Title	Gプログラム（文系）数学の講義構成に関して
Author(s)	森田, 健
Citation	大阪大学日本語日本文化教育センター授業研究. 2018, 16, p. 57-65
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/68139
rights	
Note	

Gプログラム（文系）数学の講義構成に関して

On the syllabus of mathematics in G program

森田　　健

【要旨】

本稿では、「海外在住私費外国人留学生特別入試予備教育プログラム（以下、Gプログラムと呼ぶ）」の文系数学のシラバスや、実際に講義をおこなった際の構成に関して述べる。いわゆる大学初年度向けの講義であれば、構成に関してはある程度確定していると言ってよい。一方、本学のＧプログラムは、次年度から大阪大学に入学することが決定している学生を対象としており、やや趣が異なる。そこで、

1．日本語で数学を扱うことができるようになることを第一目標とし、

2．大学入学後も、ある程度はギャップを感じずに学習が進められるように準備しておく

ことを視野に入れ、やや変則的な組み立てで講義をおこなった。開始間もないということもあり、未だGプログラムの文系に関しては明確なシラバスが定まっておらず、教員の判断に依存する部分が大きい。そこで本稿では、次年度以降の講義計画を効率的に立て、学生の数学に対するより深い理解を得ることを目的として、講義の構成の一例を紹介する。

1　講義の目標と形式

日本語で数学を扱うことができるようになること。特に、次年度に大学に入学することを念頭におき、日本の高等学校で学習する内容だけでなく、大学初年度に学習する内容まで、ある程度理解できるようになることを目標とする。

この目標と、次年度に経済学部などに入学することを踏まえ、以下のように講義の計画を立てた。

1．**前半**（10月～ 12月初旬）

（ａ）確率・統計の基礎

（ｂ）解析学の基礎１

2．**後半**（12月～２ 月末）

（ａ）線型代数の基礎

（ｂ）解析学の基礎２

第１回目の講義に関しては、１コマ目にプレースメントテストを実施し、２コマ目に微分積分学に関する講義を行なっている。ただし入り組んだ議論ではなく、用語の準備（特に数学特有の日本語表現など）が中心であった。上記の各項目で扱う内容は、具体的には次のようなものである。

1．**前半**
（ａ）確率・統計の基礎……順列・組み合わせ・確率・期待値
（ｂ）解析学の基礎１………主に極限・微分の定義と応用
2．**後半**
（ａ）線型代数の基礎………行列の演算と行列式の計算・連立方程式の解法
（ｂ）解析学の基礎２………積分法と種々の計算技法

後半で扱うものはいずれも大学初年度に半期、もしくは通年で扱うものであり、通常の大学の講義よりも若干早いペースとなっている。これは一見、数学に馴染みがないであろう文系の学生にとってはハードなように思われるが、この点に関しては、講義内容を『数学の大まかな流れ（方向性）を知る』ことに焦点を置くことで、計算の煩雑さを軽減することによって解消した。議論は主に杉浦（1980)、杉浦（1985）および斎藤（1966）のものを噛み砕いておこなった。これは見方に依れば数学特有の厳密さを欠いているとも考えられるが、次年度に大学に入学した際、全く新しい分野（すなわち解析学及び線型代数学）を学習し戸惑ってしまうというリスクを回避するためには、凡その理論展開の流れを知っておくことは有効と考え、上記の講義計画とした。

また、各講義の終了時に、毎回小テストを行なっている。これは数学力だけでなく、日本語の運用も視野に入れたものである。

2　講義構成と留意点

ここでは、具体的にどういった内容を扱ったのかを紹介する。半年間という講義期間の中で、中間試験・期末試験といった２回の試験が行われるので、その試験を区切りとして前半・後半に分けることとした。先ほども述べたように、大学入学後の進路を踏まえた上で、将来的に必要となるであろう能力の基礎となるようにカリキュラムを組み立てた。

2.1　講義構成

以下では、各分野について、より具体的な内容や進度を述べる。当該の講義は３限及び４限であり、それぞれ90分であった。当初は３限・４限を通して同じ分野を扱い、前半・後半で内容を切り替えるという方針を検討していた。しかし、同一分野を３時間扱い続けるというのは、数学を扱い慣れていない学生にとって大きな負担となってしまうことに配慮し、１コマ目と２コマ目で扱う内容を変えることとした。これにより、たとえ１コマ目が苦手な分野であったとしても、２コマ目で気分を変えられるのではないかと考えたためである。

