、つまり系がMの固有状態にないときである。

このように言語Lqの意味論には最後の偽の定義に二つの途が考えられる。さらに構文論でも非基本言明をみとめるかどうかが分れる。過去の量子論理の体系はこれによってライヘンバッハに始まる方向(意味論で(b)を採

り、構文論で非基本言明をみとめる）と、バーコフとフォン・ノイマンに始まる流れ（意味論で(a)を採り、構文論で非基本言明をみとめない）に分けられる。ファン・フラーセンは上のような枠組を用いて、この二つの流れに沿う過去の量子論理学のさまざまな試みを整理し、一般的な形に再構成した。ところで量子論理では主流である後者の流れに沿って、一般に物理理論とその論理に意味論的見解を採れば、どんな形になるか。これについてはハーディグリー〔４〕によくまとまった叙述がみられるので、殆んどこれに沿って、特に論理的結合子の定義を中心にして次に述べる。

三

前述のように物理学の理論は意味論的見解によると「準一解釈された言語」と法則の集合から成るとみられる。このうち準一解釈された言語（以下、たんに「言語」と言う）のほうが、その物理学の理論の基本的な論理構造の担い手とみられ、順序対 $\langle E, H, h\rangle$ から成る。Ｅとは「物理量ｍはボレル集合△の中に値を持つ」というかたちの「基本言明」の集合である。（この場合、基本言明を先のように「物理量ｍの値はｒである」と考えても支障は生じない。ボレル集合を考えるのは確率測度を定義しうるためである。）前述のように、Ｈは状態の集合或いは状態空間であって、古典粒子物理学では相空間、量子物理学ではヒルベルト空間であり、ｈは充足関数であって、Ｅの各基本言明Ａに対し、Ａを充足する状態の集合ｈ(A) を振り当てる。

純枠に構文論的な基本言明に加えて、そのような言語の基本命題の集合が考えられる。これはｈのもとでＥの像ｈ(E) であってｈによってＥの基本言明に振り当てられるＨの部分集合から成る。物理理論の言語の命題代数とはその言語に特有な論理演算をそなえた基本命題の集合ｈ(E)である。

さて言語の論理演算は必ずしも構文論的に明らかにされる必要はない。とくに物理理論の言語は極めて平板な構文論的構造しか持っていない。Ｅの言明はすべて「量ｍはボルル集合△の中に値を持つ」または「U(m, r)」という形の基本言明である。そういう言語の論理的構造はむしろ命題代数

に反映されている意味論的構造のあらわれである。とくに論理的結合子は通常の論理計算とちがって構文論的にではなく意味論的に定義される。

(1)　古典論理の結合子を採れば、まず言語 $L=\langle E, H, h\rangle$ の言明Aが言明Bの排他否定であるのは、$h(A)=H-h(B)$ のとき、そしてそのときにかぎる。言い換えると任意の言明Bが状態xによって充足される言明Bの排他否定であるのは、Bがxによって充足されないとき、そしてそのときにかぎる。二言明AとBは意味論的に等値であるとき、つまり $h(A)=h(B)$ のとき、同一であるとすれば、一個の言明は多くとも一つの排他否定を持つ。ふつうAの否定は、それが存在するならば、「～A」によって表現される。さらにLのあらゆる言明Aが排他否定を持つならば、Lは排他否定のもとで閉じている。次にLの言明Cが言明A、Bの連言であるのは、$h(C)=h(A)\cap h(B)$ のとき、そしてそのときにかぎる。言い換えると二言明A、Bの連言が状態xによって充足される言明Cであるのは、AとBがxによって充足されるとき、そしてそのときにかぎる。言語Lの言明A、Bのあらゆる対が連言を有するならばLは連言のもとで閉じている。そしてその対は、存在するならば「A＆B」と書かれる。全く同様に言語は、言明A、Bのあらゆる対が排他選言つまり $h(D)=h(A)\cup h(B)$ という形の言明Dをもつとき、排他選言のもとで閉じている。そのような言明Dが存在するならば「A∨B」と書く。（言語が連言と排他否定のもとで閉じているならば必ず排他選言のもとで閉じている。しかし排他否定のもとで閉じていなくても、連言でも排他選言のもとでも閉じている言語があって、直観主義の言語がその例である。)

