



Title	ピアジェにおける数学の認識論
Author(s)	森, 匡史
Citation	カルテシアーナ. 1979, 2, p. 3-19
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/66878">https://doi.org/10.18910/66878</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

# ピアジェにおける数学の認識論

森 匡 史

周知のようにピアジェは発達心理の研究から得られた結果を用いて科学の認識論を樹立しようとし、これを「発生的認識論」と呼んだ。数学の認識論についてみれば、「世界が人間によって認識されるのは、その精神の所産である論理学と数学を通してのみであるが、人間は、心理学的におよび生物学的に、つまり世界全体に応じて、自分自身を研究するときのみ、いかにして数学と論理学を構成したかを理解することができるのである<sup>(1)</sup>」ピアジェの発達心理学が、実験事実の解釈の点などで問題を残しているにしても、それまでには知られていなかった子どもの認知構造を明らかにした功績は否定することができないであろう。それでは発生的認識論のほうは数学認識そのものをどの程度説明できるであろうか。われわれはまずはじめに発達心理による数学認識の成立の説明を見ることによって、この問題に答えることにしよう。

ピアジェにとって「数学の全体は構造の構成という用語によって言い表すことができる<sup>(2)</sup>」。この構成は、もちろん物理的なものではなく、数学者の思考のなかで、概念的な世界のなかで行われる「操作」である。「操作」とはピアジェの定義によれば、次の特徴をもつ<sup>(3)</sup>。第一に、操作は内面化(interioriser)することのできる活動である。それは物質を介して遂行しようと同時に、思考のなかでも行いうる活動である。第二に操作は可逆性(réversibilité)をもつ活動である。操作は第三に、常にある種の保存

すなわち不変性を前提とする。操作は活動であるからひとつの変換(transformation)ではあるが、すべてを同時には変換しない変換である。すべてを同時に変換すれば可逆性という特徴は消える。第四に、これと関連して、ひとつの操作は常に他の諸操作に依存しており、この諸操作とともに、「全体性の法則」によって特徴づけられるひとつの構造——例えば「群」(groupe)「束」(réseau)などの抽象数学的構造——を形づくる。

この操作の定義から明らかなように、ピアジェにとって数学的構造の構成は、人間が世界のなかで遂行する物理的・身体的活動にその源泉をもち、このような活動の内面化であり抽象化である。例えば「合併」(réunion)という操作は、対象を合併するという物質的活動が内面化されたものである。かような活動は物質的対象そのものに及ぼされるのであるから、論理数学的構造の源泉は、ピアジェにとって、「経験」にあると言ってよい。しかしここでピアジェは、二種類の経験、あるいはあらゆる経験に含まれる二種類の成分を、<sup>(4)</sup> 截然と区別する。すなわち、「物理的経験」と「論理数学的経験」である。「物理的経験は」は、対象にはたらきかけ、知覚情報から「単純な抽象」によって対象の特性を発見することである。例えば対象の重さは、密度が一定でなければ体積に比例しないこと、この重さは形や色には依らないことなどは、物理的経験によって知られる。これに対して「論理数学的経験」のほうは、やはり対象にはたらきかけることから始まるが、ピアジェによればこれによって得られる知識は、対象そのものの特性についての知識ではなく、対象にはたらきかけ対象を変容する活動についての知識、すなわち活動が対象のなかに導入する特性についての知識である。例えば、数個の対象を左から数えても右から数えても同一の和が得られるという「和の可換性」の知識は、論理数学的知識であって、物理的側面をもつけれども(対象が固体でなく液体の場合は数えることすらできない)たんなる物理的経験に解消しえない側面をもつとピアジェは主張するのである。すなわちかれによれば、数える「順序」も「和」も対象そのもののなかにはなく、順序づけ加えるという活動のなかにあるのだから和の可換性の知識は活動から抽象されたものである。

