



Title	光と物質の超強結合は電磁場と電荷を相転移させるか?
Author(s)	馬場, 基彰
Citation	固体物理. 2017, 52(9), p. 459-476
Version Type	AM
URL	https://hdl.handle.net/11094/67789
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

光と物質の超強結合は電磁場と電荷を相転移させるか？

大阪大学大学院基礎工学研究科 馬場基彰 bamba@qi.mp.es.osaka-u.ac.jp

これは、固体物理 Vol. 52, No. 9 (2017 年 9 月号), pp. 459–476 に掲載された解説の著者最終稿 (post-print) である。

1 本稿で議論する 超放射相転移の概略

固体物理において、光は物質の励起や物性測定の手段として主に利用されてきた。一方、相転移は物質そのものが起こす現象と主に見なされてきた。本稿では、光の場つまり横波の電磁場そのものが物質との相互作用によって相転移を起こし、静的な電場もしくは磁場が熱平衡下で自発的に生じるかどうか、40 年以上続いている議論について解説する。結論から先に述べると、当初議論された電磁場と電荷との相互作用では相転移は期待できないものの、超伝導回路での電流を電磁場に見立てることで、類似の相転移が熱平衡下で起こりうるものが最近見出された。将来的には、電磁場とスピンとの相互作用による相転移や、熱・光・電流・磁性が絡む新たな物理現象やその応用が発見される可能性があり、非平衡統計力学や量子情報技術などの発展も期待できる。

この相転移について次節から詳しく解説していくが、本節ではまず、光と物質の相互作用に由来する相転移的な現象（光や物質の状態が閾値的に変化する現象）として、この相転移の他にどのようなものが知られているのかを紹介する。また、それらと本稿で解説する相転移との違いを説明する。

光は物質を励起する際に、そのエネルギーを物質に譲り渡す。励起された物質はそのまま光のエネルギー

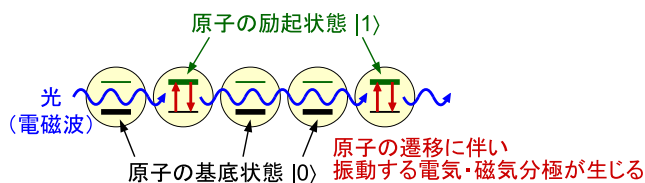


図 1: 光が物質中を伝搬する際には、物質の励起と光の再放出が繰り返される。光によって励起された電子などが相互に作用し合うことで相転移的な現象が得られる。ただし、それは外部にエネルギー源（光源）がある非平衡な状況下での現象である。

を吸収することも多いが、特に擾乱がなければ再び光を放出する。結果、図 1 のように、物質の励起と光の再放出を繰り返しながら、光は物質中を伝搬する。量子力学的には、物質の励起状態と光との重ね合わせ状態であるポラリトンが形成される。電磁気学的には、光の電場（磁場）によって物質中には電気分極（磁気分極もしくは電流）が誘導され、電磁場と分極とがある位相差を保ちながら時間的また空間的に振動しながら伝搬していく。このような光と物質の相互作用の 1 つの結果として、物質中での光速は減少し、屈折率は真空中のそれから変調され、物質の表面で屈折や反射が起こる。また、光によって励起された電子などの荷電粒子が相互に作用し合い、それらが光を再放出することで、真空中よりもはるかに強い光子間の相互作用が実効的に得られる。この光と物質の相互作用および物質中の電子などが示す多体効果や Fermi 粒子性によって、光は相転移的な現象を示すことがある。

その典型例としては、1954 年に確認されたメーザー発振 [1, 2] と 1960 年のレーザー発振 [3] が挙げられる。これらは、物質中を伝搬する光の振幅が誘導放出などによって増幅される場合、その増幅のレートがある閾値を超えた際に、外場などによって振動が誘導されないにも関わらず、横波の電磁場が自発的に振動を始める発振現象である。一方、光を物質に照射することで、結晶構造や電子状態が巨視的な変化を示す現象は光誘起相転移と呼ばれる。また、上記のポラリトン（光と物質励起の重ね合わせ状態）を光の共振器に閉じ込めることで、熱平衡に近い状況¹で Bose-Einstein 凝縮（もしくは Berezinskii-Kosterlitz-Thouless 転移）させられることが知られており [4–6]、光の Bose-Einstein 凝縮も試みられている [7]²。

以上が光と物質の相互作用に由来する典型的な相転移的な現象であるが、これらはすべて非平衡な状況下で起こる。つまり、メーザーやレーザーであれば、物質を

¹ 光が共振器から脱出する時間より熱平衡に至る時間が十分短い状況。例えば、最近の報告 [4] では前者が 135 ps、後者が 40 ps 程度と見なされている。

² 光と物質との相互作用を利用するものの、光と物質励起との重ね合わせ状態（ポラリトン）が明確には形成されないまま凝縮する場合、光の凝縮と呼ばれる。レーザーとは異なる現象であることの証拠として、光の Bose-Einstein 分布の観測が試みられている。

励起する何らかのエネルギー源（入力）が存在し、光が出力として自由空間に放出される。その他については、図 1 のように、エネルギーを供給する光源が存在し、最終的には自由空間に光が放出されたり、物質中に熱エネルギーが拡散していったりする。

対して、本稿で解説する相転移は、熱平衡下の現象である。図 2 の中段に直感的な描像を示す。無数の原子を想定し、各原子はその基底状態や励起状態において電気分極や磁気分極を有していないとする³。また、原子同士は直接は相互作用しないものとし、各原子と横波の電磁場との相互作用、例えば、磁場と原子中の電子が作る電流との相互作用のみがあると（電場と電気分極、磁場と磁気分極でも構わない）。それらが相互作用することによってエネルギー的な得が生じる。つまり、電磁場と原子集団からなる系のエネルギーを下げるができる。一方、静磁場と定常電流が生じることでエネルギー的な損も生じてしまうが、得が損を上回るほど相互作用が強くなると（これが題目の「超強結合」の意味するところであり⁴、その実験報告などについては第 4 節にて述べる）、電磁場や分極がない状態（図 2 中段の左）よりも、静磁場と定常電流が生じた状態（中段の右）のほうが安定となり、相転移が起こる。つまり、外場を掛けない熱平衡下で、静磁場と定常電流が自発的に生じ、磁場や電流の向きに関する対称性も破れる（図 2 の場合、静磁場が上と下どちらを向くかはランダムである）⁵。これが本稿で議論する相転移の描像であり、このような相転移が現実起こるどうかを解説していく。

この相転移の名称だが、本稿では「超放射相転移 (super-

radiant phase transition)」と呼ぶことにする。他に、Dicke 相転移、Hepp–Lieb 相転移などとも呼ばれたりするが、提唱者とされる K. Hepp と E. H. Lieb が用いた「超放射相転移」が最も頻繁に用いられる名称である [9]。一見すると光の放射に関わる相転移かのような印象を受けるかもしれないが⁶、肝心なのは光の放射ではなく、電磁場が自発的に生じることであり、そもそも絶対零度では光を放射しない⁷。相転移後に生じるのは、時間的に振動しない静電磁場である⁸。

結果的に静電場もしくは静磁場が物質の内外で生じる点は、強誘電体や強磁性体と似ている。ただし、それらの場合、物質が静的な電気分極や磁気分極を自発的に示し、それらに誘導されて静電場や静磁場が物質内外に形成される。つまり、相転移の起源は物質内の相互作用にある。一方、超放射相転移は、横波の電磁場と物質との相互作用を起源とする。また、図 2 の上段に示したような、スピンの揃うことによる強磁性相転移や秩序 - 無秩序型の強誘電相転移と比べれば、相転移する前の物質の状態も明らかに異なる⁹。

一方、先に述べたレーザーやボラリトン凝縮など、光と物質の相互作用に由来する相転移的現象と比べるなら、それらでは振動する電磁場（電磁波）が関わるのに対し、超放射相転移で生じるのは、静的な電場や磁場である。電磁場が空間的に振動することはあるが、時間的には振動しない。また、既に述べたように、非平衡下の発振現象や凝縮現象ではなく、超放射相転移は熱平衡下の現象である。

以下、この超放射相転移を研究の歴史に沿って解説していく。第 2 節で述べるように、量子光学で標準的に用いられるモデルから出発すると超放射相転移が起こると 1970 年前後に提唱されたものの、第 3 節で述べるように、電磁場と電荷の相互作用を原理に立ち戻って議論すれば超放射相転移は起こらないと数年後に否定される。その後 30 年ほど議論が下火になっていたが、第 4 節で述べるように、2010 年頃から超放射相転移の可能性がどこに残されているのか議論が再燃し始めた。

³分極や電流は外場を掛けた際に得られ、原子の基底状態 $|0\rangle$ と励起状態 $|1\rangle$ の量子力学的な重ね合わせ状態、例えば $|0\rangle + fe^{-i\omega t}|1\rangle$ などにおいて生じる。 ω は振動数であり、 f は確率振幅を表す。同様に、電磁場は異なる光子数状態の重ね合わせとして表現される。これらの関係によって電磁気学的描像と量子力学的描像とが対応づけられる。図 2 の下段に概念図を示した。特に $\omega = 0$ の場合、静的な分極と電磁場が得られ、これが本稿で議論する相転移後の状態に対応する。

⁴時間的に振動する「光」や「電磁波」ではなく、「横波の電磁場と物質の超強結合」と題する方が正確かもしれないが、量子光学の分野で主に議論されてきたこともあり「光と物質の超強結合」と呼ばれることが多い。光と物質の非平衡ダイナミクスだけでなく、超放射相転移など、電磁場と物質が相互作用する系の基底状態や熱平衡状態が近年盛んに議論されている。

⁵図 2 では 1 次元系のように描いたが、電磁場と原子集団からなる系の場合、原子集団は 3 次元系、電磁場については 3 次元もしくはより低次元な系（共振器中）と考えるのが現実的である。一方、図 4 の回路では、原子と見立てた Josephson 接合が等しく LC 回路と結合した 0 次元系と見なせる。原子間の直接的な相互作用は考えないが、全ての原子が電磁場を介して相互作用することで、原子間の長距離相互作用が実効的に得られる。結果、各原子が他の全ての原子と等しく相互作用する無限次元系（最近接に他の全ての原子がいる）とも見なすことができるため、本稿でも用いる古典的な解析（平均場近似）が正当化できるという指摘がある [8]。とはいえ、電磁波モードの波長に応じた静電磁場や分極の空間変調は生じうが、本稿で議論する相転移において、いまのところ、次元性はさほど注目されていない。

⁶次節で触れる超放射現象を示す Dicke Hamiltonian で見られる相転移という意味合いが正しいと言える。「超放射相転移」と言うよりは、横波の電磁場（の期待値）が自発的に生じる「コヒーレント相転移」、もしくは、物質の分極との相互作用が起源であることから「相互コヒーレント相転移」とでも表現する方が物理をよく表していると思う。

⁷有限温度では外界に熱輻射（電磁場の振幅の期待値がゼロの光を放射）すると思われるが、明確には示されていない。

⁸電磁場や分極が振動すると基本的に光の放射が起きてしまい、エネルギーが系から散逸してしまう。

⁹相転移前後の状態を考えると、 BaTiO_3 などの変位型の強誘電体に近いが、相互作用の起源が電磁場と物質との相互作用か、それとも物質側にあるかが違いである。注釈 42 でも述べるように、電磁場を（光学）フォノン場に置き換えることで、超放射相転移と変位型強誘電相転移とにアナロジーが成り立つ可能性もあるが、未だ詳細には議論されていない。

