

Title	非比例繰返し負荷を受ける構造用鋼材の弾塑性構成式の高精度化に関する研究
Author(s)	靱井, 秀斗
Citation	大阪大学, 2018, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/69600
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

博士学位論文

非比例繰返し負荷を受ける構造用鋼材の
弾塑性構成式の高精度化に関する研究

梶 井 秀 斗

2017年12月

大阪大学大学院工学研究科

目次

1 章	序論	1
1.1	背景	1
1.2	既往の研究	5
1.2.1	鋼製橋脚の弾塑性解析	5
1.2.2	非比例繰返し負荷挙動の弾塑性解析	7
1.3	本研究の目的	8
1.4	本論文の構成	8
2 章	繰返し弾塑性構成式の定式化	10
2.1	緒言	10
2.2	古典弾塑性構成式	11
2.2.1	ひずみ速度の加算分解	11
2.2.2	弾性ひずみ速度と応力速度	12
2.2.3	塑性ひずみ速度	13
2.2.4	負荷基準	16
2.3	繰返し塑性弾塑性構成式	17
2.3.1	多面モデル	19
2.3.2	無数面モデル	20
2.3.3	二面モデルおよび単面モデル	20
2.3.4	非線形移動硬化モデル	21
2.4	拡張下負荷面モデル	22
2.4.1	連続性条件と滑らか条件	22
2.4.2	拡張下負荷面モデル	24
2.5	接線塑性構成式への拡張	38
2.5.1	接線塑性	38
2.5.2	接線塑性構成式の定式化	40
2.6	金属の弾塑性構成式の具体形	43
2.6.1	弾性構成式	43
2.6.2	塑性構成式	44

2.7	結言	46
3 章	接線塑性弾塑性構成式の有限要素ソルバへの実装	47
3.1	緒言	47
3.2	リターンマッピング	47
3.3	接線塑性弾塑性構成式への拡張	50
3.4	数値実験による実装手続きの妥当性確認	53
3.4.1	変位制御下の単軸負荷	54
3.4.2	荷重制御下の 2 軸比例負荷	56
3.4.3	変位制御下の 2 軸 2 段階負荷	57
3.5	結言	62
4 章	水平 1 軸の繰返し負荷を受ける鋼製橋脚の弾塑性解析	64
4.1	緒言	64
4.2	参照する実験結果	65
4.3	有限要素モデル, 境界条件および材料定数同定	69
4.3.1	有限要素モデルと境界条件	69
4.3.2	材料定数の同定	70
4.4	解析結果の実験結果の比較と考察	74
4.4.1	円形断面橋脚	74
4.4.2	矩形断面橋脚	81
4.5	結言	86
5 章	水平 2 軸の繰返し負荷を受ける鋼製橋脚の弾塑性解析	88
5.1	緒言	88
5.2	有限要素モデルと境界条件	88
5.2.1	有限要素モデル	88
5.2.2	境界条件	89
5.3	解析結果と考察	91
5.3.1	柱頭部の荷重-変位応答	91
5.3.2	橋脚基部の局所変形	100
5.3.3	吸収エネルギー	105
5.4	結言	112

5.5	Appendix	112
6 章	降伏応力以下の繰返し非比例負荷を受ける金属材料の軟化挙動解析	117
6.1	緒言	117
6.2	非比例繰返し負荷による金属材料の軟化現象	119
6.3	金属の材料関数と材料特性	120
6.4	有限要素モデルと境界条件	121
6.5	解析結果と考察	124
6.6	接線非弾性係数の拡張	124
6.7	応力振幅の影響	129
6.8	材料パラメータの影響	131
6.9	結言	133
7 章	総括	134
	参考文献	137
	謝辞	144

1章 序論

1.1 背景

構造物の安全性・信頼性を保証した力学設計を行うには、繰返し荷重を受ける構造物の非弾性応答、とりわけ大変形状態における力学的応答を、最大耐力以降から崩壊に至るまでを含めて精緻に分析し、把握しておくことが重要である。設計対象構造物に想定される外力が単調で静的あるいは準静的であり、その上限も設定できるような問題であれば、構造物の力学的応答として把握すべきは最大耐力に至るまでの過程と最大耐力であると言えよう。それは最大耐力よりも大きな荷重が作用し続けるのであれば、最大耐力以降の構造物の振る舞いがどのようなものであれ、いずれ崩壊に至るからである。しかしながら、我が国では荷重源として 1995 年の兵庫県南部地震、2011 年の東北地方太平洋沖地震や近い将来その発生や上陸の増加が予想される猛烈な台風などの自然発生の過酷な動的な外乱を想定した設計が求められる。事実、兵庫県南部地震では橋梁構造物も甚大な被害が発生し、RC 構造物に比べ靱性が高いとされる鋼製橋脚にも様々な損傷が見られた。観察された損傷の中には材料固有の靱性に強く支配されたものも多数見られるが、地震動による繰返し負荷で部材が大きなひずみを受ける、あるいは局部座屈を起こし、それを主要因とした部材のき裂や破断も観察された。さらにこの局所座屈がそれだけにとどまらず、地震動の繰返し負荷により構造物全体の座屈へと進展し構造体としての耐力を失った現象に多くの研究者・技術者が注目し、これまでに被災過程を模擬した多数の実験や数値シミュレーションによる研究がなされてきた。それらは土木学会がインターネット上に掲載する「阪神・淡路大震災 10 年デジタルアーカイブ」として一般に閲覧可能である。またこれらの研究と平行する形で、翌 1996 年 12 月に道路橋示方書・同解説書 V.耐震設計編における耐震基準・指針の改訂が行われ性能規定型耐震設計法が土木学会より提唱された。性能規定型設計は、設計で想定する地震動に構造物が遭遇した場合に地震中および地震後に構造物が保有すべき性能（機能）をあらかじめ定め、この性能を満足するように、構造物の損傷程度や残留変形を許容される範囲に収めるようにするものである（濱田，2002）。すなわち、この性能規定型耐震設計は、設計者に対して構造物の塑性領域における大変形挙動から破壊に至るまでの塑性変形過程を定量的に評価することを要求する。

延性を有する材料の構造物に大きな塑性変形が生じると、幾何学的な形状変化により構造物全体の剛性が低下する。また構成材料の内部にもその微視的構造に、瞬間的剛性の低

下に繋がるような変化が生じる。その結果として塑性不安定と称される種々の形態の不安定挙動が現れる。前者が支配的な場合、幾何学的不安定 (**geometrical instability**)、後者が支配的な場合、材料的不安定 (**material instability**) と呼ばれる (**Rice, 1976**)。塑性不安定の発生段階では部材に新たなひずみ勾配が生じ徐々に変形の不均一性が強くなり、部材全体には緩やかにくびれが生じる。これを拡散くびれと呼び、前述の幾何学不安定に対応する。さらに変形が進行すると部材内部における変形の一様性が崩れ、ある一部分の応力が低下して弾性除荷を生じる。この除荷域はその後急速に拡大していき、結果として部材の非常に狭い領域に塑性変形が集中することになる。このような現象は塑性ひずみ局所化現象と呼ばれ (**北川, 1982**)、この時生じる局所的なくびれを局所くびれという。室温付近における金属材料では、変形の局所化が発生すると直ちに局所くびれが非常に狭い領域に集中し、局所くびれモードがそのまま破断モードとなることが知られている。すなわち、局所くびれは破断に直結する重要な因子であり、その予測は極めて重要である。

さて、昨今の計算機能力の著しい発展に伴い、研究機関のみならず、企業における研究・開発・設計の各現場で、有限要素法などに代表される数値シミュレーションが多く用いられ、実験を補間するあるいはそれにとって代わる役割を果たしてきたことは論を俟たない。前述のような構造問題に対する数値解析では有限要素法を用いたものが多くを占め、有限要素解析で得られる解の精度は、一般に下記の全部あるいはいずれかまたはその組み合わせの適否に依存する。

1. 解析対象のモデル化範囲 (有限要素メッシュの作成範囲)
2. 有限要素の選択 (要素形状, 要素次数・積分方法などの要素定式化)
3. 現象論的構成式, 構成モデルの選択 (構造材料の力学的特性を記述する方程式)
4. 境界条件の選択 (力学的境界条件, 幾何学的境界条件, それらの初期条件)
5. 数値解法, 数値処理 (行列解法, 時間積分法)

中でも、対象とする現象が塑性変形等を含む材料非線形性が強い問題の場合、現象の落とし込み (モデル化) 精度という点では、材料の非弾性変形挙動を表現する構成式の選択は支配的な因子である。このため、非弾性構成式の開発に対する要請が高まり、計算機能力の発展と相まって、その研究が盛んに行われ、その結果、**1960** 年代から **80** 年代半ばにかけて基本的な定式化こそ確立された。しかしながら、より現実的な構成式という観点からは未解決の課題も多く、今なお精力的な研究が行われている (**只野, 2004**)。その代表的な課題の一つとして、局所くびれが発生するほどの大きなひずみを受ける材料の非弾性挙動を高精度に表現可能な非弾性構成式の高度化が挙げられる。

他方、局所くびれを生ずるほどの大きなひずみを受けないまでも、降伏応力付近の繰返し負荷を受ける材料の破壊挙動は、一般に“低(もしくは極低)サイクル疲労”として知られ、各種構造物の力学設計において重要な検討項目の一つである。この低サイクル疲労試験中に観測される塑性ひずみ振幅($\Delta\varepsilon^p$)と破断寿命(N)との相関は高く、いわゆる **Manson-Coffin** 則が成立すると言われている。さらに繰返し負荷の応力あるいはひずみレベルを小さくした“高サイクル疲労”試験では、材料の応力-ひずみ関係では明確な塑性変形の発生は確認されない、いわゆる巨視的弾性応答を示し破断に至る。しかしながら、破断に至るまでの過程の応力-ひずみ関係を詳細に観察すると、固執すべり帯など、微視的すべりに基づく塑性変形が発現することが、主に面心立方体を用いた実験により明らかにされている(Suresh, 1998)。さらに繰返し数を増加させると、固執すべり帯周辺で成長した塑性すべりを起点に、突き出し・入り込みを呈しながらき裂の発生を伴って最終的に疲労破壊に至ることが観察され、固執すべり帯の発生応力と疲労限との関係を指摘する研究も報告されている。また体心立方体の鋼材についても研究が進められ、巨視的弾性条件化での一定繰返し荷重に伴って突如として塑性ひずみが発生する、いわゆる繰返し軟化現象が生じることが実験的に確認されている(Ni and Wang, 2001; 堤ら, 2007)。

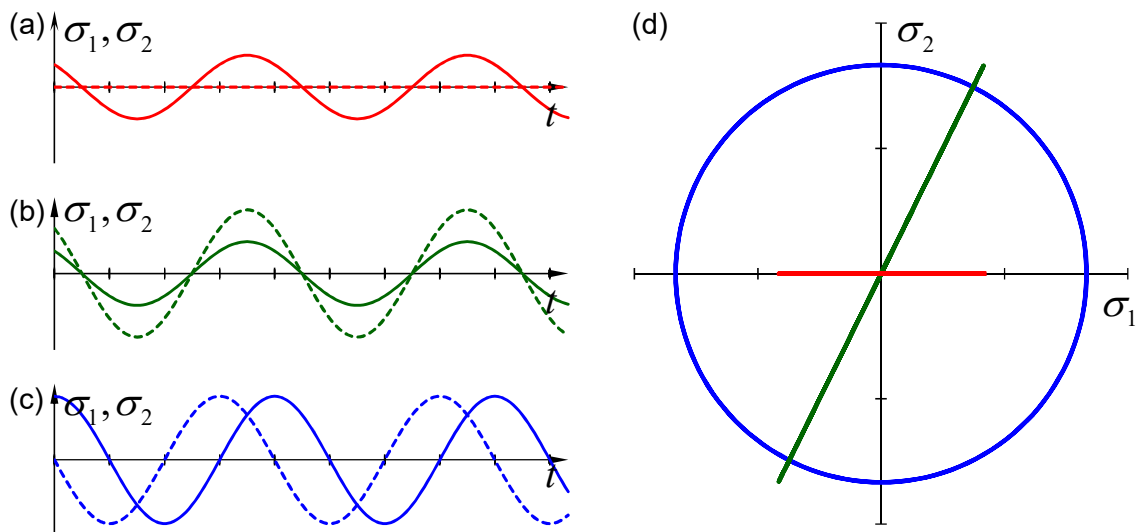


Fig. 1-1 Schematic representation of proportional loading and non-proportional loading; (a) proportional uniaxial cyclic loading in time domain, (b) proportional biaxial cyclic loading in time domain, (c) non-proportional biaxial cyclic loading in time domain and (d) three paths in stress space.

ところで、社会基盤構造物ならびに機械構造物がその実稼働中に曝される状況では、材料が受ける負荷経路は、Fig. 1-1 に模式的に示すように、応力(あるいはひずみ)の成分間に位相差を持ち、さらにそれが時々刻々変化する、いわゆる非比例繰返し負荷(non-proportional loading)状態であることが一般的で、むしろ各種要素試験で一般的な比例負荷(proportional loading)状況下におかれる実用構造物は少ない。このような非比例繰返し負荷下の種々の鋼材に対する疲労寿命の研究は、低サイクル疲労に関連した研究が多数ではあるが既に実験的に実施されており(e.g. 新田ら, 1987; Doong et al., 1990,1991; Itoh et al.,1995; Socie et al., 2000; Reis et al., 2009), 単軸あるいは2軸の比例負荷下における疲労寿命に比べて非比例負荷下のそれは著しく低下することが指摘されている。実在金属材料が降伏応力以下の非比例繰返し負荷を受けた場合に、繰返し軟化現象が生じるか否かは実験的観察を待たねばならないが、比例負荷に比べ疲労寿命が著しく低下する事実に基づけば、非比例繰返し負荷によっても同様の繰返し軟化現象が生じることが推察されよう。

このような巨視的弾性域での繰返し負荷に伴う固執すべり帯などの微視的すべり・塑性変形の発生・成長は、疲労破壊のメカニズムと密接に関係しているため、疲労破壊過程のメカニズムを解明しつつ、それを適切にモデル化することは、各種構造物の疲労設計や予寿命評価に有益である(Toyosada et al., 2004; 豊貞と丹羽, 2001)。さらにこの現象を表現可能な繰返し弾塑性構成式が開発されれば、それを有限要素法などに実装することで、構造物のとしては巨視的弾性応答の繰返し応答解析から、繰返し数の増加に伴う塑性変形の発達、成長シミュレーションが可能になり、疲労力学設計にとって有益な情報が得られることが期待できる。したがって、当該現象を高精度に表現可能な非弾性構成式の開発も重要な課題として位置づけられる。

このように、本論文の内容は構造物の実稼働下の非弾性挙動、とりわけ非比例繰返し負荷を受ける金属材料の低ひずみ域から大ひずみ域における変形挙動、を高度に表現可能な弾塑性構成式の確立に主眼を置いている。以下にこれまでの内容について取り組まれた既往の研究について概説し本研究の目的を明確にする。

1.2 既往の研究

1.2.1 鋼製橋脚の弾塑性解析

1995年1月に発生した兵庫県南部地震の震災以来、鋼製橋脚の耐震性に関する実験的・数値解析研究が多数行われてきた(e.g. Nishikawa et al., 1998; 安波ら, 1996; 王ら, 1997; 葛ら, 1997; 後藤ら, 1998; Ucak and Tsopelas, 2012,2014). 数値解析的研究では主に汎用非線形ソルバーが用いられたものが多いが、鋼製橋脚柱基部の座屈発生から終局状態に至るまでの大変形・大ひずみ領域を対象にしていることや漸増繰返し負荷を対象とした問題であることから、採用する弾塑性構成式や硬化関数も種々のものが用いられた。葛ら(1997)は修正2曲面モデルと称する弾塑性モデルを、王ら(1997)、後藤ら(1997)は3曲面モデルと称する弾塑性モデルを用いて、鋼製橋脚の非線形有限変位解析を実施している。これらの弾塑性モデルはいずれも Dafalias and Popov (1975)の2曲面モデルを基に拡張された弾塑性構成モデルである。また Ucak and Tsopelas (2012,2014)は Armstrong and Frederick (1966)の非線形移動硬化モデルを基に塑性ひずみ空間における記憶曲面(Chaboche et al., 1979; Ohno, 1982; McDowell, 1985ab)を導入した弾塑性モデルで解析を行っている。いずれの解析結果も最大荷重や局部座屈の様子また座屈後の大変形挙動

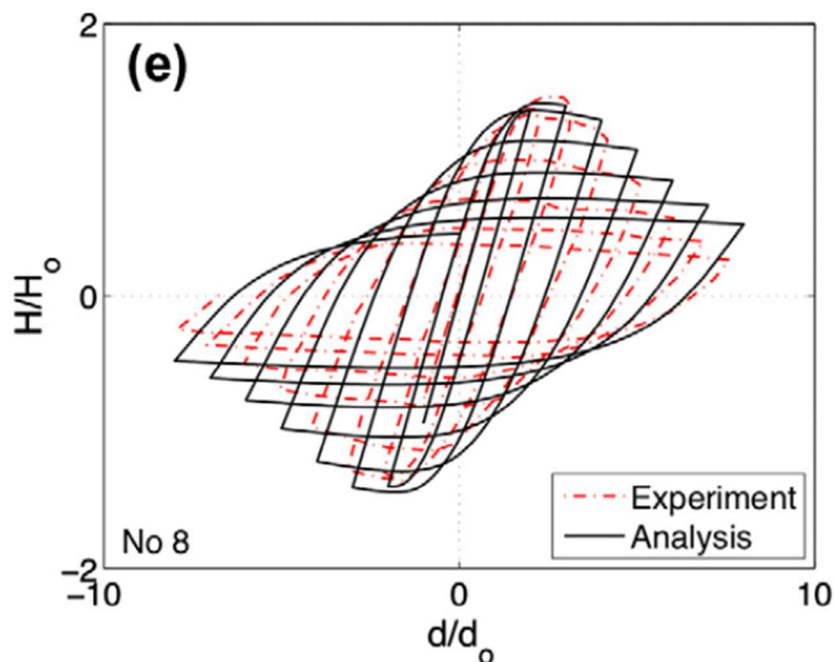


Fig. 1-2 Experiment vs. FEM analysis result at loading point of steel pier with circular cross section (Fig.7 (e) in Ucak and Tsopelas, 2012).

は巨視的によく捉えられていることが報告されている。しかしながら、例えば Fig. 1-2 に示すように鋼製橋脚の終局状態に至るまでの変位－反力特性は十分な精度で一致しているとはいえない。

この原因の一つとして、これらの研究で採用している弾塑性構成モデルの数学的構造に起因していることが考えられる。上述の弾塑性構成モデルのいずれも、関連流れ則を採用しており、この仮定に基づけば、降伏面あるいは塑性ポテンシャル面は常に滑らかで、塑性ひずみ速度方向は降伏面外向き法線方向に従うとする法線則が成立している。ところで、座屈変形が卓越する橋脚基部などは最終的に数十パーセントから百パーセント近いひずみを受けることが知られている。このような大きなひずみレベルでは前節に示した通り、材料の一部に塑性変形が集中し局所くびれが観察される材料的不安定になることが知られている。この局所くびれが発達する段階においては、巨視的には比例負荷状態であるとしても、くびれ近傍の材料の負荷経路は比例負荷経路から大きく逸脱し非比例負荷経路になることが知られており、通常の流れ則を用いた弾塑性構成式では適切に材料挙動を表現し得ないことが指摘されている(Christoffersen and Hutchinson, 1979; Tvergaard et al., 1981; 北川,1982; Gotoh, 1985abc)。Christoffersen and Hutchinson (1979)と Gotoh (1985abc)はそれぞれ非比例負荷に適用できる弾塑性構成式を提案し、降伏面の負荷点近傍に尖り点を形成することで非比例負荷にも適用可能な弾塑性モデルへ拡張した。これらの弾塑性構成式は降伏面の尖り点を表現可能なため、塑性ひずみ速度方向が応力速度方向にも依存し、通常の流れ則で規定される降伏面法線方向の塑性ひずみ速度に加え、降伏面接線方向の非弾性ひずみ速度を生じる。このような尖り点を有する弾塑性構成式は現象論的コーナー論と称され、尖り点の存在は塑性流動に対してより多くの自由度を与えるため、通常の流れ則に比べ柔らかい応答を示す。

このような降伏面接線方向の応力速度成分による接線方向の塑性ひずみ速度を表現可能な弾塑性構成式は、応力と塑性ひずみ速度の主軸方向が一致しないことから、非共軸の弾塑性構成式とも言われる。非共軸の弾塑性構成式は、上述の現象論的コーナー論の他、複数の降伏面の交差モデル(Batdorf and Budiansky, 1949; Koiter, 1953; Mandel, 1965; Hill, 1966)、歪塑性モデル(Mroz, 1966; Dafalias and Popov, 1977; Hill, 1959; Simo, 1987; Kuroda and Tvergaard, 2001abc)、 J_2 変形理論(Budiansky, 1959, Rudnicki and Rice, 1975)、接線塑性 (Hashiguchi, 1993,1998,2005; Hashiguchi and Tsutsumi, 2001,2003; Tsutsumi and Hashiguchi, 2005)などがある。

これらの非共軸弾塑性構成式は、塑性ひずみの局所化現象を定性的に表現し得るため、特に塑性加工の分野で適用事例が多く、塑性加工限界の評価(例えば成形限界線図; **Forming Limit Diagram**), 製品欠陥の予知や対策検討に多くの成果を積み重ねてきている(北川, 1982). しかしながら、これらの研究の多くは平面応力あるいは平面ひずみ条件を対象としたもの、あるいは理論解析によりその重要性を示した事例が多く、本研究で対象とするような大変位・大ひずみを受ける複雑形状を有する鋼製橋脚といった社会基盤構造物の非弾性応答構造解析、特に構造物の終局状態に至るまでの応答を、これらのような非共軸弾塑性構成式を用いてその適用性・有用性を検討した研究は著者の知る限り報告されていない。したがって、塑性ひずみ局所化現象といった非比例負荷下の材料挙動を表現可能な非共軸の弾塑性構成式を用いて、構造物の終局状態までの数値解析の適用性を示すことができれば、より高度な力学設計の発展に寄与するものと思われる。

1.2.2 非比例繰返し負荷挙動の弾塑性解析

前項のように、材料の弾塑性構成式に関するこれまでの研究では、単調増大負荷あるいは降伏応力を超える負荷が繰返し作用する際に観察される、力学的ラッチェティング現象やヒステリシスループを記述するものが主流である。これらの弾塑性構成式では、降伏応力以下の繰返し負荷の増加に伴い突如発生・成長する塑性変形挙動は定性的にも表現し得ない。そこで、堤ら(2007, 2008)は、降伏面内部を純粹弾性域としない非古典弾塑性論の枠組みに属する拡張下負荷面モデル(**Hashiguchi, 1989**)を基に、微細な塑性変形やせん断帯発生過程を損傷・ダメージとして内部状態変数に導入した弾塑性構成式を提案し、巨視的弾性単軸繰返し負荷条件における金属材料の塑性変形の発生・成長を予測可能なことを示した。

一方、非比例繰返し負荷条件下における同様の現象に関する研究に着目してみると、実験的研究は前節に示した通りであるが、それを現象論弾塑性構成式として定式化に取り組んだ事例は著者の知る限り見当たらない。これは、非比例繰返し負荷を受ける材料に対して、従来の非弾性構成式を用いて解析すると、その結果に極めて大きな誤差が含まれる可能性があることを意味する。非比例負荷条件下の応力あるいはひずみの予測値の誤差は、非比例高サイクル疲労に関する寿命予測の算定などに直接的に関連し、対象とする各種構造物の信頼性に重大な影響を及ぼすことがあり得ることから、当該現象を高精度に表現可能な非弾性構成式の開発も重要な課題として位置づけられる。

1.3 本研究の目的

以上の背景により、本研究の目的を以下に示す。

1. これまでは主に理論解析によってその重要性が示されてきた非共軸性の弾塑性構成式を、構造物の座屈といった幾何学的非線形性が無視し得ない具体的境界値問題に適用し、既往の実験結果および従来の共軸性の弾塑性構成式による結果と比較することで、その妥当性および有用性を検証する。
2. 降伏応力以下の非比例繰返し負荷により発現することが予想される繰返し軟化現象を表現可能なように、上述の非共軸性の弾塑性構成式を拡張し、新たな一形式を提案する。

1.4 本論文の構成

前節の目的のため、本論文は第 1 章を含めて 7 章から構成される。各章の概要を次に示す。

第 2 章では、本研究で採用する非古典弾塑性論に属する接線塑性ひずみを考慮した非共軸性の繰返し弾塑性構成式の定式化について述べる。まず、古典弾塑性構成式の枠組みのもと、ひずみの加算分解、弾性ひずみ速度と応力速度、塑性ひずみを規定した後、繰返し負荷問題を対象に発展してきた繰返し弾塑性構成式について詳細に述べる。これまでに提案された代表的な繰返し弾塑性構成式の諸論について、その数学的・物理的難点を指摘するとともに、本研究で採用する接線塑性弾塑性構成式についてその定式化を詳細に示す。最後に本論文で対象とする炭素鋼特有の降伏棚硬化特性を表現可能なように硬化関数を拡張した上で、弾塑性構成式に必要な諸式的具体関数系を示す。

第 3 章では、第 2 章で述べた接線塑性弾塑性構成式を非線形有限要素法へ実装する数値計算的手続きについて述べる。一般に弾塑性構成式は速度(増分)形で与えられるため、弾塑性変形の数値計算は微小な時間増分で計算される。本章ではできる限り計算コストを抑えるために、大きな時間増分を用いても計算精度の低下を招かない数値計算手法として、カッティングプレーン・プロジェクションに基づく定式化を行うとともに、数値微分により整合接線係数テンソルを導入する。次に、本数値計算手法を用いた数値実験を実施し、参照解として与えられる前進 Euler 法による結果と比較し、計算精度を低下させることなく、計算速度が向上することを示す。

第 4 章では、接線塑性弾塑性構成式の妥当性を検証するために、当該弾塑性構成式を実装した非線形有限要素解析を実施し、一定軸力・水平 1 軸漸増繰返し負荷を受ける鋼製橋脚の実験結果と比較することでその妥当性を示す。また接線塑性ひずみを考慮しない従来

の繰返し弾塑性モデルについても同様の解析を実施することで、採用する弾塑性構成式の違いによる結果を示し考察する。

第 5 章では、第 4 章に続き一定軸力・水平 2 軸漸増繰返し負荷下の非線形有限要素解析を計 7 負荷経路にわたって実施することで、負荷経路の違いが採用する弾塑性構成式の違いによってどのように影響するかを考察し、非共軸性の接線弾塑性構成式の有用性を示す。

第 6 章は降伏応力以下の非比例繰返し負荷を受ける金属材料の繰返し軟化現象を表現可能な弾塑性構成式を提案する。提案した弾塑性構成式を用いて非比例繰返し負荷の有限要素解析を行い、当該現象が表現可能なように拡張されたことを確認するとともに、材料パラメータおよび負荷条件などを変化させた解析も実施し、提案する弾塑性構成式の適用性を検討する。

第 7 章は結論である。ここでは、各章で得られた知見をまとめ本論文を総括する。

参考文献は第 1 章から第 7 章を通して、巻末に列挙した。

2章 繰返し弾塑性構成式の定式化

2.1 緒言

本章では、現象論的繰返し弾塑性構成式の定式化について述べる。現象論的弾塑性構成式はひずみ速度が低速な場合を取り扱う速度依存性を考慮しない弾塑性構成式と、ひずみ速度が高速でその影響が無視し得ない場合を取り扱う速度依存性を考慮した弾・粘塑性構成式あるいは弾・粘・塑性構成式に大別される。一般に本研究の対象とする金属材料の力学特性は室温付近でかつ低速なひずみ速度が支配的な環境において、速度依存性はほとんど見られない、あるいはその影響は無視し得る現象とする。また非弾性変形の発生に伴う発熱やそれによって生じる熱膨張なども無視できるものとする。本研究ではひずみ速度が低速な状況における金属材料の非弾性変形を取り扱うことから、速度非依存の繰返し弾塑性構成式を採用した。

本章ではまず弾塑性構成式の一般的な枠組みとして、古典弾塑性構成式の定式化を示し、その後繰返し負荷問題に対して発展した繰返し弾塑性構成式について概説する。次に、既往の繰返し弾塑性構成式の問題点を指摘するとともに、本研究で採用した非古典弾塑性構成式に属する拡張下負荷面モデルについてその定式化を示す。さらに、負荷経路が比例負荷経路から逸脱する問題、具体的には変形の局所化の発生や負荷荷重の方向間位相差が生じる非比例負荷問題、に対して提案されてきた接線塑性弾塑性構成式について述べる。最後に、本研究で対象とする金属材料の具体関数を示す。

本論文を通して、1階のテンソル(ベクトル) \mathbf{a} , 2階のテンソル \mathbf{B} , 4階のテンソル \mathbf{C} は直交基底ベクトル \mathbf{e} を用いて以下のように表されるものとする。また特に断らない限り総和規約、つまりダミーインデックスについてはその総和を取るものとする。

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B} = B_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.2)$$

$$\mathbf{C} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (2.3)$$

ここに、 a_i, B_{ij}, C_{ijkl} はそれぞれ階数に対応するテンソルの成分であり、 \otimes はダイアドである。また、2階のテンソルの大きさは次式で与えられる。

$$\|\mathbf{B}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{B})} = \sqrt{B_{ij} B_{ij}} \quad (2.4)$$

ここに, $()^T$ は転置を表す.

2.2 古典弾塑性構成式

2.2.1 ひずみ速度の加算分解

弾塑性構成式を取り扱う連続体力学では, 物体は物質点が支配する領域として捉えられる. 物質点は 3 次元 Euclid 空間においては座標と一対一で対応付けられ, その体積は無限小である. 物質点は無限小の大きさであるにもかかわらず, 原子や分子といったミクロな構造を示すものではなく, 物質点近傍の平均的な物理量を有する仮想的な点である.

さて, 基準配置 $t = t_0$ における物質点 \mathbf{X} の近傍の点 $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ は, 現配置 $t = t$ において点 \mathbf{x} 近傍の $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ に移動した場合, 変形勾配テンソル \mathbf{F} を次式のように定義する.

$$\mathbf{F} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.5)$$

一般に非弾性変形を含む変形は, 負荷経路に依存するため現在の応力状態によって一意に決定されず, 応力と変形を関係づけることはできない. したがって, 応力と変形の微小な変化を関係づけ, それを負荷経路に渡って積分することで, 現在の応力と変形の状態を把握することを考える. そこで次式で定義される速度勾配テンソル \mathbf{L} を用いる.

$$\mathbf{L} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}, \quad L_{ij} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \mathbf{F}) \quad (2.7)$$

ここに, \mathbf{v} は物質点の座標 \mathbf{x} における速度であり, $(\dot{\quad})$ は物質時間微分を表す.

速度勾配テンソル \mathbf{L} は一般に非対称テンソルであり, 対称部分 \mathbf{D} と反対称部分 \mathbf{W} に加算分解することができる.

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \\ \mathbf{W} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

ここに、 \mathbf{D} はひずみ速度テンソル、変形速度テンソルあるいはストレッチングテンソル、 \mathbf{W} は連続体スピテンソルあるいは連続体回転速度テンソルと呼ばれる。

本研究で対象とする金属材料では、微小弾性、有限塑性変形を仮定できることが多く、その仮定の下、ひずみ速度を弾性部分 \mathbf{D}^e と塑性部分 \mathbf{D}^p に加算分解する。

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad (2.10)$$

2.2.2 弾性ひずみ速度と応力速度

弾性ひずみ速度 \mathbf{D}^e は亜弾性構成式に基づく次式で与えられるものと仮定する。

$$\mathbf{D}^e = \mathbb{E}^{-1} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.11)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力で、 $(\overset{\circ}{})$ は客観性を有する共回転速度を表し、本論文では物質の剛体回転を表すスピン $\boldsymbol{\omega}$ として、速度勾配 \mathbf{L} の反対称成分 \mathbf{W} で定義される連続体スピンを用いる次式の Jaumann 速度を採用する。

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{S}} - \mathbf{W}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{W} \quad (2.12)$$

ここに、 \mathbf{S} は応力や内部状態変数を示す任意の 2 階テンソルである。 \mathbb{E} は 4 階の弾性係数テンソルであり、Hooke 則に従う等方弾性体と仮定すると、ヤング率 E およびポアソン比 ν を用いて次式で与えられる。

$$E_{ijkl} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.13)$$

ここに、 δ_{ij} は Kronecker のデルタ、つまり $i = j$ の時 1、 $i \neq j$ の時 0 を取る。あるいは応力

速度は次式でも与えられる.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = L(\text{tr } \mathbf{D}^e) \mathbf{I} + 2G\mathbf{D}^e \quad (2.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}' &= 2G\mathbf{D}^{e'} \\ (\quad)' &= (\quad) - \frac{1}{3}\text{tr}(\quad)\mathbf{I} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

ここに, L, G は Hooke 則に従う等方線形弾性体における Lamé 定数であり, G はせん断弾性率とも呼ばれる. $(\quad)'$ は式(2.15)下式に示すように偏差成分を表す.