しかし例えば「順序」が空間的な列や時間的な継起として客観的に与えられている場合がある。むしろ活動が与える順序よりも、客観的な順序のほうが原初的ではないか。このとき論理数学的経験は物理的経験に解消されるようにみえる。すなわち、論理学およびその延長としての数学は（発達心理研究にもとづきピアジェは、自然数が「クラス」の構造と「順序」の構造との総合であると主張するから、論理学と数学の関係に関するかぎり、ピアジェの立場はフレーゲ＝ラッセルの「論理主義」の延長上にある）、ゴンセト（Gonseth, F.）が主張したように、「任意の対象の物理学（*une physique de l'objet quelconque*）」ではないのか。ピアジェ自身この疑問に答えて言う「実際、対象のなかに順序の存在を確認するためには、この確認に用いられる活動そのものを順序づけなくては不可能である。例えばわれわれは対象から対象へと移る眼球運動や、順次対象を指し示す指の運動などのなかに、順序を導入するのである。同様に和を決定するには加えたり数えたりする活動そのものにおいて加法図式を用いないと不可能である。この活動が、求める対象の和を確かめる役を果すのである<sup>(5)</sup>」したがって「反射がすでに感覚—運動的な継起の順序を前提とすること、手段と目的とのいかなる調整といえども、同様に順序の関係を伴うことなどを思い起すならば、明らかに順序の構造は、外部環境に見い出されうる以前に、固有の意味での活動に属するのである<sup>(6)</sup>」それゆえ、ピアジェにとって論理学および数学は「任意の対象の物理学」ではなく、「任意の対象に及ぼされる活動の一般的共応（*coordination*）から抽象された諸法則の集合」、となるのである。

この「抽象」は明らかに先の物理的経験における「単純抽象」と異なる。「単純抽象」あるいは「アリストテレスの抽象」と区別された「論理数学的抽象」を、ピアジェは「構成的抽象」あるいは「反省的抽象（*abstraction réfléchissante*）」と命名し、それが個体における論理数学的構造の発達のみならず、数学的認識の発展をも説明しうる基本的なメカニズムであると主張するのである。『数学の認識論と心理学』および『生物学と認識』<sup>(7)</sup>において、このふたつの抽象の差異は、次のように説明されている。す

なわち、単純抽象においては、何らかの外的対象が与えられたとき、例えば結晶とその形や色が呈示されたとき、主体はさまざまな性質を識別し、性質のひとつ（例えば形）を保存し、残りの性質を捨象する。しかるに論理数学的抽象においては、与えられるのは主体自身によって遂行された活動ないし操作の集積、ならびにその結果である。このとき「抽象」は第一に、このような活動ないし操作の存在に気づくこと、から成る。この活動ないし操作はそれまで主体の無視してきたものである。例えば1対1対応という操作はきわめて原始的なものであるが、カントール(Cantor, G.)以前にこれに数学的な注意を向けられたことはなかった。第二に、気づかれた活動は、語の物理的な意味で、ある水準ないし階層から高次のそれに「反映(réfléchir)」されなければならない。例えば実際の「物理的身体的活動」の水準から「思考」の水準へと、あるいは、「算術」から「代数」へのように、「具体的思考」の水準から「抽象的体系化」の水準へと、投影されなければならない。第三に、その活動は新たな構造のなかに統合されねばならない。この新たな構造は何よりもまず、それに先立つ構造の再構造化されたものでなければならない（それが整合性を欠くのでなければ）。しかし同時にこの新たな構造は、先立つ構造を新たな思考水準に固有の要素に結合することになって、先立つ構造の範囲を拡大しなければならない。

このように定義される反省的抽象というメカニズムは、何よりもまずピアジェが個体の認知構造の発達の中に見出したものであった。かれによれば、誕生から成人までの認知構造の発達は、最も大きく分ければ、「感覚・運動的段階」(誕生から約2歳まで)、「具体的操作の段階」(約2歳から11~12歳まで)、および「形式的操作の段階」(約11~12歳以後)に分かれる。感覚運動的活動は先ず内面化される。ここにはすでに活動の水準から思考の水準へとという反省的抽象のはたらきがみられる。この内面化された活動は、この具体的操作の段階で、ある種の可逆性および保存(不変性)を獲得し、操作となる。だがこの段階では具体的操作は、第一にその構造が「群性体(groupement)」という、「群」と「束」の中間の構造をもつ体系にかぎられる点で、第二に、対象が実際に取り扱われているときのみ機能す

るという点で、限界をもっている。すなわちここでは「形式」が「内容」から完全には分たれていない。次の形式的操作の段階が、内容から形式を分離する上で決定的な進歩を示す。この段階で、新しい操作が、以前の操作から出発して次第に一般化されることによって、出現する。すなわち「命題論理」の操作であって、これは単なる言語的陳述、すなわち単なる仮説（形式）にかかわり、対象（内容）のみにかかわるのではない。このときふたつの新たな構造が作られる。すなわち、「群性体」から、「ブール代数（分配可補束）」と、「クラインの四元群」が作られるのである。この四元群のほうは、ピアジェがはじめて命題論理のなかに見出したものであって、「ピアジェ群」または「INCR群」と呼ばれる。たとえば  $p > q$ （含意）という操作を採ろう。これを変化されないままにしておく同一操作（identique）をI、とすれば、 $I(p > q) = p > q$ 。逆（inversion）または否定（négation）をNとすれば、 $N(p > q) = p \cdot q$ 。相反（réciprocité）をRとすると、 $R(p > q) = q > p = \bar{p} > \bar{q}$ 。最後に相関（corrélativité）、または相反の否定をCとすれば、 $C(p > q) = \bar{p} \cdot \bar{q}$ 。したがって次の可換群がえられる。