前半　１コマ目（３限）……順列・組み合わせ・確率・期待値
1．集合・要素の個数
2．場合の数・順列
3．組み合わせ・二項定理とその応用
4．確率の定義といくつかの定理
5．色々な確率・期待値

前半　２コマ目（４限）……微分法とその応用

１．種々の函数の性質（数学Ⅲで扱うものを含む）
２．函数の極限
３．微分法の考え方
４．極値問題

後半　１コマ目（３限）……線型代数学入門

１．行列の定義と演算
２．行列と連立１次方程式
３．置換
４．行列式の定義と性質
５．サラスの公式とその応用
６．連立方程式の解法

後半　２コマ目（４限）……積分法と計算技法

１．不定積分の定義と計算
２．定積分の定義、不定積分との関係
３．置換積分法と具体例
４．部分積分法と具体例

以上の項目について、各１コマもしくは２コマを用いて扱った。特に、前半・後半ともに２コマ目に出てくる微分積分学では、数学Ⅲで出現する三角函数・指数函数・対数函数の微分や積分を扱っているので、未履修の学生にとってはハードルが高いことが予想された。そこで特に前半の『種々の函数の性質』の項目で、各函数について、グラフの描画を含めてじっくりと考察する時間を確保した。これらは一見、非常に基本的な行為に思われる。しかし、“既知の内容”が日本語でどのように扱われるのかを深く知っておくことは、未知の内容に触れた時に大きな助けとなるであろう点に鑑み、十分な時間を取るよう心がけた。

２．２　講義上の留意点

ここでは特に、数学用語を扱う中で留意した点について述べる。講義中に登場した用語については、日本語でどのように用いるのが適切であるか、といった言語面でのフォローもおこなっている。頻繁に登場する用語に関しては、くどいようではあるが、ほぼ毎回振り仮名をふっている。また、英語の方がニュアンスが伝わりやすいと感じた場合は、日本語に加える形で補助的に英語も用いた。この様な繰り返しの作業を行う理由には、日本語に慣れるという目的が含まれる。しかしそれ以上に、『問題を解決する上での、数学的な状況の正確な把握』に大きな影響を及ぼすという意味で重要なのである。

これは順列・組み合わせの分野において顕著に現れることが多い。例えば、単に“サイコロを２つ同時に投げる”のと、“大小のサイコロを同時に投げる”のでは、その後の計算が全く変わってきてしまうのである。このような日本語特有の微妙なニュアンスの違いで行き詰まらないようにする為の訓練の一貫として、やや手間のかかる作業ではあるが、必要不可欠である。

また、順列・組み合わせといった分野だけでなく、微分積分学や線型代数学においても、「何を証明したいのか、どのような手法を用いて証明をおこなうのか」を日本語でしっかり把握できることは大変重要である。その礎となる数学用語を身に付ける上でも、この確認作業は理に適っているであろう。

2．3　小テストに関して

各講義終了10分前に、当日扱った内容についての小テストを毎回おこなった。その際、講義で扱った内容よりも扱う数を小さくしたり、計算しやすい函数に置き換えるなどの配慮をしている。これは、その講義内における数学的アイデアを理解しているかどうかのチェックを目的としており、計算の重厚さに耐えることを目的としていないためである。なお、この小テストに関しては毎回回収し、採点を行なった後、次週に学生に返却するという形式をとった。また、不正解が多かった問題に関しては、その都度解説をおこなった。これにより出題者側としては、どういった点が弱いのか、理解の間違いが発生していないかを確認することができた。また、学生側としては採点された小テストとノートを見返すことによって理解を深め、中間・期末試験に対する対策を行うことができるという点でメリットがあると考えられる。

2．4　中間試験・期末試験とその結果に関して

ここでは、中間試験・期末試験に関して述べる。基本的には、講義で説明した議論と証明、そして小テストにおける計算問題を中心に出題している。また、それ以上に数学的な独創性が求められるような問題に関しては出題していない。学習内容が適切に反映されることが重要であると考えたためである。平均点は7割程度を予想していたが、実際に実施してみると、中間試験・期末試験ともに8割強という平均点であった。試験内容が特に簡単であったわけではないので、十分な数学力と日本語の運用能力が身に付いたのではないかと思われる。

3　各分野の内容

ここでは、実際に講義で扱った内容を2.1の講義構成に基づき、分野ごとにより詳細に述べる。微分積分学や線型代数学の基礎的な部分に関しては大学入学後も引き続き扱うため、用語の理解と運用に重点を置き、込み入った理論（例えば$\epsilon-\delta$論法や次元定理など）には深く立ち入っていない点に注意したい。