2.2.3 塑性ひずみ速度

次に, 塑性ひずみ速度 \mathbf{D}^p を規定するにあたり, 等方・移動硬化を有する古典弾塑性論の降伏面 f (その内部は純粋弾性域) を次式で仮定する.

$$\begin{aligned} f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) &= F(H) \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} &\equiv \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (2.16)$$

ここに, $\boldsymbol{\alpha}$ は移動硬化変数であり, いわゆる背応力に対応する. F は等方硬化関数であり, 正規降伏面の大きさを表し, スカラー変数である等方硬化変数 H の関数である. 以降, 降伏面は応力不変量の関数とし, さらに応力の1次の同次関数であると仮定する. したがって, Euler の同次関数の定理より次式を満たす.

$$\text{tr}\left(\frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}\right) = f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{\text{tr}\left(\frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)}{\text{tr}(\hat{\mathbf{N}}\hat{\boldsymbol{\sigma}})} \hat{\mathbf{N}} = \frac{f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\text{tr}(\hat{\mathbf{N}}\hat{\boldsymbol{\sigma}})} \hat{\mathbf{N}} = \frac{F}{\text{tr}(\hat{\mathbf{N}}\hat{\boldsymbol{\sigma}})} \hat{\mathbf{N}} \quad (2.18)$$

$$\hat{\mathbf{N}} \equiv \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} / \left\| \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \right\| \quad (\|\hat{\mathbf{N}}\| = 1) \quad (2.19)$$

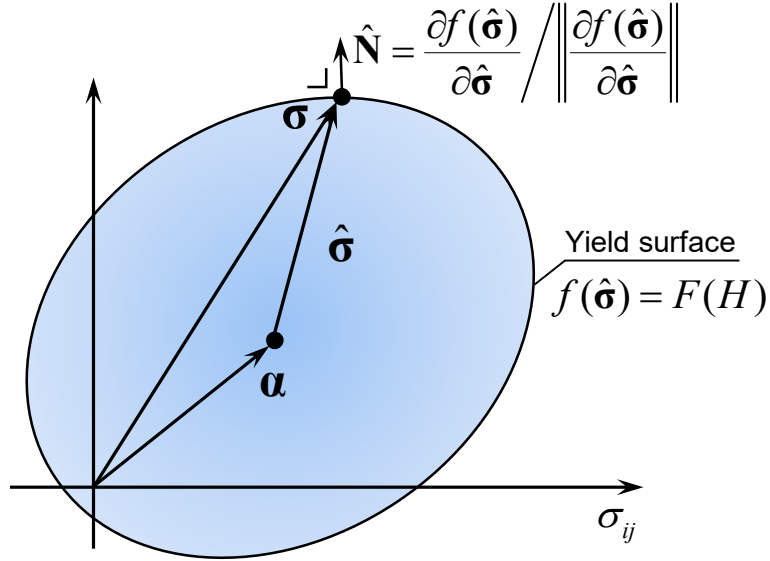


Fig. 2-1 Yield surface in stress space.

ここに, $\hat{\mathbf{N}}$ は降伏面外向き法線単位テンソルである(Fig. 2-1 参照).

降伏条件式(2.16)の物質時間微分および共回転微分への変換則(Hashiguchi, 2007)を用いれば, 適合条件式として次式を得る.

$$\text{tr}\left(\frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}\right) - \text{tr}\left(\frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}\overset{\circ}{\boldsymbol{\alpha}}\right) = F' \dot{H} \quad (2.20)$$

$$F' \equiv dF/dH \quad (\geq 0) \quad (2.21)$$

\dot{H} は応力, 内部状態変数 H_i および塑性ひずみ速度 \mathbf{D}^p の関数であると仮定し次式を置く.

$$\dot{H} = h(\boldsymbol{\sigma}, H_i; \mathbf{D}^p) \quad (2.22)$$

$$h(\boldsymbol{\sigma}, H_i; s\mathbf{D}^p) = sh(\boldsymbol{\sigma}, H_i; \mathbf{D}^p)$$

ここで, h は(2.22)下式のように, 塑性ひずみ速度 \mathbf{D}^p の1次の同次関数である.

移動硬化変数の共回転速度 $\overset{\circ}{\boldsymbol{\alpha}}$ は塑性ひずみ速度 \mathbf{D}^p や内部状態変数 H_i の関数とし, 次式を仮定する.

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma}, H_i) \|\mathbf{D}^p\| \quad (2.23)$$

ここに、 \mathbf{a} は応力、内部状態変数 H_i の関数であるとし、偏差テンソルである。つまり $\text{tr}(\mathbf{a}) = 0$ である。

式(2.22)、式(2.23)を式(2.20)に代入すれば、

$$\text{tr}\left(\frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}\right) - \text{tr}\left(\frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}\mathbf{a}\|\mathbf{D}^p\|\right) = F'h(\boldsymbol{\sigma}, H_i; \mathbf{D}^p) \quad (2.24)$$

さらに、関連流動則 ($\dot{\lambda}$ は正值の比例係数)

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \hat{\mathbf{N}} \quad (2.25)$$

を仮定し、式(2.24)は次式となる。

$$\text{tr}\left(\frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}\right) - \text{tr}\left(\frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}\mathbf{a}\dot{\lambda}\right) = F'\dot{\lambda}h(\boldsymbol{\sigma}, H_i; \hat{\mathbf{N}}) \quad (2.26)$$

式(2.26)に式(2.18)を考慮し次式を得る。

$$\frac{F}{\text{tr}(\hat{\mathbf{N}}\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}})}\text{tr}(\hat{\mathbf{N}}\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}) - \frac{F}{\text{tr}(\hat{\mathbf{N}}\hat{\boldsymbol{\sigma}})}\text{tr}(\hat{\mathbf{N}}\mathbf{a})\dot{\lambda} = F'\dot{\lambda}h(\boldsymbol{\sigma}, H_i; \hat{\mathbf{N}}) \quad (2.27)$$

さらに、

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{\text{tr}(\hat{\mathbf{N}}\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}})}{\frac{F'}{F}h(\boldsymbol{\sigma}, H_i; \hat{\mathbf{N}})\text{tr}(\hat{\mathbf{N}}\hat{\boldsymbol{\sigma}}) + \text{tr}(\hat{\mathbf{N}}\mathbf{a})} \\ &= \frac{\text{tr}(\hat{\mathbf{N}}\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}})}{\text{tr}\left(\hat{\mathbf{N}}\left[\frac{F'}{F}h(\boldsymbol{\sigma}, H_i; \hat{\mathbf{N}})\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{a}\right]\right)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

式(2.28)、式(2.25)から塑性ひずみ速度 \mathbf{D}^p は次式で与えられる。

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \hat{\mathbf{N}} = \frac{\text{tr}(\hat{\mathbf{N}}\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}})}{\hat{M}^p} \hat{\mathbf{N}} \quad (2.29)$$

$$\hat{M}^p \equiv \text{tr} \left(\hat{\mathbf{N}} \left[\frac{F'}{F} h(\boldsymbol{\sigma}, H_i; \hat{\mathbf{N}}) \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{a} \right] \right) \quad (2.30)$$

ここに, \hat{M}^p は塑性係数である.

また, ひずみ速度 \mathbf{D} は式(2.10)に式(2.11), 式(2.29)を代入し次式で与えられる.

$$\mathbf{D} = \mathbb{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\text{tr}(\hat{\mathbf{N}} \dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\hat{M}^p} \hat{\mathbf{N}} \quad (2.31)$$

式(2.31)の逆関係として応力速度式 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ は次式で与えられる.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{E} \mathbf{D} - \frac{\text{tr}(\hat{\mathbf{N}} \mathbb{E} \mathbf{D})}{\hat{M}^p + \text{tr}(\hat{\mathbf{N}} \mathbb{E} \hat{\mathbf{N}})} \mathbb{E} \hat{\mathbf{N}} = \left(\mathbb{E} - \frac{\mathbb{E} \hat{\mathbf{N}} \otimes \mathbb{E} \hat{\mathbf{N}}}{\hat{M}^p + \text{tr}(\hat{\mathbf{N}} \mathbb{E} \hat{\mathbf{N}})} \right) \mathbf{D} \quad (2.32)$$

ひずみ速度で表される関連流動則における正值の比例係数 $\dot{\Lambda}$ は次式で与えられる.

$$\dot{\Lambda} = \frac{\text{tr}(\hat{\mathbf{N}} \mathbb{E} \mathbf{D})}{\hat{M}^p + \text{tr}(\hat{\mathbf{N}} \mathbb{E} \hat{\mathbf{N}})} \quad (2.33)$$

2.2.4 負荷基準

前節に示した弾塑性構成式は負荷過程で与えられた増分に対して塑性ひずみ速度が生じるかどうかの判定を要する. この判定を負荷基準と呼び, 次の条件で与えられる(Hill, 1967).

$$\begin{cases} \mathbf{D}^p \neq \mathbf{0} & \text{for } f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = F(H) \text{ and } \dot{\Lambda} > 0 \\ \mathbf{D}^p = \mathbf{0} & \text{for otherwise} \end{cases} \quad (2.34)$$

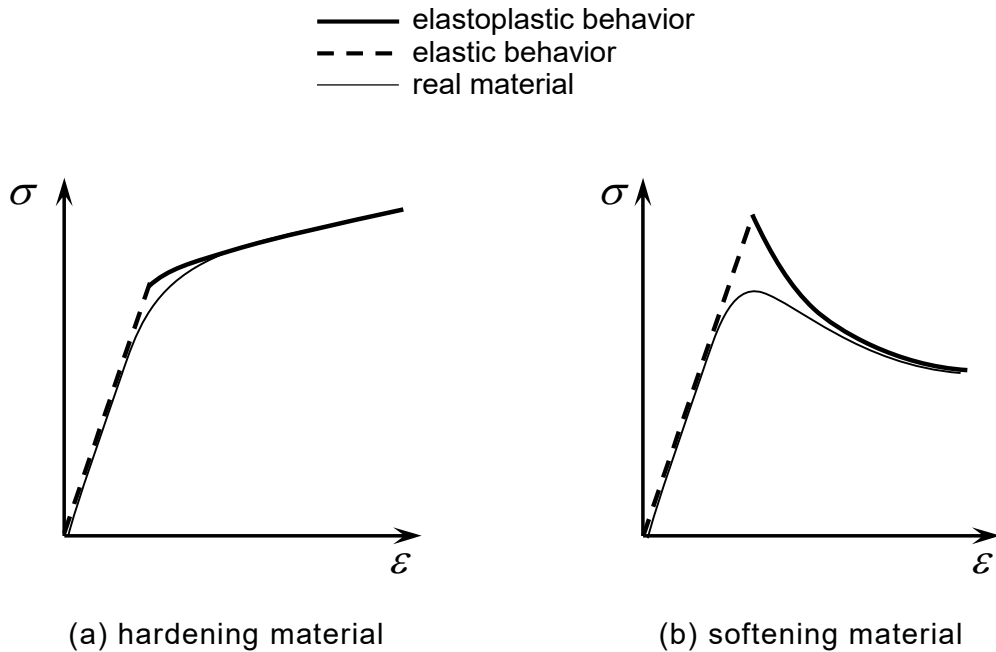


Fig. 2-2 Schematic representation of stress-strain curve described by conventional elastoplastic constitutive equation.

2.3 繰返し塑性弾塑性構成式

前節に示した古典弾塑性論は降伏面の内部を純粋弾塑性と仮定し定式化されている。この仮定は単調負荷荷重下の材料および構造物の非弾性挙動を精度良く表現し得ることから、土木構造物や機械構造物の力学設計に幅広く利用されている。しかしながら、以下に述べるように、本古典弾塑性構成式では実在材料で確認される応力-ひずみ関係を高精度に表現できない現象が存在する。

- 1) 応力が降伏面に達する際、つまり降伏点で応力速度-ひずみ速度関係が急変し、降伏点で折れ曲がった応力-ひずみ曲線を呈する。一方で実在材料では滑らかな弾塑性遷移挙動を示すことが知られている。この様子を模式的に Fig. 2-2 に示すように、理論曲線と実測曲線の差異は硬化材料の場合あまり大きくないが、応力が極大値を示す軟化材料の場合は著しい差異を生じ、材料の許容応力ひいては構造物の許容耐力を過大に、つまり危険側に見積もる可能性がある。
- 2) 構造物が曝される実稼働環境下においては単調負荷というよりむしろ繰返し負荷であることが多く、応力振幅あるいはひずみ振幅一定の繰返し負荷の場合、本古典弾塑性構成式では第2にサイクル以降弾性変形が繰り返されるだけである。一方、実在材料

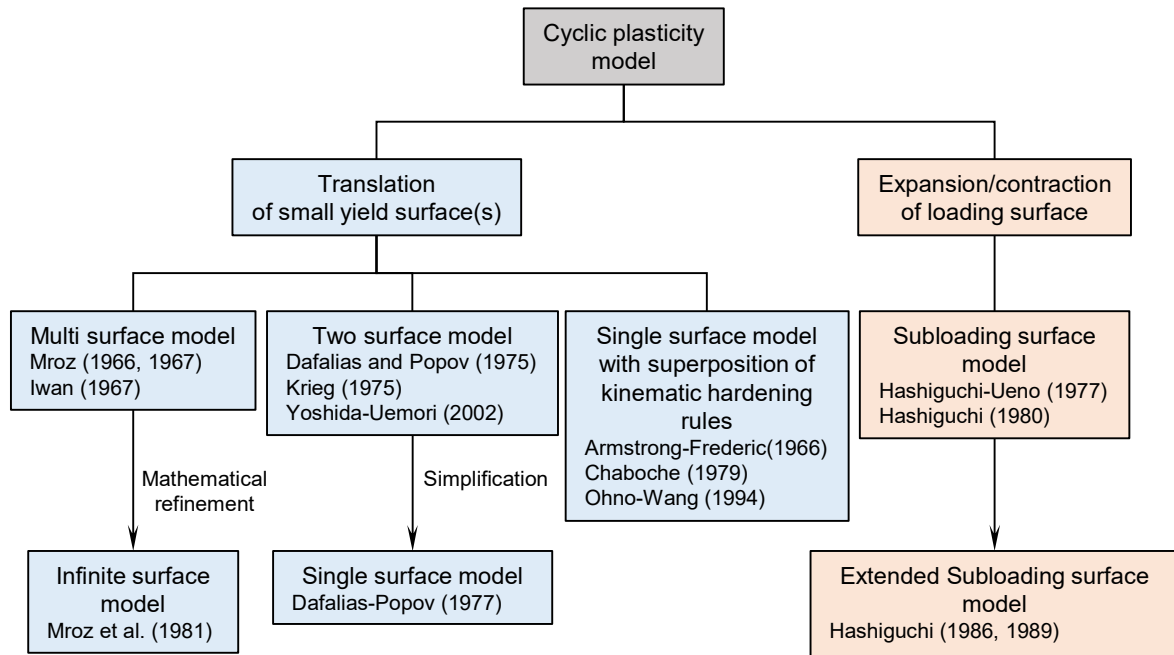


Fig. 2-3 Classification of cyclic plasticity model (Fig.7 in Hashiguchi, 2013).

においては負荷サイクルが増すごとに大なり小なり塑性変形が累積し大きな変形が生じる。したがって、繰返し負荷を受ける構造物の力学的検討に用いることは危険であると考えられる。

このように古典弾塑性構成式は繰返し負荷に対して危険側の予測を与えることから、この欠点を克服するため、1960年代以降、実験結果の再現性を高めることを目的として、降伏面の内部を純粋弾性域とする仮定を脱却した種々の繰返し弾塑性構成式が提案され、Drucker (1988)はこれらの弾塑性構成式を非古典弾塑性論と称した。代表的な非古典弾塑性構成式は Fig. 2-3 に模式的に示すように、移動硬化の概念を下降伏状態へ拡張した、多面モデル(Mroz, 1967; Iwan, 1967)、無数面モデル(Mroz et al., 1981)、二面モデル(Dafalias and Popov, 1975; Krieg, 1975; Yoshida and Uemori, 2002ab)、単面モデル(Dafalias, 1977)および非線形移動硬化モデル(Armstrong and Frederick, 1966; Chaboche, 1979; Ohno and Wang, 1993ab)と、応力の変化により膨張・収縮する負荷面つまり下負荷面の概念に基づく下負荷面モデル(Hashiguchi and Ueno, 1977; Hashiguchi, 1980; Hashiguchi, 1986; Hashiguchi, 1989)に大別される。本節では移動硬化の概念に基づく各種弾塑性モデルについて概説し、次節に本研究で採用した下負荷面モデルの詳細を

述べる. なお, 以降従来の降伏面を正規降伏面と称し, その他の正規降伏面の内部に仮定される下降伏面や下負荷面と区別する.

2.3.1 多面モデル

Mroz (1967)と Iwan (1967)は多面モデルと称する繰返し弾塑性モデルを提案した. このモデルは, 正規降伏面の内部にその大きさに対して一定の相似比を維持した複数個の下降伏面を有する.

$$\begin{aligned} f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i) &= r_i F(H) \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i &\equiv \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}_i \\ (i &= 0, 1, \dots, m) \end{aligned} \tag{2.35}$$

ここに, r_i は i 番目の下降伏面の正規降伏面に対する相似比, $\boldsymbol{\alpha}_i$ は i 番目の下降伏面の中心で背応力に相当する.

塑性ひずみ速度の大きさを規定する塑性係数(式(2.30))は現応力が乗る下降伏面($i = n$)の大きさ, つまり各下降伏面の正規降伏面に対する相似比 r_i に依存するので, 実在材料の応力-ひずみ線図とは異なり区分線形を示すとともに, 以下の数学的・物理的不備を有する.

- 1) 応力の変化により, 異なる塑性係数を有する異なる下降伏面は一点でお互いに接する. つまりその応力空間上の接触点において塑性係数の特異性が生じるため, 繰返し負荷挙動の数値計算においてこの接触点近傍で不安定になる.
- 2) 塑性係数は応力が異なる下降伏面に近づいた瞬間に急激に減少(塑性ひずみ速度の大きさは大きくなる)するため, 2.4.1 に後述する弾塑性構成式が満たすべき滑らか条件に抵触する.
- 3) 後述する接線塑性ひずみ速度を考慮する場合, 応力が次の下降伏面に移動する点において, 構成式が満たすべき連続性条件に抵触する.
- 4) 純粋弾性応答を示す最も小さい下降伏面内部の繰返し負荷においては, 塑性ひずみの集積は表現できない.
- 5) 一定応力片振幅の繰返し負荷過程において, 非硬化挙動を示す下降伏面は負荷過程初期から塑性シェークダウン状態に達し, また, 硬化挙動を示す下降伏面において

も数回の負荷過程の後塑性シェークダウン状態に達する. すなわち, 片振幅繰返し負荷に対して塑性ひずみの集積, いわゆる力学的ラチェット現象を表現し得ない.

2.3.2 無数面モデル

Mroz et al.(1981) は, 多面モデルを改良し, 正規降伏面内部の下降伏面の数を無限に増加させた無数面モデルを提案した. このモデルによれば, 現応力点から正規降伏面にいたる無数の下降伏面を仮定しているため, 弾性域は消失し応力-ひずみ曲線は滑らかな応答を呈する. しかしながら, 単調負荷過程では滑らか条件は満たされるものの, 応力が除荷され, さらに再負荷時に到達する応力反転点ではアクティブな下降伏面は不連続に変化し滑らかな応力-ひずみ曲線は表現されない.

2.3.3 二面モデルおよび単面モデル

Dafalias and Popov (1975)および Krieg (1975)によりそれぞれ多面モデルを簡素化した二面モデルを提案し, Dafalias and Popov (1976), Ohno and Kachi (1986), McDowell (1985), Ellyin (1989), Moosbrugger and McDowell (1990), Yoshida and Uemori (2002ab)らにより広く用いられている. 二面モデルは正規降伏面の内部に純粋弾性域と下降伏域の境界を示す境界面を仮定している. つまり正規降伏面を $f = 0$, 境界面を $\tilde{f} = 0$ として次式で与える.

$$\begin{aligned} f &= \|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}\| - F(H_a) = 0 \\ \tilde{f} &= \|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{Y}\| - F(H_b) = 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

ここに, \mathbf{X}, \mathbf{Y} はそれぞれ正規降伏面および境界面の中心である. 両曲面とも移動硬化による移動および等方硬軟化による膨張・縮小が可能である. 塑性係数は下降伏面上の現応力と正規降伏面上の幾何学的共役点(共役応力点)の距離に依存する.

二面モデルは多面モデルの数学的・物理的欠点を有する上, 塑性係数が現応力点と下降伏面あるいは正規降伏面との距離によってのみ決定されるため, 片振幅の繰返し負荷過程においては実在材料の応答とは異なる開いたヒステリシスループが表現される(Fig. 2-4).

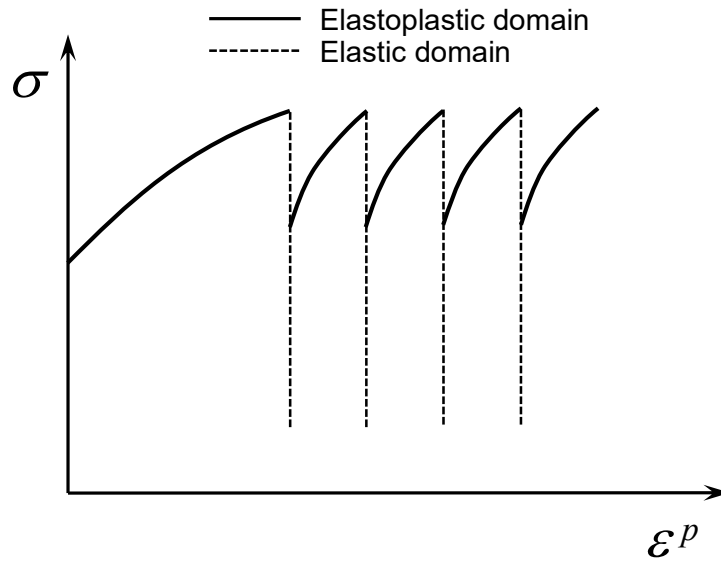


Fig. 2-4 Prediction of constant stress amplitude cyclic loading behavior by multiple surface model, two surface model and nonlinear kinematic hardening model with purely elastic domain.

2.3.4 非線形移動硬化モデル

Armstrong and Frederick (1966)によって提案された非線形移動硬化モデルは二面モデル同様力学的ラチェット現象を過大に評価する(Chaboche, 2008; Hashiguchi, 2013). そこで Chaboche et al.(1979)は, 複数の移動硬化関数の多項式を用いることを提案し, 次式を用いた.

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\alpha}_i, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i = \frac{2}{3} C_i \mathbf{D}^p - \gamma_i \boldsymbol{\alpha}_i \|\mathbf{D}^p\| \quad (2.37)$$

ここに, C_i, γ_i は材料定数である. また式(2.37)において $M = 1$ かつ $\gamma_i = 0$ とすれば同式は Prager (1949)の線形移動硬化則に帰着する. 本式は多項式近似として数学的には簡素化されているものの, 次数およびそれに対応する材料定数の物理的意味合いが不明瞭である上, 材料定数が増加することが指摘されている(Hashiguchi, 2013).

この非線形移動硬化モデルでは, 単一の正規降伏面を仮定しているため塑性係数の特異

性は生じないものの、応力が正規降伏面に達した際に滑らか条件に抵触し、二面モデル同様の欠点を有する。さらに後述する接線塑性ひずみ速度を考慮した場合には連続性条件にも抵触する。

2.4 拡張下負荷面モデル

前節で示した内部に純粋弾性域を持つ小さな負荷面(下降伏面)を有する非古典弾塑性モデルは、いずれも材料の繰返し負荷挙動を表現するにあたり前述の制限を有する。そこで Hashiguchi and Ueno (1977), Hashiguchi (1980)は正規降伏面の内部を純粋弾性域とする仮定を捨て、正規降伏面内部に現応力点を常に通る、正規降伏面に相似な下負荷面を仮定し、その下負荷面の膨張・縮小により繰返し弾塑性挙動を記述する初期下負荷面モデルを提案した。本モデルは後述 2.4.1.1 , 2.4.1.2 の連続性条件、滑らか条件等の構成式としての力学的要求条件を満たし、実在材料に観察される弾性応答から弾塑性応答への滑らかな遷移を表現可能である。しかしながら初期下負荷面モデルを用いて、応力片振幅一定(除荷-再負荷過程)の繰返し負荷挙動を予測した場合、開いたヒステリシス挙動を示す。そこで、Hashiguchi (1986, 1989)は下負荷面の正規降伏面に対する相似中心を表す応力の次元を有する内部状態変数テンソルを導入することで、繰返し負荷における逆負荷過程で観察される Masing 効果を表現しつつ、力学的ラチェット現象をより精緻に表現可能な拡張下負荷面モデルを提案した。本節では、拡張下負荷面モデルの定式化を示す。

2.4.1 連続性条件と滑らか条件

まず拡張下負荷面モデルの定式化を示すにあたり、弾塑性構成式に要求される連続性条件および滑らか条件について述べる。これらの条件は熱力学的制約や客観性の原理と並び構成式に求められる力学要件である。

2.4.1.1 連続性条件

実験的に観察される”ひずみ速度の連続的な変化に対して応力速度は連続的に変化する”という事実は、連続性条件 (Prager, 1949)と呼ばれ、数学的には次式で表される (Hashiguchi, 1993,1997,2000)。

$$\lim_{\delta \mathbf{D} \rightarrow 0} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, H_i, \mathbf{D} + \delta \mathbf{D}) = \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, H_i, \mathbf{D}) \quad (2.38)$$

ここに、 $H_i (i=1, 2, 3, \dots)$ はスカラーあるいはテンソルの内部状態変数を形式的にまとめて示したものである。 $\delta(\cdot)$ は無限小の変化を表す。任意のひずみ速度を入力した場合の応力速度の応答は現応力状態および内部状態変数で記述され、この条件に抵触する構成式は解の唯一性が保証されない。一般に適合条件から導出される弾塑性構成式は自動的に本条件を満たすが、後述する降伏面接線方向の非弾性ひずみである接線塑性ひずみ速度を考慮した場合、本条件に抵触する。

2.4.1.2 滑らか条件

実験的に観察される”応力状態の連続的な変化に対して、任意のひずみ速度に対する応力速度は連続的に変化する”という事実は、滑らか条件と呼ばれ、数学的には次式で表される (Hashiguchi, 1993, 2000).

$$\lim_{\delta \mathbf{D} \rightarrow 0} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\sigma}, H_i, \mathbf{D}) = \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, H_i, \mathbf{D}) \quad (2.39)$$

多くの弾塑性構成式で採用される速度線形の構成式は一般に次式で表される。

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}^{ep}(\boldsymbol{\sigma}, H_i) \mathbf{D} \quad (2.40)$$

ここに、 \mathbb{C}^{ep} は 4 階の弾塑性係数テンソルであり、応力および内部状態変数の関数である。また弾塑性係数は一般に次式に用いられる。

$$\mathbb{C}^{ep} = \frac{\partial \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \mathbf{D}} \quad (2.41)$$

この場合、式(2.39)は次式で表現される。

$$\lim_{\delta \mathbf{D} \rightarrow 0} \mathbb{C}^{ep}(\boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\sigma}, H_i) = \mathbb{C}^{ep}(\boldsymbol{\sigma}, H_i) \quad (2.42)$$

滑らか条件に抵触する構成式は Fig. 2-5 に示すように接線係数が降伏点で急変する応力-

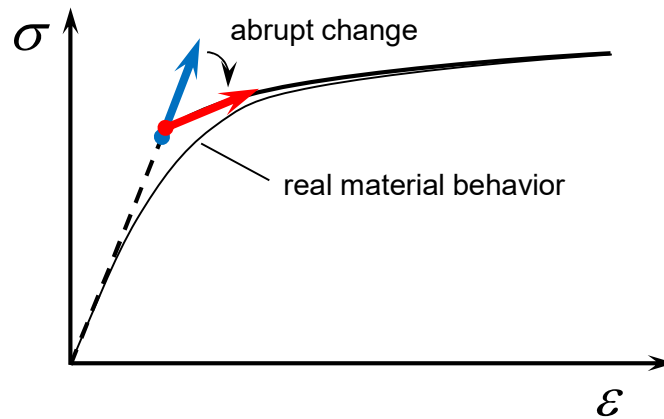


Fig. 2-5 Violation of smoothness condition in conventional plasticity and kinematic hardening cyclic plasticity with purely elastic domain.

ひずみ線図が予測される。

2.4.2 拡張下負荷面モデル

まず等方硬化・移動硬化および異方性を有する古典弾塑性論の正規降伏面（幾何学的には従来の降伏面と同じであるが、その内部は純粹弾性域ではない）を次式で仮定する。

$$f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta}) = F(H) \quad (2.43)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha} \quad (2.44)(\text{re-record of (2.16)b})$$

ここに、 $\boldsymbol{\beta}$ は一般性を有する異方性テンソルである。

ここで、正規降伏面の内部に、常に現応力点 $\boldsymbol{\sigma}$ を通り正規降伏面に相似な形状を保ちながら、移動、膨張・縮小する下負荷面を仮定し、正規降伏面と下負荷面の相似比を正規降伏比 \bar{R} とし次式で表す。なお、正規降伏比 \bar{R} は応力が正規降伏面に近づいた度合いを表すスカラー量である。次に、正規降伏面と下負荷面の相似中心 \mathbf{s} を導入し、背応力 $\boldsymbol{\alpha}$ の共役点を $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 、現応力点 $\boldsymbol{\sigma}$ の正規降伏面上の共役点を $\boldsymbol{\sigma}_y$ とすればそれぞれ、

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta}) = \bar{R}F(H) \quad (2.45)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{R}\boldsymbol{\sigma}_y \quad (2.46)$$

$$\bar{\mathbf{s}} = \bar{R}\hat{\mathbf{s}}, \quad \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{s} - \bar{R}\hat{\mathbf{s}} \quad (2.47)$$

ここに,

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_y \equiv \boldsymbol{\sigma}_y - \boldsymbol{\alpha}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{a}} \quad (2.48)$$

$$\hat{\mathbf{s}} \equiv \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}, \quad \bar{\mathbf{s}} \equiv \mathbf{s} - \bar{\mathbf{a}} \quad (2.49)$$

式(2.47), (2.48)および(2.49)を用いれば, 式(2.46)は,

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s} + \bar{R}\hat{\mathbf{s}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{R}\hat{\mathbf{s}} \quad (2.50)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s} \quad (2.51)$$

したがって式(2.45)は次式となる.

$$f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{R}\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta}) = \bar{R}F(H) \quad (2.52)$$

正規降伏比 \bar{R} は式(2.52)から算出されるが, 一般に解析的に得られない.

下負荷面式(2.45)の物質時間微分は次式で与えられる.

$$\text{tr}\left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}\right) \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} - \text{tr}\left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}\right) \overset{\circ}{\bar{\mathbf{a}}} + \text{tr}\left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right) \overset{\circ}{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\bar{R}}F + \bar{R}F' \dot{H} \quad (2.53)$$

$$\bar{\mathbf{N}} \equiv \text{tr}\left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}\right) / \left\| \text{tr}\left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}\right) \right\| \quad (2.54)$$

式(2.47)から, 下負荷面の中心 $\overset{\circ}{\bar{\mathbf{a}}}$ の発展則は次式で与えられる.

$$\overset{\circ}{\bar{\mathbf{a}}} = \bar{R} \overset{\circ}{\bar{\mathbf{a}}} - \dot{\bar{R}} \hat{\mathbf{s}} + (1 - \bar{R}) \overset{\circ}{\mathbf{s}} \quad (2.55)$$

以上の正規降伏面, 下負荷面および所量を Fig. 2-6 に示す.

$$f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta}) \leq F(H) \quad (2.56)$$

相似中心 \mathbf{s} の限界状態(相似中心が正規降伏面上に存在する)において式(2.56)の物質時間微分は次式で与えられる.

$$\text{tr} \left\{ \frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \hat{\mathbf{s}}} (\dot{\hat{\mathbf{s}}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}) \right\} + \text{tr} \left\{ \frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} \right\} - \dot{F} \leq 0 \quad \text{for } f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta}) = F(H) \quad (2.57)$$

また, Euler の同次関数の定理による $\text{tr} \left\{ (\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta}) / \partial \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} \right\} = F$ なる関係を用いれば, 式(2.57)は次式のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left\{ \frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \hat{\mathbf{s}}} (\dot{\hat{\mathbf{s}}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}) \right\} + \frac{1}{F} \text{tr} \left\{ \frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \hat{\mathbf{s}}} \hat{\mathbf{s}} \right\} \text{tr} \left\{ \frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} \right\} \\ & - \frac{1}{F} \text{tr} \left\{ \frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \hat{\mathbf{s}}} \hat{\mathbf{s}} \right\} \dot{F} \leq 0 \quad \text{for } f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta}) = F(H) \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\text{tr} \left[\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \hat{\mathbf{s}}} \left(\dot{\hat{\mathbf{s}}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} + \frac{1}{F} \left\{ \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) - \dot{F} \right\} \hat{\mathbf{s}} \right) \right] \leq 0 \quad \text{for } f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta}) = F(H) \quad (2.59)$$

式(2.59)は相似中心 \mathbf{s} の包圍条件である.

