



Title	Weighted norm inequalities for multilinear Fourier multiplier operators
Author(s)	藤田, 真依
Citation	大阪大学, 2017, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/69252">https://doi.org/10.18910/69252</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## 論文内容の要旨

氏 名 ( 藤 田 真 依 )

論文題名

**Weighted norm inequalities for multilinear Fourier multiplier operators**  
(多重線形フーリエマルチプライヤー作用素に対する重み付きノルム不等式)

## 論文内容の要旨

本博士論文は、多重線形フーリエマルチプライヤー作用素に対する重み付きノルム不等式について、いくつかの結果をまとめたものである。

近年、調和解析の分野において多重線形作用素は非常によく研究されている。本論文では、多重線形フーリエマルチプライヤー作用素に対する考察が行われ、特に荷重付き有界性に関する四つの結果が述べられている。また、マルチプライヤーが持つ“滑らかさ”という指標と、荷重が持つ“可積分性”という指標の関係性についても考察が行われている。以下で、各結果について述べる。

- (1) 一つ目の結果は、線形の設定でのフーリエマルチプライヤー作用素の荷重付き有界性に関する結果

(Kurtz-Wheeden, 1979) を、多重線形での設定に拡張したものである。荷重なしの結果は、Hörmander によるマルチプライヤー定理 (1960) として非常によく知られている。これに荷重の条件を加味した Kurtz-Wheeden による結果では、マルチプライヤーが持つ“滑らかさ”と荷重が持つ“可積分性”の関係性について、次が考察される：マルチプライヤーの“滑らかさ”と荷重の“可積分性”のうち、どちらか一方が条件として強いときは、他方は条件として弱くしてもよい。しかし、マルチプライヤーの“滑らかさ”と荷重の“可積分性”に関する条件を、同時に弱めることは出来ない。

下記に述べる三番目の結果では、この考察を出発点とする。また、本結果では多重線形の設定に拡張する際、変数毎に滑らかさを測ることが出来るように、通常のスобоレフ空間ではなく積型スобоレフ空間が用いられている。これは、通常のスобоレフ空間を含むより広い空間である。この積型スобоレフ空間を用いたことは上記考察に関連する。

- (2) 二つ目は、上記一つ目の結果における可積分指数をより小さく改良したものである。この改良は、荷重付き有界性を考える場合には意味を持つ。
- (3) 三つ目の結果は、上記一つ目の結果で述べた考察、すなわち“マルチプライヤーの滑らかさと荷重の可積分指数の両者を、共によいクラス（条件として弱いクラス）からは、一般には取れない”ことを、多重線形の設定において、反例を構成することにより示したものである。
- (4) 四つ目は、上記一つ目の結果において、マルチプライヤーが持つ“滑らかさ”に対して“クリティカル”な場合を考えたものである。すなわち、結果1では、マルチプライヤーの“滑らかさ”  $s$  は、ユークリッド次元  $n$  に対して  $s > n/2$  が仮定されていたが、本結果では、 $s = n/2$  に対応する場合が扱われている。

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 ( 藤 田 真 依 )			
論文審査担当者	(職)		氏 名
	主 査	教 授	林 仲夫
	副 査	教 授	片山 聡一郎
	副 査	教 授	土居 伸一
	副 査	准教授	富田 直人

論文審査の結果の要旨

本論文は、多重線形フーリエマルチプライヤー作用素に対する重み付きノルム不等式を研究したものである。フーリエマルチプライヤー作用素は、偏微分方程式論においてはその解析の中で自然と現れる必要不可欠な道具であり、また、実函数論においてもそれ自身が研究対象となる興味深い作用素である。

マルチプライヤーの本質的有界性是对応する作用素の  $L^2$ -有界性を保証するが、 $L^p$ -有界性 ( $p \neq 2$ ) を保証する場合、一般にはマルチプライヤーに更なる条件が必要となる。L. Hörmander (1960) は  $L^p$ -有界性を保証するためのマルチプライヤーに課すべき滑らかさの条件をソボレフ空間を用いて与え、現在ではこの分野における基本定理として知られている。その後、D. Kurtz と R. Wheeden (1979) は、Hörmander の結果を重み付きノルム不等式に拡張した。

実函数論の分野では、2000 年頃から線形の理論を多重線形の理論へと拡張する研究がメインテーマの 1 つとなっている。N. Tomita (2010) は多重線形版の Hörmander の定理を与えた。そして、Kurtz-Wheeden が Hörmander の定理を重み付きノルム不等式の枠組みで考察したように、本論文では、Tomita の多重線形版の Hörmander の定理を、重み付きノルム不等式の枠組みで研究している。本論文で得られた多重線形フーリエマルチプライヤー作用素に対する重み付きノルム不等式に関する結果は、線形の場合から期待される自然なものである。そして、通常のソボレフ空間ではなく、積型のソボレフ空間を用いてマルチプライヤーの滑らかさを測ることにより、重みなしの場合であっても、本論文の結果はそれまでに知られていたものを改良するものである。また、マルチプライヤーの滑らかさの条件と重みの条件には相互関係があり、片方の条件を弱めた場合にはもう片方の条件を強める必要があることが議論されており、ある意味での得られた結果の妥当性も示されている。さらには、マルチプライヤーの滑らかさを、ソボレフ空間ではなく、ベゾフ空間を用いて測ることにより、よりシャープな結果を得ることに成功しており、この結果を重みなしの場合で眺めた場合には、Hörmander の定理の極限的な状況と理解でき興味深い。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。