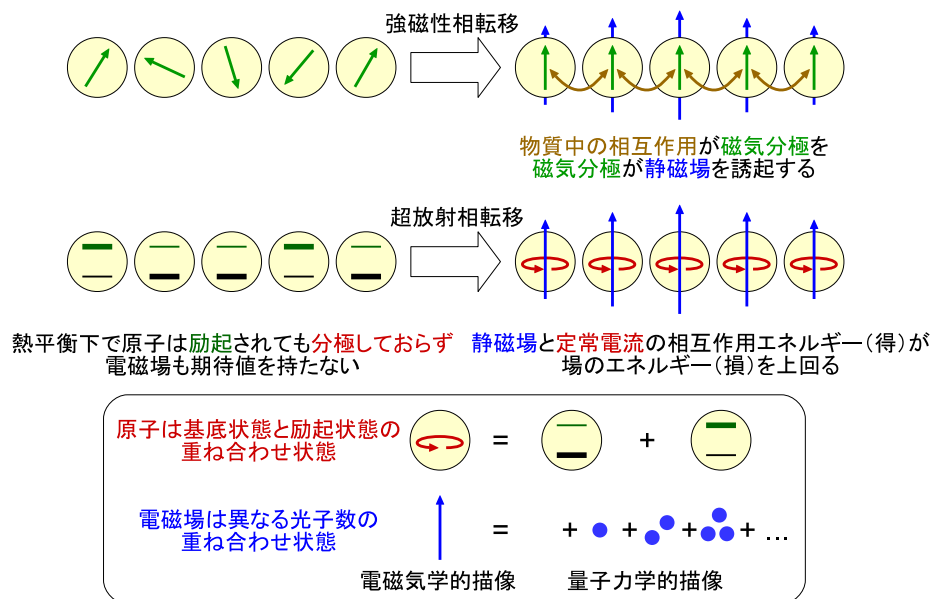


図 2: 強磁性相転移（上）と本稿で議論する超放射相転移（中）の描像．前者では物質中の例えばスピン間の相互作用によって，マクロな磁気分極が形成され，それによって物質内外に静磁場が誘起される．一方，超放射相転移では，そもそも分極を有していない原子の集団が（原子間の相互作用ではなく）横波の電磁場と相互作用することで，例えば定常電流と静磁場が自発的に生じる（電気分極と静電場でもよい）．それらが相互作用することによるエネルギー的な得が，静磁場や電流が生じることによるエネルギー的な損を上回ることによって相転移が起こる．「超放射」相転移と呼ばれるが，光の放射は肝心ではなく，静電磁場が自発的に生じることが肝心である（下）超放射相の電磁気学的な描像と量子力学的な描像の対応関係．

その原因は，超放射相転移に相当する非平衡下での発振現象の実験が報告されたこと，また超放射相転移に必要な光と物質との非常に強い相互作用を示す物質系が多数報告されるようになったことにある．いまのところ，熱平衡下での超放射相転移の実験報告はなく，電磁場と物質との相互作用に起因した超放射相転移の有望な理論提案もなされていないが，第 5 節で述べるように，超伝導電流を電磁場に見立てることで，超伝導回路において超放射相転移に相当する転移を熱平衡下で起こせることを，私が共同研究者と共に 2016 年に理論提案した．このような研究の経緯を混ぜながら超放射相転移を解説し，最後に，固体物理を含む物理学における超放射相転移の価値について，また非平衡統計力学の発展や量子情報やエネルギー変換などの技術革新が望めることに関して，第 6 節にて考察する．

ちなみに，既にお気づきかと思うが，本稿ではやや専門的な議論を注釈にて多数付言している．注釈を煩わしく感じた読者には読み飛ばすか，後で読み返すことをお勧めする．

2 量子光学の標準的なモデルでは超放射相転移が得られる

本節では，超放射相転移が当初どのようなモデルに基づいて提唱され，なぜそのモデルでは相転移が起こるのか解説する．そのモデルは量子光学の研究で標準的に扱われるものであるが，実のところ，そのモデルを出発点にしてはいけないというのが本稿の趣旨であり，超放射相転移が起こる物質系にのみ興味のある読者は本節を読み飛ばして頂いても構わない．唯一理解して頂きたいのは，Dicke Hamiltonian と呼ばれる式 (1) から出発すれば，超放射相転移が理論上は得られ，図 3 の相図を示すということである．超放射相転移が提唱された背景や，量子光学の研究における典型的な物理の考え方，またそれと超放射相転移の物理との違いなどに興味のある読者は，本節から読み進めて頂ければと思う．ただし，数式に基づいた議論が多いため，光の量子化などに馴染みの薄い読者には，後で読み返すことをお勧めする．

レーザーやレーザーの開発前後から，光の量子力学的な性質に注目した，いわゆる量子光学の研究が発展していった．1954 年に R. H. Dicke は原子が集団として

光を放射する際に、光の放出レートが原子数（密度）の増加と共に高まることを示唆した [10]。この原子の集団的な放出現象が Dicke の超放射もしくは超蛍光として、現在でも盛んに研究されている [11, 12]。その Dicke の論文 [10] において最も単純化された Hamiltonian

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{Dicke}} = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{j=1}^N \left[\frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_j^z + \frac{\hbar g}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j^\dagger \hat{a}) \right] \quad (1)$$

が、Dicke Hamiltonian として量子光学の研究でよく用いられる。この Hamiltonian の見方、つまり量子光学での物理現象の基本的な解釈の仕方は以下の通りである。第 1 項は横波の電磁場（光子）のエネルギーである。振動数 ω_c を持った 1 つの固有モードのみを考えており（例えば光の共振器中の最低次のモード）、 $\hat{a}$ はそのモードでの光子の消滅演算子である。第 2 項は原子集団が有するエネルギーを表しており、 N は原子数である。図 1 のように、各原子の準位として単純に基底状態 $|0_j\rangle$ と 1 つの励起状態 $|1_j\rangle$ のみを考え、それらのエネルギー間隔を $\hbar\omega_a$ とする。 $\hat{\sigma}_j^z = |1_j\rangle\langle 1_j| - |0_j\rangle\langle 0_j|$ は j 番目の原子に対する Pauli 演算子の 1 つであり、 $\hat{\sigma}_j = |0_j\rangle\langle 1_j|$ は下降演算子を表す。つまり、第 3 項は各原子を緩和させ、それぞれから光子を 1 個生成する過程を表し、最終項は逆に、各原子が光子を 1 個吸収して励起される過程を表す。図 1 で示した光と物質の相互作用を、これら 2 項が表現する¹⁰。光子の放出と吸収のレートは、原子 1 個あたりでは $g/\sqrt{N}$ であり、原子集団としては g である（この協力現象によって上記の超放射が得られる¹¹）。この g は原子準位間の電気的もしくは磁気的な分極の行列要素（遷移双極子能率）や原子密度などによって決定され、光と物質の相互作用の強さがこの g によって特徴づけられる。式 (1) のような単純化された Hamiltonian やその拡張版¹²によって、レーザーや超放射現象、単一光子やスクイズド光の生成など、量子光学の研究で頻りに議論される物理現象、つまり非平衡下の光と物質のダイナミクスが良く再現されてきた [13, 14]。

一方、熱平衡下の相転移である超放射相転移では、この式 (1) の Hamiltonian の基底状態や熱平衡状態を議論する。単純には、光子が 0 個で原子が全て基底状態にいる状態 $|g_0\rangle = |0\rangle_{\text{光子}} \otimes |0_1 0_2 0_3 \dots 0_N\rangle_{\text{原子}}$ が全系の基底状態かのように思える。電磁場と原子のエネルギー（式 (1) の第 1, 2 項）はこのとき最低となり、相

互作用項（第 3, 4 項）はエネルギー期待値に寄与しない。実際、量子光学の議論では多くの場合、この状態が基底状態と見なされる。

ただし、光と原子集団の相互作用の強さを表す $\hbar g$ が光子の生成エネルギー $\hbar\omega_c$ や原子の励起エネルギー $\hbar\omega_a$ と同程度になると、その限りではない¹³。第 1 節で触れたように、電磁場や原子集団の電気分極や磁気分極もしくは電流が期待値を獲得すれば、エネルギー的な得が生じる。式 (1) では、 $\langle \hat{a} \rangle \neq 0$ と $\langle \hat{\sigma}_j \rangle \neq 0$ が、それぞれ電磁場と原子分極（電流）が期待値を示すことに対応し¹⁴、第 3, 4 項で表されるそれらの相互作用によって、系のエネルギーが下がる。一方、電磁場などが期待値を持つことで第 1, 2 項を通じてエネルギー的な損も生じるが、得が損を上回れば、基底状態において電磁場や原子集団の分極・電流が自発的に期待値を獲得してもよいことが分かる。

光と原子集団の相互作用の強さを表す g が ω_a, ω_c と同程度の場合に、上記の自明な状態 $|g_0\rangle$ が不安定になることは 1969 年に W. R. Mallory によって示された [15]。 $N \rightarrow \infty$ の極限で $g^2 > \omega_a \omega_c$ において電磁場と原子集団の分極・電流が熱平衡下で自発的に期待値を獲得すること、つまり超放射相転移することは、1973 年に K. Hepp と E. H. Lieb によって示された [9]。同年、Y. K. Wang と F. T. Hioe によって、明快な計算法が示された [16]。

図 3 に相図を示す。これは式 (1) の Dicke Hamiltonian で表される分配関数 $e^{-\hat{\mathcal{H}}_{\text{Dicke}}/(k_B T)}$ を、Wang–Hioe の計算法 [16, 17] によって評価することで、簡単に計算できる。縦軸は温度 T を $k_B T / \hbar\omega_a$ として無次元化し、横軸は g/ω_a とし、熱平衡下での電磁場の期待値 $\alpha_{\text{eq}} = \langle \hat{a} \rangle$ の絶対値を $\sqrt{N}$ で規格化した値を赤色でプロットした¹⁵。ここでは単純に $\omega_c = \omega_a$ としており、 $g > \sqrt{\omega_a \omega_c} = \omega_a$ において、太線で示した臨界温度 T_c を境に電磁場が期待値を獲得した超放射相が現れる（2 次の相転移である [9]）。 g の増大と共に、臨界温度 T_c は高まっていく。図示していないが、各原子の分極や電流も期待値 $\langle \hat{\sigma}_j \rangle = -(\omega_c/g)\alpha_{\text{eq}}/\sqrt{N}$ を獲得する。 $\langle \hat{a} \rangle$ とは逆符号となり、式 (1) の第 3, 4 項を通じて、系のエネルギーが下がる。図 3 が超放射相転移を示す系の典

¹⁰ 光の共振器を想定しているため、光の伝搬は Dicke Hamiltonian では表現できない。

¹¹ 原子のエネルギー緩和レート（励起状態の寿命の逆数）は Fermi の黄金律に従い、1 原子では g^2/N に比例するのにに対し、原子集団では N 個の原子の協力現象によって g^2 に比例する。

¹² 例えば、3 準位以上の原子や、複数の光のモード、複数の光子が絡む相互作用などが導入される。

¹³ 量子光学の研究では多くの場合 $g \ll \omega_a, \omega_c$ が想定されてきたが、第 4 節で述べるように $g \sim \omega_a, \omega_c$ の系が近年多数報告されるようになった。

¹⁴ 横波の電磁場を量子化した際に、ベクトルポテンシャルや磁束密度を $(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ 、電場や電束密度を $i(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$ などに対応させる。量子光学の議論では、電場と磁場を特に区別しなくなり（ $g \ll \omega_a, \omega_c$ で回転波近似を適用するため）、 $\hat{a}$ を光の振幅の演算子とよく見なす。同様に、 $(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma})$ や $i(\hat{\sigma}^\dagger - \hat{\sigma})$ は物質中の電気分極、磁気分極、電流などに対応するが、対応関係は気にされないことが多い。もちろん、 $g \gtrsim \omega_a, \omega_c$ では、それらの違いをきちんと区別しなければ、物理現象を上手に表現できない。