$$NR = C; CR = N; CN = R; NRC = I$$

この「具体的操作」から「形式的操作」への移行は、「反省的抽象の見事な例である」<sup>(8)</sup>

さてピアジェは発達心理にみられるこのようなメカニズム、すなわち、以前には気づかれなかった活動図式を選び出し、これを通常の脈絡から切り離して新たな抽象水準で再構成するという反省的抽象が、数学の歴史のうちに普遍的にみられると主張する。さらに、「発生的認識論の基本的な仮説は、知識の論理的および合理的組織化において行われる進歩と、これに対応する形成的（formative）心理過程との間には、平行性があるということである」<sup>(9)</sup> したがって、ピアジェによれば、数学の理論的展開さえも、反省的抽象という心理的メカニズムによって説明しうることになる。

まず数学の歴史的発展のほうをみると、反省的抽象が新たな数学的構成をうみだした典型的な例として随所でピアジェが提出しているのは、1対1

対応に基づいて無限集合論を建設したカントールの例である。この例はまた同時に数学の理論的進歩の説明ともなりうるものである。すなわち、ゲーデル (Gödel, K.) は、かれの名を冠する有名な「不完全性定理」の系によって、初等算術のような体系は、自己自身的手段あるいはそれより弱い手段によっては、自己の無矛盾性を証明することができないことを示した。無矛盾性を確立するためには、その体系の限界を越え、それをより強い体系のなかに統合しなければならぬ。これがまさに初等算術を超限算術で補強することによってゲンツェン (Gentzen, G.) の果したことであった。

「いいかえると、ある構造の発展は、与えられた操作を単に拡張し、既知の要素を組合せることによるだけでは、その構造自身の水準において全面的には果たされえないのである。その進歩は、先の構造を含むが新たな要素を導入する、より広い構造を構成することによってなされる。しかし、この新たな要素は何から成っているのか<sup>(10)</sup>」ピアジェによれば、この要素を導入する新たな構造の構成こそ、カントールが反省的抽象によって行なったことであった。1対1対応という操作は非常に原始的なものであって、原始社会の物々交換にも、児童の具体的操作の段階でもみられるものである。しかしこの操作に数学的意義をみとめたのはカントールが最初であって、かれの功績は、無限集合がその真部分集合と同じ濃度をもつ（たとえば整数が偶数と1対1に対応する）ことをみとめるならば、1対1対応の概念が無限数を定義するのに用いられうることを示したことであった。対応という操作をふつうの有限な脈絡から「抽象」し、無意識的な自然的な活動の水準から数学的思考の水準に「反映」することによって、すなわち「反省的抽象」によって、カントールは有限算術をふくみこれを越える新たな構造として、超限算術を創始したのであった。

しかし1対1対応という、この単純で原始的な操作が、なぜごく最近まで数学者の研究対象となりえなかったのか。この理由は、ピアジェによれば、「意識化の法則」のなかに求めなければならない。すなわち「われわれは、われわれの精神の操作を直接には意識していない。操作は、外的障害に直面しないかぎり、自動的に機能するものである。こうして意識は求心

的 (centripète) であって遠心的 (centrifuge) ではない。いいかえると意識は操作の内的メカニズムにさかのぼる前に、操作の外的結果から出発する<sup>(11)</sup>。この法則は、数学史の多くの現象を説明する。それはたとえば、ギリシャ人が代数と解析幾何学を垣間見たのに、なぜこれらを発達させることができなかつたかを説明する。「ギリシャ人たちが、操作の重要性とその主観的実在について意識する前に操作を取り扱ったのは、心理学の法則に一致している。このことによってかれらは、これらの操作の所産を、主体の活動から分離して、外的世界に投影された実体というかたちで、『物化』したのであった。こうして、ピタゴラスは数を構成しているのだとは思ってもかけずに、数を実在のなかに位置つけてしまい、アリストテレスは自然的世界のなかに論理的クラスの位階組織を投影してしまい、また、ユークリッドは移動という空間的操作を利用しているのに、その重要性を無視しているのである<sup>(12)</sup>」