次に, Fig. 2-7 に示すように, $\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta}) / \partial \hat{\mathbf{s}}$ と $\boldsymbol{\sigma}_y - \mathbf{s}$ は鈍角, つまりその内積は負であることから次式を仮定する.

$$\dot{\hat{\mathbf{s}}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} + \frac{1}{F} \left\{ \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) - \dot{F} \right\} \hat{\mathbf{s}} = c \|\mathbf{D}^p\| \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_y \quad (2.60)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_y \equiv \boldsymbol{\sigma}_y - \mathbf{s} \quad (2.61)$$

ここに, c は相似中心 \mathbf{s} の發展速度を規定する材料定数である. 相似中心 \mathbf{s} の發展則は次式で与えられる.

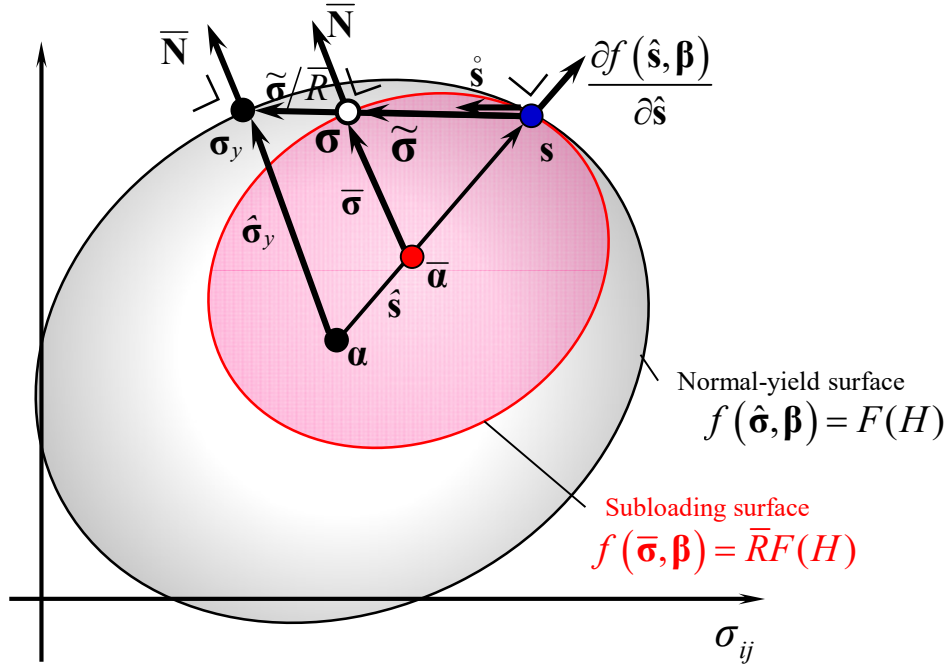


Fig. 2-7 Limit state of similarity center which lies on normal yield surface.

$$\dot{\mathbf{s}} = c \left\| \mathbf{D}^p \right\| \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{R} + \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \left\{ \frac{F'}{F} \dot{H} - \frac{1}{F} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right\} \hat{\mathbf{s}} \quad (2.62)$$

しかしながら、相似中心 \mathbf{s} は、前述のように最も弾力的な応力状態を表す点であるため、相似中心 \mathbf{s} が無制限に最も弾塑性的な状態である正規降伏面に近づくことは事実上考え難く、それを避けるために相似中心 \mathbf{s} を通り背応力 $\boldsymbol{\alpha}$ に関して正規降伏面に相似な次式で表される相似中心面を導入する。

$$f(\hat{\mathbf{s}}) = \mathcal{R}_s F(H) \quad (2.63)$$

ここに、 \mathcal{R}_s ($0 \leq \mathcal{R}_s \leq 1$) は相似中心降伏比であり、相似中心面の正規降伏面に対する大きさの比である。さらに相似中心の発展則式(2.62)は以下のように書き換える。

$$\dot{\mathbf{s}} = c \left\| \mathbf{D}^p \right\| \left\| \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \hat{\mathbf{s}} \right) + \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \left\{ \frac{F'}{F} \dot{H} - \frac{1}{F} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right\} \hat{\mathbf{s}} \right. \quad (2.64)$$

ここに、 χ は材料定数であり、 \mathcal{R}_s の最大値である。

式(2.64)を式(2.55)に代入し, 背応力の発展則は次式に書き換えられ,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\alpha}}} &= \bar{R} \overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\alpha}}} - \dot{\bar{R}} \hat{\mathbf{s}} \\ &+ (1 - \bar{R}) \left[c \|\mathbf{D}^p\| \left\| \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\bar{R}} - \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \hat{\mathbf{s}} \right) + \overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\alpha}}} + \left\{ \frac{F'}{F} \dot{H} - \frac{1}{F} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \overset{\circ}{\boldsymbol{\beta}} \right) \right\} \hat{\mathbf{s}} \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

式(2.65)を式(2.53)に代入すると次式を得る.

$$\begin{aligned} &\text{tr} \left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \overset{\circ}{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right) \\ &- \text{tr} \left[\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \left\{ \bar{R} \overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\alpha}}} + (1 - \bar{R}) \left\{ c \|\mathbf{D}^p\| \left\| \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\bar{R}} - \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \hat{\mathbf{s}} \right) + \overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\alpha}}} \right. \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left. \left\{ \frac{F'}{F} \dot{H} - \frac{1}{F} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \overset{\circ}{\boldsymbol{\beta}} \right) \right\} \hat{\mathbf{s}} \right\} - \dot{\bar{R}} \hat{\mathbf{s}} \right\} \right] \\ &+ \text{tr} \left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \overset{\circ}{\boldsymbol{\beta}} \right) = \dot{\bar{R}} F + \bar{R} F' \dot{H} \end{aligned} \quad (2.66)$$

さらに Euler の同次関数の定理による次式を考慮し,

$$\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{\text{tr} \left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right)}{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \bar{\boldsymbol{\sigma}})} \bar{\mathbf{N}} = \frac{f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \bar{\boldsymbol{\sigma}})} \bar{\mathbf{N}} = \frac{\bar{R} F}{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \bar{\boldsymbol{\sigma}})} \bar{\mathbf{N}} \quad (2.67)$$

$$\bar{\mathbf{N}} \equiv \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} / \left\| \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right\| \quad (\|\bar{\mathbf{N}}\| = 1) \quad (2.68) \text{(re-record of (2.54))}$$

式(2.66)は,

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{R}F}{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}}\bar{\boldsymbol{\sigma}})} \text{tr}(\bar{\mathbf{N}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \\
& - \frac{\bar{R}F}{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}}\bar{\boldsymbol{\sigma}})} \text{tr} \left[\bar{\mathbf{N}} \left\{ \dot{\boldsymbol{\alpha}} + (1 - \bar{R}) \left\{ c \|\mathbf{D}^p\| \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\bar{R}} - \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \hat{\mathbf{s}} \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \left\{ \frac{F'}{F} \dot{H} - \frac{1}{F} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right\} \hat{\mathbf{s}} \right\} - \dot{\bar{R}} \hat{\mathbf{s}} \right\} \right] + \text{tr} \left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) = \dot{\bar{R}} F + \bar{R} F' \dot{H}
\end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}
& \text{tr}(\bar{\mathbf{N}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}) - \text{tr} \left[\bar{\mathbf{N}} \left\{ \dot{\boldsymbol{\alpha}} + (1 - \bar{R}) \left\{ c \|\mathbf{D}^p\| \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\bar{R}} - \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \hat{\mathbf{s}} \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \left\{ \frac{F'}{F} \dot{H} - \frac{1}{F} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right\} \hat{\mathbf{s}} \right\} - \dot{\bar{R}} \hat{\mathbf{s}} \right\} \right] \\
& + \text{tr} \left[\bar{\mathbf{N}} \left\{ \frac{1}{\bar{R}F} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) - \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}} - \frac{F' \dot{H}}{F} \right\} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}
& \text{tr}(\bar{\mathbf{N}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \\
& - \text{tr} \left[\bar{\mathbf{N}} \left\{ \frac{F'}{F} \dot{H} (\bar{\boldsymbol{\sigma}} + (1 - \bar{R}) \hat{\mathbf{s}}) + \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \dot{\bar{R}} \left(\frac{1}{\bar{R}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\mathbf{s}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + c \left(\frac{1}{\bar{R}} - 1 \right) \|\mathbf{D}^p\| \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{\bar{R}F} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1 - \bar{R}}{F} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \hat{\mathbf{s}} - c(1 - \bar{R}) \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \|\mathbf{D}^p\| \hat{\mathbf{s}} \right\} \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.71}$$

のように書き換えられ, さらに式(2.71)は次式の関係

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}} + (1 - \bar{R})\hat{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha} - (\mathbf{s} - \bar{\boldsymbol{\alpha}}) = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \frac{1}{\bar{R}}\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{s}} = \frac{1}{\bar{R}}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{R}\hat{\boldsymbol{s}}) = \frac{1}{\bar{R}}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \end{cases} \quad (2.72)$$

を用いれば、次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & \text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}) \\ & - \text{tr} \left[\bar{\mathbf{N}} \left\{ \frac{F'}{F} \dot{H} \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \left(\frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}} + c \left(\frac{1}{\bar{R}} - 1 \right) \|\mathbf{D}^p\| \right) \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{\bar{R}F} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \overset{\circ}{\boldsymbol{\beta}} \right) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (1 - \bar{R}) \left(\frac{1}{F} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \overset{\circ}{\boldsymbol{\beta}} \right) + c \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \|\mathbf{D}^p\| \right) \hat{\boldsymbol{s}} \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

硬化関数の発展則(2.22), (2.23)を用いて式(2.73)は次式のように表現できる。

$$\begin{aligned} & \text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}) \\ & - \text{tr} \left[\bar{\mathbf{N}} \left\{ \frac{F'}{F} h(\boldsymbol{\sigma}, H_i, \mathbf{D}^p) \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma}, H_i) \|\mathbf{D}^p\| + \left(\frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}} + c \left(\frac{1}{\bar{R}} - 1 \right) \|\mathbf{D}^p\| \right) \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{\bar{R}F} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, H_i) \right) \|\mathbf{D}^p\| \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (1 - \bar{R}) \left(\frac{1}{F} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, H_i) \right) + c \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \|\mathbf{D}^p\| \right) \hat{\boldsymbol{s}} \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.74)$$

ただし、一般的な異方性テンソル $\boldsymbol{\beta}$ の発展は、塑性ひずみの発達に誘起されると仮定し、移動硬化関数の発展則式(2.23)と同様の形式の次式を用いた。

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, H_i) \|\mathbf{D}^p\| \quad (2.75)$$

ここで次式の関連流動則を仮定し、

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \bar{\mathbf{N}} \quad (\dot{\lambda} > 0) \quad (2.76)$$

式(2.74)は次式のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} & \text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}) \\ & - \dot{\lambda} \text{tr} \left[\bar{\mathbf{N}} \left\{ \frac{F'}{F} h(\boldsymbol{\sigma}, H_i, \bar{\mathbf{N}}) \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma}, H_i) + \left(\frac{U(\bar{R})}{\bar{R}} + c \left(\frac{1}{\bar{R}} - 1 \right) \right) \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{\bar{R}F} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, H_i) \right) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (1 - \bar{R}) \left(\frac{1}{F} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, H_i) \right) + c \left(\frac{1}{\bar{R}} - 1 \right) \right) \hat{\mathbf{s}} \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

ただし,

$$\dot{\bar{R}} = U(R) \|\mathbf{D}^p\| \quad (2.78)$$

よって正值の比例係数 $\dot{\lambda}$ および塑性ひずみ速度 \mathbf{D}^p として次式を得る.

$$\dot{\lambda} = \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}})}{\bar{M}^p}, \quad \mathbf{D}^p = \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}})}{\bar{M}^p} \bar{\mathbf{N}} \quad (2.79)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \bar{M}^p \equiv & \text{tr} \left[\bar{\mathbf{N}} \left\{ \frac{F'}{F} h(\boldsymbol{\sigma}, H_i, \bar{\mathbf{N}}) \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma}, H_i) + \left(\frac{U(\bar{R})}{\bar{R}} + c \left(\frac{1}{\bar{R}} - 1 \right) \right) \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\bar{R}F} \left\{ \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, H_i) \right) \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{R}(1 - \bar{R}) \text{tr} \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, H_i) \right) \hat{\mathbf{s}} \right\} \right. \right. \\ & \left. \left. - c \left(\frac{1}{\bar{R}} - 1 \right) \hat{\mathbf{s}} \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

以上からひずみ速度は次式で与えられる.

$$\mathbf{D} = \mathbb{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\bar{M}^p} \bar{\mathbf{N}} \quad (2.81)$$

式(2.81)の逆関係として応力速度式 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ は次式で与えられる.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{E} \mathbf{D} - \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbb{E} \mathbf{D})}{\bar{M}^p + \text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbb{E} \bar{\mathbf{N}})} \mathbb{E} \bar{\mathbf{N}} = \left(\mathbb{E} - \frac{\mathbb{E} \bar{\mathbf{N}} \otimes \mathbb{E} \bar{\mathbf{N}}}{\bar{M}^p + \text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbb{E} \bar{\mathbf{N}})} \right) \mathbf{D} \quad (2.82)$$

ひずみ速度で表される関連流動則における正值の比例係数 $\dot{\Lambda}$ は次式で与えられる.

$$\dot{\Lambda} = \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbb{E} \mathbf{D})}{\bar{M}^p + \text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbb{E} \bar{\mathbf{N}})} \quad (2.83)$$

なお負荷基準は次式で与えられる(Hashiguchi, 2000).

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{D}^p \neq \mathbf{0} \quad \text{for } \dot{\Lambda} > 0 \\ \mathbf{D}^p = \mathbf{0} \quad \text{for } \textit{otherwise} \end{array} \right\} \quad (2.84)$$

2.4.2.1 弾性境界面

種々の金属材料ではある任意の応力状態に達するまでは **Hooke** 則に代表されるような弾性応答を示すことが実験的事実として知られ, 比例限界や弾性限界と呼ばれる. その後応力の増加に伴い, 滑らかに弾塑性応答へ遷移する. ただし, 比例限界・弾性限界という用語は必ずしも材料の弾性的力学応答を示しているわけではなく, 前者は応力とひずみの比例的な応答を保証するのみで, また後者は非常に小さい非弾性ひずみを含む最も小さな応力としてしばしば定義されている.

ところで, 非古典弾塑性構成式に属する前述の拡張下負荷面モデルを用いて, この所定の応力より小さな応力振幅の繰返し負荷挙動を予測した場合, わずかながらに塑性ひずみを生じてしまう. そこで, 金属材料に代表されるような弾性応答を明確に堅持する材料に対する応答予測性能の改善を目的とした次式の弾性境界面(Tsutsumi et al., 2006)を導入する.

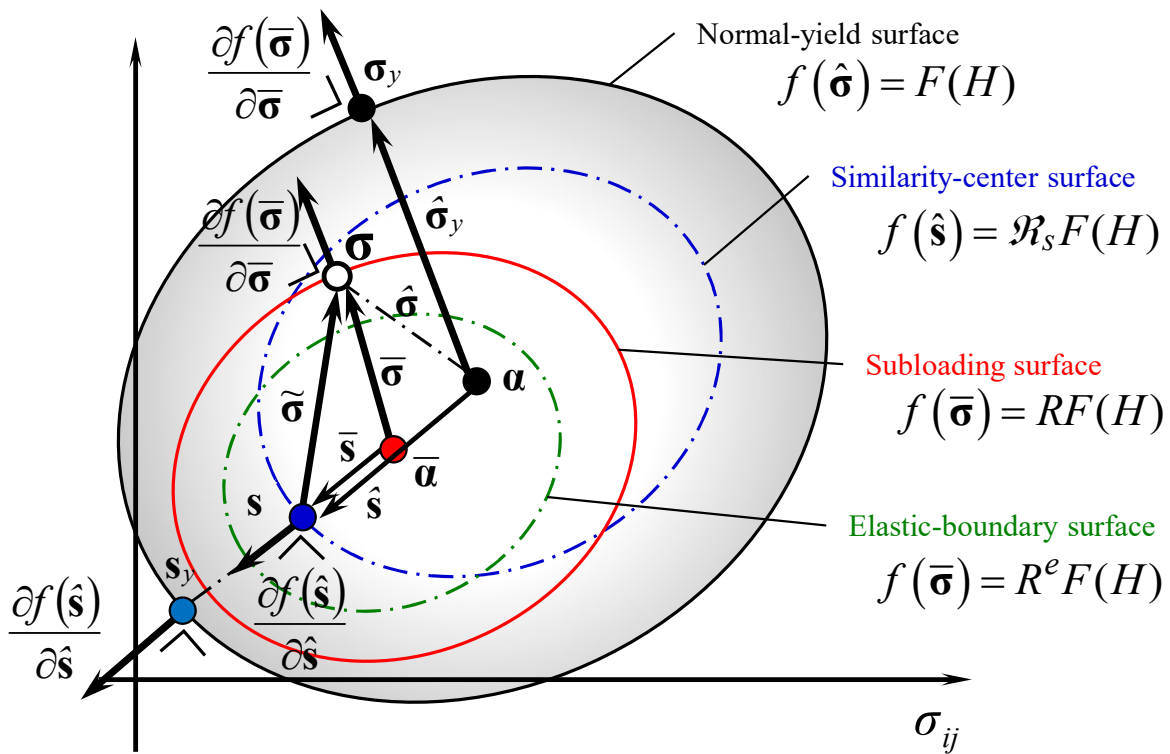


Fig. 2-8 Normal yield surface, subloading surface, similarity center surface and elastic boundary surface in stress space.

$$f(\bar{\sigma}, \beta) = R^e F(H) \quad (2.85)$$

ここに、 $R^e (<1)$ は弾性境界面の大きさを規定する材料関数であり、一般に応力や内部状態変数の関数である。

2.4.2.2 正規降伏面，下負荷面，相似中心面，弾性境界面

前述までに説明した，応力空間における正規降伏面，下負荷面，相似中心面，弾性境界面を Fig. 2-8 に示す。

2.4.2.3 正規降伏比の発展則

下負荷面式の物質時間微分式(2.53)は，正規降伏比 \bar{R} を含み，それ自身は塑性ひずみ速度と関連付けられていないため，適合条件式としての要件を満たさない。そこで，適合条件

を満たすため、正規降伏比 \bar{R} の発展則 $\dot{\bar{R}}$ を規定する。正規降伏比の発展則を規定するに当たり、実験的な観測事実を踏まえ、下記 1)~5)を仮定する。

- 1) 塑性ひずみ速度の大きさに対する正規降伏比の発展速度の比は無限で、その速度で下負荷面は弾性境界面に近づく。

$$\dot{\bar{R}}/\|\mathbf{D}^p\| \rightarrow \infty \quad \text{for } \bar{R} \leq R^e \quad (2.86)$$

- 2) 塑性ひずみ速度の大きさに対する正規降伏比の発展速度の比は、下負荷面と正規降伏面が一致するまでは、正值である。

$$\dot{\bar{R}}/\|\mathbf{D}^p\| > 0 \quad \text{for } R^e < \bar{R} < 1 \quad (2.87)$$

- 3) 塑性ひずみ速度の大きさに対する正規降伏比の発展速度の比は、正規降伏比の増大と共に減少する単調減少関数である。
- 4) 下負荷面は負荷面の役割も果たすこと、また常に現応力点を通ることから、正規降伏面を超えて大きくなる。つまり、塑性ひずみ速度の大きさに対する正規降伏比の発展速度の比は 0 となる。

$$\dot{\bar{R}}/\|\mathbf{D}^p\| = 0 \quad \text{for } \bar{R} = 1 \quad (2.88)$$

- 5) もし下負荷面が正規降伏面より大きくなった場合、塑性ひずみ速度の大きさに対する正規降伏比の発展速度の比は負値である。

$$\dot{\bar{R}}/\|\mathbf{D}^p\| < 0 \quad \text{for } \bar{R} > 1 \quad (2.89)$$

本仮定に基づき正規降伏比の発展則を次式のように仮定する。

$$\dot{\bar{R}} = U(R)\|\mathbf{D}^p\| \quad (2.90)(\text{re-record of (2.78)})$$

ここに U は正規降伏比 \bar{R} の単調減少関数であり、下記条件を満たすものとする。

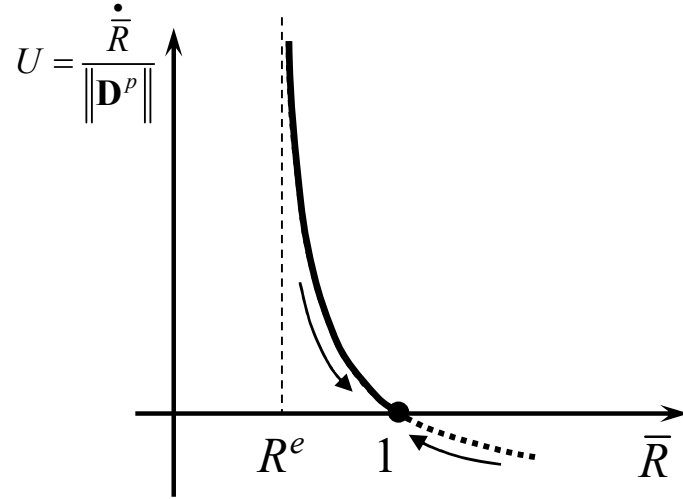


Fig. 2-9 Monotonically decreasing function $U(\bar{R})$ in evolution rule of normal yield ration \bar{R} .

$$U(R) \begin{cases} \rightarrow \infty & \text{for } 0 \leq \bar{R} \leq R^e & (\text{quasi-elastic state}) \\ > 0 & \text{for } R^e < \bar{R} < 1 & (\text{sub-yield state}) \\ = 0 & \text{for } \bar{R} = 1 & (\text{normal-yield state}) \\ < 0 & \text{for } \bar{R} > 1 & (\text{over normal-yield state}) \end{cases} \quad (2.91)$$

式(2.91)から拡張下負荷面モデルは、応力を正規降伏面に引き戻す自動制御機能を有する。ここで U の具体関数形として次式を採用する。

$$U(R) = u(\mathcal{R}_s, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \cot \left(\frac{\pi \langle \bar{R} - R^e \rangle}{2(1 - R^e)} \right) \quad (2.92)$$

$$u(\mathcal{R}_s, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = u_0 \exp(u_s \mathcal{R}_s S_\sigma) \quad (2.93)$$

$$S_\sigma \equiv \text{tr} \left(\hat{\mathbf{n}}_s \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'\|} \right); (-1 < S_\sigma < 1) \quad (2.94)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_s \equiv \frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}})}{\partial \hat{\mathbf{s}}} \bigg/ \left\| \frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}})}{\partial \hat{\mathbf{s}}} \right\| \quad (2.95)$$

ここに、 u_0, u_s は材料定数であり前者は u の平均値に相当する。 $\hat{\mathbf{n}}_s$ は相似中心面の外向き法線テンソルである。 $\langle \rangle$ は、任意スカラー A に対して $\langle A \rangle = (A + |A|)/2$ で定義される Macaulay の括弧、つまり、 $A \geq 0$ に対して $\langle A \rangle = A$ 、 $A < 0$ に対して $\langle A \rangle = 0$ である。

2.4.2.4 繰返し負荷による損傷・ダメージへの拡張

材料がひずみ振幅一定の繰返し負荷を受けた場合、単調負荷で観察される加工硬化特性と異なり、応力が低下する軟化現象を示す場合があり、繰返し軟化現象と呼ばれる。繰返し軟化特性に代表される塑性変形の蓄積の結果として生じる材料特性の変化を“ダメージ”と定義し、正規降伏比 \bar{R} の発展則を拡張する(堤ら, 2008)。具体的には式(2.92)にダメージ関数 $D(H_d)$ を導入し、次式のように拡張した。

$$U(R, D) = (1 - D)u(\mathcal{R}_s, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \cot \left(\frac{\pi \langle \bar{R} - R^e \rangle}{2(1 - R^e)} \right) \quad (2.96)$$

$$D(H_d) = (1 - d_2) \left[1 + \left(\frac{d_1}{U} \right)^{d_3} \right]^{-1} \quad (2.97)$$

ここに、 H_d は内部状態変数であり、ダメージパラメータと呼ぶ。 $d_i (i=1, 2, 3)$ はダメージの進展速度に影響を与える材料定数である。 $D(H_d)$ は H_d の単調増加関数であり、その値は初期値 0 から増加し $1 - d_2$ に漸近する。これは、繰返し負荷による塑性ひずみの累積量に応じてダメージパラメータ H_d が増大し、応力が低下(下負荷面の縮小)することを表現している $D \rightarrow \text{increasing}, U \rightarrow \text{decreasing}, \bar{R} \rightarrow \text{smaller}$ 。ダメージパラメータの発展則として次式を採用する。

$$\dot{H}_d = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{D}^p\| \bar{D} \quad (2.98)$$

$$\bar{D}(\tilde{R}) = (1 - k_2) \left[1 + \left(\frac{k_1}{\tilde{R}} \right)^{k_3} \right]^{-1} \quad (2.99)$$

$$\tilde{R} \equiv \bar{R} - R^e \quad (2.100)$$

上式の関数 \bar{D} は式(2.97)と同形式で与えられ、 $k_i (i=1,2,3)$ は、正規降伏比 \bar{R} がダメージの進展速度に与える影響を規定する材料定数である。ダメージパラメータ H_d は正規降伏比 \bar{R} の単調増加関数であり、その値は $1 - k_2$ に漸近する。これは、応力が正規降伏面に近いほど、すなわち、材料が塑性的であるほどダメージが蓄積しやすいということを表現している。また、 \bar{D} は正規降伏比 \bar{R} と塑性ひずみ速度の大きさ $\|\mathbf{D}^p\|$ の積、すなわち正規化した塑性仕事に対応する量として与えられている。この定式化により応力範囲もしくはそれに対応する正規降伏比が大きな場合、より多くのダメージが蓄積されることになる。

2.5 接線塑性構成式への拡張

2.5.1 接線塑性

これまでに説明した弾塑性構成式は、古典弾塑性構成式、非古典弾塑性構成式によらず(関連)流動則を仮定し、適合条件式から塑性ひずみ速度を記述した。しかしながら、この定式化による塑性ひずみ速度は、非比例負荷条件下の材料挙動について実験的に観察される事実と異なる特徴を有する。

- 1) 塑性ひずみ速度の大きさは応力速度の降伏面外向き法線方向成分にのみ依存し、降伏面接線方向成分には依存しない。(式(2.79)b)
- 2) またその方向は、式(2.79)b から応力速度方向の変化に追随することなく、現応力点における下負荷面外向き法線方向(Fig. 2-6 の $\bar{\mathbf{N}}$ 方向)のみに限定される。すなわち応力速度方向に依存しない。

つまり、実在材料で観察される降伏面接線方向の非弾性ひずみは生じないと仮定して定式化されている。従って負荷経路が比例負荷経路から逸脱する非比例負荷問題に、これまでに述べた弾塑性構成式を適用した場合、降伏面接線方向の非弾性ひずみが考慮されないことから材料の非弾性応答が過小評価され、塑性変形が卓越した塑性不安定後のせん断体形成が表現できないなど、数値解析の予測精度が低下することが指摘されている

(Christoffersen and Hutchinson, 1979; Tvergaard et al., 1981; 北川, 1982; Gotoh, 1985abc; Becker and Needleman, 1986; 後藤, 1990). このような欠点を補うため, これまでに降伏面接線方向応力速度あるいはひずみ速度を考慮した種々の弾塑性構成式が提案された. なお, (関連・非関連)流動則は, 塑性ひずみ速度方向が(偏差)応力速度方向と一致することから, 共軸弾塑性構成式と呼ばれるが, 降伏面接線方向の応力速度を考慮した弾塑性構成式はこれらの方向が一致しないことから, 非共軸弾塑性構成式とも呼ばれる. 以下にこれまでに提案された非共軸弾塑性構成式の代表的なモデルを示す.

1) 現象論的コーナー理論

塑性ポテンシャル面上の応力点に角点または尖り点を仮定した現象論的コーナー理論 (Christoffersen and Hutchinson, 1979; Gotoh, 1985abc)が提案された. これによれば, 塑性ポテンシャルの形状を円錐面などとし, 流動則を仮定すれば, 塑性ひずみ速度方向は角点における円錐面の法線群が作る円錐面内の方向を取りうることになる (橋口, 1990). しかしながら, 塑性ひずみ速度と応力速度関係は一般に非線形となり, 数値解析における応力積分は複雑なものになる. また角点を仮定するためこれまでに提案された種々の降伏関数や硬化則に応用するには困難が生じ, さらに材料定数が多くその同定に困難が伴うなどの問題がある.

2) 複数の降伏面の交差モデル

複数の降伏面を仮定する降伏面接線方向の非弾性ひずみを導入した種々の弾塑性構成式が提案された (Batdorf and Budiansky, 1949; Koiter, 1953; Mandel, 1965; Hill, 1966). その中で Koiter モデルを Sewell (1973, 1974)が採用し, 単軸負荷後に様々な方向へ微小な負荷を与えた解析に適用したが, 一般的な非比例負荷問題への適用は困難である (Christoffersen and Hutchinson, 1979).

3) 歪塑性モデル

歪塑性という用語は Dafalias (1986)により用いられ, これに分類される構成式によれば, 塑性ひずみ速度は応力の方向 $\dot{\boldsymbol{\sigma}} / \|\dot{\boldsymbol{\sigma}}\|$ に依存する (Mroz, 1966; Dafalias and Popov, 1977). 他方, 塑性ひずみ速度はひずみ速度方向 $\mathbf{D} / \|\mathbf{D}\|$ に依存する構成式も提案されている (Hill, 1959; Simo, 1987; Kuroda and Tvergaard, 2001abc). 塑性ひずみ速度の方向の場合における特異性は代数的に導入されるが, 塑性ひずみ速度の大きさは適合条件式から決定される. それゆえ, 応力速度が降伏面の接線方向成分を有する場合, 塑性ひずみ速度は減少する.

4) J_2 変形理論

Budiansky (1959), Rudnicki and Rice (1975)は応力と塑性ひずみを一対一に対応づける変形理論(Hencky, 1924)について再検討した上で、これを時間微分した速度型の変形理論を提案した。また Rudnicki and Rice (1975)は fissure モデルを用いた滑り機構の検討から、降伏面の角点の発現は応力速度の等方成分によらないと主張し、Mises 降伏面に等方硬化を考慮した弾塑性構成式に降伏面の接線方向の応力速度成分による塑性ひずみ速度を付加することを提案した。これによれば、速度形弾塑性構成式の線形性は失われず、現象論的コーナー理論論のように非線形の連立方程式を解く必要がなく、既往の弾塑性モデルへの導入も容易である。

2.5.2 接線塑性構成式の定式化

前項に示した 1)~3)のモデルは、下記問題点の全てあるいはいずれかを含むと考えられる。

- 1) 適合条件に基づく定式化のため、非比例負荷を含む一般的な負荷経路問題に適用するのは困難である。
- 2) 応力速度-ひずみ速度関係は一般に非線形となり、その逆関係は得られず、変位法に基づく有限要素法などの数値解析に適用する場合は数値解析の手続きが別途必要となり複雑な実装が必要とされる。
- 3) これまでに提案された異方性降伏関数、硬化関数に導入することは困難である。

そこで、本研究では前項 4) J_2 変形理論に基づいた定式化を採用する。ところで、Rudnicki and Rice (1975)によって提案された J_2 変形理論は、Mises 降伏条件に限定されるものであることから、その制限を受けないように Hashiguchi (1993,1998,2005), Hashiguchi and Tsutsumi (2001,2003), Tsutsumi and Hashiguchi (2005)によって提案された定式化を採用する。なお、この非弾性ひずみは Hashiguchi (1993)にならい本論文では接線塑性ひずみ、本効果を導入した構成式を接線塑性弾塑性構成式と称する。

以降に、接線塑性拡張下負荷面モデルの定式化を述べる。ひずみ速度は弾性部分、塑性部分および接線塑性部分に加算的に分解できると仮定する。

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p + \mathbf{D}^t \quad (2.101)$$

ここに、接線塑性ひずみ速度 \mathbf{D}^t は偏差応力速度 $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}'$ の下負荷面上の接線方向成分である接線偏差応力速度 $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}'_t$ により生じると仮定する。接線偏差応力速度は偏差法線応力速度と

偏差接線応力速度に加算的に分解できる. (Fig. 2-10)

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}' = \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}'_n + \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}'_t \quad (2.102)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}'_n &\equiv \bar{\mathbf{n}}' \otimes \bar{\mathbf{n}}' \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \text{tr}(\bar{\mathbf{n}}' \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}) \bar{\mathbf{n}}' \\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}'_t &\equiv \hat{\mathbb{I}}' \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} - \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}'_n \quad (\text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}'_t) = 0) \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

$$\bar{\mathbf{n}}' = \left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)' / \left\| \left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)' \right\| = \frac{\bar{\mathbf{N}}'}{\|\bar{\mathbf{N}}'\|} \quad (\|\bar{\mathbf{n}}'\| = 1) \quad (2.104)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbb{I}}' &\equiv \bar{\mathbb{I}}' - \bar{\mathbf{n}}' \otimes \bar{\mathbf{n}}' \\ \hat{I}'_{ijkl} &\equiv \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} - \bar{n}'_{ij}\bar{n}'_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbb{I}}' &\equiv \bar{\mathbb{I}} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \\ \bar{I}'_{ijkl} &\equiv \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (2.106)$$

ここに, \mathbf{I} は 2 階の恒等テンソルである. $\bar{\mathbb{I}}'$ および $\hat{\mathbb{I}}'$ はそれぞれ任意の 2 階テンソルを, その偏差成分の 2 階テンソルに変換する 4 階の偏差変換テンソル, および, その降伏面接線方向の偏差成分の 2 階テンソルに変換する 4 階の偏差接線変換テンソルである.