¹⁵ つまり、光子の数 α_{eq}^2 は原子数 N でスケールする。

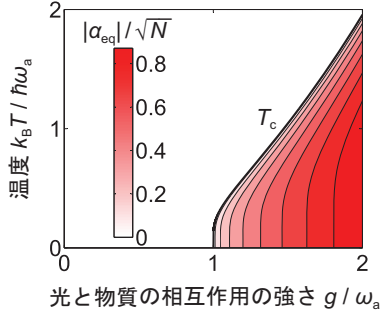


図 3: Dicke Hamiltonian [式 (1)] で記述される系の原子数無限 ($N \rightarrow \infty$) の極限での相図。原子の遷移振動数を ω_a として、温度 T と光と物質の相互作用の強さ g を、それぞれ $k_B T / \hbar \omega_a$ と g / ω_a に無次元化して縦軸と横軸とし、電磁場の期待値 $\alpha_{\text{eq}} = \langle \hat{a} \rangle$ の絶対値を $\sqrt{N}$ で規格化して、赤色でプロットした。太線で示す臨界温度 T_c において超放射相転移（2 次の相転移）が起こる。ここでは、光の共振器の共鳴振動数を単純に $\omega_c = \omega_a$ としており、 $g > \sqrt{\omega_a \omega_c} = \omega_a$ において超放射相が得られる。この図は文献 [16, 17] の計算法に基づき著者が作成した。

典型的な相図である¹⁶。有限温度ではなく絶対零度、つまり基底状態のみを議論するなら、Holstein–Primakoff 変換による解析が分かりやすい [18, 19]。この解析法に基づいて、ここでは自明な状態 $|g_0\rangle$ が $g^2 > \omega_a \omega_c$ において不安定になることだけ見てみる。

自明な状態 $|g_0\rangle$ からの揺動（微小な励起）のみを議論することにし、原子集団の分極の期待値を $b = \sum_{j=1}^N \langle \hat{\sigma}_j \rangle / \sqrt{N}$ とし、電磁場のそれを $a = \langle \hat{a} \rangle$ とすれば、式 (1) の Hamiltonian（エネルギー）は古典的に

$$E_{\text{Dicke}} = \hbar \omega_c |a|^2 + \hbar \omega_a |b|^2 + \hbar g (a^* b + b^* a) + \text{const.} \quad (2)$$

と近似できる¹⁷。 $a = b = 0$ においてこれが最小であれば、自明な状態 $|g_0\rangle$ は（古典的には）安定ということになる。 b で E_{Dicke} を微分すれば、 $b = -ga/\omega_a$ が得られ、この条件下でエネルギーが極小もしくは極大になる。これを式 (2) に代入すれば、この条件下での系のエネルギーは

$$E'_{\text{Dicke}} = \hbar \left(\omega_c - \frac{g^2}{\omega_a} \right) |a|^2 \quad (3)$$

¹⁶第 4 節で触れるように、絶対零度や温度を定義できない非平衡下において、Hamiltonian 中のパラメータ g などを变化した際に得られる転移が、近年では量子相転移として議論されてもいる [18–20]。

¹⁷1 つの原子を 2 回励起した際に考慮すべき Pauli の排他原理を気にする必要がなければ、原子集団を Boson 場で表現できる。Holstein–Primakoff 変換の最低次を考えれば、原子の集団励起（励起の重ね合わせ状態）に対する下降演算子は $\sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_j / \sqrt{N} \rightarrow \hat{b}$ に、励起の数は $\sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_j^z \rightarrow 2\hat{b}^\dagger \hat{b} + \text{const.}$ に対応する。 $\hat{b}$ は Boson 場の消滅演算子であり、本文中の b はその期待値である。

と表される。このように、 $g^2 > \omega_a \omega_c$ において係数（光子の生成エネルギー）が負になり、 $|g_0\rangle$ が不安定となること、つまり、電磁場や原子集団の分極や電流が自発的に期待値を獲得することが分かる¹⁸。ただし、どこまでも電磁場の期待値が増大するわけではなく、Hamiltonian を式 (2) のように単純化せず、式 (1) をきちんと解析すれば、 $N \rightarrow \infty$ の極限において、基底状態 $|g\rangle$ が有限の $\langle g | \hat{a} | g \rangle / \sqrt{N} \neq 0$ および $\langle g | \hat{\sigma}_j | g \rangle \neq 0$ を示すという結果が得られる [9, 16, 18, 19]。

この超放射相転移において肝心なことは、基底状態において光子が存在する $\langle g | \hat{a}^\dagger \hat{a} | g \rangle > 0$ だけでなく、電磁場が期待値を持つ $\langle g | \hat{a} | g \rangle \neq 0$ ことである。電磁場の系が熱分布していれば、光子が存在しても $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle > 0$ 、電磁場の期待値はゼロである $\langle \hat{a} \rangle = 0$ 。電磁場が期待値を持つことは、Glauber のコヒーレント状態 [21] のように、異なる光子数状態の重ね合わせ状態になっていることを意味している¹⁹。図 2 の下段に大雑把な描像を示したが、静電磁場が光子数状態の重ね合わせ状態として表現されるのと同様に、原子中の電気分極、磁気分極、電流などはその基底状態と励起状態の重ね合わせ状態として表現される²⁰。

典型的な量子光学の議論では、このような重ね合わせ状態は、レーザー照射下など非平衡な状況下における電磁場と原子の励起状態のダイナミクスとして議論されてきた。対して、超放射相転移では、基底状態や熱平衡状態において電磁場と原子がもつれ合いながら重ね合わせ状態をとる。このように、量子光学での典型的な系や状態が超放射相転移においても議論され

¹⁸結合する 2 つの Boson 場（つまりボラリトン）の固有振動数 ω を解析してもよい。Boson 化した Dicke Hamiltonian から得られる 2 つの運動方程式 $i(\partial/\partial t)a = \omega_c a + gb$ と $i(\partial/\partial t)b = \omega_a b + ga$ から、 $\omega^2 - (\omega_a + \omega_c)\omega + \omega_a \omega_c - g^2 = 0$ が得られ、 $g^2 > \omega_a \omega_c$ において負の振動数 $\omega < 0$ （負の準粒子生成エネルギー）が得られてしまう。つまり、式 (2) を導く際に仮定として用いた $|g_0\rangle$ が不安定であることが分かる。

¹⁹光子のみの系 $\hat{H}_{\text{光子}} = \hbar \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}$ を考えた場合、光子数状態 (Fock 状態) $|n\rangle = (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle / \sqrt{n!}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) が固有状態であるが、それらは電磁場の期待値を持たない $\langle n | \hat{a} | n \rangle = 0$ 。熱分布は数状態の混合状態として表現される。一方、Glauber のコヒーレント状態 $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n |n\rangle / \sqrt{n!} = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle$ のように、電磁場の期待値 $\langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle = \alpha \neq 0$ を得るためには、異なる光子数状態の重ね合わせ状態である必要がある。コヒーレンスとは本来、波動力学（光学や量子力学）の用語だが、現在では量子光学や量子情報などの研究において、様々な意味合いで用いられる。横波の電磁場（光子集団）の時間的もしくは空間的な位相が揃っており、振幅の期待値がゼロでないという意味もあるが、本稿では異なる光子数状態の（位相が固定された）重ね合わせ状態という意味合いである。

²⁰電磁場や原子集団の分極や電流が期待値を持つ ($\langle g | \hat{a} | g \rangle \neq 0$, $\langle g | \hat{\sigma}_j | g \rangle \neq 0$) ためには、基底状態 $|g\rangle$ は異なる準粒子数状態の重ね合わせでなければならない。しかしながら、式 (1) や式 (2) では、準粒子の総数（光子と励起の総数） $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{j=1}^N |j\rangle \langle j|$ が保存量であることが分かる。式 (1) の Dicke Hamiltonian において、超放射相転移が起こることは、準粒子数の保存則が自発的に破れることを意味しており、理論上は $N \rightarrow \infty$ の極限でのみ起こる [9, 16]。この保存則は、図 2 の説明の際に触れた磁場や電流の向きに関する対称性に関連する [18, 19]。

るものの、その状況が非平衡なのか熱平衡なのかが決定的に異なる。

以上、量子光学で標準的に用いられる式 (1) の Dicke Hamiltonian から出発すると上記のような相転移が理論上得られる。これが 1970 年頃に提唱された超放射相転移の研究の始まりである。

3 電磁場と電荷の物理法則に立ち戻れば超放射相転移は得られない

さて、式 (1) の Dicke Hamiltonian から出発すれば、原子数無限 $N \rightarrow \infty$ の極限で超放射相転移が得られる。この結論自体は正しい。第 4 節で述べるように、相転移に必要な $g^2 > \omega_a \omega_c$ という非常に強い相互作用も近年実現されつつある。ただし、相転移の有無に関する根本的な問題の存在が、1975 年から 1981 年にかけて K. Rzażewski らによって示された [22–24]。問題とは、電磁場と電荷が従う物理法則 (Maxwell 方程式と Newton 運動方程式) を正しく記述する Hamiltonian から出発すれば、 $g \gtrsim \omega_a, \omega_c$ の領域では式 (1) の形にはならず、超放射相転移が起きないことである²¹。本節では、Maxwell 方程式と Newton 運動方程式から出発して Hamiltonian を導き、前節と同様に最小エネルギー状態を古典的に解析することで、この場合には超放射相転移が起きないことを簡単に見てみる。

$\mathcal{N}$ 個の粒子の集団を考え、 j 番目の粒子の質量を m_j 、電荷を e_j とする。電場 $E(\mathbf{r})$ および磁束密度 $B(\mathbf{r})$ の下で各粒子は Lorentz 力を感じ、 j 番目の粒子の位置 $\mathbf{r}_j$ は Newton 運動方程式

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = e_j \mathbf{E}(\mathbf{r}_j) + e_j \dot{\mathbf{r}}_j \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_j) \quad (4)$$

に従う。ここで、変数の上の $\dot{}$ は時間に関する偏微分を表す。一方、電磁場は荷電粒子集団が形成する電荷密度 $\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} e_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ と電流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} e_j \dot{\mathbf{r}}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ を感じ、Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0 \quad (5a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) \quad (5c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r})/c^2 \quad (5d)$$

に従う。 ϵ_0, μ_0, c はそれぞれ真空中の誘電率、透磁率、光速である。式 (4) の Newton 運動方程式と式 (5) の Maxwell 方程式が本節の出発点である。これらの運動方

²¹ といえ、式 (1) の Dicke Hamiltonian は多くの場合、 $g \ll \omega_a, \omega_c$ では正当化されるので、この範囲で量子光学を議論する分には問題ない。

程式が得られる Lagrangian を書き出し、Coulomb ゲージを採用して Legendre 変換すれば、Hamiltonian の 1 つの形として、最小結合 (minimal-coupling) Hamiltonian と呼ばれる

$$\mathcal{H}_{\min} = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r})^2}{2} + \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})^2}{2\mu_0} \right] + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \frac{[\mathbf{p}_j - e_j \mathbf{A}(\mathbf{r}_j)]^2}{2m_j} + V(\{\mathbf{r}_j\}) \quad (6)$$

が得られる [25]。第 1 項は電場 $\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r})$ の横波成分のエネルギー、第 2 項は磁束密度 $B(\mathbf{r})$ のエネルギーである。磁束密度がベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を用いて $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ と表されるのに対し、電場の横波成分は $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ に共役な運動量 $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})$ を用いて $\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}) = -\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})/\epsilon_0$ と表される。第 3 項は各粒子の運動エネルギーを表しており、 $\mathbf{p}_j$ は運動量である。最終項は粒子間の Coulomb エネルギーであり、粒子の位置 $\mathbf{r}_j$ へのみ依存する。

式 (6) の最小結合 Hamiltonian から、例えばレーザーの系など、議論したい物質系を具体的に想定することで、量子光学で扱われる多くの Hamiltonian が導かれる。式 (1) 自体も Dicke によって最小結合 Hamiltonian から導かれたものだが [10]、超放射相転移が提唱された際には、残念ながら原点に立ち戻った議論がなされなかった [9, 15, 16]。Rzażewski らの 1975 年の指摘 [22] は以下の通りである。最小結合 Hamiltonian から式 (1) の Dicke Hamiltonian を導こうとすれば、式 (6) の第 3 項を展開した際に現れる $-e_j \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_j)/m_j$ と $e_j^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}_j)^2/(2m_j)$ のうち、前者から光と原子集団の相互作用項 (式 (1) の第 3, 4 項) が得られる。一方、後者から $(\hbar g^2/\omega_a)(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2$ という A^2 項と呼ばれる項も得られる²²。この項が式 (1) には含まれておらず、これを考慮した場合、超放射相転移が起きない。第 1 節や第 2 節の論法に沿うなら、電磁場や原子集団の分極や電流が期待値を獲得した際、 A^2 項からエネルギー的な損が出てしまい、常に期待値ゼロで系が最も安定になることが計算してみれば簡単に分かる²³。係数が $\hbar g^2/\omega_a$ であることから、Dicke やその後の量子光学での多くの議論で想定された $g \ll \omega_a, \omega_c$ では、この項は無視できたが、超放射相転移が起こる $g \gtrsim \omega_a, \omega_c$ では当然ながら無視できない。

その後、Rzażewski らは、2 準位原子などの具体的な物質系を想定せずとも、最小結合 Hamiltonian から出

²² $(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ がベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ に対応するため、 A^2 項もしくは quadratic 項と呼ばれる。より厳密に Rzażewski らの指摘を述べるなら、Thomas-Reiche-Kuhn 総和則に基づく係数が $\hbar g^2/\omega_a$ 以上になり、超放射相転移が起こらない。

²³ A^2 項を式 (1) の第 1 項に繰り込めば、 A^2 項を消すことはできる。ただし、繰り込みによって ω_c が g と共に増大してしまい、結果として $g^2 > \omega_a \omega_c$ が満たされず、超放射相転移はやはり起きない。

発すれば、超放射相転移は原理的に起きないと主張した [23, 24] . no-go 定理と呼ばれるこの主張が正しいのかどうか現在でも議論が続いているが [26–30] , 本稿では深くは立ち入らないことにする . ここでは, Rzażewski らの証明法よりさらに大雑把になってしまうが, 最小結合 Hamiltonian の最小エネルギー状態を古典的に解析することで, 電磁場が絶対零度において自発的に期待値を獲得しないことを簡単に確かめてみる ²⁴ .