あらゆる古典論理の論理演算のもとで閉じた言語を持つ物理学理論の代表というべきは古典粒子力学の言語Lcである。Lcにおいて、Hは6n次元の相空間（n：粒子の数）であり、その命題代数はHの部分集合の成す（ボレル）体である。だからLcの命題代数は集合の積、集合の和、集合の補のもとで閉じており、従って古典粒子力学の言語は連言、排他選言、排他否定のもとで閉じている。さらにLcの命題代数はHの部分集合の体であるから当然ブール代数であり、従って古典粒子力学の論理構造はブール代数で

ある。

(2) しかるに量子力学の言語Lqに目を転ずるならば、状況は古典粒子力学とは著しく異なった様相を示している。量子力学の言語Lqにおいては(純枠)状態の集合Hは無限次元複素ヒルベルト空間であり、その基本命題はこの空間の部分空間(閉じた線形多様体)であって、これは完全原子オルソモデュラー非分配束を成す。ただしここでの部分順序は集合の包含である。このヒルベルト空間の部分空間の成す束は、はじめに述べたように非分配束であるから、量子力学の言語Lqの論理構造は非ブール的非古典的である。

まず連言についてみれば、Hの部分空間の束の上での(infimum 最大下界、g. l. b) は集合の積であるから、Lqは連言のもとで閉じている。すなわち、基本言明A, Bのあらゆる対は連言A&B、つまり$h(C)=h(A)\cap h(B)$という形の基本言明C を持つ。しかるに、否定と連言についてみれば、Lqは排他否定のもとでも排他選言のもとでも閉じてはいない。こういう古典的結合子に代わってLqは「量子否定」と「量子選言」とでも言うべき結合子を持つ。この二つはそれぞれHの部分集合上のオルソ補元演算および結(supremum最小上界、l. u. b) に対応する。まず部分空間Sのオルソ補空間$S^{\perp}$であって、これはSの各ベクトルに直交する(内積がゼロである)H内のベクトルの全体から成る。ベクトルはSにも$S^{\perp}$にも存在する必要はないのだから、量子否定は古典的排他否定とは異なり、先に述べた選択否定の一種である。選択否定の持つ著しい特色は、言明Aとその選択否定⁊Aとが同時に真でないことがある、ということである。従って、ここでは二値の原理は成立しない。(選択否定はしかし、他の非古典論理学にも存し、直観主義論理学の否定や三値論理学の標準(直径的)否定——ライヘンバッハの量子論理学にもこれが採られている——がその例である。)

しかしながらLqの意味論的特色は、量子選言の機能にあると言わなければなるまい。量子選言 A $\boldsymbol{v}$B はディモーガンの法則と連言および量子否定を用いて、⁊(⁊A&⁊B) として定義されるから、選択選言の一種であって注目すべき意味論的特徴を持つ。選択選言は前述の如くHの部分空間

の束上での結によってあらわされる。二つの部分空間S、Tの結はSとTを含む最小の部分空間であって、SおよびTの中の状態（ベクトル）の線形結合（すなわち重ね合せ）およびその結果生まれる極限ベクトルから成る閉じた線形スパン$S \oplus T$なのである。すなわち、$h(A \vee B)=h(A) \oplus h(B)$。一般に$S \oplus T$は$S \cup T$を真部分集合として包含するので$S \oplus T$に存在しても、SにもTにも存在しない状態（ベクトル）が多数存在するであろう。このことを意味論で考えると、状態xにおいて、量子選言$A \vee B$は、AもBも真でないのに真でありうる、ということになる。特に排中法則に形式的に類似する法則が成立する。なぜなら、任意の部分空間Sについて、$S \oplus S^{\perp} = H$だからである。こうしてすべての状態が量子選言$A \vee \neg A$を充足する。しかしAも$\neg A$も充足しない状態があるので、量子力学の排中法則は古典論理のそれと同じ意味をもつとは言えないであろう。（他の非古典論理にも選択否定を用いるものがある。例えば直観主義論理や三値論理がそれである。しかしそこでの選言は古典的排他選言である。だからこれらの論理で排中法則が成り立たないのである。）