3．1　順列・組み合わせ・確率・期待値

第1回の講義では、集合に関する話題を扱った。特に和集合、共通部分、補集合、差集合や包含関係、集合に含まれる元の個数の計算などである。これらは後に確率の学習の上で必要になるので、ヴェン図を用いた考察方法も含めて解説と演習をおこなった。

第2回の講義では、場合の数に関する典型的な問題を扱った。与えられた数を並べ替えて整数を作る問題などである。これらの問題の解決の上で重要な役割を果たすのが、

- 樹形図を用いた手法
- 和の法則
- 積の法則

であり、場合の数の定義と共に、これらを組み合わせて問題を解決する手法を解説した。

第3回の講義では、第2回で扱いきれなかった場合の数の応用例と順列の問題を考察した。この中には、整数の約数の個数を数えるといったような、やや抽象度が上がった問題も含まれる。対象となった学生は理解していたが、学生によっては難易度の調整が必要であろう。また、順列の定義そのものの理解は十分になされたものの、階乗の記号$n!$に関しては慣れていない学生も多く、やや混乱が見受けられた。階乗の記号を用いて議論するか否かは本質的な問題ではないので、各自で使いやすいものを用いるという方針を採用した。更に、特殊な場合として円順列と数珠順列、重複順列に関しても具体例と共に解説をおこなった。特に円順列と数珠順列に関しては、裏返すことが可能かどうかという部分で計算結果が異なってしまう点について強調した。

第4回の講義では、組み合わせの定義と問題を扱った。この際、組み合わせを表す記号が国・地域によってかなりばらつきがあるため、記号の意味も含めて入念な確認が必要である。扱った問題としては、コイン投げに関するもの、正n角形の対角線の本数、平行線から構成される平行四辺形の個数や、与えられた条件件を満たす数の選び方に関するものである。

第5回の講義では、さらに踏み込んだ内容として、分配・組み分けに関する問題の注意点と、同じものを含む順列に関しての解説をおこなった。ここで注意すべき点は、組み分けを考えたグループの区別の有無であるから、数え上げる際に十分な注意が必要であることを述べた。また、同じものを含む順列は、計算そのものは単純であるが、問題設定自体が特殊なものが多い。結果としてその技法を用いることに気が付きにくい可能性が高いので、その点に留意すべきであることも合わせて解説した。

第6回の講義では、確率の定義と性質、典型的な問題を扱った。所謂、サイコロを投げた際に出た目に関する問題や、文字の並べ替えに関する問題である。これらの量を計算する時に、順列・組み合わせの考え方が必要になるので、前回までの復習を兼ねつつ解説をおこなった。

第7回の講義では、確率の加法定理、排反についての解説、期待値の定義と具体例を扱った。排反という概念は“同時に起こらない”ことを数学的に表現したものであるが、実際に問題を解く際には、設定によってはつい見落としがちになってしまう場合も多い。そこで、問題文の日本語にうっかり騙されないように注意が必要である点を強調した。期待値に関しては、統計学で用いるため、まずは一般的な定義を紹介し、サイコロを用いた具体的な問題を解くことで扱い方を説明した。

上記でおこなった問題の演習と解説は、いずれも日本語で表現された数学的な状況設定を、数式に読み替えて計算する上で重要と思われるものである。

3．2　微分学

第1回の講義では、いわゆる初等函数、特に多項式、三角函数に関しての用語を解説した。これらの用語には、単なる函数の名前だけでなく、定義域、値域といった集合や函数の合成、逆函数といった函数に対する操作も含まれている。また、三角函数を扱う上で周期函数の概念は極めて重要であるので、解説も合わせて行なっている。

第 2 回の講義では、前回扱った三角函数の性質に関して、合成を含めてより深く調べた上で、指数函数・対数函数を導入した。この辺りの函数の定義をどこまで知っているかは学生によって変わってくるので、確認が必要であろう。ここでは、いきなり数式を中心として扱ってしまうと混乱が生じる可能性があったので、グラフの描画を中心に解説をおこなった。このように必要な点の情報をプロットしたり、描画をおこなうことで考察する手法は、後に極値問題を扱う上で有用である。