この意識化の法則をつよくとれば、数学の反省的活動は遡行によって進むことになる。ある活動図式が原始的かつ自動的で、精神の底深く埋もれているのに比例して、これを数学の研究対象とすることが困難になる。その結果、数学者は一種の「精神の考古学」<sup>(13)</sup>を研究していることになろう。反省的抽象は、既存の心理構造を分析し、これを越えて、より原始的な心理構造へと進む。そして、心理構造が原始的で無意識的であるのに比例して、その意識化および理論化は遅れるのである。こうして、1対1対応という操作があまりにも原始的なものであったからこそ、これを基にした集合論の建設が、ようやく十九世紀後半に行われたのである。さらに幾何学についてみれば、歴史的には、ユークリッド幾何学、射影幾何学、位相幾何学の順に、出現した。ところが子どもの発達心理においては、それぞれの幾何学に対応する心理構造は、歴史的な出現の順序とは、まったく逆の順序であられるのである。(このことを実証したのは発達心理におけるピアジェの功績のひとつであると言ってよい。)このようにして、いま「数学的構造の構成は反省的抽象によって行なわれる」という命題をかりに「反省的抽象の法則」と呼ぶことにする。この法則と「意識化の法則」を結び

つけると、次の定式が得られよう。すなわち、個体発生的に先に現れる数学的心理構造は、数学の歴史においては後に現れる構造であり、逆に、数学史で先に現れる構造は、発達心理においては後に出現する。

このような遡行の過程において、最も基本的な心理構造に達することもできるであろう。これが、ブルバキの母構造に対応する心理構造を見出したときピアジェの信じたことであつた。周知のようにブルバキは数学の全体を、構造主義の観点から、集合論の言語と存在論によって建築学的に再構成しようとした。「群」のような構造も集合であり、その元の上で定義される操作あるいは関係（これ自身も集合とみなされる）を持つ集合とされる。ブルバキ以前には、整数論、微積分学、幾何学などの数学の諸領域は相互に関連づけられていなかった。ブルバキはこれらの領域に共通の基本的な構造を見出そうとしたのである。そのためにかれらの採った手続きは、構造のアプリオリな演繹ではなく、帰納的、反省的、遡行的な分析であつた。こうして、初期のブルバキは、相互に還元されえない三つの独立した構造を取り出したのであつた。この構造から、分化と組合せによって、他の数学的構造をすべて導出することができる。この意味でそれらは「母構造」と呼ばれたのであつた。この三つの母構造は、(1)「群」を原型とする「代数的構造」、(2)「束」を代表とする「順序構造」、(3)「近傍」などの概念にもとづく「位相構造」である。

ピアジェがこのブルバキの再構成を全く知らずに、子どもの知能発達において経験的に観察される操作構造を分類する目的だけをもって取り出した三つの構造は、偶然にもこの母構造に正確に対応するものであつた。<sup>(14)</sup>

(もちろん一般性と豊かさにおいて発生的構造のほうははるかに劣る。) すなわち、(1)逆 ( $A - A = 0$ ) という型の可逆性をもつ構造。これは代数モデルまたは群のモデルによって記述できる構造である。(2)相反という型の可逆性をもつ構造。これは関係と順序のモデルによって記述されなければならない。(3)位相空間の構造。これは射影構造やメトリックな構造より以前に出現する。子どもは発達の初期に於て図を描くとき「角」や「直線」を無視し、「内側」と「外側」の観念にとらわれる。このことは、発達の最

初の時期に出現するのが位相空間であることを示す。—— さらに、母構造と同様、この三つの構造も相互に還元されえぬものであり、かつ、それらを組み合わせることにより、他の認知構造をすべて発生させることができる。<sup>(15)</sup> ピアジェは、このような数学の基本的構造と認知構造との密接な関係が、単なる偶然的なものではありえず、母構造が発生的構造から反省的抽象によって得られた、とみなしたのであった。なぜなら、反省的抽象は新たな操作と構造を構成するという点で「前進的 (progressive)」であるとともに、低次の構造に向い、そこから抽象を行なう点で「遡行的 (retroactive)」でもあるからである。<sup>(16)</sup> さて、ブルバキによる数学の再構成は数学の理論的公理的体系化であり、その母構造は「公理」に相当する。そうすると反省的抽象の心理法則は数学の理論的發展をも説明しうるようにみえる。すなわち、心理発達において先に現れる数学的構造が、同時に理論的にも基本的な構造であり、この逆も成り立つ、という定式が得られるようにみえる。確かに、心理発達における幾何学的構造の構成順序は、歴史的な構成順序とは正反対であって、理論的な構成順序に合致する。理論的には位相幾何学が基本であり、これに新たな概念と定理を加えて「豊かにすること (enrichment)」により、アフィン幾何学、射影幾何学、ユークリッド幾何学などがこの順に得られる。<sup>(17)</sup>