まず, 式 (6) の第 3 項である荷電粒子の運動エネルギーを最小化しようとすれば, 荷電粒子の運動量 (つまり電流) とベクトルポテンシャル (つまり電束密度) の期待値は $p_j = e_j A(r_j)$ のように釣り合っている必要がある . 一方, 第 2 項の磁束のエネルギーを最小化するためには, ベクトルポテンシャルの期待値は $A(r) = 0$ であるべき . 第 1 項の電場の横波成分のエネルギーや最終項の Coulomb ポテンシャルは p_j や $A(r)$ を含まないので, 結局, $p_j = A(r) = 0$ が古典的には最小エネルギー状態を与えることが分かる ²⁵ . つまり, 超放射相は現れず, 超放射相転移は起きない . これはもちろん古典的な解析であり, 実際には量子ゆらぎが存在し, 量子力学的な解析でのみ得られる何らかの相転移が存在することは否定しない . しかし, 前節で述べたように, 超放射相は絶対零度では古典的に解析可能な状態であり, 絶対零度で電磁場が期待値を得なければ有限温度でも相転移は起こらない . 後述する超放射相転移が起こりうる超伝導回路の解析でも, この古典解析によって大雑把な傾向を掴むことができる . とはいえ, このような議論の余地が生じるのは, 上記の解析が大雑把なためであり, no-go 定理のより厳密な証明 (の試み) については, Rzażewski らの論文 [23, 24] もしくは文献 [32] に記載した no-go 定理の概略を参照して頂きたい .

以上のように, 量子光学での標準的なモデルである Dicke Hamiltonian から出発すれば超放射相転移が得られたものの, そこには理論的な不作為が存在し, より原点に立ち戻って電磁場と電荷との相互作用を考えると, 相転移は期待できない . これが 1980 年前後における超放射相転移に関する結論である .

4 超放射相転移の可能性が残る物理系

さて, その後の超放射相転移の研究について, 関連する論文を読み漁った限りでは, 1975 年から 1981 年にかけての Rzażewski らの否定的な解析の結果 [22–24] , 議論は下火になったように見える . 2003 年頃に C. Emary と T. Brandes らによって量子カオスの文脈で解析が行われたり [18, 19] , 光と原子集団との間のエンタングルメントエントロピーが着目されたりしたが [33] , 基本的には Dicke Hamiltonian から出発しており, それをどのような物質系で実現するかという問題については棚上げされていたように見える . そのような中, 2010 年頃から超放射相転移を示す物理系を改めて探索する研究が盛り上がり出した . 本節では, 議論が再燃した背景について紹介し, 超放射相転移の可能性がどこに残されているのかを解説する .

超放射相転移の実現について 1 つの進展が得られたのは, 2007 年の H. J. Carmichael らによる提案であり [34] , 冷却原子の実験で用いられる誘導 Raman 遷移を利用すれば, Dicke Hamiltonian を実装できるというものである . その後, この提案に似た形で 2010 年に T. Esslinger のグループによって超放射相転移に相当する量子相転移 ²⁶ の観測が報告された [20] . ただし, この実験で観測しているのは, 冷却原子にレーザー光を照射した非平衡下の現象であり, レーザー発振や Dicke の超放射 (超蛍光) 現象に近い . とまれ, 熱平衡下ではないにしろ, 非平衡下での量子相転移として注目を集め, パラメータをより柔軟に制御できる形で Dicke Hamiltonian を実装する試みも続いている [35] . これらの研究が, 2010 年頃から超放射相転移の研究が再燃する一因となった .

もう 1 つの要因として, 相転移の必要条件 $g^2 > \omega_a \omega_c$ に達するほど非常に強い光と物質の相互作用が, 様々な物質系で盛んに報告され始めたことが挙げられる . 相互作用の強さを特徴づける g が光の振動数 ω_c や物質の遷移振動数 ω_a と同程度かより大きい領域 ($g \gtrsim \omega_a, \omega_c$) は「光と物質の超強結合 (ultra-strong coupling)」と呼ばれる ²⁷ . この超強結合領域の理論解析や物質系の提案

²⁴このような古典解析は J. M. Knight らが 1978 年に紹介している [31] .

²⁵ r_j に依存する Coulomb 相互作用による何らかの相転移は当然あってもよいが, 光と物質の相互作用が起源と解釈できない限り, 超放射相転移と呼ぶには抵抗がある .

²⁶温度変化による熱平衡下の超放射相転移ではなく, Hamiltonian 中の光と原子集団の相互作用の強さを特徴づけるパラメータ g の変化による相転移である (非平衡下なので温度は定義できない) . Emary, Brandes, Esslinger らの研究の言葉遣いに倣い, 温度が定義できるか否か, 絶対零度でのみ現れるか否か, 古典的に解析できるか否かに関わらず, 変化する項とその他の項が非可換であることでもって, 本稿では量子相転移と呼ぶことにする . 量子相転移としての性質については, 文献 [8] にて丁寧に解説されている .

²⁷Ciuti らが当初提唱した $g \gtrsim \omega_a, \omega_c$ [36] を超強結合の定義とするのとは別に, $g > (\omega_a, \omega_c) \times 0.1$ を超強結合と呼び, $g > \omega_a, \omega_c$ を深強結合 (deep strong coupling) と呼ぶ流派もある [37] . これは, 初期の実験報告において, $g \sim \omega_a, \omega_c$ を実現したと主張していたが

は 2005 年に C. Ciuti らによって研究され始めた [36] . 実験については, 2009 年に半導体量子井戸中の電子のサブバンド間遷移と THz 波 [38] , 2010 年に超伝導回路中の人工原子とマイクロ波 [39] , 2011 年に色素分子と可視光 [40] , 2012 年にサイクロトロン遷移とスプリットリング共振器中の THz 波 [41] , 2014 年にマグノンとマイクロ波 [42, 43] , 2016 年に分子振動と赤外光 [44] などが超強結合すると報告された . 実のところ, 1960 年代には既に GaP や GaAs 中の光学フォノンが THz 波 [45] やプラズモン [46] と超強結合することが知られていた²⁸ . 現状の実験は, 単に相互作用が強いという定量的な違いを示す報告が大半であり, 従来とは本質的に異なる物理現象の観測こそが, まさにこれからの超強結合の研究の方向性である . そのような物理現象の 1 つが, 超強結合を必要とする超放射相転移である . もう 1 つの関心は, 超強結合に由来する「仮想光子」の存在証明であり [36] , それらの実証などを目指し, 現在でも新たな物質系の開発が盛んに行われている . 2016 年には, 河野淳一郎のグループによって THz 波の共振器の品質が大幅に高められ [50] , 吉原文樹, 布施智子, 仙場浩一らによって $g > \omega_a, \omega_c$ が報告されており [51] , 近いうちに従来の量子光学との本質的な違いが実証されるのではと期待される .

これら非平衡下での (量子相転移の意味での) 超放射相転移や超強結合の実装によって, 超放射相転移の研究が再燃した . 主に理論研究ではあるが, 2012 年には電子が線形分散を示すグラフェンならば A^2 項が一見すると現れないとして相転移の有無が議論されたり [52, 53]²⁹ , Dicke Hamiltonian で想定された 2 準位原子ではなく 3 準位原子ならば相転移が起ると 2013 年に主張されたりした [54]³⁰ . また, 最小結合 Hamiltonian をユニタリ変換すれば, 超放射相転移と解釈できる相転移が存在しうるのであるという議論もあるが [26–30] , 私自身は否定的な見解を示している [28] . とまれ, 本稿の

めに $g > (\omega_a, \omega_c) \times 0.1$ を超強結合のひとまずの目安としたことが一因と思われる . 0.1 という値に特に意味はなく, 超放射相転移の実現や A^2 項の存在, 回転波近似の破綻などにこそ意味がある . 私は Ciuti らとの親交の方が深いことから, 彼らの定義 $g \gtrsim \omega_a, \omega_c$ [36] を本稿では用いることにする .

²⁸THz 波やプラズモンが共振器に閉じ込められてはいなかったが, 超強結合の研究において, 電磁波の共振器は議論を単純化するための設定であって必須ではない . 超放射相転移の研究の初期において, バルク中のボラリトンの分散関係に基づく解析を山ノ井基臣らが示している [47–49] . また, 物質と結合するものは必ずしも電磁波でなくとも, Boson 場でさえあれば理論的には同じである .

²⁹電磁場との相互作用について高次の摂動を考慮すれば, やはり A^2 項が現れ, 超放射相転移は起こらないと否定された [53] .

³⁰3 準位原子系での提案を否定する研究は見当たらない . ただし, グラフェンでも 3 準位原子でも, A^2 項の存在や Thomas-Reiche-Kuhn 総和則に基づいた解析が行われ, Rzążewski らによる 1975 年の最初の指摘 [22] に対する反論となっている . 一方, 最小結合 Hamiltonian から導かれる no-go 定理 [23, 24] が信じられるとすれば, 電子準位に依存した解析の必要もなく, 超放射相転移は起こらないという結論が得られる .

主題は実のところ, 次節で解説する超伝導回路における超放射相転移であり, この最小結合 Hamiltonian で表される原子系に関する議論については, 興味のある読者に判断をお任せする .

さて, 一度下火になった議論が再燃したものの, いまだに熱平衡下の超放射相転移は観測されていない . その観測のために乗り越えなければならないのは, Rzążewski らの no-go 定理 [23, 24] である . 明快な抜け道は, 最小結合 Hamiltonian では記述されない物質系に注目することである . 上で紹介した超強結合を示す物質系のうち, 大半は最小結合 Hamiltonian で記述されるため (物質の電気双極子遷移による相互作用である), 相転移は期待できない . 可能性が残されているのは, スピンが絡んでくる磁性体 [42, 43] , もしくは Hamiltonian を設計できる超伝導回路 [39, 51] である . 磁性体における超放射相転移の有無については, 1978 年には問題が認識されているにも関わらず [31] , 不思議と解析が進んでいない . 一方, 超伝導回路については, 次節で述べるように, 2010 年から議論が始まった .

5 超放射相転移を示す超伝導回路

当初議論された電磁場と電荷との相互作用ではないにしろ, 超伝導回路中の電流を電磁場に見立てた際, 超放射相転移に相当する転移が熱平衡下で起こるかどうかが 2010 年頃から議論され始め, 2016 年には相転移が期待できる回路構造が提案された . 本節では, 超伝導回路に関するこれらの研究について解説する .