第 3 回の講義では、極限の考え方を導入した。ここでは、小さい数 $h > 0$を用い、極限の定義に適用することで厳密さを重視した。これは、単純に“変数がある数に限りなく近づく”という『イメージに基づく議論』を脱却し、『論理に基づく議論』をおこなうための第一段階であるためである。また、一見発散してしまう場合の極限に関しても、因数分解をおこなうことで回避できる具体例の解説など、ややテクニカルな部分に関しても解説した。

第 4 回では、前回までに解説した極限を用いて、“平均変化率の極限”という形で微分係数の定義を与えた。その下で、多項式の微分をおこなうなどの具体例を考察した。この際、平均変化率と微分の関係の理解がやや伴っていないと思われる学生がいたので、補助的にグラフの描画を用いることで解説をおこなっている。

第 5 回では、前回に引き続き、導函数を求める練習をおこなった。また、三角函数の微分を考察する上でも重要な役割を果たす極限値：

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

についての証明を解説し、その応用例についても紹介した。

第 6 回の講義では、三角函数の微分、合成函数の微分法を扱った。いずれも数学Ⅲ以上で扱う内容であり、やや込み入ったものではあるが、学生が

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

の記号の運用に慣れていたこともあり、理解は比較的スムーズであったと思われる。また、指数函数の微分に関しても、グラフを用いた解説によって計算ができるようになったことが小テストで確認された。これにより、微分に関する知識・技能としてはかなりの部分がカバーされたことになる。

第 7 回の講義では、微分学の集大成として、極値問題を解説した。極値問題に関しては Howard（1990）に詳しいが、Fermat らによって様々な解法が考察され、Newtonによって導入された微分の考え方と、Leibnizによる記号を統合することで初めて統一的に理解され得る問題である。従って背景としては壮大なものであるが、これまでの道具を組み合わせることで解決できるということを説明した。更に、グラフの詳しい描画についても説明を追加した。

3．3　線型代数学

第 1 回の講義では、行列の定義とその演算を扱った。数の世界でおこなっている計算を、行列にまで拡張することが目標であるが、単純に成分同士の計算ができない（定義されない）場合もしばしば発生する。そのため（数の世界では気にする必要のなかった）、行列のサイズと

いった概念に気を配りながら計算する必要があることを説明した。同時に、成分に関する呼び方や転置行列といったような、行列固有の概念も定義した。

第２回の講義では、特に正方行列の中で重要な役割を果たすもの（単位行列、零行列など）について定義を与え、それらの性質を調べることを目標とした。また、前回定義した行列の積に関しては、一般に可換ではないことについて、再度注意喚起をおこなった。これらの性質は、数とは全く異なったものであり、十分な注意が必要だからである。

第３回では、行列と連立１次方程式の関係について考察することを目標とした。講義全体の目標としては、掃き出し法を用いた連立１次方程式の解法の理解が主体となるが、その準備として、係数行列や拡大係数行列を用いて連立方程式を表示することで、それらの取り扱いに慣れ親しんでおこうということである。このことにより、様々なサイズの行列と連立方程式の表示の間の関係が理解できるようになる。

第４回では、行列式を定義する上で必要不可欠な道具である『置換』を一般的に定義し、性質を詳しく述べた。具体的には、置換が巡回置換に分解可能であること、さらに巡回置換は互換に分解可能であることである。また、互換の形から定まる符号を定義することで、一般的な行列式の定義にまで到達した。ただし、これらは非常に抽象的かつ複雑な概念であり、取り扱いも含めて実用上の計算にはあまりそぐわない。したがって、計算上適切な手法は、次回に紹介することにした。

第５回の講義では、前回の講義で登場した行列式を、サイズを限定した２次、３次の場合で考察し、さらに計算しやすい公式（サラスの方法）を導入した。これはいわば特殊な場合に過ぎないのだが、実用上は大変よく用いられるものであり、一般の構造を理解した上での導入であるから、特に差し支えないであろうと判断した。実際、小テストの結果を見ていると、理解していることが伺えた。

第６回では、連立１次方程式の、行列を用いた解法を見据え、行列式の基本変形を導入した。これらの基本的な操作の繰り返しで連立１次方程式を解くことになるので、一般論の解説の後に、具体的な行列での練習を様々な場合でおこなった。更に、前回までに行列式の定義と性質を詳しく見ていることに基づき、列についての変形に関しても、基本的には行の場合と変わらないことも解説した。学生は実際に手を動かして計算したので、成り立つことはすぐに実感できたようであった。