しかしながら、このように単純な定式が幾何学以外の数学の全分科に妥当するとは、とうてい考えられないのである。なぜなら、一般に理論的公理的再構成は、これを行なうものの歴史的見通しや哲学的目的によって、ある程度の任意性を帯びるからである。すなわち、どんな構造を基本にとるかは、一義的には決らない。現在、構造主義的に数学の再構成を行なうとすれば、それはブルバキのものとは非常に違ったかたちをとるであろう、<sup>(18)</sup> と言われている。(事実、ブルバキの構造主義自身が変化しつつあり、「圏 (カテゴリー)」、「関手 (ファンクター)」、さらには「トポス」の概念に注目するに到っている。)ピアジェ自身、第一に、たとえば命題論理という非常に初歩的なひとつの理論内部にかぎってみても、それが実に多様な公理体系によって構成されうることを根拠にして、形式化の遡行的な歩み

が、発生的に原始的な要素と一項ずつ対応することは不合理であり、われわれに、それを示す意図は全くない、と述べている。<sup>(19)</sup>にもかかわらず、第二にかれは言う「科学の歴史……ならびに心理発生によって、構造化の間断なき継起が示されている。それに関する心理学的な問題は、その発達を説明すること、そして何よりもまず、〔構造どおしの〕系譜関係(filiations)を再構成することである。他方、公理論は抽象的構造の階梯組織(hiérarchie)を取り出すことを可能とし、その形式的な系譜を決定することができる。……ところで、同一の構造が、実在の構造として発生的な視点から研究されると同時に、形式的な構造として公理論的な視点から研究される、というような対応を考えることができる(……)。こうして、中心問題は、発生的に基本的なものと、形式的な視点からみて《基礎的な》ものとの関係を探求することになる。」<sup>(20)</sup>そしてかれは、形式的体系化と発達心理学の「二種類の廻行的な分析のあいだには、ある種の大局的な、または機能的な、類似がある」<sup>(21)</sup>と主張する。だがこの類似すら存在しないのである。

すなわちこの第二の主張によって、ピアジェ自身が修正のうでで受けられている論理主義的な数学の再構成を説明しようとする、その説明は、同じ主張によるブルバキの初期の再構成の説明と全くくいちがってしまうのである。ピアジェの解釈する論理主義によれば、構造には階梯組織が存在し、最も弱い構造はクラスと関係の論理、すなわち『数学原理』の論理であり(数は包含と順序の総合だから)、次に弱い構造は初等算術であり、現在のところ最も強い構造は、<sup>(22)</sup>超限算術である。しかるに、ピアジェによれば、理論的に最も強い構造である超限算術が、先にみたように発生的には極めて基本的な1対1対応の操作から反省的抽象によって構成されたものであり、理論的に最も弱い構造たる『数学原理』の論理に基礎として含まれる命題論理は「形式的操作」の段階にいたって初めて生ずるものである。こうして、発達心理において最も基本的な構造が、初期のブルバキによる数学の再構成においては理論的にも基本的な構造に相当するのに対し論理主義的な数学の再構成においては全く逆に、理論的に最も高次の構造に対応するという、奇妙な帰結が生ずるのである。このくいちがいを除去

するには、ブルバキの構造主義と数学基礎論上の論理主義との関係を詳しく分析しなければならないであろう。しかるにピアジェにこの分析は全くみられず、つねに論理主義は論理学の認識論の項で、構造主義は数学の認識論の項で、それぞれ切り離して扱われている。ゲーデルとゲンツェンの証明が論理的かつ数学的なものである以上、この分断は不当である。結局上の分析がないかぎり、反省的抽象の法則を中心とした数学の理論的發展の説明は、きわめて混乱しており説得力を欠くと結論せざるを得ない。

それでは、反省的抽象の法則と意識化の法則でもって、数学の歴史的展開のほうは十分に説明されうるのか。まず、これら二法則からの必然的帰結としての、数学的構造の出現する順序は発達心理と数学の歴史では正反対であるという、先述の定式が、幾何学という例外を除き普遍的には妥当しないことは明らかである。しかるにピアジェは「歴史批判的分析は必然的に、精神発生的研究に延長されねばならない」<sup>(23)</sup>として、数学の歴史がブートルー(Boutroux, E.)の区別する三段階をたどった理由を、意識化の法則にもとめている。三段階とはギリシャの「観照的段階」、近世の「総合的段階」、現代の「内在的客観性の段階」であるが、例えば最初の段階において、もし意識化の法則をまともに受け入れるならば、ギリシャ数学に代数的操作の意識化を妨げた障害が何であったかを問わねばならない。その答えとしてよく提出されるのは、ギリシャ人の過度の幾何学的思考法であるが、これは社会的文化的現象であって、もはや心理学の説明範囲を越えている。一般にある操作の意識化を促すのは、ピアジェによれば「不適応」<sup>(24)</sup>をひきおこす外部環境の要因であるから、その要因が心理学の説明範囲を越えるのは当然である。結局、この簡単な考察からすら明らかなように、数学の歴史的展開を説明するには、たとえ反省的抽象の法則と意識化の法則を人間心理に普遍的な法則として受け入れたとしても、それだけでもってはどうてい足りず、社会的文化的要因の究明が不可欠である。