接線塑性ひずみ速度 \mathbf{D}^t は接線偏差応力速度 $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}'_t$ と線形に関係づけられると仮定する.

$$\mathbf{D}^t = A \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}'_t \quad (2.107)$$

ここに, 接線非弾性係数 A は一般に応力状態や内部状態変数のスカラー関数であり, 正規降伏比 \bar{R} の単調増加関数である.

また, Rudnicki and Rice (1975) の指摘を仮定し, 接線塑性ひずみ速度は正規降伏面の

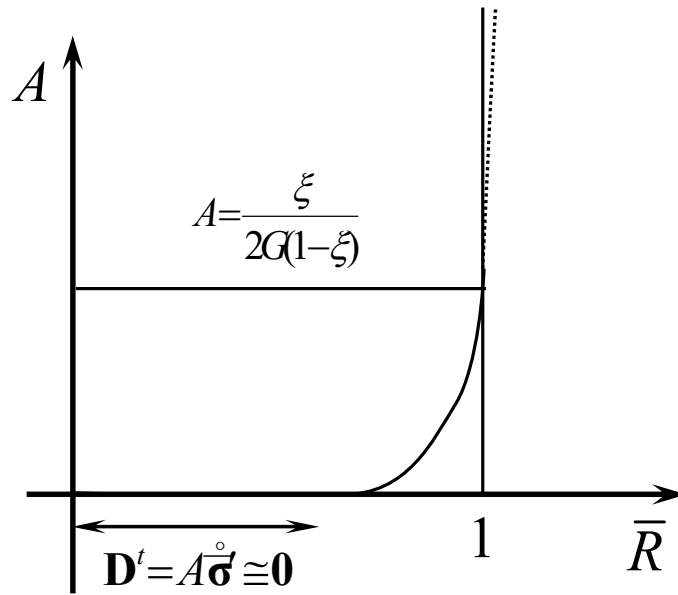


Fig. 2-11 Relationship between tangential non-elastic coefficient A and normal yield ratio \bar{R} .

$$A = \frac{T}{2G(1-T)} \quad (2.110)$$

T は応力状態(正規降伏比)や内部状態変数の関数で, 2つの材料定数 ξ, b とともに次式を仮定する.

$$T = \xi \bar{R}^b \quad (2.111)$$

正規降伏状態($\bar{R} = 1$)においては $T = \xi$ となる. (Fig. 2-11)

なお, 式(2.108)から明らかなように, 応力のスカラー関数 A を0とすることで, 接線塑性弾塑性構成式は従来の弾塑性構成式(2.81)に帰着する.

2.6 金属の弾塑性構成式的具体形

2.6.1 弾性構成式

亜弾性の速度形弾性構成式には, Hooke 則に従う等方弾性体を仮定し式(2.13)を採用する.

2.6.2 塑性構成式

1) 負荷関数

本研究で対象とする金属は一般構造用圧延鋼 SS400(JIS)や溶接構造用圧延鋼 SM490B(JIS)材が主であることから、負荷関数は **Mises** の降伏条件に基づく次式を採用する.

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}'\| \quad (2.112)$$

2) 等方硬化関数およびその発展則

相当塑性ひずみにより硬化し、その増大とともに硬化挙動が飽和状態に漸近する次の等方硬化関数(Hashiguchi, 1989)を採用する.

$$F(H) = F_0 \{1 + h_1 [1 - \exp(-h_2 H)]\} \quad (2.113)$$

$$F' = F_0 h_1 h_2 \exp(-h_2 H) \quad (2.114)$$

$$\dot{H} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{D}^p\|, \quad h = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (2.115)$$

ここに、 F_0 は正規降伏面の大きさ F の初期値で、初期降伏応力に対応する。また、 h_1, h_2 はそれぞれ等方硬化の最大値およびその速度を規定する材料定数である。ただし、炭素鋼炭素鋼に特有の降伏棚挙動を表現し得るように、降伏棚挙動の消散、つまり降伏棚領域から硬化挙動領域への移行は、それまでに材料が受けた累積塑性ひずみ H が降伏棚消散累積塑性ひずみ H_p を超えた際に生じるものと仮定し、塑性負荷過程 $\mathbf{D}^p \neq \mathbf{0}$ における以下の条件を仮定した。

$$\begin{cases} F' = 0, \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0} & \text{for } H \leq H_p \quad (\text{plateau region}) \\ F' \neq 0, \dot{\boldsymbol{\alpha}} \neq \mathbf{0} & \text{for } H > H_p \quad (\text{hardening region}) \end{cases} \quad (2.116)$$

ここに、 H_p は降伏棚消散累積塑性ひずみを示す材料定数である。しがたって、等方

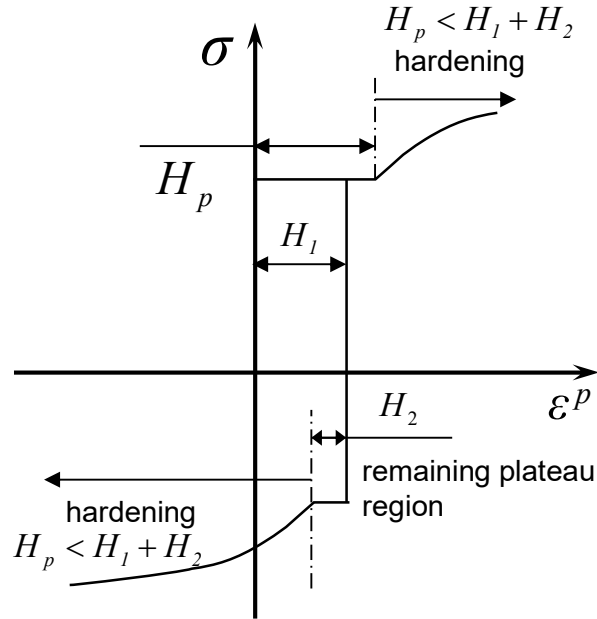


Fig. 2-12 Enhancement for material with stress yield plateau.

硬化関数 F は等方硬化変数 H に加えて降伏棚消散累積塑性ひずみ H_p の関数となる。 $\dot{\alpha}$ は後述 3) の移動硬化速度である。

3) 移動硬化の発展則

移動硬化の発展則は、種々の実験結果の傾向、具体的には背応力速度は徐々に低下するが、逆負荷開始時にはその速度は急激に上昇する、を捉えられるように提案されている非線形移動硬化モデル(Armstrong and Frederick, 1966; Hashiguchi, 1989)を採用する。

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \mathbf{a} \|\mathbf{D}^p\| \\ \mathbf{a} &\equiv \sqrt{\frac{2}{3}} a_\alpha (r_\alpha F \bar{\mathbf{N}} - \alpha) \end{aligned} \quad (2.117)$$

ここに、 $a_i (i=1,2,3)$ は移動硬化の速度を規定する材料定数である。

4) 相似中心の発展則

式(2.64)の c, χ を定数とし、かつ一般異方性テンソル $\beta = \dot{\beta} = \mathbf{0}$ とした次式を採用する。

$$\dot{\mathbf{s}} = c \left\| \mathbf{D}^p \right\| \left\| \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\bar{R}} - \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \hat{\mathbf{s}} \right) + \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{F'}{F} \dot{H} \hat{\mathbf{s}} \right\| \quad (2.118) \text{(re-record of (2.64))}$$

5) 接線塑性特性

式(2.110)および式(2.111)を用いる.

2.7 結言

本章では, 本研究で採用する非古典弾塑性構成式に属する拡張下負荷面モデルおよび接線塑性への拡張について詳細に述べるとともに, 金属材料に対する弾塑性構成モデルの具体関数を示した. 本章で得られた結論を以下に示す.

- 1) 本研究で必要な現象論的弾塑性構成式として初めに古典弾塑性構成式の枠組みについて概説し, 続いて繰返し負荷問題のために提案された降伏面内部を弾性域としない種々の非古典弾塑性構成式を説明するとともにそれらの数学的・物理的問題点を明示した.
- 2) それらの問題を克服した拡張下負荷面モデルの定式化を詳細に示し, さらに, 非比例負荷問題に適用するための非共軸性の接線塑性弾塑性構成式についてその定式化を述べた.
- 3) また本研究で対象とする炭素鋼特有の降伏後の応力が増加しない降伏棚挙動を表現し得るように, 等方・移動硬化関数の発展側を改良した.
- 4) 後述する具体的適応事例のために, 金属材料に対する各種関数の具体形を示した.

3章 接線塑性弾塑性構成式の有限要素ソルバへの実装

3.1 緒言

本章では, 第 2 章で定式化した非共軸性の接線塑性弾塑性構成式を有限要素ソルバへ実装するための数値計算的手続きについてその定式化を述べる. 本研究では, 汎用陰解法非線形有限要素ソルバ Abaqus/Standard ver6.13(Dassault Systèmes Simulia Corp., 2013)を用い, ユーザー定義材料 UMAT として本接線塑性弾塑性構成式を実装する. 一般に弾塑性構成式は速度(増分)形で与えられるため, 弾塑性変形の数値計算は解析精度保証の観点から微小な時間増分を用いることが望ましい. ところが, 非線形現象の数値解析において, 大型構造物内の局所的な応力集中箇所に発生する応力やひずみ, さらには繰り返し疲労荷重が作用する際の非弾性なダメージの累積などを求めるような, 空間的および時間的にも大規模な問題も数多いことから, 計算精度の低下を招くことなく(例えば時間増分の増大などによる)計算効率に優れた数値計算手法が求められる. 本研究で採用する弾塑性構成式は, 下負荷面モデル(Hashiguchi and Ueno, 1977; Hashiguchi, 1989)を基に定式化されているため, 前章で示したように, 常に応力を正規降伏面に引き戻す機能がその定式化の過程で導入されており, 塑性的負荷過程においてはある程度大きな時間増分で計算を行ったとしても, 計算精度の低下は大きくないものと考えられる. しかしながら, その機能は応力を正規降伏面に引き戻すもので, 現応力点を通る下負荷面に引き戻す機能ではないため, 下降伏状態あるいは除荷過程において, 計算効率向上のために大きな時間増分で計算を行った場合, 計算精度が低下することが指摘されている(橋口ら, 2014). そこで計算効率を向上させつつ数値計算精度を確保するために, カuttingプレーン・プロジェクション(Simo and Ortiz, 1985)に基づくリターンマッピング(Hashiguchi and Mase, 2011; 橋口ら, 2014)を基に, さらに接線塑性弾塑性構成式に適応し得るように拡張した数値計算アルゴリズム(Tsutsumi and Fincato, 2014; Fincato and Tsutsumi, 2015)を採用した. 本章ではその定式化を示すとともに, 汎用非線形有限要素ソルバへ実装し数種類の境界値問題の数値解析を行うことで本手法が計算効率に優れていることを検証する.

3.2 リターンマッピング

材料非線形性を伴う問題に関するリターンマッピングによる応力更新は Wilkins(1964)によって定式化された. その後, Krieg and Krieg(1967), Simo and Ortiz(1985),

Phillinger(1986)などにより、より一般化された形式のリターンマッピングの定式化がなされた。リターンマッピングはクローゼストポイント・プロジェクション(closest-point projection method)とカッティングプレーン・プロジェクション(cutting-plane projection method)の二つに大別される。クローゼストポイント・プロジェクションは完全陰解法の手法であり、降伏基準や内部状態変数の発展則の全未知変数を同時に満たすべき連立方程式の一次微分である **Jacobi** 行列の導出が必要とされる。クローゼストポイント・プロジェクションの優れた点は、非線形方程式の整合した線形化(Huges and Pister, 1978)によって得られる収束基準に対する二次の漸近速度、つまり良好な収束性である。しかしながら、弾塑性構成式に含まれる具体的材料関数の解析的微分式の導出が求められ、例えば粘土、土、コンクリートなどの粒状体に用いられる複雑な形状を有する降伏面の場合、その作業は困難を伴うことが指摘されている(Huang and Griffiths, 2009)。一方カッティングプレーン・プロジェクションは、完全な陰解法ではなく、クローゼストポイント・プロジェクションのように解析的な導関数の導出は不要であり、複雑な関数を含む弾塑性構成式には適しているものと考えられる。なお、カッティングプレーン・プロジェクションは解析的に整合した接線係数(consistent tangent operator)は得られないため、**Newton-Raphson** 法の二次収束を得るためには、数値的に整合した接線係数を算出する必要がある(Miehe, 1996)ものの、この演算は適合条件の線形化によって可能で、それはクローゼストポイント・プロジェクションの場合に必要な各種導関数の導出に比べると極めて容易である。以上のことから、本論文では、カッティングプレーン・プロジェクションに基づくリターンマッピングの定式化を行った。

まず、増分計算の過程において、収束基準を満たした n ステップから次の $n+1$ ステップの収束計算を考える。その際、等方硬化変数、背応力を表す移動硬化変数や降伏面といった全ての塑性的内部状態変数を固定し、純粹弾性応答、つまり試行状態(trial state)を仮定する。この仮定は材料の物理応答としては一般には許容されず、多くの場合、材料に生じる応力レベルは過大に見積もられる。今最終的に求めるべき $n+1$ ステップにおける応力を $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(final)}$ 、既に求まっている n ステップにおける正規降伏比を R_n 、等方硬化変数を H_n 、移動硬化変数を $\boldsymbol{\alpha}_n$ とし、次式の基準を用いて試行応力 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(trial)}$ が下負荷面内に存在するか否かの判定を行う。

$$\left. \begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(trial)} - \boldsymbol{\alpha}_n) \leq R_n F(H_n) & \text{ then } \mathbf{D}_{n+1}^p = 0 \text{ and } \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(trial)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(final)} \\ f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(trial)} - \boldsymbol{\alpha}_n) > R_n F(H_n) & \text{ then } \mathbf{D}_{n+1}^p \neq 0 \text{ and } \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(trial)} \neq \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(final)} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

本式(3.1)の第 1 式を満たした場合、弾性除荷と判断でき、試行応力は n ステップ終了時における下負荷面内部に留まることとなり、入力されたひずみ速度を弾性ひずみ速度として問題なく、 $n+1$ ステップにおける試行応力は当該ステップにおける最終応力として採用される。一方第 2 式の場合、入力されたひずみを弾性部分と塑性分に分解し、塑性変形過程として応力および内部状態変数を更新する必要がある。その更新における反復試行回数を k とし、次式を用いる。なお、下式の詳細関数形に関する記述は前章を参照されたい。

$$\begin{aligned}
f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(k)}) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left| \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{*(k)} \right|; \quad U(R) = u \cot \left(\frac{R_{n+1}^{(k)} - R_e}{1 - R_e} \right) \\
\mathbf{N} = \bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N}^* &= \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{*(k)}}{\left| \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{*(k)} \right|}; \quad \mathbf{a}_{n+1}^{(k)} = a_a \left(r_a F_{n+1}^{(k)} \mathbf{N}_{n+1}^{(k)} - \sqrt{\frac{2}{3}} \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} \right) \\
F_{n+1}^{(k)} &= F_0 \left[1 + h_1 \left\{ 1 - e^{(-h_2 H_{n+1}^{(k)})} \right\} \right]; \quad F_{n+1}^{*(k)} = F_0 h_1 h_2 e^{(-h_2 H_{n+1}^{(k)})} \\
M_p = \bar{M}_p = \mathbf{N}_{n+1}^{(k)} &: \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{F_{n+1}^{*(k)}}{F_{n+1}^{(k)}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(k)} + \mathbf{a}_{n+1}^{(k)} + \frac{U_{n+1}^{(k)}}{R_{n+1}^{(k)}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(k)} + c(1 - R_{n+1}^{(k)}) \left\{ \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(k)}}{R_{n+1}^{(k)}} - \frac{\hat{\boldsymbol{s}}_{n+1}^{(k)}}{\chi} \right\} \right]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

最終的に次の試行計算 $k+1$ における正值の比例係数 $\lambda_{n+1}^{(k+1)}$ は次式で与えられる。

$$\lambda_{n+1}^{(k+1)} = \frac{\left(\mathbf{N}_{n+1}^{(k)} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(k)} \right)}{f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)})} \left[\frac{f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}) - R_{n+1}^{(k)} F_{n+1}^{(k)}}{M^p + \mathbf{N}_{n+1}^{(k)} : \mathbb{E} : \mathbf{N}_{n+1}^{(k)}} \right] \tag{3.3}$$

式(3.3)は弾性的に算定された応力が下負荷面まで降下するために生じるべき塑性ひずみ増分を、言い換えると塑性ひずみ増分によって生じる応力の緩和量を決めるべき量として捉えられる。この比例係数を用いれば $k+1$ における応力は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} + d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{p(k+1)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} - \mathbb{E} : \lambda_{n+1}^{(k+1)} \mathbf{N}_{n+1}^{(k)} \tag{3.4}$$

ここに、試行計算 k 回目で得られる増分を $d(\)$ 、右上の添え字 $()^p$ は塑性変形による成分であることを表す。式(3.2)から式(3.4)を用いて、次式を満たすまで反復計算を行い、 $n+1$ ステップにおける最終的な応力および内部状態変数を得る。

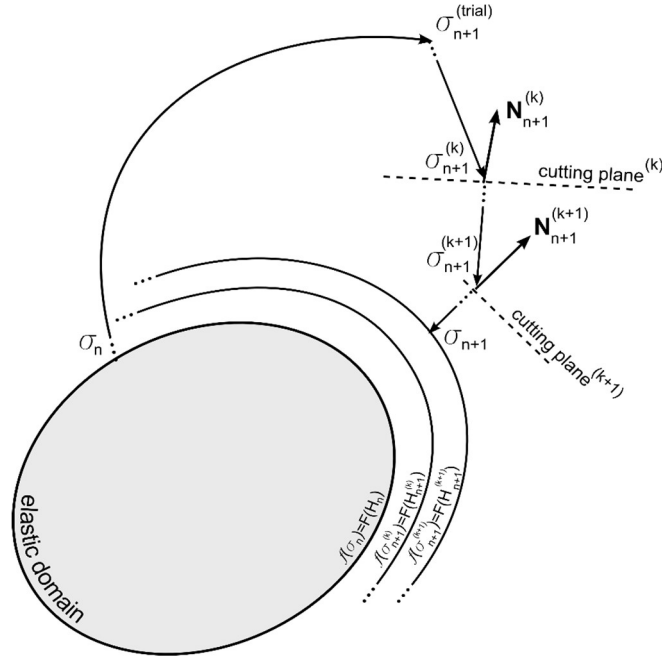


Fig. 3-1 Schematic representation of cutting plane return mapping algorithm.

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(k+1)}) - R_{n+1}^{(k+1)} F_{n+1}^{(k+1)} = 0 \quad (3.5)$$

以上に示したカッティングプレーン・プロジェクションによる数値計算手続きでは, Fig. 3-1 に示すように, 下負荷面 の Taylor 展開の一次近似によって得られる応力増分と内部変数の増分の線形関係で描かれる平面の現応力点における内向き法線方向に応力低下を生じる(橋口ら, 2014).

3.3 接線塑性弾塑性構成式への拡張

前節に述べたリターンマッピング手法は, 本研究で採用する非共軸の接線塑性弾塑性構成式には対応できない. 接線塑性ひずみ速度による応力速度は前章に示した式(2.109)で与えられる.

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\mathbf{E} - \frac{\mathbf{E}\bar{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{E}\bar{\mathbf{N}}}{\bar{M}^p + \text{tr}(\bar{\mathbf{N}}\mathbf{E}\bar{\mathbf{N}})} - 2G \frac{2GA}{1+2GA} \hat{\mathbb{I}}' \right] \mathbf{D} \quad (3.6)(\text{re-record of (2.109)})$$

上式右辺の第 1 項, 第 2 項は弾塑性変形によるものであり, 第 3 項が接線塑性ひずみによる

ものである。応力のスカラー関数である接線非弾性係数 A の具体形として次式を仮定すれば、

$$A = \frac{T}{2G(1-T)} \quad (3.7)(\text{re-record of (2.110)})$$

式(3.6)は次式のように書き換えられる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E}\mathbf{N} \otimes \mathbf{E}\mathbf{N}}{M_p + \text{tr}(\mathbf{N}\mathbf{E}\mathbf{N})} \right\} \mathbf{D} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}'_i \quad (3.8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'_i = T \left(2G \hat{\mathbb{I}}' \right) \mathbf{D} \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbb{I}}' &\equiv \bar{\mathbb{I}}' - \bar{\mathbf{n}}' \otimes \bar{\mathbf{n}}' \\ \hat{I}'_{ijkl} &\equiv \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} - \bar{n}'_{ij} \bar{n}'_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)(\text{re-record of (2.105)})$$

式(3.4)で算定された応力は式(3.8)を用いて次式で表される。

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{E} : \lambda_{n+1}^{(k+1)} \mathbf{N}_{n+1}^{(k)} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}'_i \quad (3.11)$$

しかしながら、右辺第 3 項の接線応力速度による応力緩和を導入した場合、上式は応力のつり合い条件を満たさない。実際に右辺第 1 項、第 2 項の弾塑性部分は適合条件を満足し、それにより正規降伏比 \bar{R} および正規降伏面の大きさ F が規定されている。したがって、第 3 項によりリターンマッピングにより算定された $n+1$ ステップにおける応力がさらに更新されると、応力は下負荷面(正規降伏状態であれば、正規降伏面)の外側に飛び出すこととなる。この問題は、特に大きな時間増分を用いて計算が実行された場合に顕著になり、計算精度の観点から修正する必要がある。

本論文ではこの問題に対する応力の修正アルゴリズム(Tsutsumi and Fincato, 2014; Fincato and Tsutsumi, 2015)を導入する。この修正アルゴリズムは Fig. 3-2 に示すように、リターンマッピングにより算定された応力を、さらに接線偏差応力速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'_i$ 方向に移動し、その点と塑下負荷面の中心を結ぶ線と下負荷面の交点の方向に修正する。この接線偏差応力

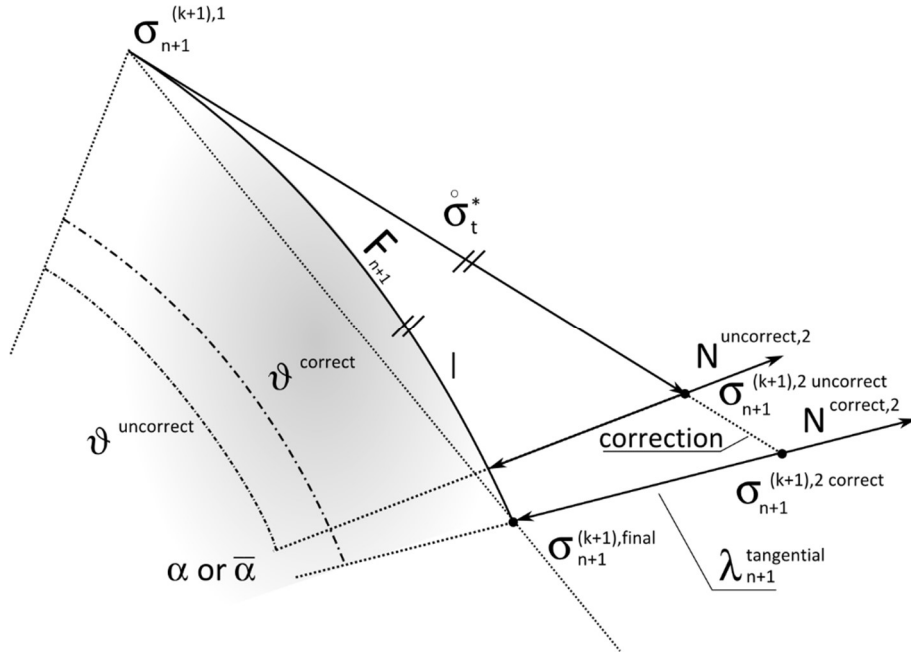


Fig. 3-2 Correction method for tangential stress rate contribution.

速度 $\dot{\sigma}'_t$ による応力の修正は，下負荷面上に沿って移動する修正量(式(3.12))を幾何学的に算定するために用いられる。

$$\left. \begin{aligned}
 g^{uncorrect} &= \tan^{-1}(\|\dot{\sigma}'_t\|/F_{n+1}) \\
 g^{correct} : 360 &= \|\dot{\sigma}'_t\| : 2\pi r \rightarrow g^{correct} = \|\dot{\sigma}'_t\| \cdot 360 / 2\pi r \\
 \|corr.\| &= (\|\dot{\sigma}'_t\| \cdot g^{correct}) / g^{uncorrect}; \quad corr. = (\|corr.\| / \|\dot{\sigma}'_t\|) \cdot \dot{\sigma}'_t
 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

$$\sigma_{n+1}^{(k+1),2correct} = \sigma_{n+1}^{(k+1),1} - \left(\dot{\sigma}'_t + corr. \right) \quad (3.13)$$

式(3.13)により接線塑性ひずみ速度による修正量を算定した後，次式で与えられる下負荷面の法線方向ベクトルを応力の修正方向として用い，

$$\mathbf{N}^{correct,2} = \frac{\overline{\sigma}'_{n+1}^{(k+1),2correct}}{\left| \overline{\sigma}'_{n+1}^{(k+1),2correct} \right|} \quad (3.14)$$

さらに、下式(3.15), (3.16)を用いて、接線塑性ひずみを考慮した応力点を求める。

$$\lambda_{n+1}^{\text{tangential}} = \sqrt{3/2} \left| \bar{\sigma}_{n+1}'^{(k+1),2\text{correct}} \right| - \sqrt{3/2} \left| \bar{\sigma}_{n+1}'^{(k+1),1} \right| \quad (3.15)$$

$$\sigma_{n+1}^{(k+1),\text{final}} = \sigma_{n+1}^{(k+1),2\text{correct}} - \sqrt{2/3} \lambda_{n+1}^{\text{tangential}} \mathbf{N}^{\text{correct},2} \quad (3.16)$$

この修正アルゴリズムには、偏差接線応力速度により修正された応力 $\sigma_{n+1}^{(k+1),2\text{correct}}$ と最終的な応力 $\sigma_{n+1}^{(k+1),\text{final}}$ 状態が陽に求まるため、反復計算は不要であり、通常のリターンマッピングに比して顕著な計算速度の低下を招くことはない。

3.4 数値実験による実装手続きの妥当性確認

本節では、以上に示したリターンマッピングを用いて、接線塑性弾塑性構成式を汎用非線形有限要素ソルバ **Abaqus/Standard** に実装し、3種の数値実験を行うことで、高精度かつ効率的に数値計算が実行できることを検証する。なお、数値実験に用いたいずれの解析でも、第2章に示した具体的な材料定数の諸量は同一であり、Table 3.1 に示す値を用いた。

Table 3.1 Material constants used in numerical experiment.

Elastic modulus	206 [GPa]
ν	0.3
h_1	0.5
h_2	5
a_a	1.2
r_a	0.95
u	1000
c	200
χ	0.9
F_0	350 [MPa]

3.4.1 変位制御下の単軸負荷

はじめに、最も単純な数値実験として、立方体形状の 1 次レンガ型低減積分要素 (C3D8R) を用いて、変位制御による単軸負荷を実施した。この数値実験の目的は、接線塑性の影響を無視し単純にリターンマッピングを用いることで精度低下を招くことなく計算効率の向上が達成できたことを確認することである。境界条件は純単軸負荷が可能なように設定し、20%の伸びひずみを与えるようにこの立方体の 1 面に属する節点に強制変位を与えた。

Fig. 3-3 に規定のひずみに至るまでの計算をそれぞれ 10,000 ステップ(参照解), 100 ステップ, 10 ステップ刻みで実施した応力-ひずみ線図を示す。3 種類の計算結果が重なっていることが確認でき、本アルゴリズムの安定性および適当に実装されたことが確認できる。また、参照解に対する 10 ステップ(図中▲)の誤差を次式のように定義した(Table 3.2)。

$$Error (\%) = \frac{|\sigma_{Mises}^{reference} - \sigma_{Mises}^{10\ steps}|}{F_0} \times 100 \quad (3.17)$$

表から軸ひずみが大きくなると誤差も大きくなる傾向が確認できるが、その最大値は 20%のひ

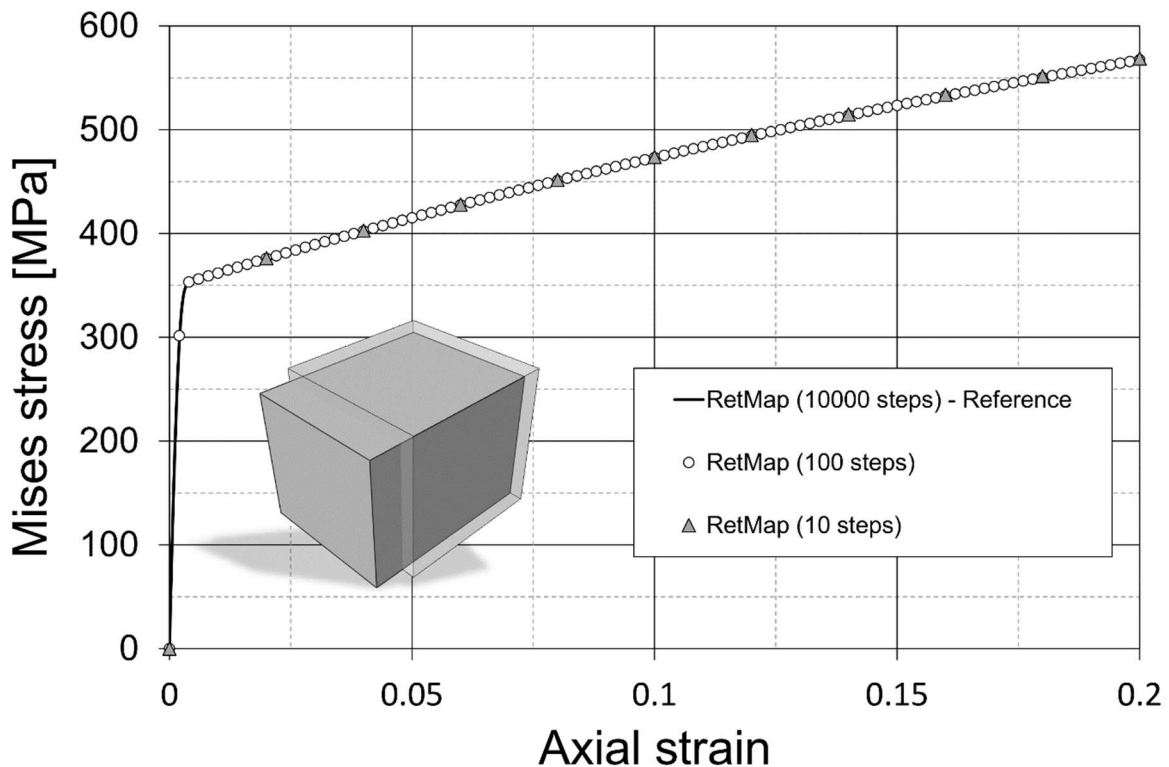


Fig. 3-3 Stress-strain curve for the uniaxial test.

Table 3.2 Errors for the Mises stress magnitude for the 10-step test.