超伝導回路によって, 損失の少ないマイクロ波の導波路や共振器, Josephson 接合で構成される人工原子を実装することができ, 回路量子電磁力学 (circuit quantum electrodynamics) として近年盛んに研究されている . 通常の原子と比べて, マイクロ波と人工原子との相互作用を非常に強くできることが 2007 年に M. H. Devoret らによって指摘され [55] , 他の物質系が無数の原子で超強結合を実装しているのに対し, 超伝導回路では唯一, 単一の人工原子によって超強結合が実装されている [39, 51] . また, 超放射相転移では無数の (人工) 原子を必要とするが, 数千個の人工原子を作り込んだ試料が, 角柳孝輔らによって 2016 年に報告されている [56] .

超伝導回路における超放射相転移の有無については, 2010 年から議論が始まり, 2016 年に一定の理解が得られた [57–61] . Josephson 接合による人工原子には電荷量子ビット (charge qubit) や磁束量子ビット (flux qubit) など複数の種類があり, それらが示すエネルギー準位も回路設計や外部電圧, 外部磁束などによって比較的自由に制御できる [62] . 回路設計自体に多くの自由度がある

中で、当初、電荷量子ビットとマイクロ波とがキャパシタを通じて結合した（お互いの電荷揺らぎが相互作用する）系を想定して相転移の有無が議論され、1970 年代に行われた超放射相転移の議論と同様に、相転移が起こるという解析と起こらないという解析の両方が出された [57–60]。議論が混迷した原因は、Hamiltonian の導出法にある。Dicke Hamiltonian から出発して超放射相転移が提唱されたのと同様に、 $g \ll \omega_a, \omega_c$ において導出された Hamiltonian から出発して超放射相転移が起きると主張されたり [57]、真面目に導けば相転移しないと批判されたり [58]、高次の原子準位まで考慮すれば、やはり相転移は起こるという反論が出たりした [59]。通常の原子系の場合と同様に、超強結合領域や超放射相転移を議論する際には、まず議論したい回路を決定し、Kirchhoff の法則や回路素子における電圧・電流・磁束の関係を再現するように Lagrangian を書き出し、Legendre 変換して Hamiltonian を導くことが求められる。その処方箋は、電荷に基づく導出法 [63] が 1984 年に、磁束に基づく導出法 [64] が 1997 年に示されている。後者に基づいて標準的な回路図から真面目に Hamiltonian を導出し、少なくともその回路では超放射相転移が起きないと示されたのが 2016 年である [60]。

一方、私は猪股邦宏と中村泰信と共に、上記とは異なる別の回路ならば超放射相転移が起きると 2016 年に提唱した [61]。その回路図を図 4 に示す。インダクタンス L_R とキャパシタンス C_R からなる LC 回路が 1 つあり、Josephson 効果のエネルギースケール E_J とキャパシタンス C_J で特徴づけられる Josephson 接合が N 個ある（ $\times$ 印とキャパシタとして描かれる）。それらがインダクタンス L_g を通じて図のように並列に接続されている。また、磁束量子 $\Phi_0 = h/(2e)$ の半分 $\Phi_{\text{ext}} = \Phi_0/2$ の量を外部磁束として図のように 1 つのループに導入している。LC 回路で起こりうる超伝導電流の振動が、共振器中の光（電磁波）の振動に相当し、各 Josephson 接合が原子 1 つ 1 つに相当すると大雑把には理解して頂いて構わない³¹。ただし、相転移後に得られる状態は時間的に振動しない定常状態であり、 L_R と L_g また Josephson 接合を含む各ループを、右回りもしくは左回りに永続電流が流れる状態が熱平衡下で得られる。

この回路を流れる超伝導電流の代わりに、図 4 で矢印と共に示したように各素子における磁束 $\phi, \{\psi_j\}$ を定義し、その期待値を議論していく（例えば L_R を流れる電流は $I = \phi/L_R$ と表される）。磁束 ϕ もしくは $\{\psi_j\}$ が、

この回路での超放射相転移における秩序変数にあたる。磁束に基づく導出法 [64] によって、Hamiltonian は

$$\hat{H} = \frac{\hat{q}^2}{2C_R} + \frac{\hat{\phi}^2}{2L_R} + \sum_{j=1}^N \left[\frac{\hat{\rho}_j^2}{2C_J} + \frac{(\hat{\psi}_j - \hat{\phi})^2}{2L_g} + E_J \left(1 - \cos \frac{2\pi(\Phi_{\text{ext}} - \hat{\psi}_j)}{\Phi_0} \right) \right] \quad (7)$$

と導かれる。 $\hat{\phi}$ は LC 回路の L_R を貫く磁束、 $\hat{q}$ は C_R に蓄えられる電荷であり、これらが $[\hat{\phi}, \hat{q}] = i\hbar$ を満たす 1 組の正準変数である。式 (7) の第 1 項は LC 回路の電荷エネルギー、第 2 項は磁束エネルギーであり、式 (6) の最小結合 Hamiltonian の第 1, 2 項に相当する。一方、各 Josephson 接合に対しては、位相差 $2\pi(\Phi_{\text{ext}} - \hat{\psi}_j)/\Phi_0$ ($\hat{\psi}_j$ は位相差を磁束として換算したもの) と C_J に蓄えられる電荷 $\hat{\rho}_j$ が対となっており、 $[\hat{\psi}_j, \hat{\rho}_{j'}] = i\hbar\delta_{j,j'}$ を満たす。ここで、位相差を外部磁束 Φ_{ext} と共にこのように定義したのは、各 L_g を貫く磁束を $\hat{\psi}_j - \hat{\phi}$ と書くためであり、これは L_R と Josephson 接合 1 つを含む各ループにおいて磁束が量子化するように決定される³²。結局、式 (7) の第 3 項は Josephson 接合の電荷エネルギー、第 4 項は L_g における磁束エネルギー、最終項は Josephson 効果を表すポテンシャルエネルギー（Josephson 接合の実効的な磁束エネルギー）である。

式 (7) は図 4 から素直に導かれる Hamiltonian であり、回路における超伝導電流のマクロな振る舞いを議論するにあたって、特に致命的な近似を用いたつもりはない³³。この Hamiltonian ならば、熱平衡下で超放射相転移が起こるというのが我々の主張である [61]。第 3 節と同様に、厳密ではないが、古典的な解析つまり最小エネルギーを与える変数の期待値を解析することで、それを確かめる。まず、電荷エネルギーについては、 $q = \rho_j = 0$ において最小になることが分かる。肝心なのは磁束エネルギーであり、定数を見れば、

$$U(\phi, \{\psi_j\}) = \frac{\phi^2}{2L_R} + \sum_{j=1}^N \left[\frac{(\psi_j - \phi)^2}{2L_g} + E_J \cos \frac{2\pi\psi_j}{\Phi_0} \right] \quad (8)$$

が最小になる条件を解析すればよい。ここで、外部磁束が $\Phi_{\text{ext}} = \Phi_0/2$ であることから、最終項の符号は反転している。第 1 項が $\phi = 0$ にて下に凸で最小となるのに対

³² 各ループで $\hat{\phi} + (\hat{\psi}_j - \hat{\phi}) + (\Phi_{\text{ext}} - \hat{\psi}_j) - \Phi_{\text{ext}} = 0$ が満たされる。磁束の定義の任意性は、ユニタリ変換による Hamiltonian の任意性に対応し、計算される観測量や共鳴振動数自体は不変である。

³³ 具体的な回路を図 4 の回路図に落とし込んだ段階で近似したと言える。超伝導状態が安定しているという仮定の下で、回路図には抵抗を導入していない。エネルギー散逸が十分に小さいという仮定の下で、外界との接続も無視している（系を熱平衡状態にするための熱浴を暗に想定しているが、図 4 の回路図や式 (7) の Hamiltonian は単純に閉じた系を表している）。また、回路の 3 次元的な形状などを具体的には考慮せず、 C_R, L_R, L_g, C_J, E_J で特徴づけられる回路素子でモデル化している。

³¹ Dicke Hamiltonian と対応づけるには、式 (7) を電磁場、原子、それらの相互作用として分類する必要があるが、当然ながら任意性がある。本稿では対応付けはせず、磁束 $\phi, \{\psi_j\}$ が自発的に期待値を獲得することをもって、超放射相転移と呼ぶことにする。

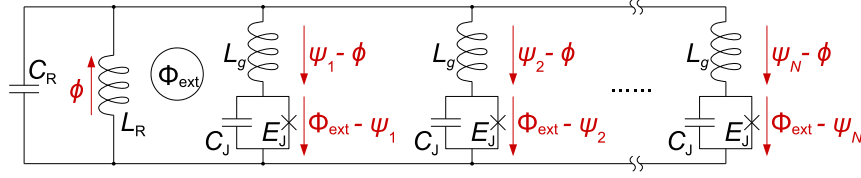


図 4: 超放射相転移が起こりうる回路図．インダクタンス L_R とキャパシタンス C_R からなる LC 回路 1 つと，Josephson 効果のエネルギー E_J とキャパシタンス C_J によって特徴づけられる N 個の Josephson 接合（×印とキャパシタとして描かれる）が，インダクタンス L_g を通じて並列に繋がっている．磁束量子 $\Phi_0 = h/(2e)$ の半分の量の外部磁束 $\Phi_{\text{ext}} = \Phi_0/2$ が 1 つのループを貫いている．矢印とその横に記した磁束 ϕ , $\{\psi_j\}$ は，この回路での超伝導電流の Hamiltonian [式 (7)] を導くためのものである．

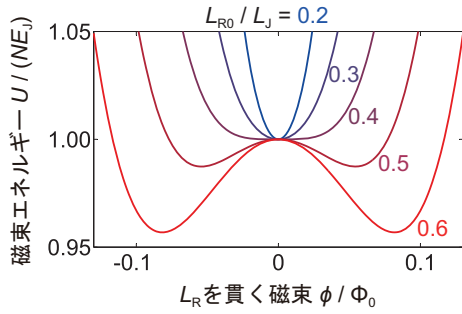


図 5: 図 4 の回路における磁束エネルギー U [式 (8)] の形状． $\partial U/\partial \phi = 0$ の条件下で $U/(NE_J)$ を ϕ/Φ_0 に対してプロットした．LC 回路のインダクタンスが Josephson 接合の数 N で $L_R = L_{R0}/N$ とスケールすれば，磁束エネルギーの最小点は L_{R0} , L_g , $L_J \equiv [\Phi_0/(2\pi)]^2/E_J$ の比で決定される． $L_g = 0.6L_J$ を固定して，いくつかの L_{R0}/L_J における磁束エネルギーを示した． $L_{R0} < L_J - L_g = 0.4L_J$ では $\phi = 0$ で磁束エネルギーが最小になるのに対し， $L_{R0} > 0.4L_J$ では最小点が $\phi = \pm\phi_0 \neq 0$ と 2 点になる．前者では L_R における磁束エネルギーが支配的なのに対し，後者では Josephson 効果のポテンシャルエネルギーが支配的となるためである． $\phi = \phi_0$ なら右回り， $\phi = -\phi_0$ なら左回りの永続電流が，図 4 の回路に流れる．

し，最終項は $\psi_j = 0$ において上に凸となる．また，第 2 項は $\phi = \psi_j$ において最小となり，できるだけ ϕ と ψ_j を等しくしようとする．このように，式 (6) の最小結合 Hamiltonian とは異なり，式 (7) の Hamiltonian では磁束エネルギーの競合が起こり，必ずしも $\phi = \psi_j = 0$ で最小となるわけではないことが分かる．

図 5 では，式 (8) の磁束エネルギー U を ϕ に対して， $\partial U/\partial \phi = 0$ から得られる $\psi_j = [1 + L_g/(NL_R)]\phi$ の条件下でプロットした．ここで，LC 回路のインダクタンスを $L_R = L_{R0}/N$ のように Josephson 接合の