さらに、社会的文化的要因を一応は無視しうる数学の領域の歴史でも、ピアジェの理論が説明を与えることができないものが存在する。その典型例は微積分学である。前ソクラテス期の数学から、ユークリッド時代のア

アレクサンドリアの数学に至る間に、数学の証明概念に大きな変化が起った。そのひとつは——おそらく、サボー (Szabó, Á.) がユークリッド幾何学の公理体系化を促した原因として挙げたものと同一のゼノンのパラドックスに起因するものであろう——証明に運動の概念を用いてはならぬということであった。動点の概念を用いる証明は欠陥があると考えられ、定規とコンパスを用いる角の三等分の不可能性の証明のような、この概念に訴える証明は不十分だとみなされた。しかるに十七世紀の終り頃、物理的運動そのものが微積分学の対象となり、無限級数論がゼノンのパラドックスのひとつの解決となるとみなされたとき、運動の概念が再び数学の証明のなかに登場したのである。しかしそういう証明は再び問題を生みだすことがわかり、その後一世紀半の間に「極限」という静点な概念を用いる証明に変えられて現在に至っていることは周知のとおりである。

このような変化についてのピアジェの説明はアレクサンドリア時代で終っており、運動概念の欠除はギリシヤの観照的理想による静的存在論に起因する、との説明しかみられない。さらに、これ以上の説明は、ピアジェの極度に構造主義的な観点からは不可能であろう。われわれはこの点でロートマン (Rotman, B.) の次のような主張に全面的に同意する。<sup>25)</sup>

発生的認識論の関心は存在論的なものであって、現代数学の内在的に客観的な構造の構成を説明しようとする。しかるに微積分学の成立にまつわる困難は、「構造」の困難ではなく「証明」の困難である。微積分学は運動についての数学的な議論であって、その扱うところの、直線上の点あるいは実数の集合という構造は、問題の源泉ではなかった。数学は構造の構成だけに尽きない。「数学者は定理を証明し、推測を行ないこれを反駁し、有限算法を構成し、計算を行ない、仮説を検証し、証拠を引証し、主題の相異なる部分の関係を明らかにする。<sup>26)</sup>」なるほど、ブルバキのような二十世紀の集合論的な観点からは、この活動全体の主題は、何らかのかたちの構造と解釈されることもできる。しかしこう解釈しても、「構造の発見と発明」と、「構造についての主張の証明」とは、全くちがったことがらであるということは、依然として正しい。

さらにロートマンの指摘するように、ピアジェの証明論は「数学的構成に本質的な特性は、その構成が事後的に妥当とみとめられるかぎり、…その自由度が証明と形式化の方法にのみかかわるということである。それに対し、基本的な定理は必然性をもって課せられる<sup>27)</sup>。」というに尽きる。そうすると、証明とは、検証という回顧的過程になってしまい、検算、実際の構成を再度行なうこと、に似る。証明がこのように数学で小さな役割しか果さないとすれば、今世紀の数学基礎論の動きはほとんど説明できない。論理主義、直観主義、形式主義はすべて、無限集合にまつわる逆理の解決を出発点あるいは目標としている。とくにブラウアーの採った途は、直観主義という名称とは一見反して、証明に用いる論理を古典論理から直観主義論理に制限することであった。その結果、対象の非存在の仮定から矛盾を導き出しえても、そのことは対象の存在の証明とはならない。直観主義では、ある種の証明が構成できることが、数学的構造の存在を決定するのである。証明の構成を構造の構成に優先させる直観主義は、ピアジェの説と真向うから対立するはずである。そこでロートマンの言うとおり、ピアジェの数学認識論が数学の包括的な心理学的説明たることをめざす以上、それは少なくとも原理的には、ブラウアーのしごとに対する批判あるいは独立の見通しを提出することができなくてはならない<sup>28)</sup>。しかし証明を重視せぬピアジェは「たしかに、排中原理についての制限をもったブラウアーの構成主義と、演繹的構成を行なうに当って背理法による推論を無制限に用いる古典数学とが、いちぢるしいちがいによって対立し合っている。しかし、われわれの言葉で言えば、操作の構成または利用について、そこには二つの異なった類型があるにすぎない」と語ることができるだけである<sup>29)</sup>。