Axial strain	Error (%)
0.00	0.000000
0.04	0.099714
0.08	0.178286
0.12	0.252857
0.16	0.323143
0.20	0.388857

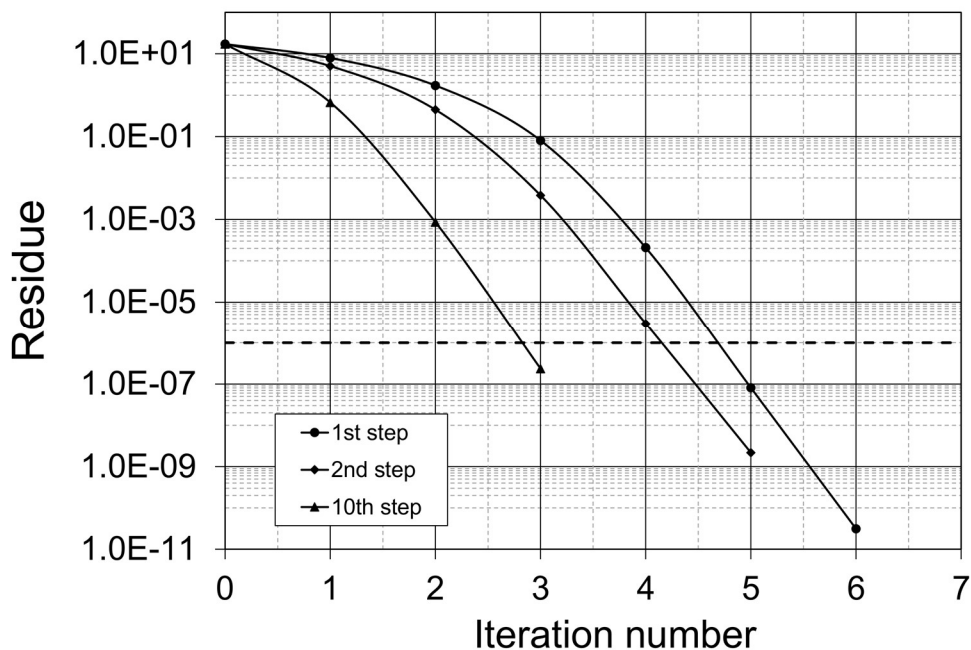


Fig. 3-4 Local convergence of the return mapping algorithm.

ずみレベルにおいても 0.39%と実用上十分な精度であると考ええる。

次に, Fig. 3-4 に 10 ステップの計算における積分点の収束性を示しており, およそ 2 次の収束速度が得られていることが確認できる. 第 1 回目の反復計算では収束速度が低い, これは計算の初期段階では応力状態が下降伏状態から正規降伏状態へ遷移することによって生じる降伏面外向き法線方向の急激な変化によって生じるものである. 実際に収束基準を満たすまでの反復回数は計算が進むにつれ減少しており, Fig. 3-3 からわかるように, 2 ステップ以降, この要素は常に正規降伏状態にあり, 塑性的内部状態変数の大きな変化は起こっていない.

3.4.2 荷重制御下の 2 軸比例負荷

本項の数値実験では前項の要素や材料定数と同じであるが、境界条件が異なる。具体的には、変位制御から荷重制御となり、荷重経路は単軸から 2 軸に変更した。ここでは 3 種類の荷重経路を選択し、2 軸間の荷重比が 0.5, 1.0(等 2 軸), 2.0 とした。なお、本問題では 2 軸の負荷を与えるものの、2 軸間の負荷履歴に位相差はなく比例負荷条件であることから、前章に説明した接線塑性ひずみの影響を受けない荷重経路である。ただし、接線塑性の影響が出ないように適当に実装されていることを確認する目的で、接線塑性に関する項を導入しその材料定数を $\xi = 0.8, b = 1.0$ 、つまり下降伏状態から接線塑性の影響が顕著に表れるように設定した。

Fig. 3-5 および Fig. 3-6 に示すように、いずれの 2 軸比例負荷経路においても接線塑性の有無による違いは見られず、両者は極めて良好に一致していることが確認でき、3.3 に示した拡張されたリターンマッピングアルゴリズムが正しく機能することが確認できた。

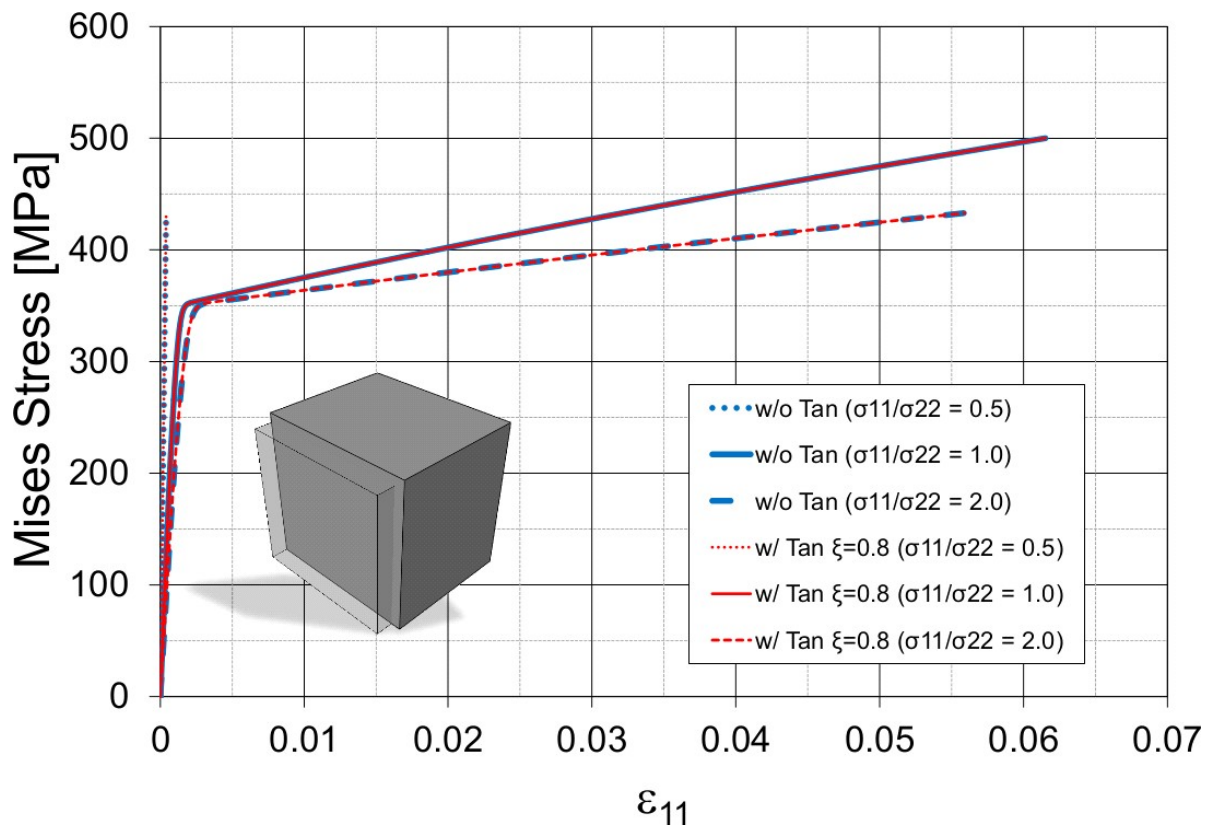


Fig. 3-5 Mises stress vs. strain along the y axis.

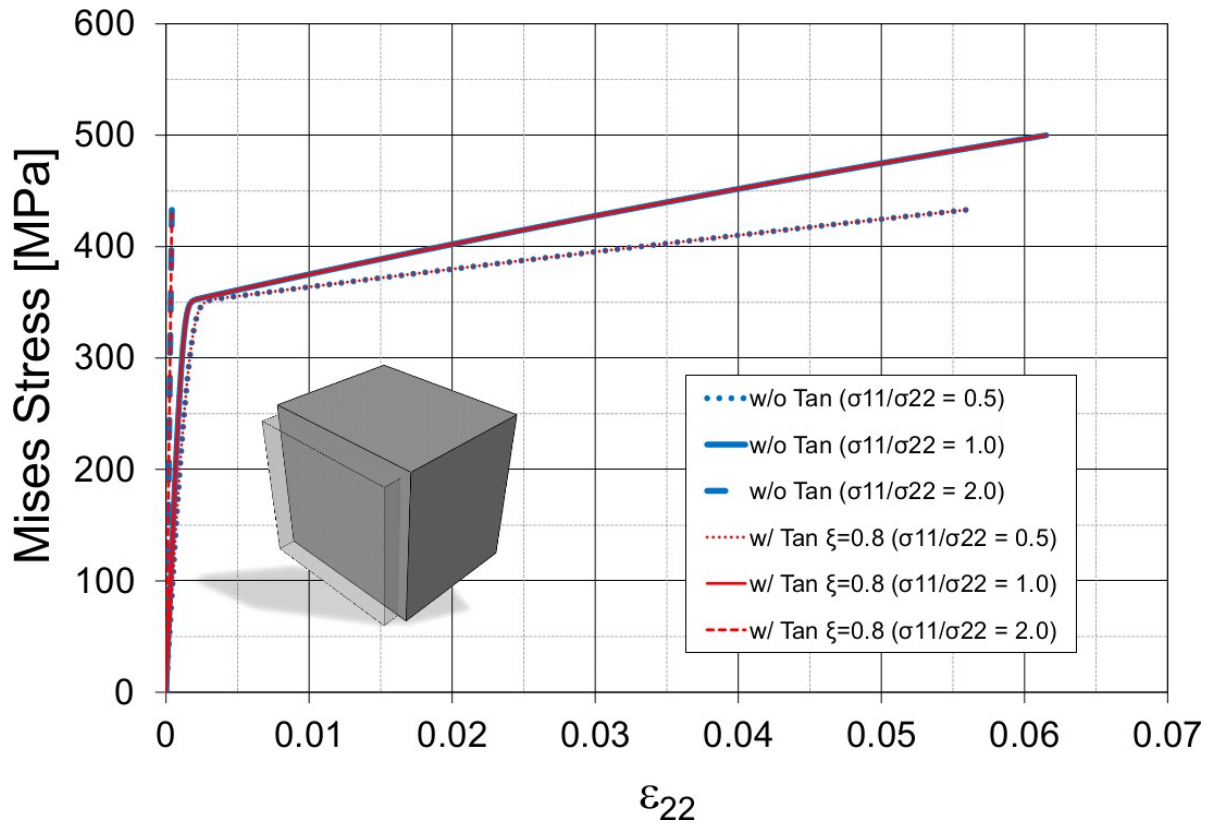


Fig. 3-6 Mises stress vs. strain along the x axis.

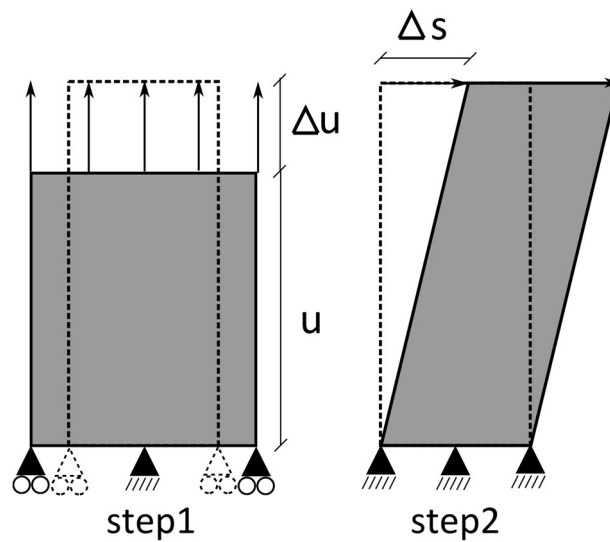


Fig. 3-7 Schematic representation of loading conditions in plane strain.

3.4.3 変位制御下の 2 軸 2 段階負荷

最後の数値実験として、1 次の低減積分平面ひずみ要素(CPE4R)を用いた 2 軸 2 段階

負荷の計算を行う。Fig. 3-7 に示すように第 1 ステップの 1 軸は y 軸方向引張負荷でありその大きさは 10% のひずみを、第 2 ステップのもう 1 軸は x-y 面内の純せん断負荷で 20% である。第 1 ステップで下負荷面は正規降伏面に達するため、第 2 ステップの純せん断負荷開始とともに、接線塑性の影響が顕著に表れる条件である。さらに、荷重負荷条件の急変が非弾性の接線塑性ひずみを誘発し、材料の剛性低下が生じる。なお本項では、リターンマッピングによる計算に加え、十分に時間増分を小さくした前進 Euler 法により式(3.8)を陽的に解いた計算結果も併せて記載する。

Fig. 3-8 および Fig. 3-9 に第 1 ステップにおける応力-ひずみ線図を示す。Fig. 3-8 から軸方向応力 σ_{22} -ひずみ ϵ_{22} は当該ステップの全領域に渡っていずれの結果も良好に一致していることがわかるが、図中の降伏点近傍の拡大図に着目するとわずかながら接線塑性の影響を考慮した結果の応力が低くなっていることが確認できる。また Fig. 3-9 に示すように平面ひずみの仮定のもと軸方向ひずみが生じないように固定されている紙面面直方向の応力 σ_{33} は接線塑性の影響をより強く受けていることが見て取れる。この現象はこの 2 軸の応力比の推移を示した Fig. 3-10 から説明できる。荷重が負荷される初期段階、つまり弾性的応答が支配的な段階ではこの応力比に大きな違いはないが、降伏点近傍に近づくにつれ徐々に応力比が

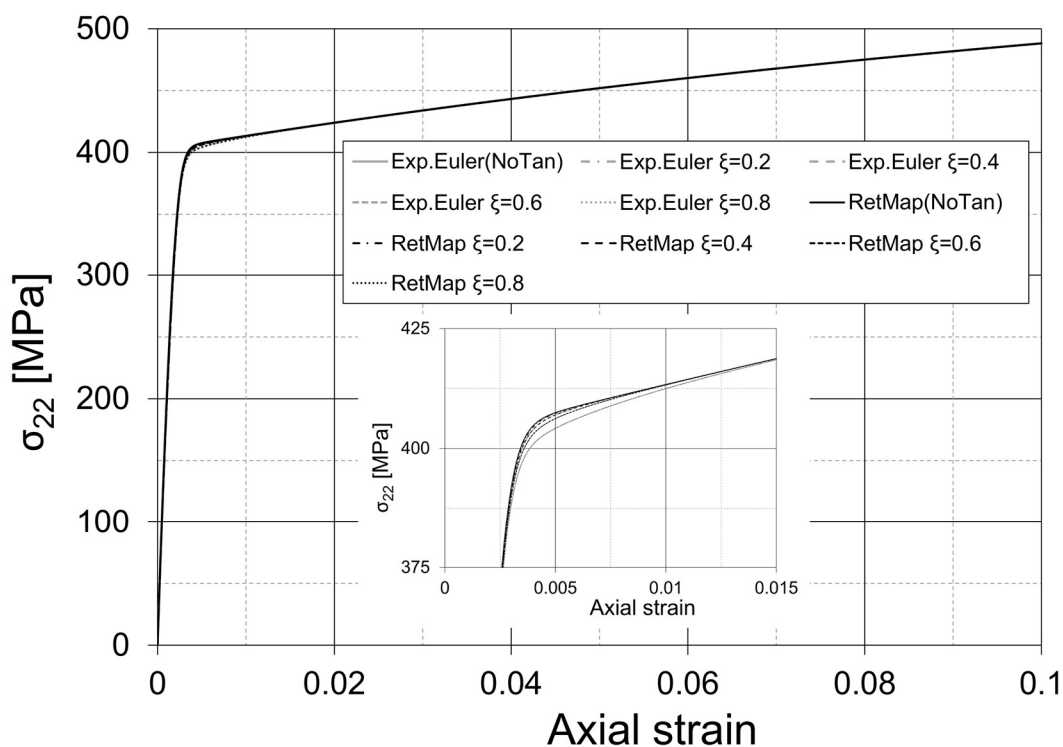


Fig. 3-8 Stress-strain curves for pull up 1st step (σ_{22} - ϵ_{22}).

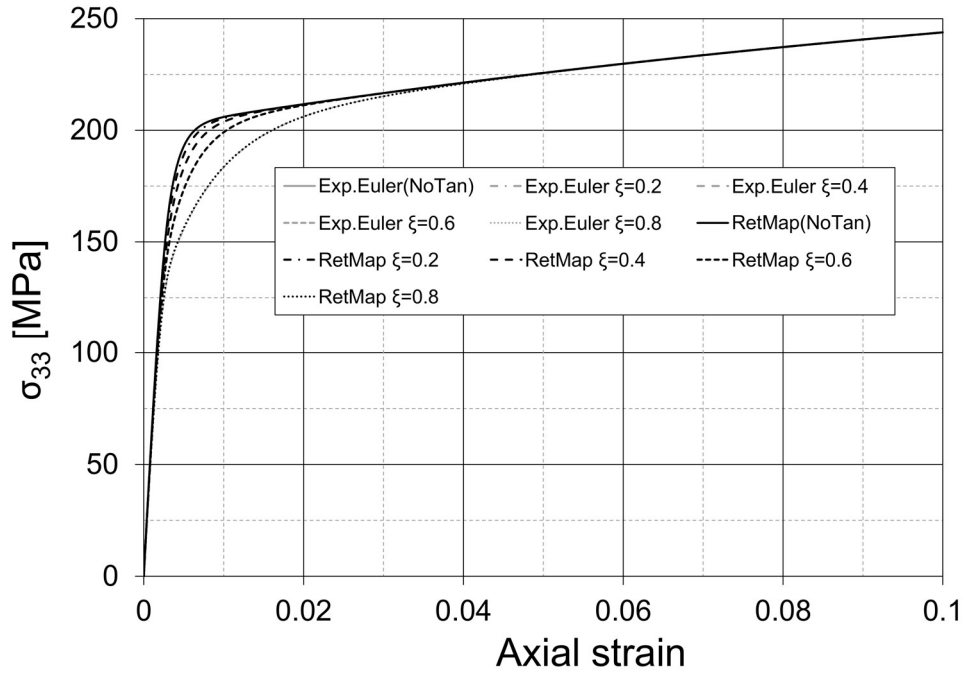


Fig. 3-9 Stress-strain curves for the pull up 1st step (σ_{33} - ε_{22}).

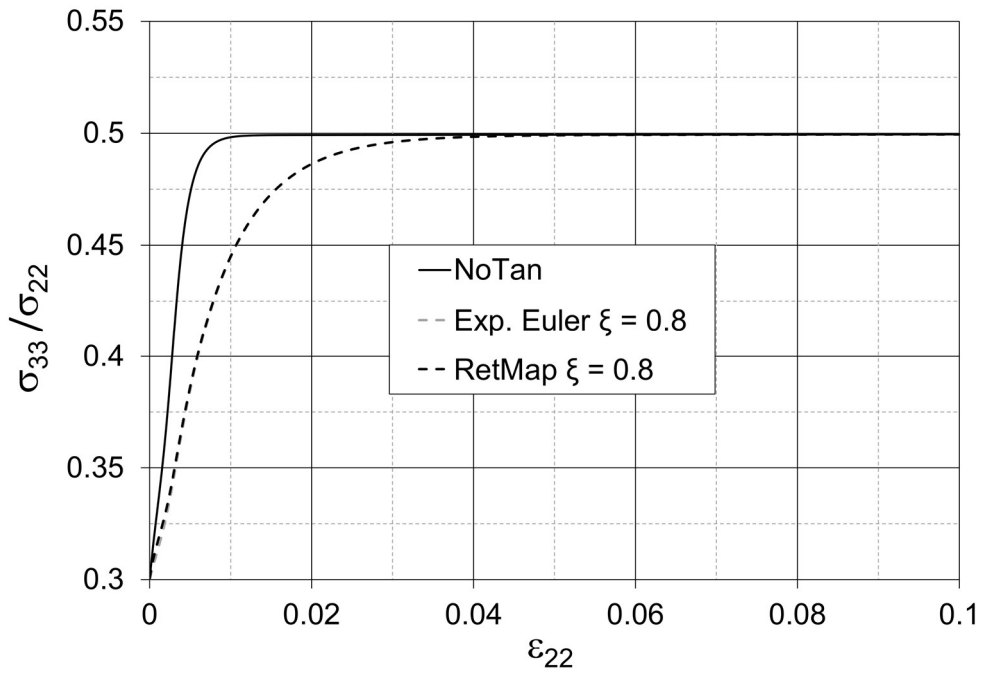


Fig. 3-10 Stress ratio during pull up 1st step.

変化し、正規降伏状態に達する段階でもっとも顕著な変化を生じる。したがって平面ひずみの仮定の下では単軸負荷であっても、材料が塑性的負荷過程に遷移する段階では非比例負荷を受けることとなる。

Fig. 3-11からFig. 3-13に第2ステップの純せん断過程における応力-ひずみ線図を示す。接線塑性ひずみの材料定数 ξ が小さい場合はその影響は小さいが、それが大きくなるに従って応力が緩和する傾向が確認できる。一方塑性的応答が支配的な領域になると、接線塑性

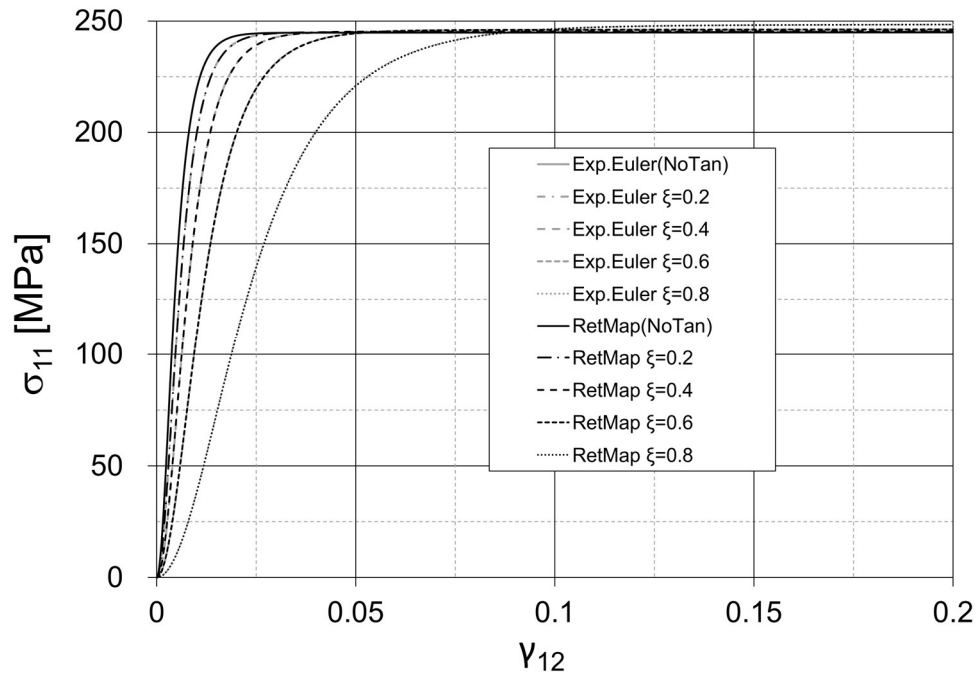


Fig. 3-11 σ_{11} evolution vs. angular distortion during simple shear 2nd step.

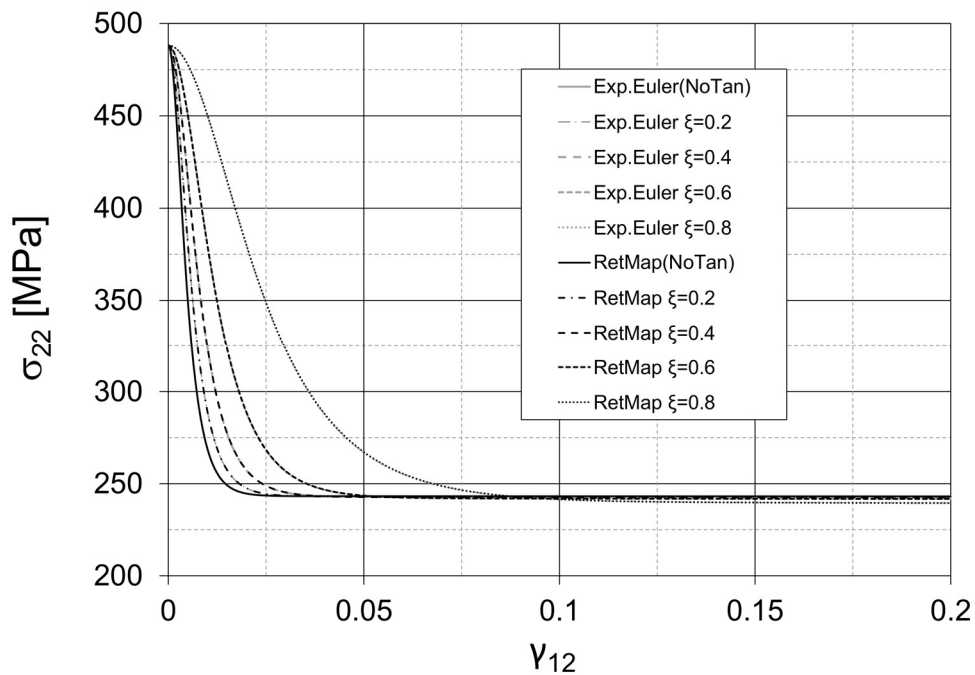


Fig. 3-12 σ_{22} evolution vs. angular distortion during simple shear 2nd step.

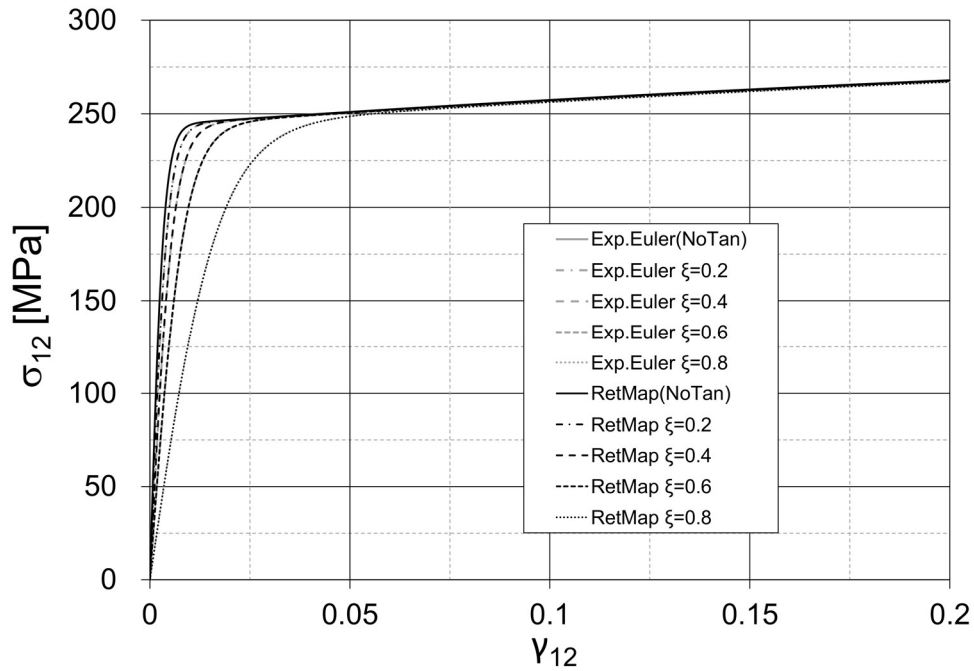


Fig. 3-13 σ_{12} evolution vs. angular distortion during simple shear 2nd step.

の影響はほぼなくなることが確認できる。この傾向は Roscoe(1970)が地盤材料に対して行った実験の傾向と同じであり、偏差応力空間における応力速度方向の急激な変化によって応力の主軸と塑性ひずみ速度方向の主軸が異なる非共軸性を呈するが、さらに大きなひずみ領域まで負荷を与え続けると非共軸性は減少していく。これは第 1 ステップの単軸引張の終了時から第 2 ステップの純せん断開始時で応力速度方向は急激に変化するが、第 2 ステップでは次第にせん断応力が支配的になるためであると考えられる。

一方、本研究で採用するリターンマッピングと十分に小さな時間増分を採用した前進 Euler 法との比較(Fig. 3-11 から Fig. 3-13)では、いずれの材料定数を用いた計算結果も極めて良好に一致しており、接線塑性の影響が無視し得ない負荷条件であっても適切にその効果が反映されていることが確認できる。

最後にリターンマッピングにより計算速度が向上することを Fig. 3-14 および Table 3.3 に示す。これは第 2 ステップにおいて、ステップ内の時間刻みを 10,000 から 100 まで減少、つまり時間増分を大きくした結果である。Fig. 3-14 から時間刻みを 100 まで減少させた場合、わずかながらに応力が緩和する傾向を大きく見積もる結果が得られているが、この傾向は単純な弾塑性構成式においても弾性応答から塑性応答への遷移領域を大きな時間増分で計算した場合にも観察される現象で、本研究で採用した接線塑性を考慮した弾塑性構成式のリター

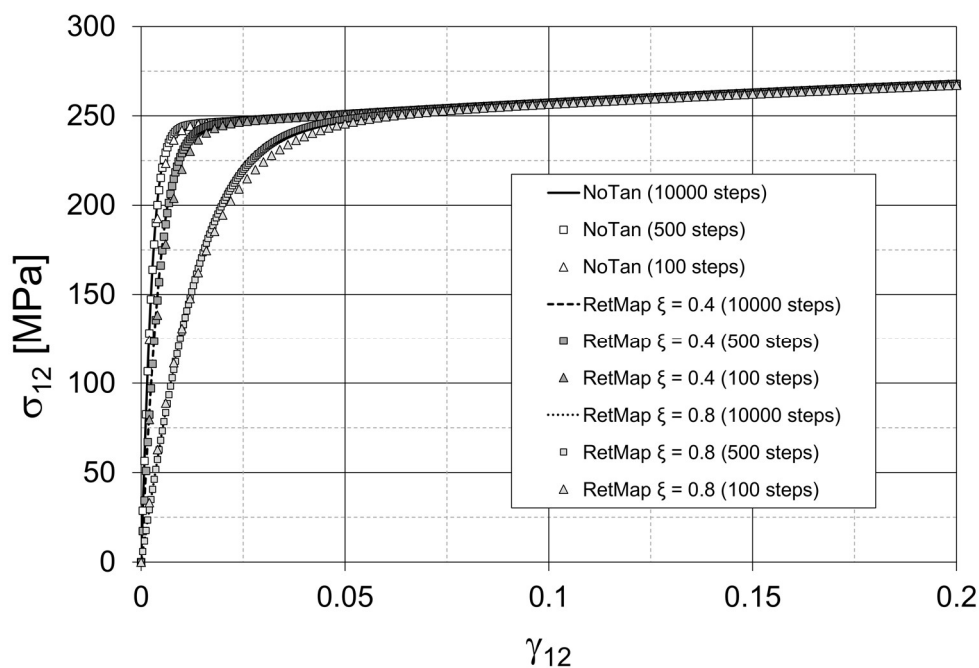


Fig. 3-14 Stress-strain curves for different time during simple shear 2nd step.

Table 3.3 CPU times for different numbers of steps for $\xi = 0.8$.

Steps number	CPU time (s)
10000	1098.7
500	51.7
100	15.9

ンマッピングによる解法によるものではないものと考えられる。さらに、に Table 3.3 示すように時間刻みと計算時間の関係を見ると、特に大規模構造物の非線形有限要素解析に対してリターンマッピングが有効であると言える。

3.5 結言

本章では、第 2 章で定式化した接線塑性弾塑性構成式を大規模問題にも適用できるように、計算精度を低下させることなく、計算効率を向上させる数値計算手続きについて詳細に述べた。以下に本章で得られた知見を示す。

1. 数値計算的アルゴリズムとしてリターンマッピングの定式化を述べるとともに、接線塑性弾塑性構成式に適応できるように拡張した。

2. 汎用陰解法非線形解析コード **Abaqus/Standard** のユーザー定義材料 **UMAT** を用いてそれを実装し、各種の数値実験を実施することで、計算精度の低下を招くことなく計算効率を向上させ可能なように実装できたことを確認した.
3. 計算精度の観点では、従来の前進 **Euler** 法との比較やリターンマッピングにおいて時間増分を大きくした場合の比較から、本研究で採用する数値計算手法は十分な精度を有することが確認できた.
4. 計算時間の観点では、時間増分を大きくすることで極めて計算効率が向上することを確認した.
5. 以上のことから、次章以降に示す具体的境界値問題に、本章で実装した数値計算手法を用いた検討が行えるものと判断した.