数 N でスケールすることにし（第 2 節で述べたように超放射相転移では $N \rightarrow \infty$ の極限を考える）， N に依存しない $U/(NE_J)$ を縦軸に， ϕ/Φ_0 を横軸とした．Josephson エネルギーを特徴づけるインダクタンス $L_J \equiv [\Phi_0/(2\pi)]^2/E_J$ を新たに導入し， $L_g = 0.6L_J$ を固定して，いくつかの L_{R0}/L_J について $U/(NE_J)$ をプロットした． $L_{R0} < 0.4L_J$ では， $\phi = 0$ において U が最小となり，式 (8) の第 1 項である L_R における磁束エネルギーが支配的であることが分かる．一方， $L_{R0} = 0.4L_J$ になると， $\phi = 0$ において平坦な曲線となり，より大きくなると，第 3 項である Josephson 効果のポテンシャルエネルギーが支配的となり，2 つの最小点 $\phi = \pm\phi_0 \neq 0$ が得られる（ ϕ_0 は正の実数とする）．この振る舞いは，式 (8) を解析すれば明らかであり，3 つのインダクタンス L_{R0} , L_g , L_J の比で U の最小点が決定されることが分かる．すなわち，

$$NL_R = L_{R0} > L_J - L_g. \quad (9)$$

において U の最小点が $\phi = \pm\phi_0 \neq 0$ にて得られる（ $\psi_j = \pm(1 + L_g/L_{R0})\phi_0 \neq 0$ も得られる）．この解析はあくまでも古典的なものだが， $\phi = 0$ にて磁束エネルギー U が最小になる領域が通常相， $\phi = \pm\phi_0 \neq 0$ にて最小となる領域が超放射相と解釈する．超伝導電流としては， $\phi = \phi_0$ では右回りに， $\phi = -\phi_0$ では左回りに永続電流が図 4 の回路を流れることになる．

$N \rightarrow \infty$ の極限において超放射相転移が起こることを確かめるために，量子力学的な解析³⁴に基づいて相図を計算した結果が図 6 である．縦軸は温度 T であり，横軸を L_{R0}/L_J として，熱平衡下での $\phi_{\text{eq}} = \langle \hat{\phi} \rangle$ を Φ_0 で規格化して赤色でプロットした³⁵．計算で用いた回路のパラメータについては，図 6 の説明文に示す．太

³⁴実際には $N \rightarrow \infty$ の極限にて正当化される Boson 場 (ϕ, q) を古典的に扱う解析手法 [16, 17] を用いて，分配関数 $Z = e^{-\hat{H}/(k_B T)}$ から計算した [61]．

³⁵磁束は N に対して $\hat{\phi} \propto (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)/\sqrt{N}$ のようにスケールするため， ϕ_{eq} が図 3 の $\alpha_{\text{eq}}/\sqrt{N}$ に相当する [61]．

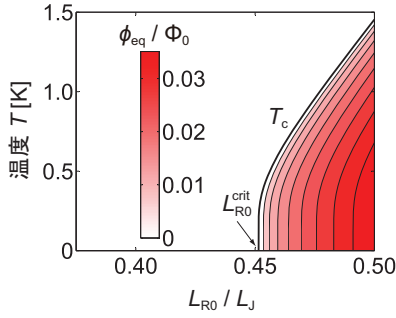


図 6: 図 4 の回路における超伝導電流の相図．LC 回路のインダクタンスとキャパシタンスをそれぞれ、 $L_R = L_{R0}/N$ と $C_R = NC_{R0}$ として Josephson 接合の数 N でスケールし、 $N \rightarrow \infty$ の極限での熱平衡下の磁束 $\phi_{eq} = \langle \hat{\phi} \rangle$ を磁束量子 Φ_0 で規格化して赤色でプロットした．縦軸は温度 T ，横軸は L_{R0}/L_J である ($L_J \equiv [\Phi_0/(2\pi)]^2/E_J$)．太線で記した臨界温度 T_c を境に $\phi_{eq} \neq 0$ の超放射相が得られる．計算に用いたパラメータ $L_J = 0.75$ nH, $L_g = 0.6L_J = 0.45$ nH, $C_J = 24$ fF, $C_{R0} = 2$ fF は、試料作製可能な領域内で、主に計算の都合によって決定した [61]．計算の詳細は文献 [61] を参照のこと．

線で示した臨界温度 T_c において $\phi_{eq} = 0$ の通常相から $\phi_{eq} \neq 0$ の超放射相に 2 次の相転移が起こる³⁶．臨界インダクタンス $L_{R0}^{crit} \approx 0.45L_J$ が式 (9) の古典的な条件 $L_J - L_g = 0.4L_J$ からずれるのは、Josephson 接合を流れる超伝導電流を量子力学に基づいて解析したためである． ϕ_{eq} 自体も図 5 で最小点を与える ϕ_0 からずれる．とはいえ、式 (9) の古典的な条件によって臨界インダクタンスを大雑把にせよ見積もることができ、先に述べた磁束エネルギーの競合の結果、 L_{R0} もしくは L_J を変化させた際に、量子相転移の意味での超放射相転移が起こる．もちろん、臨界温度 T_c において熱的な超放射相転移も起きる．図 6 に示した相図が、図 4 の回路で超放射相転移が起きると主張する主な根拠である．

そもそも、量子力学に基づけば、図 5 に示した磁束エネルギーの 2 つの最小点 $\phi = \pm\phi_0$ の重ね合わせ状態 (概念的に書くならば $|g\rangle = \frac{|\phi_0\rangle + |-\phi_0\rangle}{2}$)こそが、真の基底状態である．式 (7) の Hamiltonian は $\hat{\phi}$ と $\hat{\psi}_j$ に関する反転対称性があり、真の基底状態に対して、磁束の期待値は基本的に $\langle g|\hat{\phi}|g\rangle = \langle g|\hat{\psi}_j|g\rangle = 0$ となる．ただし、 $N \rightarrow \infty$ の極限では、図 5 に見られるエネルギー障壁が N に比例して無限大となるため、 $|\pm\phi_0\rangle$ とそれらの重ね合わせ状態 $\frac{|\phi_0\rangle + |-\phi_0\rangle}{2}$ とがエネルギー的に縮退する． $|\pm\phi_0\rangle$ は図 4 の回路を永続電流が右回り

に、 $|\pm\phi_0\rangle$ は左回りに流れる状態であり、それらの重ね合わせ状態よりも、古典的な状態である $|\pm\phi_0\rangle$ のほうがマクロな極限 $N \rightarrow \infty$ では実現されやすい．これらの状態が $\phi = \pm\phi_0$ および $\psi_j = \pm(1 + L_g/L_{R0})\phi_0$ を示す超放射相であり、磁束 (電流) が絶対零度また熱平衡下において $N \rightarrow \infty$ の極限で自発的に期待値を獲得する．つまり、式 (7) の Hamiltonian の反転対称性が自発的に破れる³⁷．

電磁場と荷電粒子からなる系では no-go 定理 [23, 24] が導かれたのに対し、図 4 の回路における超伝導電流ならば超放射相転移を示す．これらの違い、すなわち超放射相転移の有無は、これらの Hamiltonian における“電磁場”と“原子”とを結合させる項と系の非調和性を司る項とが同じ自由度で表されるか、それぞれ別の自由度で表されるかで決定される．式 (6) の最小結合 Hamiltonian では、結合項 (荷電粒子の運動エネルギー) が運動量 p_j で表されるのに対し、非調和項 (Coulomb エネルギー) は位置 r_j で表される．no-go 定理を導く際にはこの事実が肝心であり [23, 24, 32]、本稿で採用した古典解析 [31] においても、このお陰で $p_j = A(r) = 0$ がエネルギー最小点となり相転移が起きない．一方、式 (7) では、結合項 $(\psi_j - \phi)^2/(2L_g)$ と非調和項 $E_J \cos(2\pi\psi_j/\Phi_0)$ が共に Josephson 接合における有効磁束 ψ_j で表される．この場合、no-go 定理を導くことはできず [32]、古典解析においても、磁束エネルギーの競合の結果、図 5 に示したエネルギー最小点の転移が得られ、これが超放射相転移に相当する．あらゆる回路で相転移が起きるわけではなく、相転移が起きるように図 4 の回路を設計した．非調和性を示す Josephson エネルギーが有効磁束 ψ_j で表されることから、それを通じて Josephson 接合が LC 回路や導波路と結合する回路を設計し、磁束エネルギーの競合を起こせば、超放射相転移が得られる．no-go 定理に関する詳細については、原論文 [23, 24] もしくは文献 [32] に記載した概略を参照して頂きたい．後者ではまた、超放射相転移の有無について回路構造の分類も試みている．その他、式 (1) の Dicke Hamiltonian と式 (7) との対応関係については、文献 [61] を参照して頂きたい．

図 4 の回路において、少なくとも絶対零度 (基底状態) における量子相転移の意味での超放射相転移が起きることは、古典的なエネルギー最小点の解析からおおよそ分かるように、自明なことである．Josephson 接合が有限個の場合、回路を右回りに流れる永続電流 $|\pm\phi_0\rangle$ と左回りに流れる $|\mp\phi_0\rangle$ の重ね合わせ状態が基底状態になることは、近年では当然のように実装され

³⁶自由エネルギー $F = -k_B T \ln Z$ の温度に関する 2 階微分が不連続となる．

³⁷もしくは、光子と原子励起の総数の偶奇性が自発的に破れる [18, 19, 61]．

ている磁束量子ビット [65] から類推すれば、当然である。その重ね合わせ状態が、無限個の Josephson 接合の極限（古典的な極限）において破れ、右回りもしくは左回りの永続電流が流れるようになる。実際の実験では、Josephson 接合の不均一性によって有限個でも相転移的な振る舞いが得られると考えられる³⁸。永続電流が流れること自体は、回路に外部磁束 $\Phi_{\text{ext}} = \Phi_0/2$ をかけている以上、特に不思議ではない。むしろ、この当然の結果ということ、超放射相転移が起こると主張の妥当性の材料に使ったと言える。超放射相転移の研究では歴史的に、相転移が起こると計算結果の信頼性こそが議論の中心であった。相転移が起こると主張する穴のある解析と、起こらないと主張する穴を埋める解析が繰り返されてきた。その意味で、起こって当然の転移が超放射相転移として解釈できるという結果に一定の意味がある。とはいえ、既に解釈が示された以上、今後進めていくべき研究は以下の 2 通りと言える。1 つは当然、我々の主張が誤りであることを理論的に示すことである³⁹。もう 1 つは、主張された相転移の実証実験を進めつつ、次節で述べるように、固体における超放射相転移の探索や、非平衡統計力学への展開、量子情報技術への応用など、固体物理や物理学一般における意味合いを探っていくことである。

6 固体物理における 超放射相転移の価値

前節では、図 4 に示した超伝導回路であれば超放射相転移⁴⁰が起こりうることを解説した [61]。横波の電磁場と物質中の荷電粒子との相互作用による超放射相転移は、no-go 定理 [23, 24] によれば期待できないものの、超伝導電流を電磁場に見立てれば、それに相当する転移が熱平衡下で得られるという提案である。これ

まですべて非平衡下での量子相転移⁴¹は実証されていたものの [20]、no-go 定理の存在もあり、熱的な超放射相転移が実現可能かどうか不明確であった。もちろん、実証実験を行う必要があるものの、超伝導回路での提案は、正当な手順で Hamiltonian を導いたという意味で、no-go 定理に対する反例を信用できる形で初めて示したことになる。この超伝導回路における超放射相転移を、擬似的もしくは人工的なものと呼ぶことは自由である。ここでは、固体物理を含めた物理学また技術の発展に、この発見がどのように寄与するのか考察する。