数学基礎論において最も多くの支持者を見いだしたヒルベルトの公理主義的形式主義は、素朴集合論の逆理に対処するために、数学の言語的側面を強調した。数学の命題は意味ない記号であり、証明は記号の有限な操作であるとみなされる。そこでこの立場による無矛盾性の証明は、矛盾に相当する記号がそういう操作からは生じないことを示す手続き、となろう。

ゲーデルの不完全性定理によってこの主義の限界が示されたと言われるが、それは「有限の立場」に関してだけであって、この立場を越え、モデル理論を導入することによって修正されたかたちの公理論的形式主義は、なお数学基礎論においてきわめて重要な位置を占めている。しかし発生的認識論はこのことを説明しえない。その原因はピアジェが数学の証明を重視せぬことのみならず、論理学および数学における言語の役割をひくくみることにある。論理数学的構造が知的発達の過程においてつねに言語の出現以前から存在すること、言語を欠く聾啞児でも、その認知構造の発達は、いくらかの遅滞があることを除き、正常な段階を示すことなどを根拠にして、言語が論理数学的構造の源泉ではないとされる。さらに、言語による或る構造Aの社会的伝達が可能なのは、反省的抽象による漸進的均衡<sup>(30)</sup>によって被伝達者がすでにその構造を所有している場合か、Aより弱い構造Bを伝達して反省的抽象をひきだすことによって当の構造Aの構成に導きうる場合のみだとされる<sup>(31)</sup>。発達心理におけるこの状況は、ピアジェの基本的前提によれば当然、数学そのものにおいても同一である。

しかし、例えばデカルトの解析幾何学をとってみると、それは最も単純な幾何学的対象たる直線を、最も単純な、したがって線形の、代数方程式に対応させることから出発して、代数学と幾何学を結びつけたのであった。この結合が数学的に重要であったのは、何よりも記述の単純さが得られたからであり、「代数学と幾何学が同一の数学的存在についての、二つの考え方語り方であることを示すことにより、デカルトは本質的に『言語的な』結果を証明したのである。……一般に……同型性の証明は、ひとつの構造の二つの記述のあいだに関係を確立するものである<sup>(32)</sup>。」したがって数学はひとつの言語として機能するのである。ところがうへの言語と構造の関係に関するピアジェの説によれば、ロートマンが鋭く指摘するように<sup>(33)</sup>、数学の役割は次の二つのいずれかになってしまう。第一に数学は人間が世界を構成するときの論理数学的枠組の一部として、思考のはたらきのなかに含蓄的にふくまれている。あるいは第二に数学は数学者が見出した、外的で物化された明示的構造である。いずれの場合も数学は言語として機能しえ

ない。第一の場合、数学は使用されるが指示機能をもたない。第二の場合、数学は記述機能をもつけれども、それ自身は記述されえない。

最後に数学基礎論の論理主義は自然数を論理から導出する。ピアジェとその協力者たちが心理学実験を繰り返すことにより得た結論は次のとおりである。(1)基数をクラスのクラスのみ還元することはできない、(2)序数を系列的関係のクラスに還元することもできない。すなわち (3)基数と序数の論理的定義は独立ではない。さらに (4)数学的帰納法は、祖先-子孫関係という論理的関係に還元できず、発生的には論理的帰納のほうが後であって、形式的操作の段階ではじめてあらわれる<sup>64</sup>。ここからピアジェは随所で、数は非対称の関係とクラスの和との総合であり論理主義の数の導出は不十分であると主張する。他方、ピアジェは、心理学的「事実」によって論理的「妥当性ならびに規範」の問題を解決しようとする心理主義は斥けられねばならないことを強調する。しかし論理主義の数の導出は純粹に論理的なものであって、心理学的な主張ではない。したがって論理主義の批判において、ピアジェは自ら斥けた心理主義に陥っているのである。たしかに、ピアジェの被験者は「個別的心理学的主体」ではなく、「普遍的認識的主体」であり、その活動はあらゆる活動システムの最も一般的な共応<sup>65</sup>であって、その根を主体の神経生物学的機制に求めるべきものである。このことによってピアジェは皮相な心理主義を免れてはいる。しかし上の主張はやはり「事実」から「規範」への移行であることに変りない。ピアジェは精神と身体、意識の含意過程と脳の因果過程の関係に関し、完全な平行論を主張するから<sup>66</sup>、このことは当然なのである。心理主義の排除は口先だけのことである。