4章 水平 1 軸の繰返し負荷を受ける鋼製橋脚の弾塑性解析

4.1 緒言

円形・矩形断面を有する薄肉鋼製橋脚は道路橋、高層構造物や海上構造物などの社会基盤構造物の支持構造として幅広く用いられており、これらの耐震性能や変形性能を把握することは力学設計上の重要な課題である。1995年1月に発生した兵庫県南部地震では、それまでの耐震設計で考慮された荷重を大幅に超える地震動により、都市高速道路橋の支持部材の一つである鋼製橋脚柱が甚大な被害を受けた(兵庫県南部地震道路橋震災対策委員会, 1995)。この震災以来、大地震を想定した鋼製橋脚の耐震設計基準の策定や既設鋼製橋脚の耐震補強法に関する実験的・数値解析的研究が行われてきた。その結果、道路橋示方書(V耐震設計編)(日本道路協会, 2005)では、鋼製橋脚の耐震性は通常、橋脚軸方向と橋脚軸直角方向の地震波の1方向入力に対してそれぞれ独立に評価することが規定されている。このため、鋼製橋脚の耐震性能としての変形特性である荷重-変位履歴に関して、主に一定軸力下における1方向繰返し負荷実験(Nishikawa et al., 1998)やそれに相当する数値解析的な検討(安波ら, 1996; 葛ら, 1997; 王ら, 1997; 後藤ら, 1998; Fukumoto 2004; Ucak and Tsopeles, 2012)が行われ、耐震性能および耐震設計に関する数多くの知見が得られている。

しかしながら、これらの数値解析的研究で示されている実験結果と解析結果の比較では、変位-荷重履歴関係におけるピーク荷重はある程度の精度で実験結果を捉えられているものの、その後の終局状態までの予測精度が低下する結果が散見される。この精度低下の要因の一つとして、数値解析で採用する材料構成式が挙げられる。当該負荷条件下の鋼製橋脚の特徴的な変形は橋脚基部の局部座屈が挙げられ、幾何学的非線形性と繰返し負荷による材料非線形性が重畳しつつ関与している。特に後者について、橋脚基部の材料の負荷状態は単軸負荷状態ではなく、多軸およびその位相差が変化する非比例負荷状態にあることが、精度の高い数値解析結果を得ることを困難にしていると考えられる。

これは2章で示した滑らかな塑性ポテンシャル面を仮定する従来の弾塑性構成式における欠点に影響しているものと考えられる。すなわち、多くの弾塑性構成式に採用されている塑性ひずみ速度の方向は、応力速度方向の変化に追随することなく、現応力点における塑性ポテンシャル面外向き法線方向にのみ生じると仮定して定式化されている。加えて、塑性ひずみ速度の大きさは応力速度の塑性ポテンシャル面の垂直方向の成分にのみ依存し、接線方向

の成分に依存しない。従って負荷経路が比例負荷経路から逸脱する非比例負荷問題に従来の弾塑性構成式を適用した場合、接線塑性成分が考慮されないことから、材料の非弾性応答が過小評価され、数値解析結果の精度が低下することが指摘されている(Gotoh, 1985abc)。この欠点を克服するために、2章で示した接線塑性弾塑性構成式が提案されてきたが、これまでは主に弾塑性構成式による理論解析によって接線塑性の重要性が明らかにされてきたものの、当該問題のような幾何学的非線形性が無視できない具体的境界値問題に対する適用性の検証は極めて限定的である。

そこで本章では、水平1軸漸増繰返し負荷を受ける円形断面および矩形断面鋼製橋脚の弾塑性有限要素解析を行い、既実施の実験結果との照査を行うことで接線塑性弾塑性構成モデルの適用性を検証する。

4.2 参照する実験結果

本章で参照した実験結果は Nishikawa et al.(1998)によって実施されたものの中から、無補剛円形断面供試体(no.8)および補剛矩形断面供試体(no.2)の2体を選択した。それぞれの供試体の各寸法を Table 4.1 に、それに用いられる鋼材の機械的特性を Table 4.2 に示す。また Fig. 4-1 に無補剛円形断面供試体の概観図を、Fig. 4-2 に補剛矩形断面供試体の概観図を示す。

Table 4.1 Dimensions of test specimen.

ID of specimen in Nisikawa et al, 1998	Shape of cross section	h [mm]	b [mm]	t [mm]	bs [mm]	ts [mm]
no. 8	Circular	3403	891.3	8.70	---	---
no. 2	Rectangular	3403	891.0	9.05	80.0	6.22

Table 4.2 Mechanical properties of steel.

ID of specimen in Nisikawa et al, 1998	Shape of cross section	Material	Yield stress [MPa]	Tensile strength [MPa]	Elongation [%]
no. 8	Circular	SS400	294.2	440.3	41.0
no. 2	Rectangular	SM490	381.3	552.4	36.0

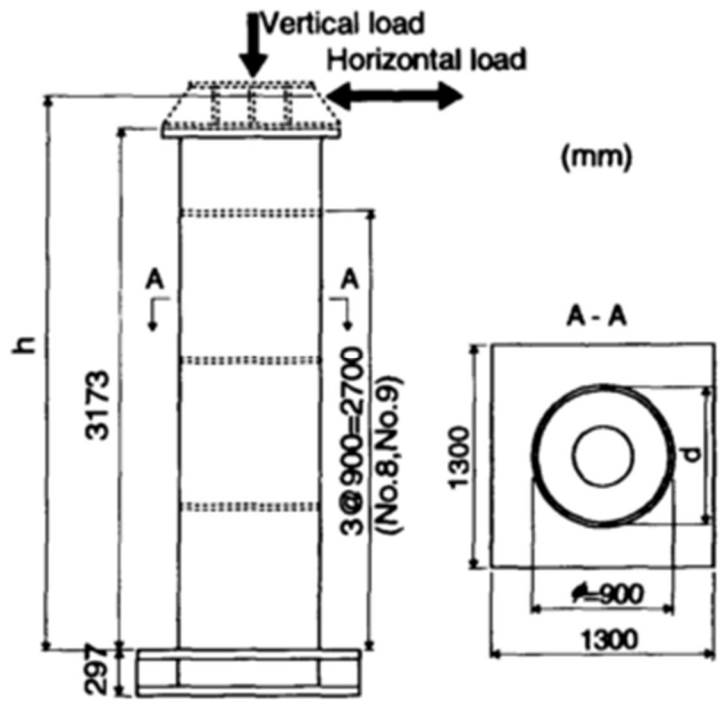


Fig. 4-1. Test specimen with circular section (Fig. 4 in Nishikawa et al., 1998).

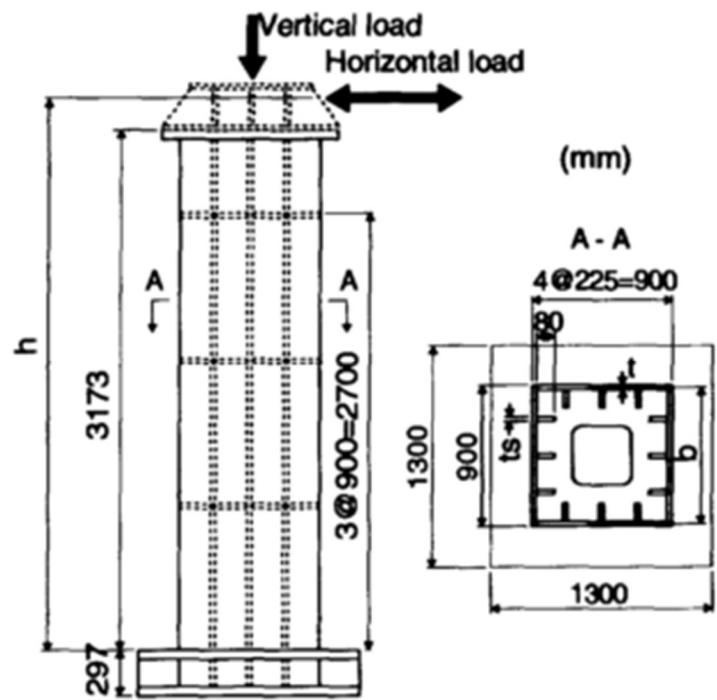


Fig. 4-2. Test specimen with rectangular section (Fig. 3 in Nishikawa et al., 1998).

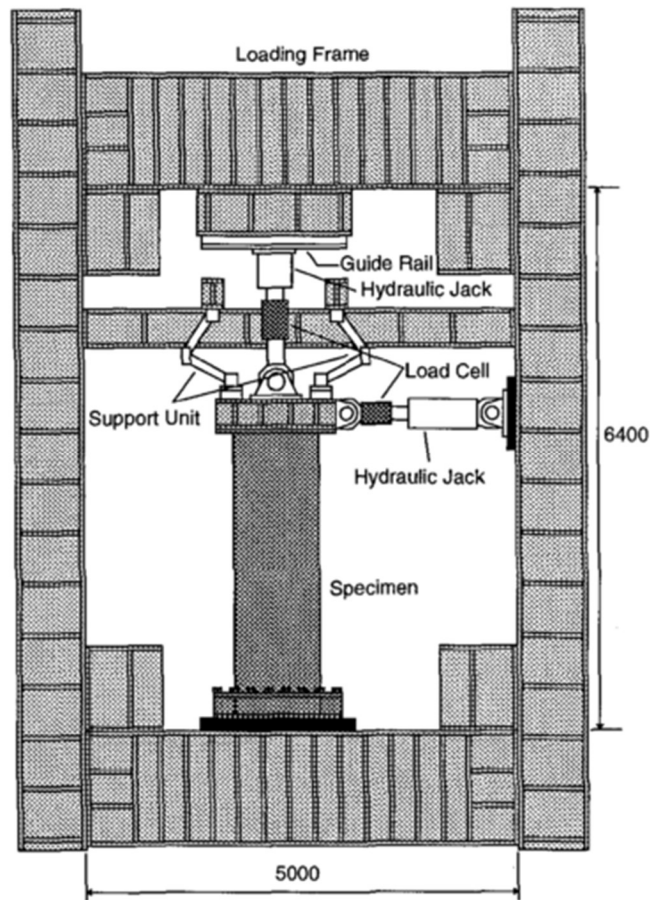


Fig. 4-3. Experimental apparatus (Fig.8 in Nishikawa et al., 1998).

荷重は Fig. 4-3 に示すように、十分に剛なフレームに供試体および油圧ジャッキ 2 個を垂直方向および水平方向に設置して負荷されている。荷重履歴は、まず所定の軸力を負荷した後、その軸力を一定に保持した状態で、柱頭部の荷重負荷点に正負の漸増繰返し水平荷重を準静的に加えている。この軸力は初期断面積 A_0 および降伏応力 σ_y から算定される全断面降伏荷重 $P_0 = A_0 \sigma_y$ の 15% 程度となるように設定されている。この値は既設鋼製橋脚に実際に作用する平均的な値であり(中井ら, 1982ab), 後述する有限要素解析でも同じ値を用いた。Fig. 4-4 に示すように、水平変位 d_x は基本変位 d_0 を繰返し数で整数倍した両振りの漸増繰返し強制変位であり次式で与えられている。

$$d_x = nd_0 \quad (4.1)$$

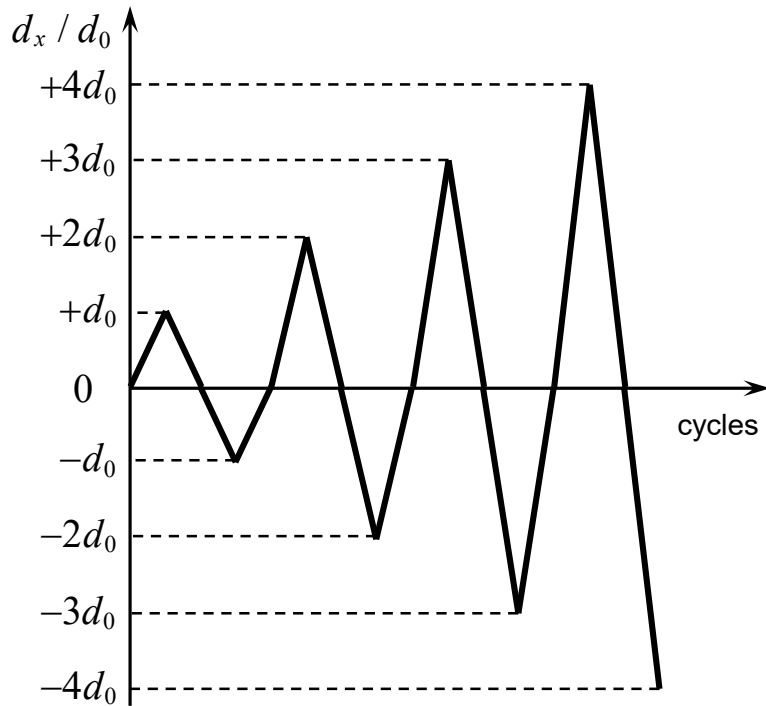


Fig. 4-4. Schematic representation of lateral displacement history.

$$d_0 \equiv \frac{H_0 h^3}{3EI} \quad (4.2)$$

$$H_0 \equiv \left(\sigma_y - \frac{P}{A_0} \right) \frac{z}{h} \quad (4.3)$$

ここに、 h は供試体基部から荷重点までの高さ、 E はヤング率、 I は断面 2 次モーメント、 n は負荷繰返し数、 σ_y は本鋼製橋脚に用いられた鋼材の降伏応力、 P は供試体に作用する軸力、 A_0 は供試体の初期断面積、 z は断面係数である(Table 4.3).

Table 4.3 Cross section constants.

ID of specimen in Nisikawa et al, 1998	Shape of cross section	A_0 [$\times 10^2 \text{ mm}^2$]	I [$\times 10^4 \text{ mm}^4$]
no. 8	Circular	249.4	241931.0
no. 2	Rectangular	382.2	484972.0

4.3 有限要素モデル, 境界条件および材料定数同定

4.3.1 有限要素モデルと境界条件

本研究で用いた無補剛薄肉円形断面供試体および補剛矩形断面供試体の有限要素モデルをそれぞれ Fig. 4-5 および Fig. 4-6 に示す. 両モデルとも下半分に 3 次元 6 面体 1 次ソリッド要素(C3D8)を, 計算高速化のために上半分に 3 次元 1 次梁要素 (B31)を用いてメッシュ分割した. なお, 供試体形状および境界条件が対象であることから, 実際の解析に使用したのは図に示した有限要素モデルの半分とし, その境界面には対称条件を与えた. ソリッド要素と梁要素の結合には剛体拘束(*Rigid Body)を用いた. 本研究では材料モデルの実装が容易なソリッド要素を用いたため事前にメッシュ分割に関する事前検討を実施した. 特に, 橋脚基部において曲げ変形が卓越するため, 板厚方向の分割数について検討を行い, 着目する橋脚基部の変形モードや橋脚頭部の荷重-変位特性に差異がなく, かつ, 計算時間をなるべく小さくできる分割数として, 板厚方向に 4 分割とした. また橋脚基部は実験的に確認されているように, 局部座屈変形が卓越するため, 上部に比べて高さ方向のメッシュ分割を細かくした. 溶接や供試体の製作過程によって生じる残留応力と幾何学的初期不整は, 本研

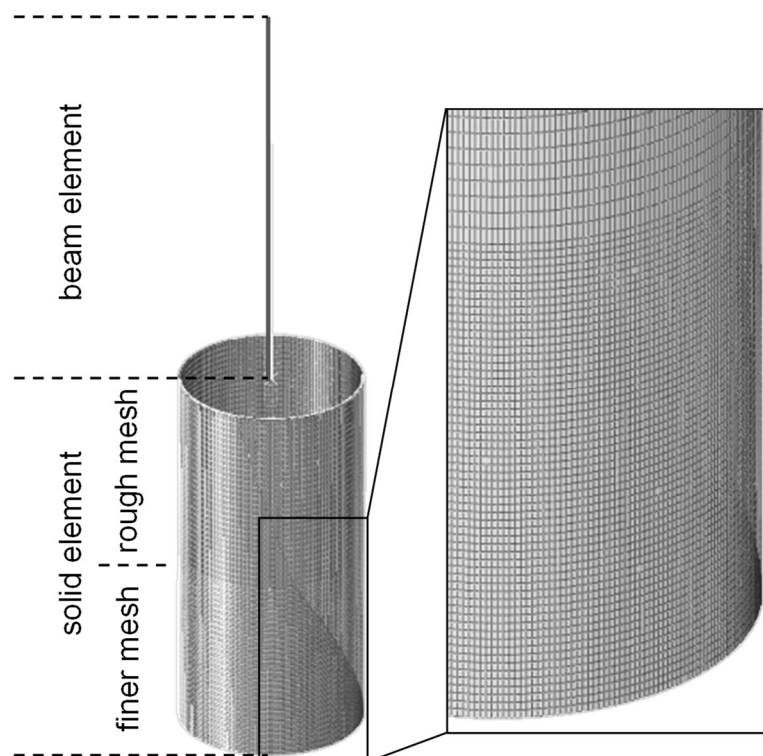


Fig. 4-5. Finite element model with circular cross section.

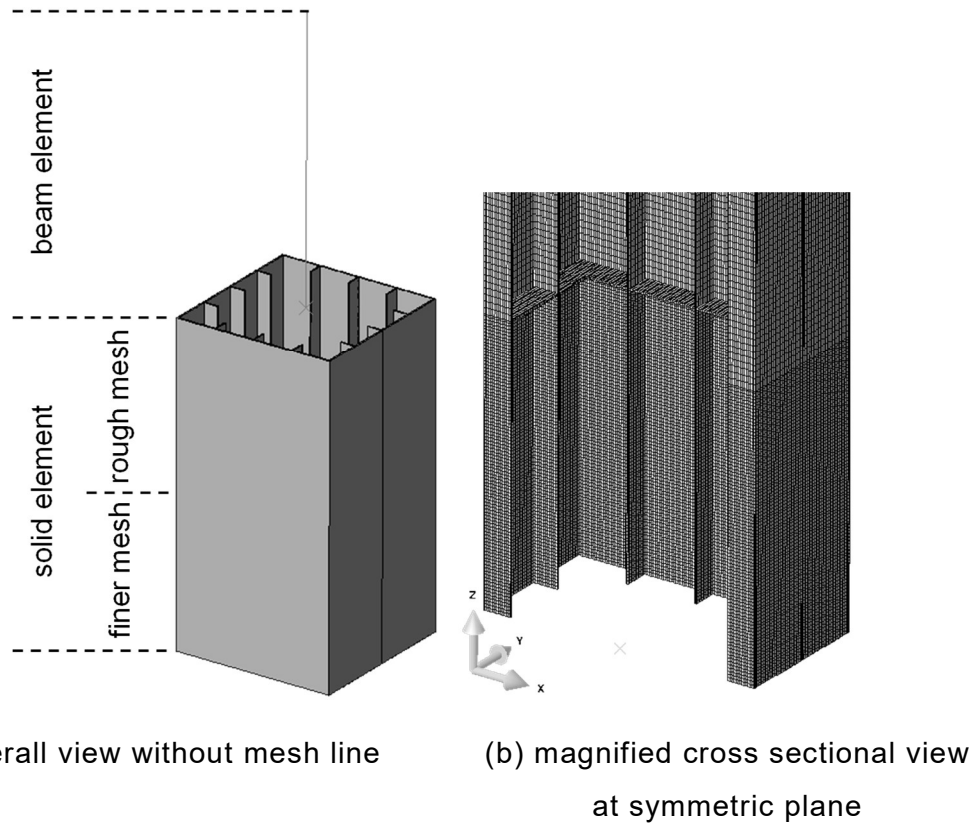


Fig. 4-6. Finite element model with rectangular cross section.

究で着目している最大耐荷力および塑性変形が卓越する終局状態までの変形挙動に対する影響は小さいと考え、これらの影響を考慮していない。

境界条件は、前節で述べた実験条件を再現するように、橋脚基部は固定、柱頭部に解析全時間に渡って一定軸力(参照文献による値;円形断面では P_0 の12.4%,矩形断面では P_0 の12.2%)を負荷し、水平方向に漸増の繰返し強制変位 d_x を与えた。ただし、実験結果(Nishikawa et al., 1998)を詳細に確認したところ、当該水平変位 d_x は、必ずしも式(4.1)~式(4.3)から算出される値にはなっていないため、実際に解析には論文記載のグラフから強制変位の値を読み取りそれを負荷した。

4.3.2 材料定数の同定

本研究で採用した拡張下負荷面モデルに必要な材料定数の同定は、Hashiguchi et al. (2012)が言及しているように、以下の流れで実施することが望ましいと考えられる。

1. 単軸単調負荷曲線から初期降伏面の大きさおよび等方硬化に関する材料定数を決定する。

2. 単軸逆負荷曲線から移動硬化に関する材料定数を決定する.
3. 繰返し負荷曲線から相似中心の移動速度に関する材料定数を決定する.
4. 比例負荷曲線と非比例負荷曲線の差異から接線塑性ひずみに関する材料定数を決定する.

4.のように、接線塑性に関するこれらの材料定数は、供試体に用いられる鋼材に対して実施する多軸の非比例負荷試験結果を基に決定することが望ましいと考えられるが、鋼製橋脚に用いられている鋼材の非比例負荷条件下の試験結果が不足していたため、本研究では鋼製橋脚の水平 1 軸繰返し負荷実験結果に解析結果が一致するように同定した. この点については、鋼製橋脚に用いられている鋼材から切り出した供試体の単軸比例負荷および多軸非比例負荷実験結果を用いて材料定数を同定するといったより詳細な実験的検討が今後の課題と言える.

円形断面供試体と矩形断面供試体では使用されている材料が異なるため、それぞれ個別に材料定数を同定した. ただし、鋼製橋脚の実験結果を参照した文献(Nishikawa *et al.* 1998)では、Table 4.2 に示す材料の力学特性として降伏応力および引張強さのみが与えられているため、材料定数の同定には、同種鋼材に対して実施された単軸繰返し引張圧縮の応力-ひずみ曲線を用いた. また、第 2 章では塑性変形の集積による損傷・ダメージの概念を導入しているが、当該解析においてその効果は無視している.

4.3.2.1 一般構造用圧延鋼 SS400 の材料定数

SS400 の材料定数は、中島と山田(2000)が実施した、異なるひずみ振幅下における単軸繰返し引張圧縮の応力-ひずみ曲線を用いて、第 2 章に示した金属材料の具体関数に対する材料定数を同定した. 同定した材料定数を Table 4.4 に、同定結果を Fig. 4-7 に、示す. 図に示すように、いずれのひずみ振幅においても計算結果は試験結果を良好に再現できていることがわかる.

4.3.2.2 溶接構造用圧延鋼 SM490 の材料定数

SM490 の材料定数は、鈴木ら(2003)が実施したひずみ振幅漸増条件における単軸繰返し引張圧縮の応力-ひずみ曲線を用いて、第 2 章に示した金属材料の具体関数に対する材料定数を同定した. 同定した材料定数を Table 4.5 に、同定結果を Fig. 4-8 に示す. 図に示すように、低ひずみ領域から高ひずみ領域に至るまで計算結果は試験結果を良好に再現できていることがわかる.

Table 4.4 Material constants of SS400 for Extended subloading surface model with tangential plasticity.

Elastic Modulus	$E=210$ [GPa], $\nu=0.3$
Initial yield stress	$F_0=294.1$ [MPa]
Yield stress plateau limit	$H_p=0.01$ [as strain]
Isotropic hardening	$h_1=0.567$, $h_2=30.0$
Kinematic hardening	$a_\alpha=34.0$, $r_\alpha=0.233$
Evolution of Subloading surface	$u_0=500$, $u_s=0.167$, $R^e=0.0$
Evolution of simirality center	$c=200.0$, $\chi=0.9$
Tangential plasticity	$\zeta=0.9$, $b=2.0$

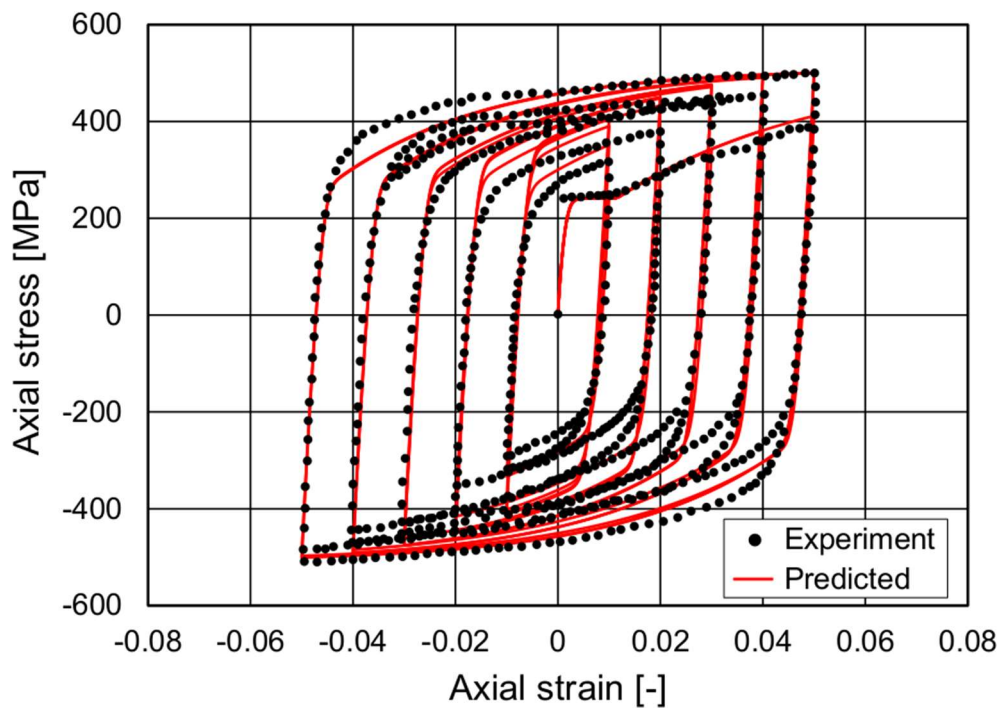


Fig. 4-7. Stress strain curve of SS400, comparing experiment (Nakajima and Yamada, 2000) to predicted.

Table 4.5 Material constants of SM490 for Extended subloading surface model with tangential plasticity.

Elastic Modulus	$E=206.8$ [GPa], $\nu=0.29$
Initial yield stress	$F_0=381.3$ [MPa]
Yield stress plateau limit	$H_p=0.01$ [as strain]
Isotropic hardening	$h_1=0.2$, $h_2=20.0$
Kinematic hardening	$a_\alpha=70.0$, $r_\alpha=0.3$
Evolution of Subloading surface	$u_0=2000$, $u_s=0.0$, $R^e=0.2$
Evolution of simirality center	$c=20.0$, $\chi=0.8$
Tangential plasticity	$\zeta=0.4$, $b=2.0$

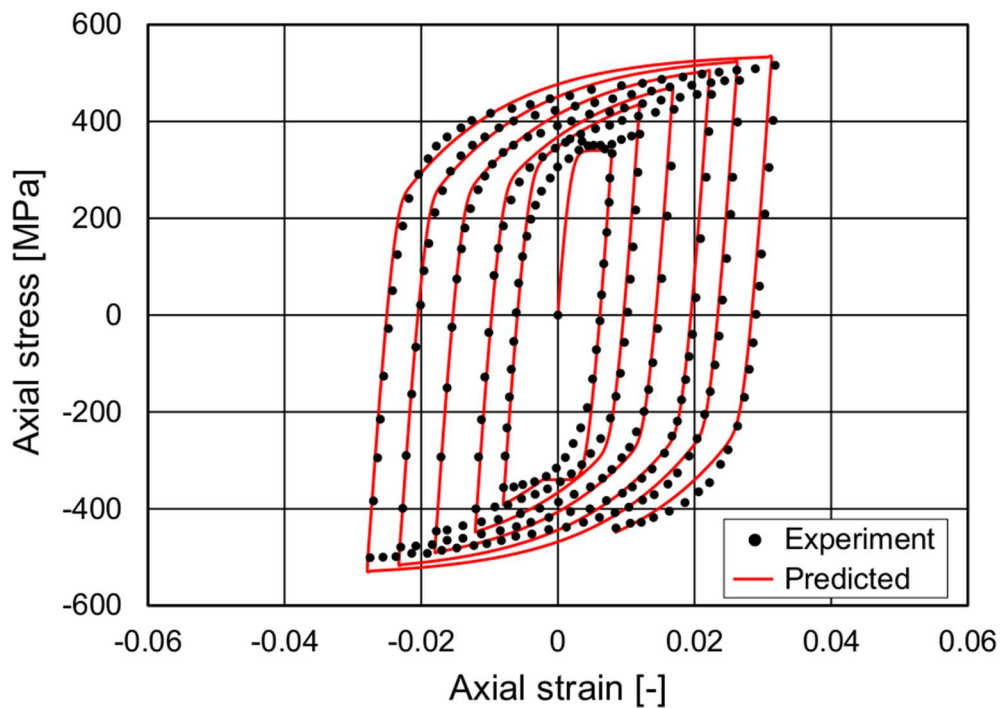


Fig. 4-8. Stress strain curve of SM490, comparing experiment (Suzuki et al., 2003) to predicted.

4.4 解析結果の実験結果の比較と考察

4.4.1 円形断面橋脚

これまでに述べた解析モデルおよび境界条件のもとに実施した有限要素解析結果と、Nishikawa et al.(1998)により実施された実験結果の柱頭部における荷重-変位履歴特性を Fig. 4-9 および Fig. 4-10 に示す。実験結果は実際の値を入手することができなかつたため、当該論文に記載のグラフから読み取ったものであることを付記する。柱頭部で生じた荷重および変位は、それぞれ橋脚基部の初期水平降伏荷重 H_0 、初期水平降伏変位 d_0 で正規化している。Fig. 4-9 は実験結果と接線塑性ひずみを考慮しない、つまり $T = 0 \rightarrow A = 0 \rightarrow \mathbf{D}' = \mathbf{0}$ とした従来モデルの比較、Fig. 4-10 は実験結果と $T \neq 0 \rightarrow A \neq 0 \rightarrow \mathbf{D}' \neq \mathbf{0}$ とした接線塑性モデルの比較である。これらの比較から、従来モデルに比べ接線塑性モデルは実験結果をより精度良くシミュレートできていることが分かる。事実、従来モデルでは最大荷重およびそれ以降のサイクルにおける荷重ともに実験結果に比べ過大に予測する、つまり危険側の予測を与える傾向がある

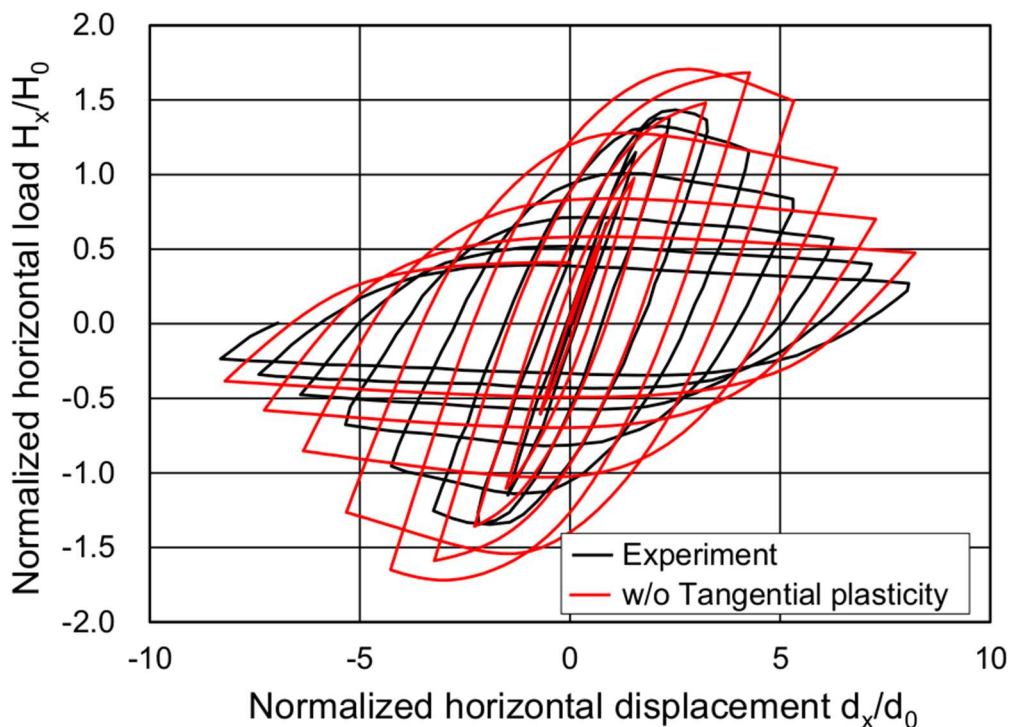


Fig. 4-9. Hysteretic response at loading point of steel pier with circular cross section (No.8). Experiment versus Extended subloading surface model without tangential plasticity ($\mathbf{D}' = \mathbf{0}$).