今後の 1 つの研究の方向性として、超伝導回路などの人工的な系ではなく、本来の原子からなる固体における超放射相転移の有無を改めて議論することが考えられる。その際には、no-go 定理 [23, 24] によって否定される範囲の外を探索する必要がある。有力な候補として、1978 年に問題提起されているように [31]、スピンの絡む磁性体がある。no-go 定理が出発点とした最小結合 Hamiltonian で記述できない系であり、マグノンとマイクロ波とが超強結合することも 2014 年に報告されている [42, 43]。結果的に、既知の相転移が超放射相転移として解釈できるという考察になる場合もあるかと思うが⁴²、超強結合や超放射相転移の観点から、未知の相転移を発見できる可能性もある。その際、かつて山ノ井基臣らによって示されたように [47–49]、電磁波を共振器に閉じ込めることは必須ではない。また、相互作用する相手は電磁波でなくても、フォノンやプラズモンなど、他の Boson 場であっても理論的には同じであり（超伝導回路での提案 [61] では LC 回路中の電流を電磁場に見立てた）、新たな相転移の発見やその応用法の探索などが、今後の 1 つの研究の方向性として考えられる。

超放射相転移の振る舞い自体にも、研究の余地が多分に残されている。これまで、量子カオス [18, 19] やエンタングルメントエントロピー [33] の文脈で議論され

³⁸ 不均一性（乱雑性）があると、図 5 に示した磁束エネルギーの最小点のどちらか片方に偏りやすくなり、相転移的な振る舞いを示しやすくなると考えられる。私が調べた限りでは不均一性と原子数の関係は明確には示されていないようだが、少なくとも不均一性によって超放射相転移に必要な相互作用の強さ g の値が小さくなる（不均一性が相転移を促進する）ことは示されている [66, 67]。ただし、式 (1) の Dicke Hamiltonian に $(\epsilon_j/2)\hat{\sigma}_j^x$ など新たな項を通じた不均一性を導入すると（磁束量子ビットから構成される回路では $\hat{\sigma}_j^x = |0_j\rangle\langle 1_j| + |1_j\rangle\langle 0_j|$ に比例する項が現れたり [51]、 $\hat{\sigma}_j^z(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ に比例する相互作用項が現れたりする [39]）、超放射相転移が抑制される場合がある [68]。図 4 の回路において LC 回路のインダクタンスとキャパシタンスをそれぞれ $L_R = L_{R0}/N$ と $C_R = NC_{R0}$ と原子数 N でスケールする必要もあることから、具体的に Josephson 接合を何個実装すればよいのか、今後実証実験していくために検討していく必要がある。

³⁹ 本稿執筆時点で否定的な主張は私の耳に入っていない。

⁴⁰ 繰り返すが、光の放射は肝心ではなく、静電磁場が自発的に生じることが肝心であり、回路においては永続電流を静電磁場に見立てた。

⁴¹ 繰り返すが、Hamiltonian のパラメータ変化による転移を総じて量子相転移と呼んでいる。

⁴² 強誘電・強磁性相転移を超放射相転移と解釈できるのではというアイデアをよく耳にする。いまのところ成功例は聞こえてこないが、検討の余地はあるかと思う。図 2 のように、単純な強磁性相転移や秩序・無秩序型の強誘電相転移では、既にあるスピンの向きが揃う転移なのに対し、超放射相転移では原子自体はその基底状態や励起状態で分極を有しておらず、それらの重ね合わせ状態（コヒーレント状態）が形成されて電気分極、磁気分極、もしくは電流を獲得する。この意味で、超放射相転移はフェロイック相よりは、コヒーレント相と見なすべきであり、このような描像の相違を踏まえて、超放射相転移と強磁性・強誘電相転移との対応付けをすべきかと思う。また、強磁性・強誘電相転移と超放射相転移とを、例えば秩序変数の選び方によって区別可能かどうかなども不明であり、今後の課題として残されている。そもそも、超放射相転移は電磁場と各原子間の相互作用を起源としているが、電磁場を光学フォノンに置き換えることで、BaTiO₃ などでの変位型の強誘電相転移を超放射相転移として解釈できるかもしれない。対応付けが成功すれば、本節で述べている超放射相転移の今後の研究に強誘電体・強磁性体を利用していける。

てきた他、相互作用の強さ g などを時間的に変調させた際の（非平衡）量子相転移が 2012 年頃から議論されており [69]、時間的な変調によって臨界点が変わることが注目され、様々な解析が試みられている。また、不均一性によって相転移に必要な相互作用の強さ g が小さくなることが示されたり [66, 67]、単一原子であっても $\omega_a/\omega_c \rightarrow \infty$ の極限では $N \rightarrow \infty$ の極限と同様の相転移となることが理論的に示されたりしているが [70]、相転移に必要な原子数と不均一性やその他のパラメータとの関係など、未解明な点も多く残されている。その他、3 準位以上の原子や 2 光子で物質が遷移するモデルでの相転移や対称性の議論など、Dicke Hamiltonian の拡張版での相転移についても盛んに議論されている [71, 72]。また、単一原子の場合ですら、系の基底状態の解析解が得られたのはつい最近であり [73]⁴³、数理物理の問題としても注目を集めている。

超放射相転移を示す超伝導回路は、少なくとも、これらの解析結果を実証する際の 1 つの物質系として利用できる。冷却原子にレーザー光を照射した非平衡下での超放射相転移の実験 [20, 35] に比べ、熱平衡下でも相転移が起こる超伝導回路であれば、当然ながら熱的な相転移を検証することができ、量子相転移についても、非平衡下では難しかったパラメータ領域まで探索できる可能性がある。

そもそも、これら超放射相転移自体を理論解析することの 1 つの目標は、量子光学の研究で主に議論の対象となる励起状態だけでなく、基底状態や熱平衡状態にすら現れる電磁場と物質との量子もつれの理解を深めることにあると私は認識している。光と物質の超強結合領域において、電磁場と物質が量子力学的にもつれ合ったスクイーズド状態として基底状態が表現されることが超強結合の研究の初期から指摘されており [36, 74]、量子もつれの様子がエンタングルメントエントロピーを尺度として相転移の際に劇的に変化することが示されている [33]。一方で、本稿で解説した通り、超放射相は古典解析によって近似的に表現可能な状態であり、量子もつれと磁束密度や電流などマクロな物理量との間に何らかの関係性が隠れていると私は考えている。また、相転移や対称性、不均一性や熱や様々な極限との関係まで含めて理解を深めることで、熱やその他のノイズに対する量子力学的な状態（情報）の保護、電磁場や様々な物質系との間の量子情報の転写・制御技術の革新に繋がると考えている。

その他、超放射相転移の研究は、元々は非平衡ダイナミクスを議論してきた量子光学で扱われてきた系であることから、非平衡統計力学の発展に繋がると考えられる。Dicke Hamiltonian での解析と同様に [19]、超伝導回路での超放射相転移でも臨界指数などを解析するなど熱平衡下ですら解析すべき問題は残っているが、メーザー発振 [1, 2] やレーザー発振 [3] も含めた非平衡下の相転移的な現象 [20, 34] と、熱平衡下の相転移との移り変わりに、未知の物理現象が隠れている可能性がある。超放射相転移が起きる系では、反転分布を形成することで（外部から物質を励起するエネルギーを供給することで）、メーザー発振やレーザー発振を起こすことができる。熱平衡と非平衡との間で、相転移と発振現象がどのように移り変わっていくのか未だ十分に解析されていない。Dicke Hamiltonian も含め、相転移が起こりうる超伝導回路 [61] は非平衡統計力学の研究に対して、実験可能な物質系を新たに提供するものであり、未知の普遍性や物理現象が潜んでいる可能性がある。それだけでなく、熱・光・電流・磁性などが絡む未知の物理現象を発見できる可能性もあり、光や回路など応用技術が広く展開される物理系で見られる現象であることから、エネルギー変換技術など新たな技術革新も望めると考えている。

冒頭で述べたように、量子光学の研究分野では非平衡下での光と物質のダイナミクスが主に議論されてきた。熱平衡下で起こる超放射相転移は、そこに熱や相転移の概念を導入するものであり、既に静的な電磁場の期待値を有する基底状態もしくは熱平衡状態を出発点とした量子光学や量子情報技術など、研究すべきテーマが多く残されている。また、本節で述べたように、超放射相転移は幅広い分野に関係する物理現象であり、超放射相転移を示す新たな物質系の探索、熱平衡下での電磁場と物質の量子もつれ状態の解明と応用、非平衡統計力学、量子情報技術、エネルギー変換技術など、未知の物理の発見や技術革新に繋がっていく物理現象であると私は考えている。

謝辞

本稿を執筆するにあたり、浅野建一氏、Sahel Ashhab 氏、岩切秀一氏、小倉大典氏、加藤洋生氏、河野淳一郎氏、小林研介氏、白井達彦氏、関本謙氏、高三和晃氏、中村泰信氏、山ノ井基臣氏、渡邊光氏から助言を頂いた。この場を借りて感謝申し上げる。また、超伝導回路における超放射相転移の提唱 [61] は、猪股邦宏氏と中村泰信氏との共同研究である。この研究は、Pierre-Marie Billangeon 氏と吉原文樹氏との議論にも助けられ、科研費 (26287087, 26220601, 15K17731) および革新的研

⁴³ 式 (1) では相互作用項が回転項と呼ばれる $\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}$ と $\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}$ のみで書かれるが、最小結合 Hamiltonian から出発すると反回転項と呼ばれる $\hat{a} \hat{\sigma}$ と $\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}^\dagger$ も相互作用項に現れる。反回転項が存在する下で、単一原子からなる系の基底状態の解析解が得られたのが 2011 年である [73]。