第７回では、行列を用いた、連立１次方程式の解法（掃き出し法）を扱った。この中には以前定義を与えた係数行列や拡大係数行列を含め、様々な道具が登場する。解を求める中で、一体どのような空間の中で考えているのか、また、どういった構造を持っているか、といったことについて注意喚起しつつ解説した。ベクトル空間までは扱わなかったものの、ある程度は方程式を解く中で抽象空間に触れることが出来たと思われる。

３．４　積分学

第１回では、不定積分を扱った。とくに、以前の講義までで考察していた微分法の逆演算として積分を定義することで、計算がどのように進められるのかを解説した。この中には多項式だけではなく、数学Ⅲにおいて登場する三角函数、指数函数、対数函数の積分も含まれるため、計算上いくつか留意すべき点がある。これらの点に関して適切に計算する能力は、ある程度時

間をかけて訓練することが望ましいため、第 2 回の講義においても同様の計算練習を中心におこなった。

第 3 回では、定積分をやや厳密に定義した。つまり、“不定積分に単純に範囲が定まったもの”という認識ではなく、Riemann 和の極限として定義したという意味である。ただし、本格的に道具を準備してしまうと半年程度掛かってしまう可能性が高いので、面積に関連する部分の議論に関しては、グラフの描画による直感的な理解を採用した。さらに、第 4 回の講義で基本定理を扱うことで、微分との関連を明らかにし、定積分も不定積分と同様に扱って問題ないことを解説した。これにより、異なる背景から登場した 2 種類の積分が、技術的には同種の計算で扱われることが理解されたと思われる。

第 5 回では、積分の計算技術の 1 つとして、不定積分の置換積分法を扱った。これは合成函数の微分法を、積分を用いて表現したものである。まず、一般的な計算方法を証明と共に解説し、その後具体的な計算例を扱うこととした。この類の計算は、『どの部分を 1 つのカタマリと見做すか』といった点で若干の慣れが必要になるので、演習時間と解説に時間を多めに配分している。

第 6 回では、定積分の置換積分法を扱った。定積分の場合は、上端と下端の値を代入して計算する必要があり、さらに対応範囲も変化するので、情報量が多くなり煩雑になりがちである。そのため、前回の復習を行いながら、方向性を見失わないように適宜ヒントを出して計算を進めることにした。その結果、小テストでは全員理解しているようであった。ただし、符号など細かな部分で計算ミスが発生する可能性が高いため、練習の必要性は強調するべきだと思われる。

第 7 回の講義では、部分積分法を扱った。これは積の微分法を積分を用いて表現したものであり、導出も比較的容易である。講義では一般的な定理の証明ののち、具体的な計算練習をおこなうこととした。また、同時に定積分場合に関しても解説し、$\log x$ の積分といったような、ややトリッキーな例についても解説をおこなった。ただし、（三角函数）×（指数函数）といったような、漸化式を用いて考察するタイプのものについては難易度の都合もあり、扱っていない（これらは大学入学後に目にするはずである）。

4　おわりに

半年間という短い期間の中に、大学入学後に戸惑いを感じることなく学習が進められるだけの数学的語彙・能力を養うことを目標として計画を立てた。しかし実際に講義が始まるまでは、学生の持つ数学的素養が不明であるということと、カリキュラムをどのように組み立てれば効率良く数学と日本語を学ぶことができるのかがはっきりと分からなかったため、準備にはかなり気を使った。幸い、日本語の運用能力が高い上に話しやすい学生だったため、“どこまでの知識があるのか・どの部分が分からないか（苦手か）”を聞きながら、初期の段階で立てていた計画を再構成しつつ方向性を模索した。ただし、この講義形態（カリキュラム）で固定してしまうべきではないと考える。それは学生の出身国・地域によって学習したカリキュラムに大きなばらつきが存在するためである。例えば、著者が担当した学生は全員が微分・積分の知識は講義開始当初から持っていたが、国・地域によっては微分のみ学習していたり、微分積分の両方を学習していないということが頻繁に起こり得る。こういった場合には、本講義で著者が定めた目標にとらわれ過ぎず、扱う内容を細かく変更していくことが求められるであろう。本論文

で扱った内容は、一数学者が試行錯誤をおこなった結果に過ぎないが、留学生を教育する上で何らかの形で役に立てば幸いである。

参考文献

杉浦光夫（1980）『解析入門I』東京大学出版会

杉浦光夫（1985）『解析入門II』東京大学出版会

斎藤正彦（1966）『線型代数入門』東京大学出版会

Eves, Howard（1990）An Introduction to the History of Mathematics, Saunders

（もりた　たけし　本センター非常勤講師）