が、接線塑性モデルはその両者を精度良く捉えている。特筆すべきは、既往の研究結果 (e.g. 安波ら, 1996; 後藤ら, 1997; Ucak and Tsopelas, 2012) では解析結果の精度が確保できていなかった、最大荷重を生じたピーク以降の荷重推移を高精度に再現している点である。また、ピーク荷重が生じるサイクルについても従来モデルに比べ接線塑性モデルは早いサイクルで生じていることが分かる。また、解析同士の比較結果を Fig. 4-11 に示す。繰返し数が 3 回目程度までは両者は同じ応答を示しているが、ヒステリシスループが明確に拡大する 4 回目以降両者には明確な差異が確認できる。従来の弾塑性モデルではさらに 5 回目まで最大荷重が増大にするのに比べ、接線塑性モデルでは 5 回目以降の各サイクルにおける最大荷重は低下していく。

次に両解析結果の変形図と最大主ひずみ分布を Fig. 4-12 に示す。図左が従来モデル、図右が接線塑性モデルの解析結果である。また、水平荷重正方向の面外変位を横軸に、橋脚基部からの高さを縦軸にとった図を Fig. 4-13 に示す。これらの図から、従来モデルに比べて接線塑性モデルはより早い段階から最大主ひずみが局所化し、基部の座屈変形が卓越していく様子が分かる。以上のことから、接線塑性ひずみを考慮することで橋脚基部により大き

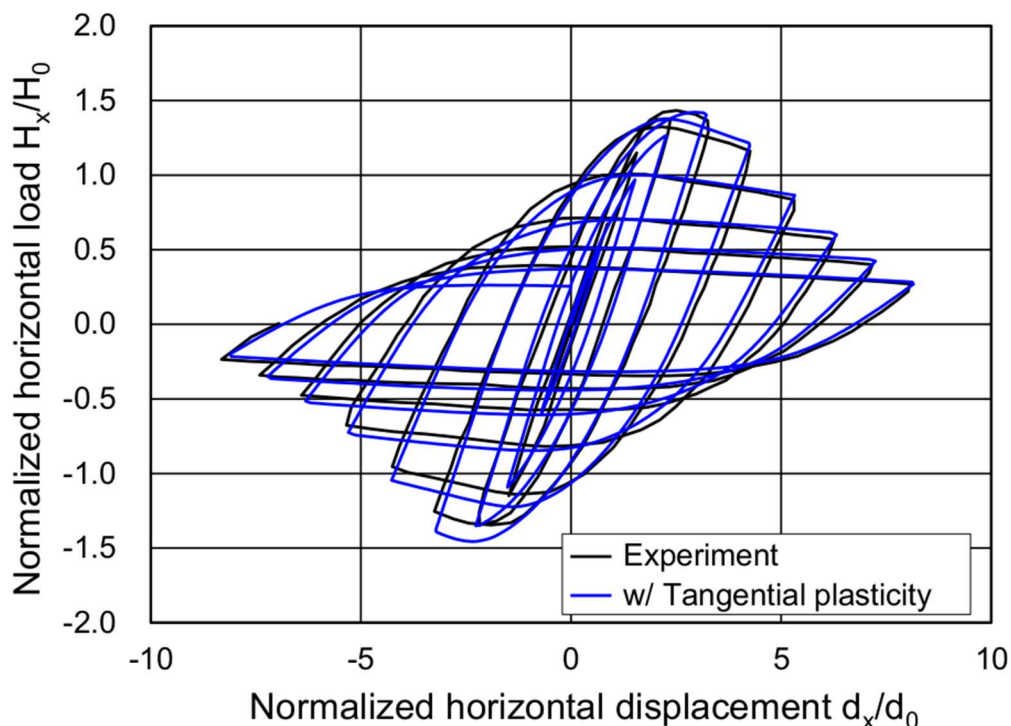


Fig. 4-10. Hysteretic response at loading point of steel pier with circular cross section (No.8). Experiment versus Extended subloading surface model with tangential plasticity ($\mathbf{D}^t \neq \mathbf{0}$).

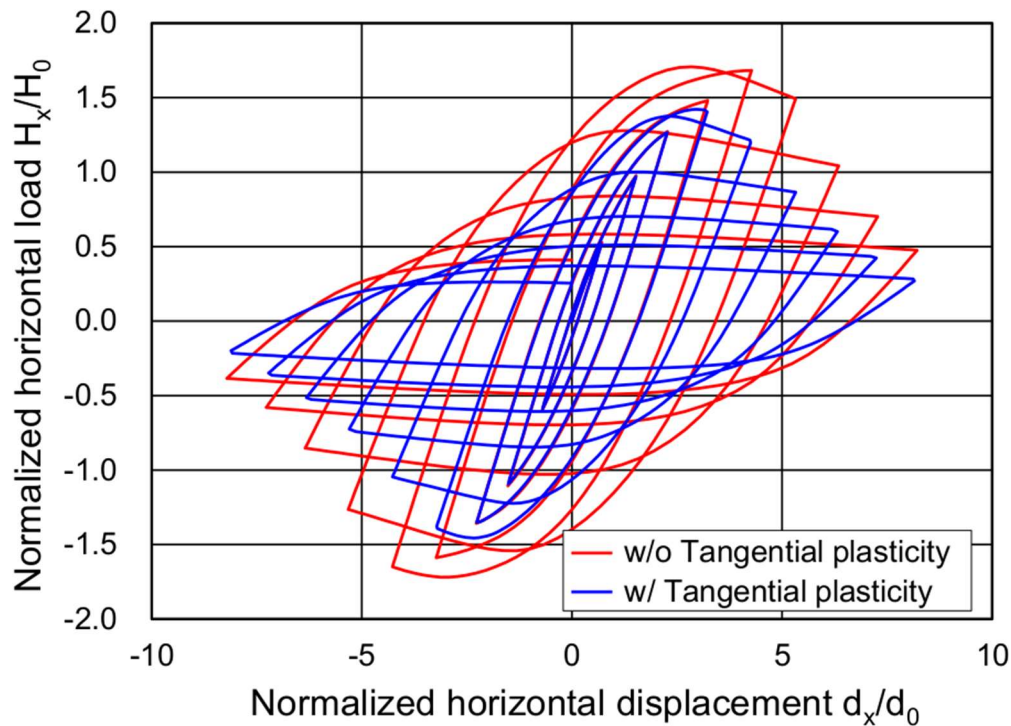
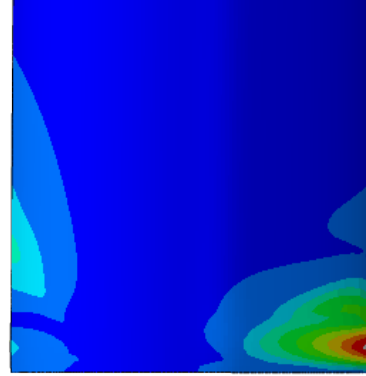
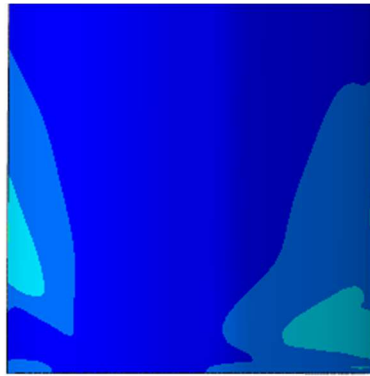
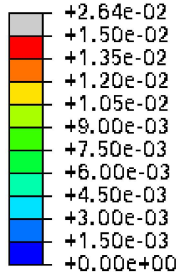


Fig. 4-11. Hysteretic response at loading point of steel pier with circular cross section (No.8). Extended subloading surface model without tangential plasticity ($\mathbf{D}^t = \mathbf{0}$) versus the one with tangential plasticity ($\mathbf{D}^t \neq \mathbf{0}$).

な非弾性ひずみの発生およびその局所化と橋脚基部の局部変形の卓越による形状変化の効果がピーク荷重の低下およびサイクル後半の荷重低下につながったものと考えられる。

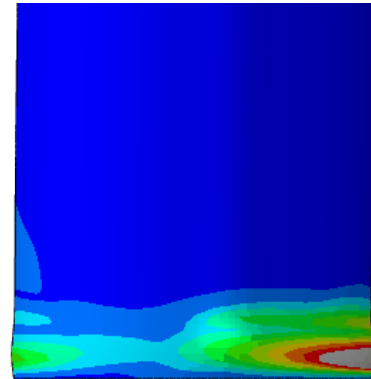
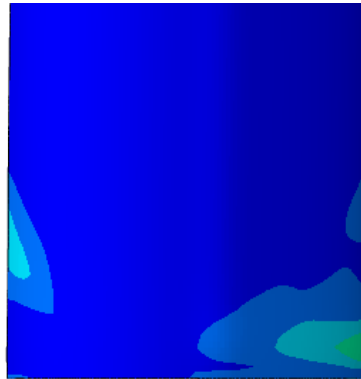
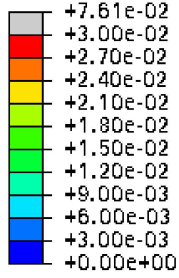
さらにサイクル毎の吸収エネルギーを実験，従来モデルおよび接線塑性モデルの三者で比較した。1 サイクルにおける吸収エネルギーは，Nishikawa et al.(1998)にならい Fig. 4-14 に示す荷重-変位曲線に囲まれる灰色部の面積と定義する。算出した吸収エネルギーは式(4.2)と式(4.3)から算出される基本水平変位 d_0 と初期水平降伏荷重 H_0 の積に $1/2$ を乗じた値で正規化した。実験，従来モデルおよび接線塑性モデルの正規化された吸収エネルギーの推移を Fig. 4-15 に示す。接線塑性モデルは従来モデルに比べ，負荷サイクル全域に渡って実験結果を極めて良好に捉えていることがわかる。特に橋脚基部の座屈変形が顕著となる 5 サイクル目以降の両者の解析精度に違いが確認できる。従来モデルは 6 サイクル目まで明確に吸収エネルギーが増大し，8 サイクル目で顕著に低下するのに比べ，接線塑性モデルは 5 サイクル目で吸収エネルギーはほぼ最大値に到達しその後緩やかに減少していくという実験の傾向を捉えている。

LE, Max. Principal
(Avg: 75%)



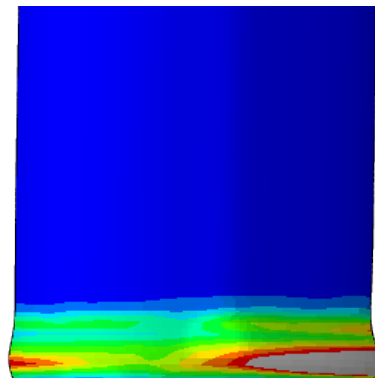
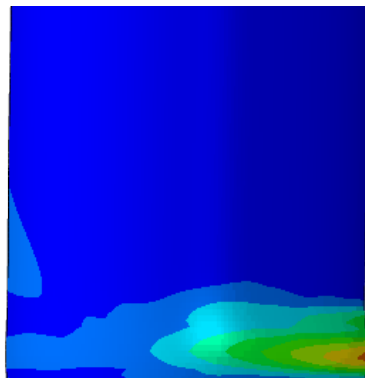
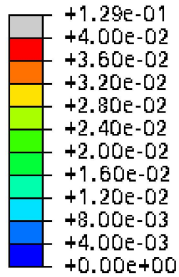
(L) w/o Tangential plasticity (R) w/ Tangential plasticity
(a) $+4d_0$

LE, Max. Principal
(Avg: 75%)



(L) w/o Tangential plasticity (R) w/ Tangential plasticity
(b) $+5d_0$

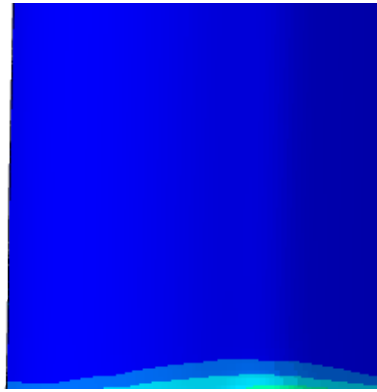
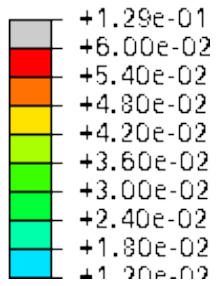
LE, Max. Principal
(Avg: 75%)



(L) w/o Tangential plasticity (R) w/ Tangential plasticity
(c) $+6d_0$

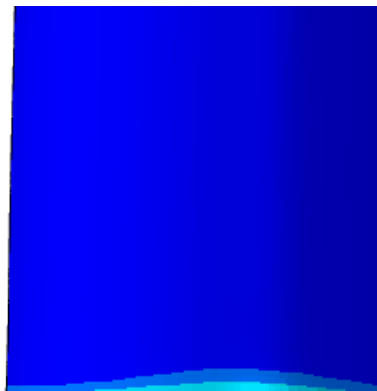
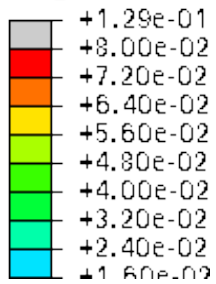
Fig. 4-12. Deformations and maximum principal strain distributions of steel pier with circular cross section (No.8).

LE, Max. Princi
(Avg: 75%)



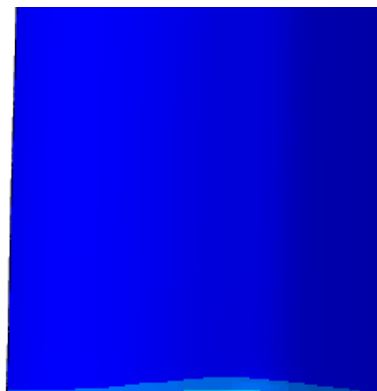
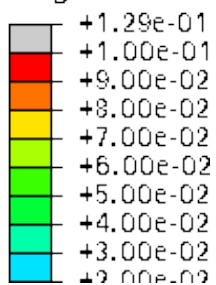
(L) w/o Tangential plasticity (R) w/ Tangential plasticity
(d) $+7d_0$

LE, Max. Princi
(Avg: 75%)



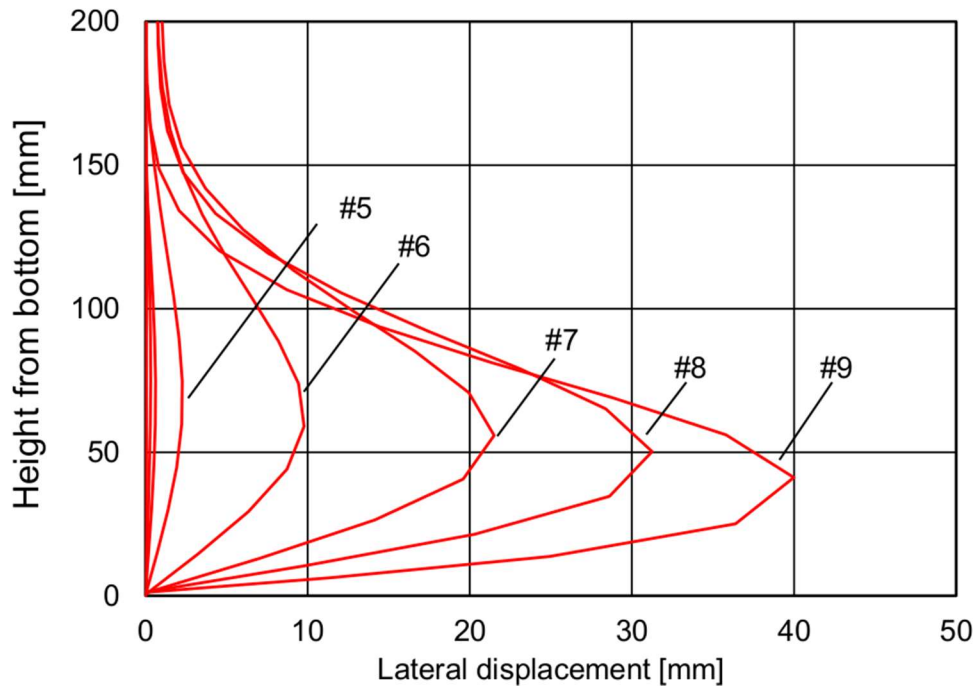
(L) w/o Tangential plasticity (R) w/ Tangential plasticity
(e) $+8d_0$

LE, Max. Princi
(Avg: 75%)

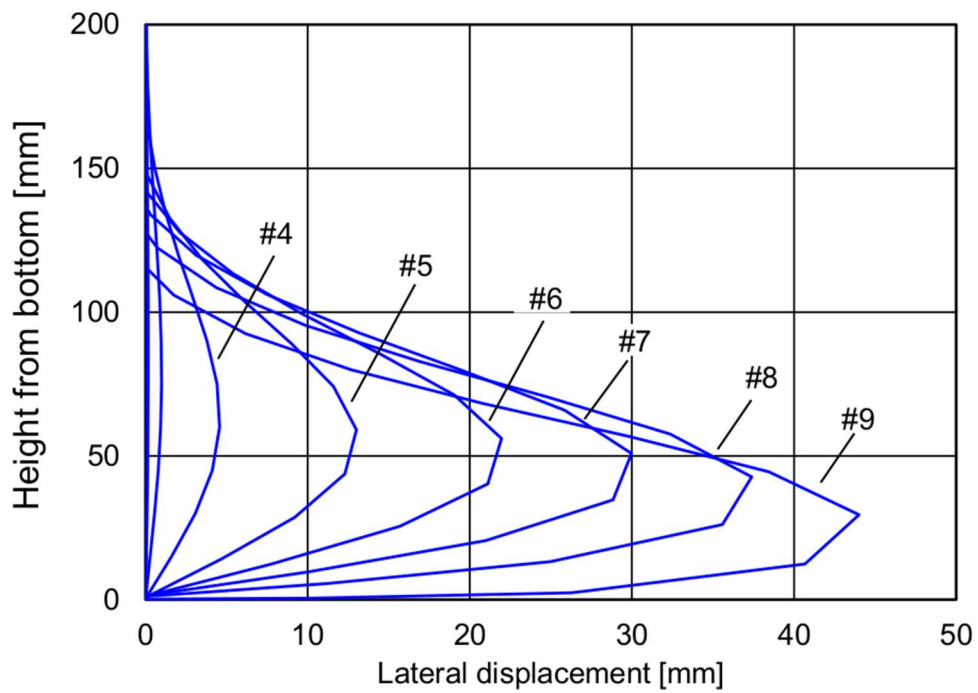


(L) w/o Tangential plasticity (R) w/ Tangential plasticity
(f) $+9d_0$

Fig. 4-12. Continued.



(a) without Tangential plasticity ($\mathbf{D}^t = \mathbf{0}$)



(b) with Tangential plasticity ($\mathbf{D}^t \neq \mathbf{0}$)

Fig. 4-13. Comparison of the local deformations from $+1d_0$ to $+9d_0$ around bottom of column.

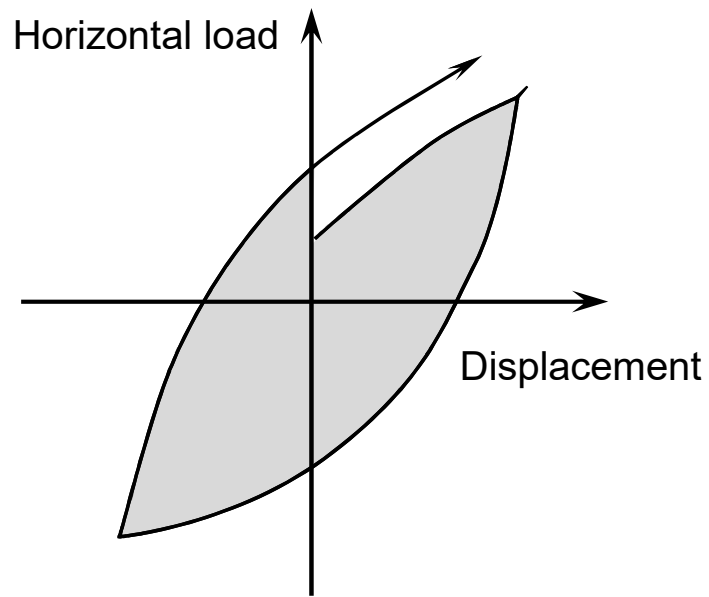


Fig. 4-14. Definition of absorbed energy with each loading cycle.

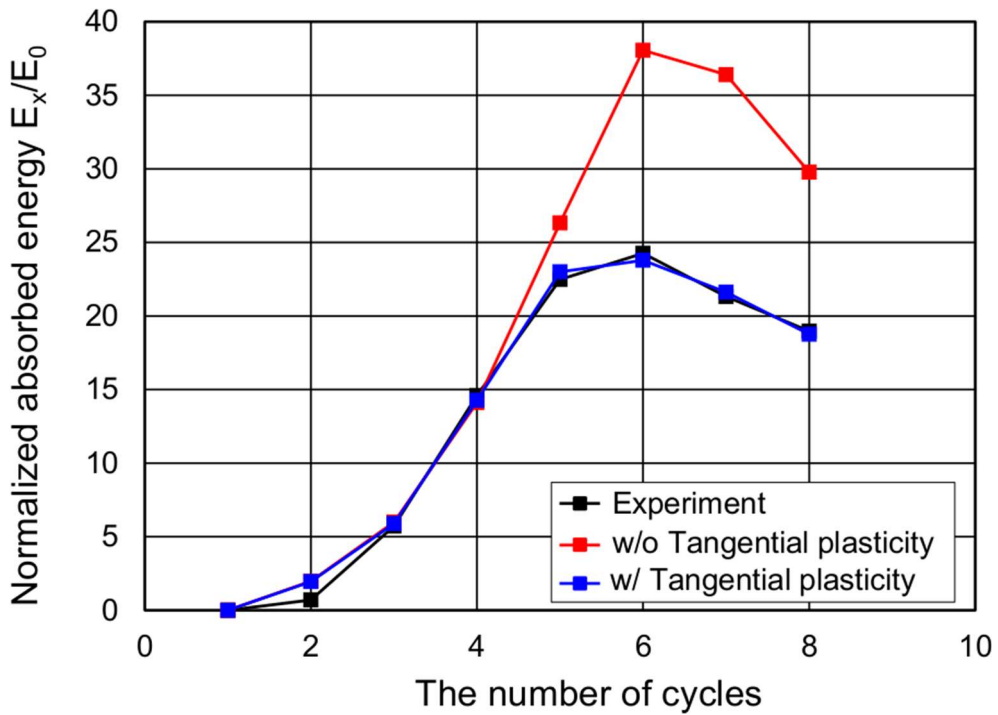


Fig. 4-15. Absorbed energy with each loading cycle.

4.4.2 矩形断面橋脚

矩形断面橋脚の柱頭部における荷重-変位履歴特性の比較結果を Fig. 4-16 および Fig. 4-17 に示す. Fig. 4-16 に示す従来の弾塑性モデルでは, 4 サイクル目に生じる最大水平荷重を精度良く捉えているものの, 5 サイクル目以降の水平荷重が減少する実験の傾向には差異が確認できる. 一方で, Fig. 4-17 に示す接線塑性弾塑性モデルでは, この傾向を極めて良好に再現していることがわかる. 両弾塑性モデルの違いによる比較結果を Fig. 4-18 に示す. 両者の違いは水平荷重が低下し始める 5 サイクル目, 6 サイクル目が顕著であるが, その後の履歴曲線は同等の応答を示す. 同サイクルの負の最大変位時に生じる水平荷重は, 接線塑性弾塑性モデルの方が従来の弾塑性モデルに比べ(負方向に)高い値を示すという, 他の領域の応答と異なる傾向を示している. この点については今後変形図を含めたより詳細な考察が必要である.

次に, 3 サイクルから 8 サイクルの正の最大変位時 ($+nd_0$) における矩形断面橋脚基部の変形図および最大主ひずみ分布を Fig. 4-19 に示す. 荷重-変位履歴と同様に, 4 サイクル目

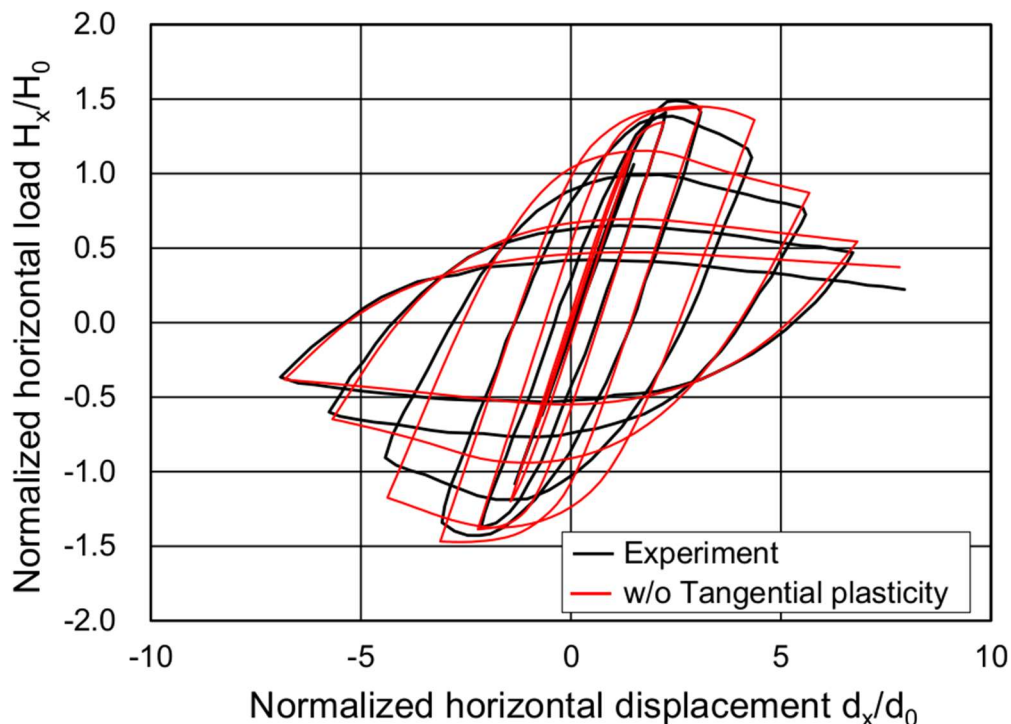


Fig. 4-16. Hysteretic response at loading point of steel pier with rectangular cross section (No.2). Experiment versus Extended subloading surface model without tangential plasticity.

までの変形図には両者の明確な違いは確認できない。しかしながら、5 サイクル目に至ると、接線塑性弾塑性モデルでは最大主ひずみの局所化や、荷重方向を直交する側面が橋脚内部に折れ曲がる座屈変形が顕著になり、両者の違いが明確になってくる。さらに負荷サイクルが増すごとに、接線塑性弾塑性モデルの方がより早い段階から荷重方向に沿う側面の面外変形が顕著に現れることが確認できる。したがって、Fig. 4-18 に示した両モデルの荷重－変位履歴の違いは、このようなひずみの局所化およびそれによる座屈変形の違いが支配的であるものと考えられる。

円形断面橋脚同様に、1 サイクル当りの吸収エネルギーの推移を比較した結果を Fig. 4-20 に示す。接線塑性モデルは従来モデルに比べ、負荷サイクル全域に渡って実験結果を極めて良好に捉えていることがわかる。特に橋脚基部の座屈変形が顕著となる 5 サイクル目以降の両者の解析精度に違いが確認できる。従来モデルは 6 サイクル目まで明確に吸収エネルギーが増大し、7 サイクル目で顕著に低下するのに対して、接線塑性モデルは 5 サイクル目で吸収エネルギーはほぼ最大値に到達しその後緩やかに減少していくという実験の傾向を捉えている。

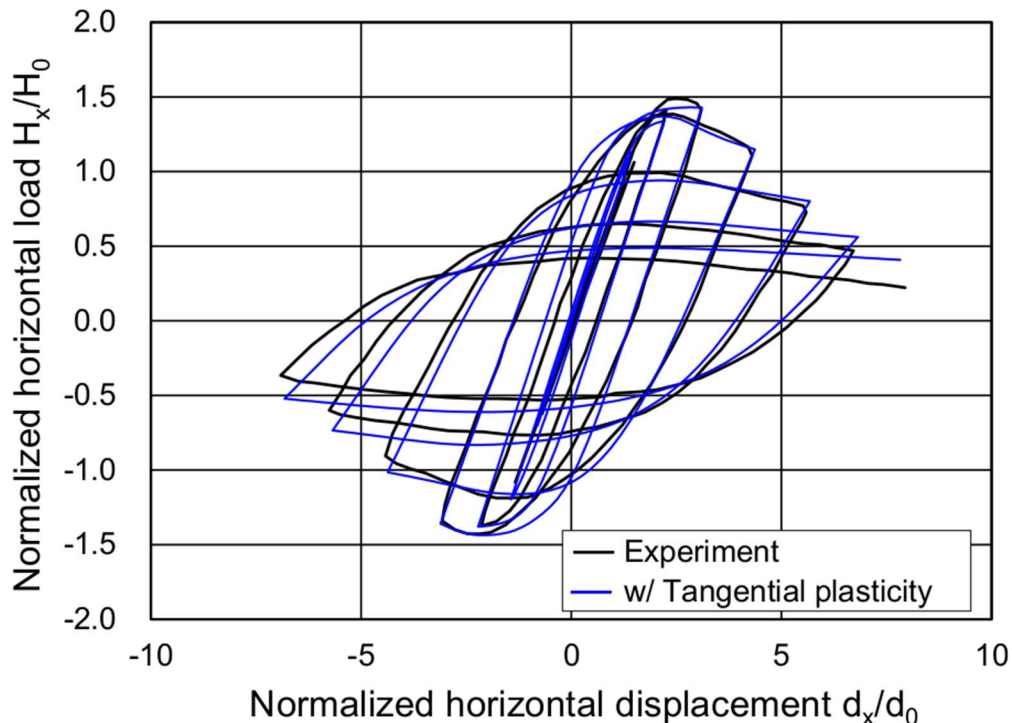


Fig. 4-17. Hysteretic response at loading point of steel pier with rectangular cross section (No.2). Experiment versus Extended subloading surface model with tangential plasticity.

このように、接線塑性ひずみを考慮しない従来の弾塑性モデルでは、実験結果に比べ、最大荷重を高く見積もること、その後の負荷サイクルで生じる荷重を高く見積もること、吸収エネルギー性能を過大に見積もること、など構造物の信頼性の観点から危険側の予測を与える。一方で接線塑性弾塑性モデルでは、いずれの傾向も極めて高精度に予測できることが示されており、当該効果を考慮した弾塑性モデルの適用性の高さおよび重要性を示唆しているものと考えられる。

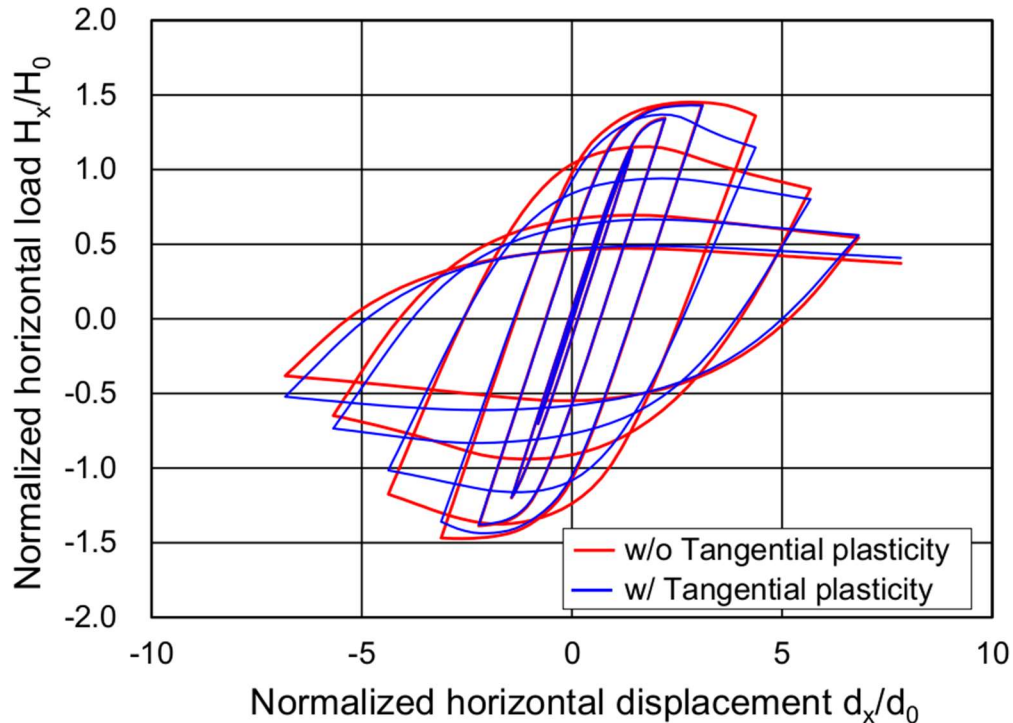
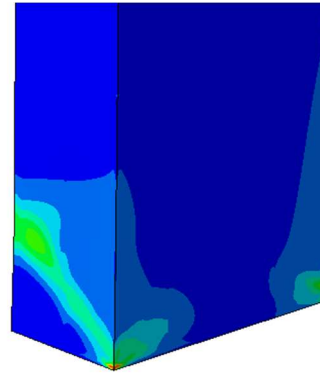
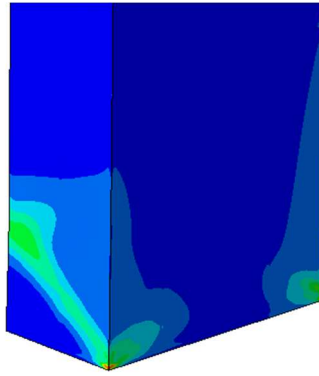
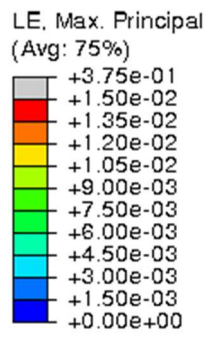
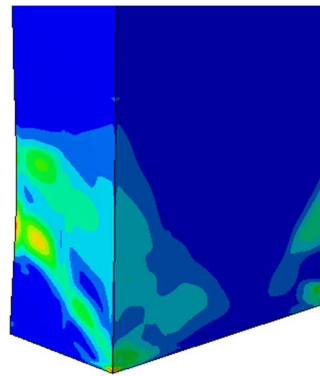
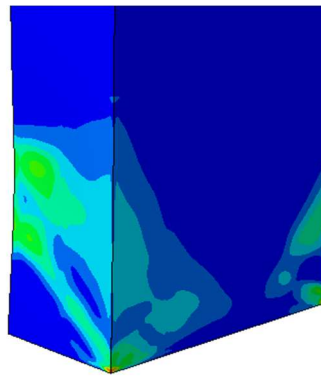
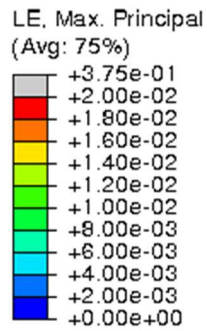


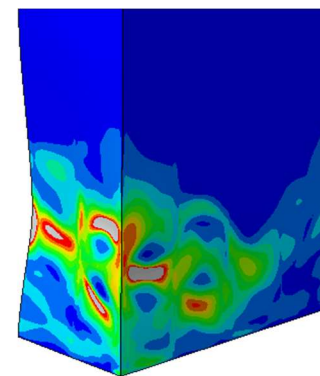
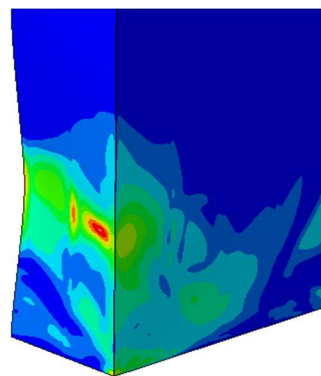
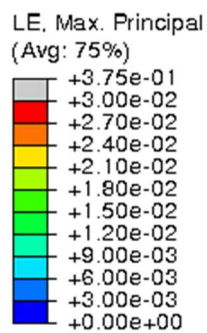
Fig. 4-18. Hysteretic response at loading point of steel pier with rectangular cross section (No.2). Extended subloading surface model without tangential plasticity ($\mathbf{D}^t = \mathbf{0}$) versus the one with tangential plasticity ($\mathbf{D}^t \neq \mathbf{0}$).