結論として、発生的認識論による数学の説明には余りにも問題が多いと言わざるをえない。数学の心理学と数学の認識論・存在論との距離は遠い。ピアジェは、数学と実在との調和の理由、純粹に演繹的に構成された数学的構造がずっと後になって物理的世界に適用されること（例えば一マン幾何学）の理由は、操作構造が神経系の構造、有機体の形態発生の構造、最後に分子生物学と生物物理学の法則に基づくことに求められると主張す

る。しかしかれ自身、この見通しがかなり思弁的(*théorique*)であることをみとめている<sup>67)</sup>。ピアジェの構成主義は純粹な経験論を斥けたかも知れないが、アプリオリズムとプラトニズムを斥けることはできまい。このふたつの主義は、いずれも極限的な項の存在を主張しており、構成は上方と下方に無限に開かれているとするピアジェの構成主義と、論理的にはほとんどちがいが無いからである。結局、ピアジェの最大の功績は「追試が彼の研究成果の大多数を検証した<sup>68)</sup>」発達心理学における多数の「事実」の発見のうちにこそ存するといわなければならない。

### 註

- [ 1 ] Piaget, J., *Psychologie et épistémologie* (Denoël, 1970) p.147.
- [ 2 ] Piaget, J., *L'épistémologie génétique* (P. U. F., 1970) p. 88.
- [ 3 ] Piaget, J., *Genetic Epistemology* (Norton, 1970) p. 21-22.
- [ 4 ] Beth, E. W. et Piaget, J., *Epistémologie mathématique et psychologie* (P. U. F. 1961) p. 249 sqq.
- [ 5 ] *Op. cit.* p. 253.
- [ 6 ] Piaget, J. (éd), *Logique et connaissance scientifique* (Gallimard, 1970) p. 386.
- [ 7 ] Piaget, J., *Biology and Knowledge* (Edinburgh U. P. 1971) p. 320.  
Beth, E. W. et Piaget, J., *Op. cit.* p. 253.
- [ 8 ] Beth, E. W. et Piaget, J., *Op. cit.* p. 257.
- [ 9 ] Piaget, J., *Genetic Epistemology*, p. 13.
- [10] Piaget, J., *Biology and Knowledge*, p. 319.
- [11] Piaget, J., *Psychologie et épistémologie*, p. 128.
- [12] *Ibid.*
- [13] Rotman, B., *Jean Piaget: Psychologist of the Real* (Harvester, 1977) p. 80.
- [14] Beth, E. W. et Piaget, J., *Op.cit.* p. 177. sqq.
- [15] *Ibid.*
- [16] *Op. cit.* p. 180.

- [17] Popper, K. R. & Eccles, J. C., *The Self and Its Brain* (Springer, 1977) p. 21.
- [18] Rotman, B., *Op. cit.* p. 156.
- [19] Beth, E.W. et Piaget, J., *Op. cit.*, p. 267.
- [20] Piaget, J.(éd.), *Op. cit.* p. 398.
- [21] Beth, E.W. et Piaget, J., *Op. cit.*, p.267.
- [22] Piaget, J., *L'épistémologie génétique*, pp. 83-84.
- [23] Piaget, J. *Psychologie et épistémologie*, p. 128.
- [24] Beth, E. W. et Piaget, J., *Op. cit.*, p. 204.
- [25] Rotman, B., *Op. cit.*, p.143.
- [26] *Ibid.*
- [27] Beth, E.W. et Piaget, J., *Op. cit.*, pp. 221-222.
- [28] Rotman, B., *Op. cit.*, p.146.
- [29] Piaget, J., *L'épistémologie génétique*, p.117.
- [30] 「この反省的抽象作用には諸構造の漸進的均衡作用がともなう。」(ジャン・ピアジェ／及川馥訳「構造主義」、『現代思想』vol. 6-4, 青土社, p.206.)
- [31] Beth, E.W. et Piaget, J., *Op. cit.*, p. 308.
- [32] Rotman, B., *Op. cit.*, p.157.
- [33] *Op. cit.*, p. 148.
- [34] ジャン・ブレイズ・グリーズ／滝沢武久訳「発生的認識論と心理学」(『現代思想』vol.6-4, 青土社, pp.158-160.)
- [35] Beth, E.W. et Piaget, J., *Op. cit.*, pp. 254-255.
- [36] ピアジェ著、波多野完治訳「心理現象と生理現象との関係」(ピアジェ、フレス編、波多野完治、南博監修『現代心理学 I』、白水社、1971、pp. 179-248.)
- [37] Piaget, J.(éd), *Op. cit.*, p. 589.
- [38] ハワード・ガードナー著、波多野完治・入江良平訳『ピアジェとレヴィ＝ストロース』(誠信書房、1975) p. 184.