四

科学理論に対する意味論的見解の特色としては、すでにみたように、密接に関連する二つの点を挙げることができる。一つは準一解釈された言語Lqの結合子を意味論的に定義するということである。もう一つは、法則を含む量子力学の言語と、基本言明から成る言語とをはっきり区別するということである。この二つの特色によって、量子論理の位置というものが、かなり明確にされると思われる。ここで量子論理の位置というのは、量子論理の量子論および古典論理に対する関係を指している。

量子論には古典数学が用いられている。また量子論特有の原理や法則が存在する。そして多数の法則はその数学の言明によって表現される。ところでそのような法則や数学の言明の間に成立する論理は古典二値論理だと考えられる。ところが過去において量子論理を古典数学にまで適用しようとの試みや、エネルギー保存則が中間の真理値「不確定」をとるとする解

釈がみられ、烈しい批判を受けたのである。

しかしながら科学理論の意味論的見解を採れば、そういう試みや解釈は不可能になる。なぜなら、この見解によると、「量子力学の論理とは量子論の基本言明間の意味論的関係に系統だった説明を与える試みに他ならない」〔2, p. 247〕からである。この意味論的関係は量子論から演繹される、と言いうる。これが量子論理と量子論との関係である。そして、上にみたように二つの言語を区別するならば、量子論理と、古典数学を含む量子論との整合性が極めて明確になる。すなわち、言明、

Mx＝rx

は古典数学を含む量子論の言語に属し、言明、

U (m, r)

は基本言明の集合に属する。量子論理と量子論との整合性は次の点から明らかであろう。すなわち前者の言明が常に真または偽であるのに対し、後者の言明は真でも偽でもないことがある、という点である。

それでは、古典論理の方からみて、その普遍的な正しさは失われたのか。三で明らかになったように古典論理と量子論理のあいだでは、その結合子の意味が大きく異なるのである。例えば典型的な例として選言を採れば、古典粒子力学の言語Ｌｃの選言は、集合の和に対応せしめられるのに対し、量子選言はヒルベルト空間の部分空間のスパンに対応するものであった。それ故、排他選言AvBはAとBのうち少なくとも一つが真であるとき真であるが、量子選言A$\boldsymbol{v}$Bの方はAもBも真でないのに真でありうる。そこで、量子選言によって表現される、例えば重ね合せという状態を、古典論理の排他選言を用いて表現することはできないのである。それ故、古典論理の普遍的な正しさが失われたというよりも、むしろその「普遍的適用可能性」が失われたと言うべきである。量子論では古典論理の分配法則が成立しないという言い方は正しくない。正しくは、量子論の基本言明のあいだでは量子論理の分配法則が成立しないと言うべきであろう。

文 献

〔1〕 G. Birkhoff and J. von Neuman, "The Logic of Quantum Mechanics." in *Annales of Mathematics* 37 (1936), 823-43.

〔2〕 B. van Fraasen, "The Labyrinth of Quantum Logics" in *Boston Studies in the Philosopy of Science,* vol. XIII. (1974)

〔3〕 B.van Fraasen, "Semantic Analysis of Quantum Logic" in *Contemporay Research in the Foundations and Philosophy of Quantum Theory,* ed. by C. A. Hooker. (1973)

〔4〕 Gary M. Hardegree, "Stalnaker Conditionals and Quantum Logic" in *Journal of Philophical Logic* 4 (1975), 399—421.

〔5〕 K. R. Popper, "Birkhoff and von Neuman's interpretation of quantum mechanics," *Nature* (219), (1968)

〔6〕 H. Reichenbach, *Philosophic Foundations of Qnantum Mechanics,* (1944)

（文学部助手）