| | |
|---|---|
| Title | 時間に関して二階のある非線形方程式 |
| Author(s) | 丸尾, 健二 |
| Citation | 大阪大学, 1986, 博士論文 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://hdl.handle.net/11094/694 |
| rights | |
| Note | |

【33】

| | |
|---|---|
| 氏名・（本籍） | 丸（まる） 尾（お） 健（けん） 二（じ） |
| 学位の種類 | 理 学 博 士 |
| 学位記番号 | 第 7158 号 |
| 学位授与の日付 | 昭和61年3月18日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第5条第2項該当 |
| 学位論文題目 | **時間に関して二階の　ある非線形方程式** |
| 論文審査委員 | （主査）<br>教 授 田辺 広城<br>（副査）<br>教 授 池田 信行　教 授 渡辺 毅 |

## 論 文 内 容 の 要 旨

Hを実Hilbert空間とする。Kを閉凸集合とし$I_K(\cdot)$をKの指示関数，$\partial I_K\cdot$を$I_K(\cdot)$の劣微分作用素とする。Aは正定値自己共役作用素とし，VはAの½－分数巾の領域でgraph normを入れた空間とする。この論文は次の非線形方程式を任意の区間〔0,T〕に於て考察し，解の存在と一意性について論ずる事を目的とする。

(1) $\dfrac{d^2u}{dt^2}+Au+\partial I_K u\ni f(\cdot,u)$, $u(0)=a$, $u'(0)=b$。

ここで，$a\in V\cap K$，$b\in H$で$f(t,\cdot)$はLipschitz連続で$\dfrac{d}{dt}f(t,\cdot)$は一次の増大度まで許す関数とする。

この種の問題はH. Brezisによって1971年次の方程式の解法が問題として提出された。

(2) $\dfrac{d^2u}{dt^2}+\partial\psi u\ni f$, $u(0)=a$, $u'(0)=b$。

ここで$\psi$はHから$R\cup\{\infty\}$への下半連続な凸関数で$\partial\psi$はその劣微分作用素である。M. Schatzmanは1978年Hが有限次元の時(2)の解は存在する事を示した。しかしHが任意のHilbert空間の時，(2)の解を見つける事は非常に困難な問題である。この為$\partial\psi=A+\partial I_K$の場合に於て即ち(1)の場合で考察する。(1)の方程式はKに捕捉された光の軌跡の方程式を含む故，古典的な解は望めない。関数$u\in C([0,T];K)\cap W^{1,\infty}(0,T;H)\cap$ Weak－$C([0,T];V)$がエネルギー不等式を満し，測度の意味で(1)の方程式を満足し，初期値$u(0)=a$，$b-\dfrac{d^+u}{dt}(0)\in\partial I_K a$を満すとき，(1)の解と呼ぶ。Hが可分でVのHへの埋め込み作用素がcompactでありKがHで内点を持てば(1)の解の存在が判る。しかしKの境界での反射

係数を決めていない為一意性はない。エネルギーを保存する即ち反射係数が1の (1)の解をenergy conserving solutionと呼ぶ。内点を持つKの境界がある滑らかさを持てばenergy conserving solution は存在する事が判る。しかしこの解も一意性が存在しない例がある。一意性を考慮の為 $\{t_i\}$-energy conserving solution と呼ぶenergy conserving solutionの集合の新しい部分集合を考える。この集合は概して言えば，$\{t_i\}$を$[0,T]$で稠密で可分な集合とし，順次 i に対して，(1)のenergy conserving solutionで時間 $t_i$ までに境界Kから受ける力の総和が最小となっている解の全体である。内点を持つKの境界が ある滑らかさを持つ時 $\{t_i\}$-energy conserving solution の存在と一意性を共に示す事ができる。

(1)の方程式の例。$H=L_2(0,1)$，$A=-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ (Dirichet Prob.)，$K=\{f\in L_2(0,1)$；$f$ の$L_1(0,1)$ normが1以下$\}$とする。この時Kは内点を持ち解の存在が示される。又$\{\varphi_j\}$をHのO.N.S.とし$K=\{f\in L_2(0,1);\sum_{j=1}^{\infty}(f,\varphi_j)^2\alpha_j\leqq 1,\ 0<\delta^{-1}\leqq\alpha_j\leqq\delta\}$と置くとKはHでの楕円（柱）になりその境界は滑らかである。故に$\{t_i\}$-energy conserving solution が一意に存在する事が判る。

## 論文の審査結果の要旨

本論文は時間変数に関し2階の非線形双曲型発展方程式，特に次の形の方程式の初期値問題

$$d^2u(t)/dt^2+Au(t)+\partial I_K u(t)\ni f(t,u(t)),$$

$$u(0)=a,\qquad (d/dt)u(0)=b$$

の可解性を研究したものである。ここにAはある実ヒルベルト空間Hの中の正定符号自己共役作用素，$\partial I_K$はHの凸閉集合Kの指示関数$I_K$の劣微分，$f(t,u)$は$[0,T]\times H$で定義され，uに関しリプシッツの条件を満足するHの値をとる関数である。Kには内点があり，その境界にはリプシッツ連続な単位法線ベクトルが存在することを仮定する。$u(t)$がKの内部にあれば$\partial I_K u(t)=0$であるから，方程式は，

$$d^2u(t)/dt^2+Au(t)=f(t,u(t))$$

となり，これは容易に解けるが，$u(t)$がKの境界に達すると反射が起るから，$d^2u(t)/dt^2$は測度としての意味しかなくなる。それは$\partial I_K u(t)$についても同様である。この様な事情を考慮して，先ず解の自然な定義を与えた。次いで$\partial I_K$をその吉田近似で置き換えた方程式の解として近似解を求め，そのある部分列が収束することを示すことによりエネルギー保存解の存在を示した。ここで注目すべきことは，収束する部分列の存在を示す際にHellyの選出定理を用いることが出来ることを見出した点であり，このため強い意味の収束が得られ，近似解のエネルギー等式から解のエネルギー等式が導かれることである。

解の一意性はHが有限次元であっても一般には成立しないことが知られている。丸尾君は反発力がある意味で最小のエネルギー保存解の一意性を示すことに成功した。

この論文は従来非常に困難とされていた上の問題に関し一般な結果を与えたものであり，条件を緩め

ることに今後の課題を残しているが，この問題の研究の発展に大きな光明をもたらした点は高く評価さるべきである。よって本論文は理学博士の学位論文として十分価値があると認める。