究開発推進プログラム ImPACT より助成を受けた。

〔参考文献〕

- [1] J. P. Gordon, H. J. Zeiger, and C. H. Townes, *Molecular Microwave Oscillator and New Hyperfine Structure in the Microwave Spectrum of NH₃*, Phys. Rev. **95**, 282 (1954).
- [2] J. P. Gordon, H. J. Zeiger, and C. H. Townes, *The Maser – New Type of Microwave Amplifier, Frequency Standard, and Spectrometer*, Phys. Rev. **99**, 1264 (1955).
- [3] T. H. Maiman, *Stimulated Optical Radiation in Ruby*, Nature **187**, 493 (1960).
- [4] Y. Sun, P. Wen, Y. Yoon, G. Liu, M. Steger, L. N. Pfeiffer, K. West, D. W. Snoke, and K. A. Nelson, *Bose-Einstein Condensation of Long-Lifetime Polaritons in Thermal Equilibrium*, Phys. Rev. Lett. **118**, 016602 (2017).
- [5] J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymańska, R. André, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud, and L. S. Dang, *Bose-Einstein condensation of exciton polaritons*, Nature **443**, 409 (2006).
- [6] T. Byrnes, N. Y. Kim, and Y. Yamamoto, *Exciton-polariton condensates*, Nat. Phys. **10**, 803 (2014).
- [7] J. Klaers, J. Schmitt, F. Vewinger, and M. Weitz, *Bose-Einstein condensation of photons in an optical microcavity*, Nature **468**, 545 (2010).
- [8] J. Larson and E. K. Irish, *Some remarks on ‘superradiant’ phase transitions in light-matter systems*, J. Phys. A **50**, 174002 (2017).
- [9] K. Hepp and E. H. Lieb, *On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field: the Dicke maser model*, Ann. Phys. **76**, 360 (1973).
- [10] R. H. Dicke, *Coherence in Spontaneous Radiation Processes*, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
- [11] M. Gross and S. Haroche, *Superradiance: An essay on the theory of collective spontaneous emission*, Phys. Rep. **93**, 301 (1982).
- [12] K. Cong, Q. Zhang, Y. Wang, G. T. Noe, A. Belyanin, and J. Kono, *Dicke superradiance in solids*, J. Opt. Soc. Am. B **33**, C80 (2016).
- [13] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [14] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer-Verlag, Berlin, 2008), 2nd edition.
- [15] W. R. Mallory, *Solution of a Multiatom Radiation Model Using the Bargmann Realization of the Radiation Field*, Phys. Rev. **188**, 1976 (1969).
- [16] Y. K. Wang and F. T. Hioe, *Phase Transition in the Dicke Model of Superradiance*, Phys. Rev. A **7**, 831 (1973).
- [17] K. Hepp and E. H. Lieb, *Equilibrium Statistical Mechanics of Matter Interacting with the Quantized Radiation Field*, Phys. Rev. A **8**, 2517 (1973).
- [18] C. Emary and T. Brandes, *Quantum Chaos Triggered by Precursors of a Quantum Phase Transition: The Dicke Model*, Phys. Rev. Lett. **90**, 044101 (2003).
- [19] C. Emary and T. Brandes, *Chaos and the quantum phase transition in the Dicke model*, Phys. Rev. E **67**, 066203 (2003).
- [20] K. Baumann, C. Guerlin, F. Brennecke, and T. Esslinger, *Dicke quantum phase transition with a superfluid gas in an optical cavity*, Nature **464**, 1301 (2010).
- [21] R. J. Glauber, *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
- [22] K. Rzażewski, K. Wódkiewicz, and W. Żakowicz, *Phase Transitions, Two-Level Atoms, and the A² Term*, Phys. Rev. Lett. **35**, 432 (1975).
- [23] I. Bialynicki-Birula and K. Rzażewski, *No-go theorem concerning the superradiant phase transition in atomic systems*, Phys. Rev. A **19**, 301 (1979).
- [24] K. Gawędzki and K. Rzażewski, *No-go theorem for the superradiant phase transition without dipole approximation*, Phys. Rev. A **23**, 2134 (1981).
- [25] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics* (Wiley, New York, 1989).
- [26] J. Keeling, *Coulomb interactions, gauge invariance, and phase transitions of the Dicke model*, J. Phys.: Condens. Matter **19**, 295213 (2007).
- [27] A. Vukics, T. Grieder, and P. Domokos, *Elimination of the A-Square Problem from Cavity QED*, Phys. Rev. Lett. **112**, 073601 (2014).
- [28] M. Bamba and T. Ogawa, *Stability of polarizable materials against superradiant phase transition*, Phys. Rev. A **90**, 063825 (2014).
- [29] A. Vukics, T. Grieder, and P. Domokos, *Fundamental limitation of ultrastrong coupling between light and atoms*, Phys. Rev. A **92**, 043835 (2015).
- [30] T. Grieder, A. Vukics, and P. Domokos, *Depolarization shift of the superradiant phase transition*, Phys. Rev. A **94**, 033815 (2016).
- [31] J. M. Knight, Y. Aharonov, and G. T. C. Hsieh, *Are super-radiant phase transitions possible?*, Phys. Rev. A **17**, 1454 (1978).
- [32] M. Bamba and N. Imoto, *Circuit configurations which may or may not show superradiant phase transitions*, Phys. Rev. A **96**, 053857 (2017).
- [33] N. Lambert, C. Emary, and T. Brandes, *Entanglement and the Phase Transition in Single-Mode Superradiance*, Phys. Rev. Lett. **92**, 073602 (2004).
- [34] F. Dimer, B. Estienne, A. S. Parkins, and H. J. Carmichael, *Proposed realization of the Dicke-model quantum phase transition in an optical cavity QED system*, Phys. Rev. A **75**, 013804 (2007).
- [35] M. P. Baden, K. J. Arnold, A. L. Grimsmo, S. Parkins, and M. D. Barrett, *Realization of the Dicke Model Using Cavity-Assisted Raman Transitions*, Phys. Rev. Lett. **113**, 020408 (2014).

- [36] C. Ciuti, G. Bastard, and I. Carusotto, *Quantum vacuum properties of the intersubband cavity polariton field*, Phys. Rev. B **72**, 115303 (2005).
- [37] J. Casanova, G. Romero, I. Lizuain, J. J. García-Ripoll, and E. Solano, *Deep Strong Coupling Regime of the Jaynes-Cummings Model*, Phys. Rev. Lett. **105**, 263603 (2010).
- [38] G. Gunter, A. A. Anappara, J. Hees, A. Sell, G. Biasiol, L. Sorba, S. De Liberato, C. Ciuti, A. Tredicucci, A. Leitenstorfer, and R. Huber, *Sub-cycle switch-on of ultrastrong light-matter interaction*, Nature **458**, 178 (2009).
- [39] T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl, E. P. Menzel, F. Hocke, M. J. Schwarz, J. J. Garcia-Ripoll, D. Zueco, T. Hummer, E. Solano, A. Marx, and R. Gross, *Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime*, Nat. Phys. **6**, 772 (2010).
- [40] T. Schwartz, J. A. Hutchison, C. Genet, and T. W. Ebbesen, *Reversible Switching of Ultrastrong Light-Molecule Coupling*, Phys. Rev. Lett. **106**, 196405 (2011).
- [41] G. Scalari, C. Maissen, D. Turčinková, D. Hagenmüller, S. De Liberato, C. Ciuti, C. Reichl, D. Schuh, W. Wegscheider, M. Beck, and J. Faist, *Ultrastrong Coupling of the Cyclotron Transition of a 2D Electron Gas to a THz Metamaterial*, Science **335**, 1323 (2012).
- [42] X. Zhang, C.-L. Zou, L. Jiang, and H. X. Tang, *Strongly Coupled Magnons and Cavity Microwave Photons*, Phys. Rev. Lett. **113**, 156401 (2014).
- [43] M. Goryachev, W. G. Farr, D. L. Creedon, Y. Fan, M. Kostylev, and M. E. Tobar, *High-Cooperativity Cavity QED with Magnons at Microwave Frequencies*, Phys. Rev. Applied **2**, 054002 (2014).
- [44] J. George, T. Chervy, A. Shalabney, E. Devaux, H. Hiura, C. Genet, and T. W. Ebbesen, *Multiple Rabi Splittings under Ultrastrong Vibrational Coupling*, Phys. Rev. Lett. **117**, 153601 (2016).
- [45] W. L. Faust and C. H. Henry, *Mixing of Visible and Near-Resonance Infrared Light in GaP*, Phys. Rev. Lett. **17**, 1265 (1966).
- [46] A. Mooradian and G. B. Wright, *Observation of the Interaction of Plasmons with Longitudinal Optical Phonons in GaAs*, Phys. Rev. Lett. **16**, 999 (1966).
- [47] M. Yamanoi, *Influence of omitting the A^2 term in the conventional photon-matter-Hamiltonian on the photon-field equation*, Phys. Lett. A **58**, 437 (1976).
- [48] M. Yamanoi and M. Takatsuji, *Influence of omitting the P^2 term in the multipole photon-matter Hamiltonian on the stability and propagation*, in *Coherence and quantum optics IV: Proceedings of the Fourth Rochester Conference on Coherence and Quantum Optics, held at the University of Rochester*, edited by L. Mandel and E. Wolf (Plenum Press, New York, 1978), pp. 839–850.
- [49] M. Yamanoi, *On polariton instability and thermodynamic phase transition in a photon-matter system*, J. Phys. A **12**, 1591 (1979).
- [50] Q. Zhang, M. Lou, X. Li, J. L. Reno, W. Pan, J. D. Watson, M. J. Manfra, and J. Kono, *Collective non-perturbative coupling of 2D electrons with high-quality-factor terahertz cavity photons*, Nat. Phys. **12**, 1005 (2016).
- [51] F. Yoshihara, T. Fuse, S. Ashhab, K. Kakuyanagi, S. Saito, and K. Semba, *Superconducting qubit-oscillator circuit beyond the ultrastrong-coupling regime*, Nat. Phys. **13**, 44 (2017).
- [52] D. Hagenmüller and C. Ciuti, *Cavity QED of the Graphene Cyclotron Transition*, Phys. Rev. Lett. **109**, 267403 (2012).
- [53] L. Chirolli, M. Polini, V. Giovannetti, and A. H. MacDonald, *Drude Weight, Cyclotron Resonance, and the Dicke Model of Graphene Cavity QED*, Phys. Rev. Lett. **109**, 267404 (2012).
- [54] A. Baksic, P. Nataf, and C. Ciuti, *Superradiant phase transitions with three-level systems*, Phys. Rev. A **87**, 023813 (2013).
- [55] M. Devoret, S. Girvin, and R. Schoelkopf, *Circuit-QED: How strong can the coupling between a Josephson junction atom and a transmission line resonator be?*, Ann. Phys. (Leipzig) **16**, 767 (2007).
- [56] K. Kakuyanagi, Y. Matsuzaki, C. Déprez, H. Toida, K. Semba, H. Yamaguchi, W. J. Munro, and S. Saito, *Observation of Collective Coupling between an Engineered Ensemble of Macroscopic Artificial Atoms and a Superconducting Resonator*, Phys. Rev. Lett. **117**, 210503 (2016).
- [57] P. Nataf and C. Ciuti, *No-go theorem for superradiant quantum phase transitions in cavity QED and counter-example in circuit QED*, Nat. Commun. **1**, 72 (2010).
- [58] O. Viehmann, J. von Delft, and F. Marquardt, *Superradiant Phase Transitions and the Standard Description of Circuit QED*, Phys. Rev. Lett. **107**, 113602 (2011).
- [59] C. Ciuti and P. Nataf, *Comment on “Superradiant Phase Transitions and the Standard Description of Circuit QED”*, Phys. Rev. Lett. **109**, 179301 (2012).
- [60] T. Jaako, Z.-L. Xiang, J. J. Garcia-Ripoll, and P. Rabl, *Ultrastrong-coupling phenomena beyond the Dicke model*, Phys. Rev. A **94**, 033850 (2016).
- [61] M. Bamba, K. Inomata, and Y. Nakamura, *Superradiant Phase Transition in a Superconducting Circuit in Thermal Equilibrium*, Phys. Rev. Lett. **117**, 173601 (2016).
- [62] J. Clarke and F. K. Wilhelm, *Superconducting quantum bits*, Nature **453**, 1031 (2008).
- [63] B. Yurke and J. S. Denker, *Quantum network theory*, Phys. Rev. A **29**, 1419 (1984).
- [64] M. H. Devoret, *Quantum fluctuations in electrical circuits*, in *Quantum fluctuations, Les Houches LXIII, 1995*, edited by S. Reynaud, E. Giacobino, and J. Zinn-Justin (Elsevier, Amsterdam, 1997), Chap. 10, pp. 351–386.
- [65] C. H. van der Wal, A. C. J. ter Haar, F. K. Wilhelm, R. N. Schouten, C. J. P. M. Harmans, T. P. Orlando, S. Lloyd, and J. E. Mooij, *Quantum Superposition of Macroscopic Persistent-Current States*, Science **290**, 773 (2000).

- [66] P. Strack and S. Sachdev, *Dicke Quantum Spin Glass of Atoms and Photons*, Phys. Rev. Lett. **107**, 277202 (2011).
- [67] M. Buchhold, P. Strack, S. Sachdev, and S. Diehl, *Dicke-model quantum spin and photon glass in optical cavities: Nonequilibrium theory and experimental signatures*, Phys. Rev. A **87**, 063622 (2013).
- [68] S. Ashhab and K. Semba, *Superradiance phase transition in the presence of parameter fluctuations*, Phys. Rev. A **95**, 053833 (2017).
- [69] V. M. Bastidas, C. Emary, B. Regler, and T. Brandes, *Nonequilibrium Quantum Phase Transitions in the Dicke Model*, Phys. Rev. Lett. **108**, 043003 (2012).
- [70] M.-J. Hwang, R. Puebla, and M. B. Plenio, *Quantum Phase Transition and Universal Dynamics in the Rabi Model*, Phys. Rev. Lett. **115**, 180404 (2015).
- [71] A. Baksic and C. Ciuti, *Controlling Discrete and Continuous Symmetries in “Superradiant” Phase Transitions with Circuit QED Systems*, Phys. Rev. Lett. **112**, 173601 (2014).
- [72] L. Garbe, I. L. Egusquiza, E. Solano, C. Ciuti, T. Coudreau, P. Milman, and S. Felicetti, *Superradiant phase transition in the ultrastrong-coupling regime of the two-photon Dicke model*, Phys. Rev. A **95**, 053854 (2017).
- [73] D. Braak, *Integrability of the Rabi Model*, Phys. Rev. Lett. **107**, 100401 (2011).
- [74] S. Ashhab and F. Nori, *Qubit-oscillator systems in the ultrastrong-coupling regime and their potential for preparing nonclassical states*, Phys. Rev. A **81**, 042311 (2010).