(L) w/o Tangential plasticity (R) w/ Tangential plasticity
(a) $+3d_0$



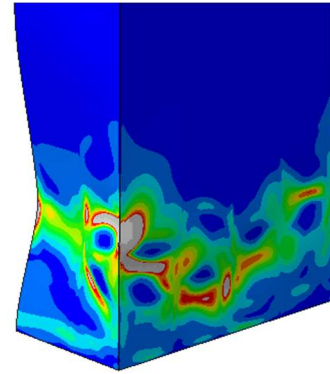
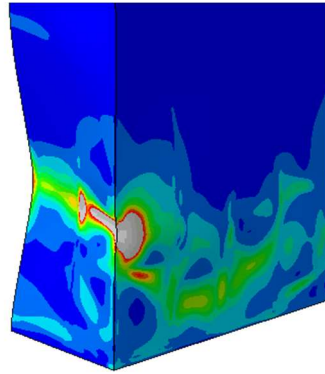
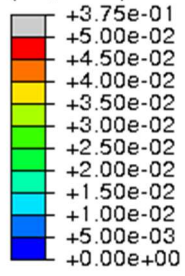
(L) w/o Tangential plasticity (R) w/ Tangential plasticity
(b) $+4d_0$



(L) w/o Tangential plasticity (R) w/ Tangential plasticity
(c) $+5d_0$

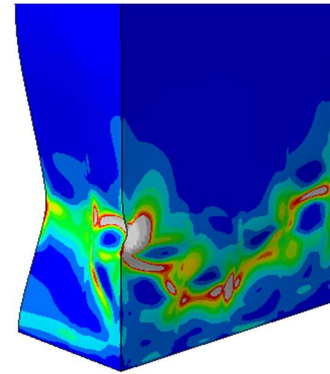
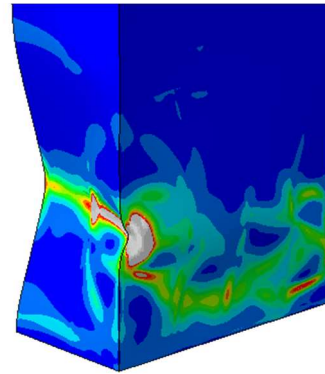
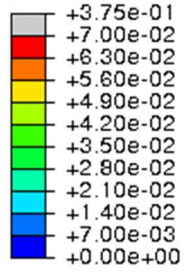
Fig. 4-19. Deformations and maximum principal strain distributions of steel pier with rectangular cross section (No.2).

LE, Max. Principal
(Avg: 75%)



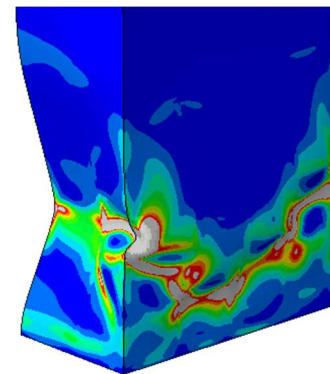
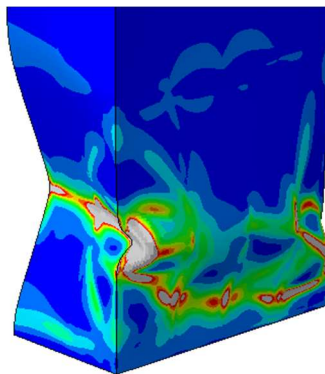
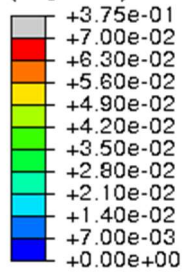
(L) w/o Tangential plasticity (R) w/ Tangential plasticity
(d) $+6d_0$

LE, Max. Principal
(Avg: 75%)



(L) w/o Tangential plasticity (R) w/ Tangential plasticity
(e) $+7d_0$

LE, Max. Principal
(Avg: 75%)



(L) w/o Tangential plasticity (R) w/ Tangential plasticity
(f) $+8d_0$

Fig. 4-19 Continued.

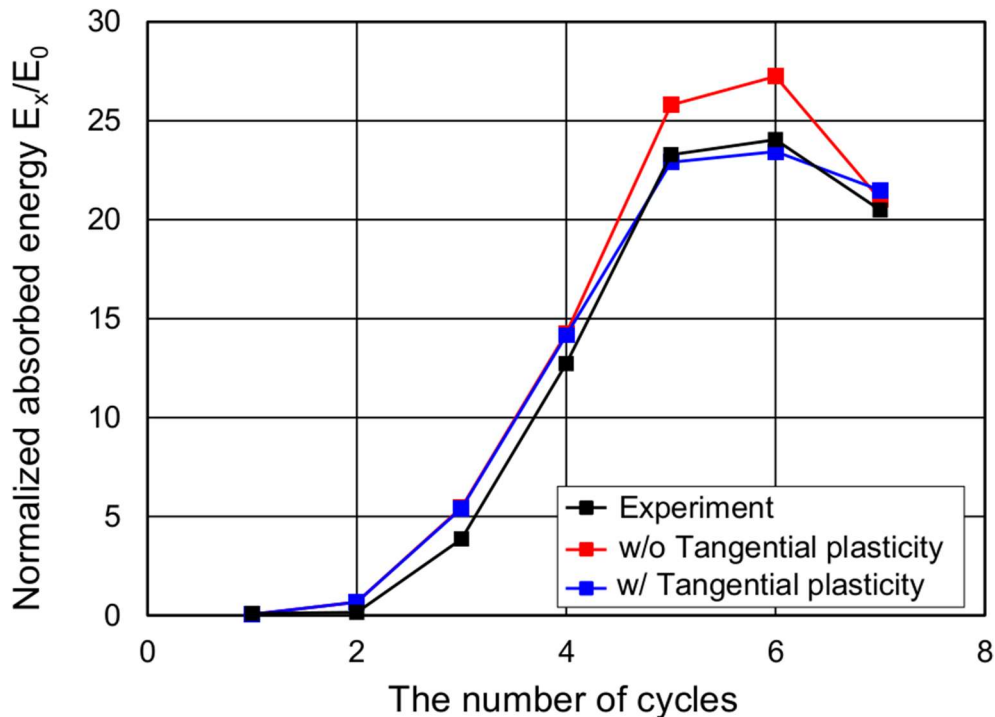


Fig. 4-20. Absorbed energy by every loading cycle.

4.5 結言

本章では、第 2 章に説明した接線塑性ひずみを考慮した弾塑性モデルとそれを考慮しない従来の弾塑性モデルを用いた非線形有限要素解析を実施し、既往の実験結果と比較した。本章で得られた結論を以下に示す。

1. Nishikawa et al.(1998)によって実施された、無補剛円形断面鋼製橋脚および補剛矩形断面鋼製橋脚に対する一定軸力下・水平 1 軸の漸増繰返し負荷実験に相当する非線形有限要素解析結果を示した。
2. いずれの鋼製橋脚に対しても、接線塑性ひずみを考慮しない従来の弾塑性モデルによれば、両供試体柱頭部の荷重-変位履歴特性は、実験結果に比べ高い最大荷重を示すことが示された。また最大荷重が生じた後のサイクルにおいても各サイクルで生じる最大荷重あるいは最大変位時の荷重は、実験結果に比べ高い値を、つまり構造物として危険側の予測結果を示した。
3. 一方で接線塑性ひずみを考慮した弾塑性モデルを用いた場合、最大荷重のみならず、

それ以降のサイクルで生じる荷重の低下といった終局状態までの履歴特性を極めて高精度に予測し得ることを示した。

4. これは接線塑性ひずみを考慮した弾塑性モデルの方が従来の弾塑性モデルに比べ、顕著に非弾性ひずみが発生・集積し、当該問題で特徴的な橋脚基部の座屈変形がより強く発生したことによるものと考えられる。
5. 以上の結果から、接線塑性ひずみを考慮した弾塑性モデルの適用性の高さ、とりわけ非比例負荷を含む一般負荷条件下の構造解析における接線塑性の重要性が示された。

本研究では、無補剛円権断面鋼製橋脚および補剛矩形断面鋼製橋脚の2例のみの結果について有限要素解析を実施および実験結果との比較を行ったが、今後は断面形状の違い、橋脚に用いられる材料の違い、より現実に近い入力に対する応答特性の把握など、異なる条件下における実験との比較・検証に取り組み、接線塑性弾塑性モデルの有用性を示すことが挙げられる。なお、水平2軸の漸増繰返し負荷条件の解析例は次章にて述べる。

5章 水平 2 軸の繰返し負荷を受ける鋼製橋脚の弾塑性解析

5.1 緒言

第 4 章では、水平 1 軸繰返し負荷を受ける鋼製橋脚の非弾性変形挙動の有限要素解析を実施し、それに相当する既往の実験結果との比較により、接線塑性ひずみを考慮した弾塑性モデルの妥当性を検証した。この水平 1 軸方向負荷条件は道路橋示方書(日本道路協会, 2002)における鋼製橋脚の耐震性能照査法に基づくものである。

しかしながら、実際の地震動は複雑な 3 軸成分を有していることから、橋脚の力学的応答に対して橋脚軸方向の変動成分の影響が小さいと仮定しても、車両進行方向および横断方向である軸直角方向の水平 2 軸の変動成分は無視できないものと考えられる。そのため、一定軸力下・水平 2 軸負荷を受ける鋼製橋脚の実験的および数値解析的研究が行われてきている(後藤ら, 2005,2007,2009;Ucak and Tsoelas, 2012,2014)。これらの研究の知見によれば、水平 1 方向繰返し負荷条件に比べ水平 2 方向繰返し負荷条件下では、橋脚基部の局部座屈変形が大きく生じ、復元力の最大値の減少が顕著になることが明らかにされている。すなわち、従来の実験的・数値解析的研究で用いられてきた水平 1 方向繰返し負荷条件下の検討で積み重ねられた数多くの有用な知見を、そのまま水平 2 方向繰返し負荷や実際の地震波を用いた実稼働条件下における鋼製橋脚の耐震設計に反映することは困難であることを示唆しているものと考えられる。また、水平 2 軸の地震波の振幅および軸方向間位相差の組み合わせは無限に存在し、さらに実構造物では複雑な非対称形状を有する場合も多いことから、鋼製橋脚の耐震性能や効果的な耐震補強性能を支配する設計パラメータのデータ蓄積を実験のみに頼るのは極めて膨大な費用および時間を要すると考えられる。従って実験を補完することのできる数値解析手法が求められる。

そこで本章では、4 章で用いた有限要素モデルを用いて、一定軸力下・水平 2 軸繰返し負荷条件下の弾塑性解析を、従来の弾塑性構成式と接線塑性弾塑性構成式の両者で実施すると共にそれらを比較し接線塑性の有無による鋼製橋脚の力学的応答の差異を評価する。

5.2 有限要素モデルと境界条件

5.2.1 有限要素モデル

本章で用いる有限要素モデルは、4 章で用いた有限要素モデルと同一形状であるが、水平 2 軸の境界条件を与えるため、1/2 対称モデルから 1/1 フルスケールモデルへ変更してい

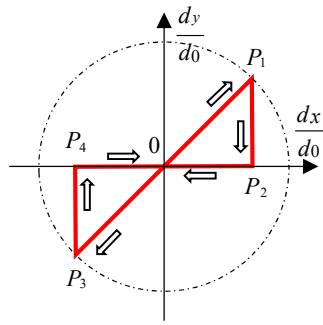
る。無補剛円形断面供試体の鋼材 SS400 および補剛矩形断面供試体の鋼材 SM490 共に材料定数は変更していない。

5.2.2 境界条件

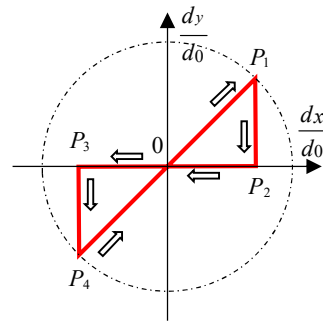
水平 2 軸漸増繰返し解析における基部の拘束条件および頭部の一定軸力は水平 1 軸のそれらに等しいが、橋脚頭部の漸増繰返し変位経路が水平 1 軸のそれと異なる。本研究で採用した水平 2 軸の変位経路は Ucak and Tsopelas(2012,2014)により採用されたものと同様であり、それら 7 経路を Fig. 5-1 に示す。(a)BS, (b)BA はバタフライ型経路で、第一象限と第三象限の経路が互いに対称と非対称である。(c)XU, (d)XP は同じ十字経路であるが、1 サイクルにおける 90° の経路変更の回数が異なる。十字経路 XU においてその経路変更は 2 回であり、十字経路 XP におけるそれは 4 回である。(e)DM, (f)SQ は同じ四角形経路であるが、両者の違いは各サイクルで最大変位量となる方向が 45° 異なっている点で、(e)DM では、x 軸, y 軸を横切る際に各サイクルの最大変位となるのに対して、(f)SQ では x 軸成分, y 軸成分が同じ、つまり x-y 平面で 45° 方向で最大変位となる。(g)は円形経路で、Jiang et al.(2001)によれば兵庫県南部地震の地震波を用いた単柱式円形薄肉断面鋼製橋脚の 3 次元地震応答解析結果における柱頭部の応答変位トラジェクトリが円形ループを描いていた結果から、鋼製橋脚の耐震性能を検討するために重要な経路であると考えられる。

全ての変位経路において、水平変位振幅は、Fig. 5-1 に破線で示した円形包絡線に従い、x 方向の変位を d_x , y 方向の変位を d_y とすると、有効水平変位 d は $d = \sqrt{d_{x0}^2 + d_{y0}^2}$ で表される。この有効水平変位は、水平 1 軸負荷の場合と同様に、有効水平変位は繰返し数に伴い漸増する。Fig. 5-1(h) は円形経路を例に、漸増する振幅の様子を模式的に示したもので、各サイクルが終了する度に次の有効変位振幅へ移行していく。また有効水平変位 d は式(4.1), 式(4.2)で与えられるため、変位経路(a)BS, (b)BA, (f)SQ の x,y 方向変位成分は水平 1 軸の x 方向変位に対して常に $1/\sqrt{2}$ を乗じた値となる。

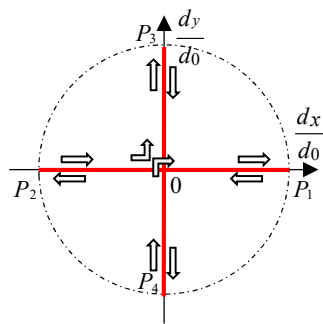
無補剛円形断面鋼製橋脚は全 7 条件について有限要素解析を実施し、補剛矩形断面鋼製橋脚では(e) DM, (f) SQ, (g) CR の 3 条件のみ実施した。



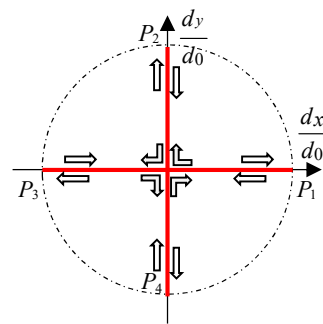
(a) BS



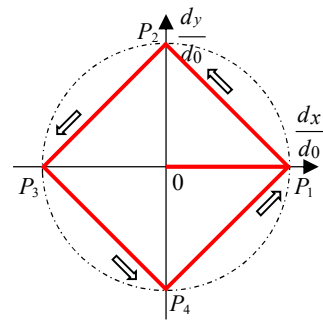
(b) BA



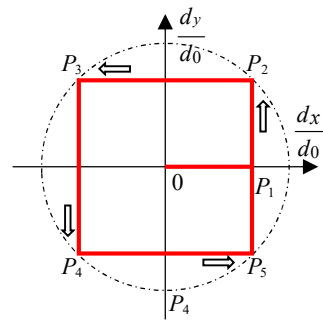
(c) XU



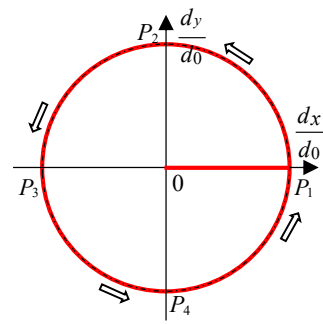
(d) XP



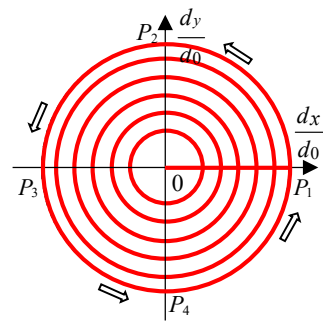
(e) DM



(f) SQ



(g) CR



(h) Example of CR

Fig. 5-1 Enforced displacement histories in horizontal plane.

5.3 解析結果と考察

5.3.1 柱頭部の荷重－変位応答

水平 2 軸負荷を受ける無補剛円形断面鋼製橋脚の柱頭部におけるヒステリシス挙動を Fig. 5-2 から Fig. 5-6 に、補剛矩形断面鋼製橋脚のそれらを Fig. 5-7 から Fig. 5-9 に示す。図中の H_x, H_y はそれぞれ柱頭部の x 方向, y 方向に生じる荷重である。また横軸, 縦軸ともに, 式(4.2)の与えられる初期水平変位 d_{x0}, d_{y0} および初期水平荷重 H_{x0}, H_{y0} で正規化している。なお, 円形断面鋼製橋脚の変位経路(b)BA および(d)XP の結果は 5.5 Appendix に記載した。

弾塑性モデルの違いに着目すると, 負荷経路に依存して様々な荷重－変位応答を呈しているが, 水平 1 軸の結果と同様に, 接線塑性ひずみを考慮しない従来の弾塑性モデルは, それを考慮した弾塑性モデルに比べ, ピーク荷重が高く見積られる傾向, ピーク荷重が生じるまでのサイクル数が大きい傾向はいずれの負荷経路の結果に対しても共通して確認できる。ただし両モデル間の差異の大きさは, 鋼製橋脚が受ける変位経路に依存していることから, 非弾性変形が卓越する橋脚基部の材料が受けるひずみ経路の複雑性によるものと推察される。

また第 4 章に示した水平 1 軸の荷重－変位応答と比較するため x 方向応答に着目すると, 両者の傾向は大きく異なることがわかる。詳細に図を見ると, 弾性応答が支配的な第 1 サイクルでは水平 1 軸の場合と大きな差異は見られないが, 塑性的応答が発生する 2 サイクル目以降その傾向は顕著になる。これは x 軸に直交する y 軸負荷の影響を強く受ける, いわゆる非線形問題の負荷経路依存性による。この結果は, 水平 1 軸下の検討で得られた耐震性能や補強に関する知見をそのまま水平 2 軸を受ける鋼製橋脚に活かすことができないという既往の研究結果(e.g. 後藤ら, 2005,2007)に対応している。

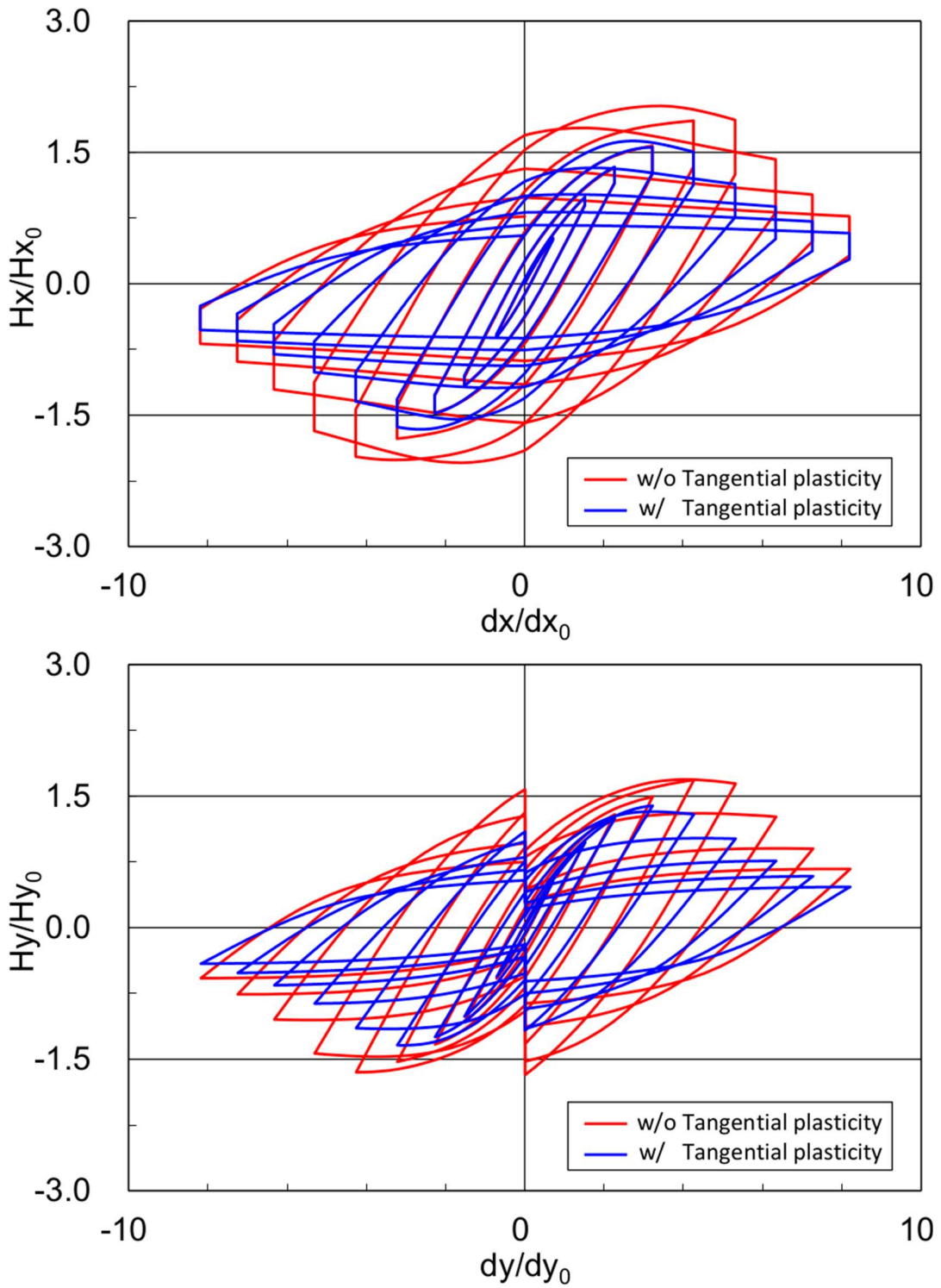


Fig. 5-2 Hysteretic response at loading point of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (a) BS.

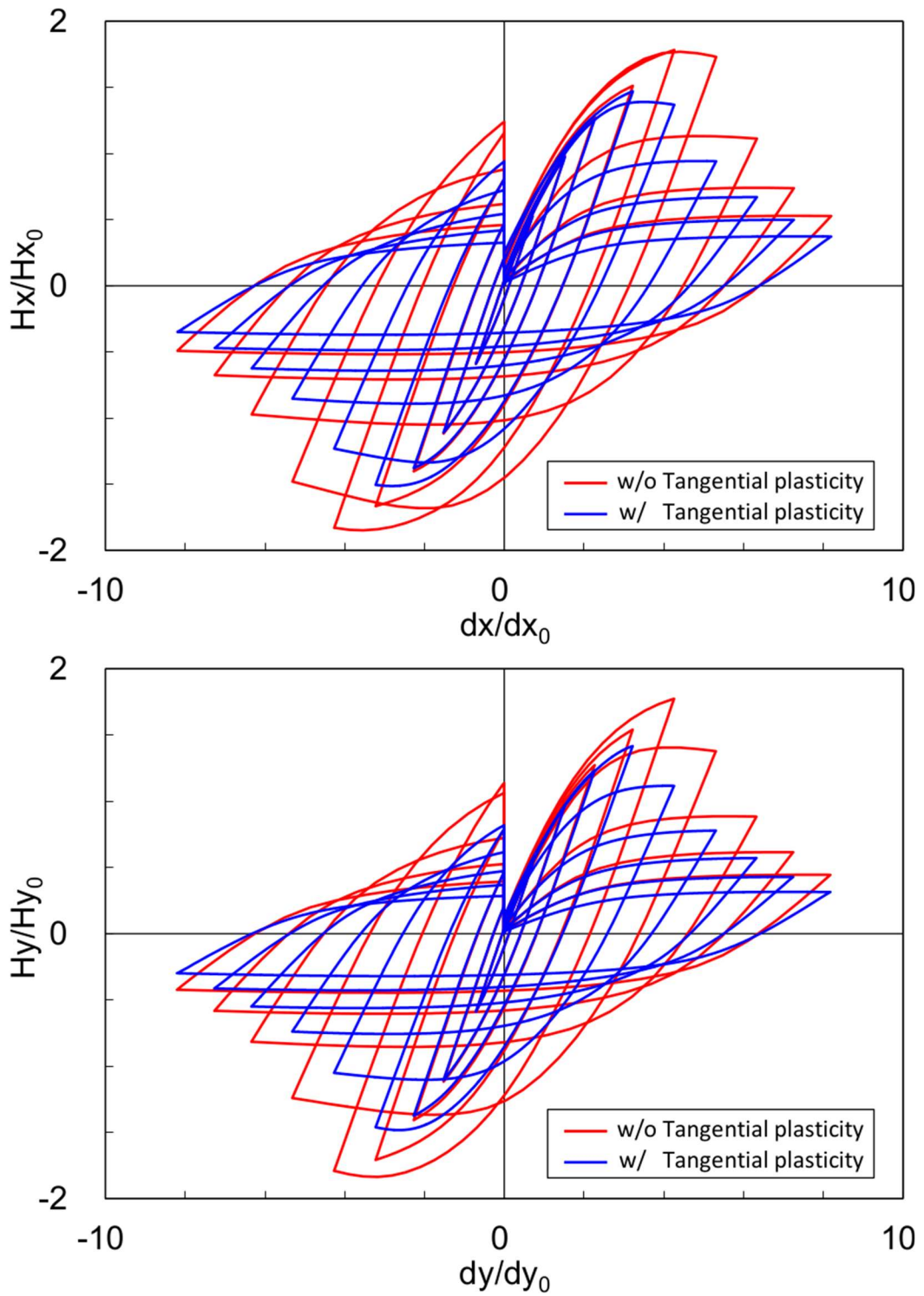


Fig. 5-3 Hysteretic response at loading point of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (c) XU.

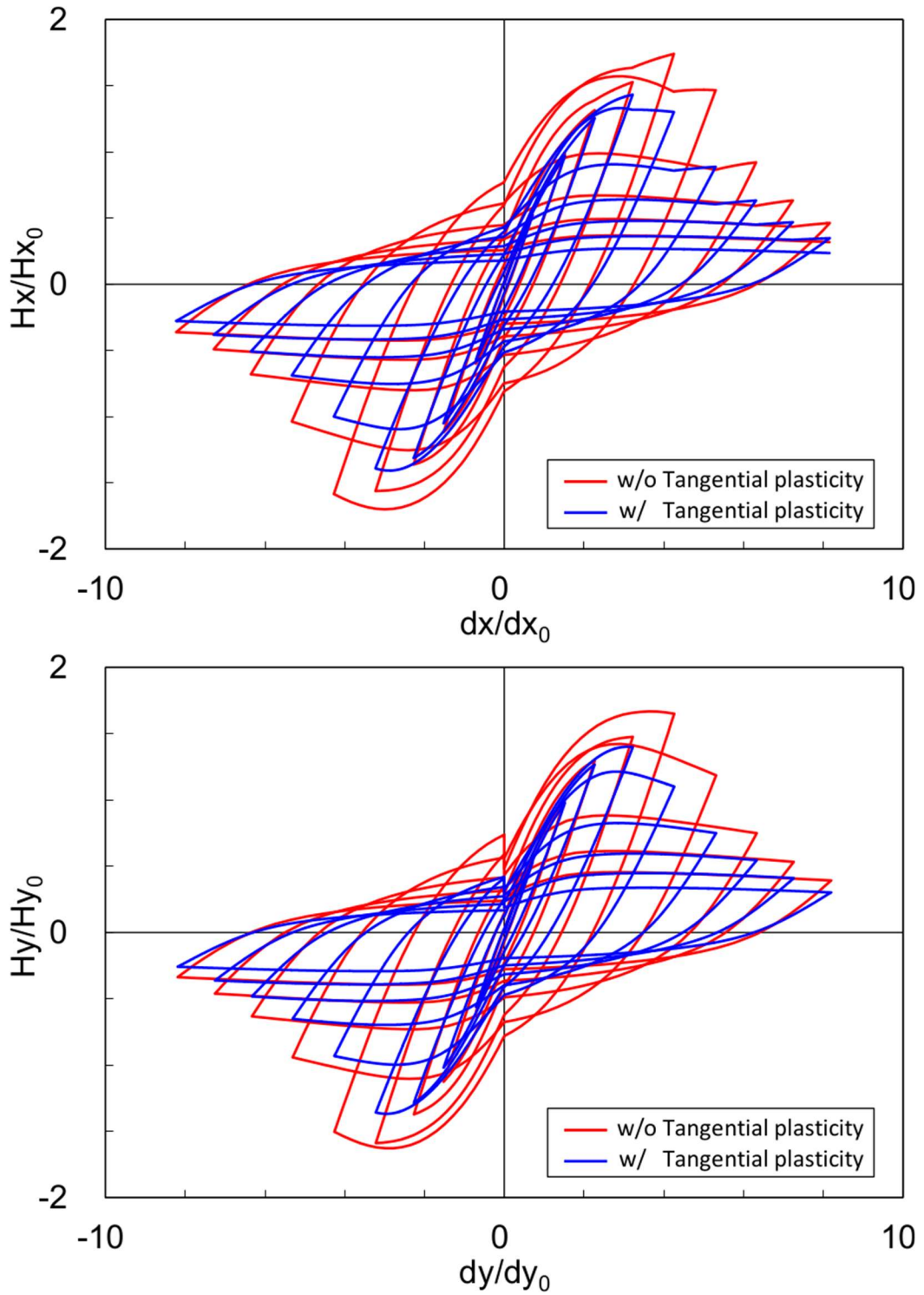


Fig. 5-4 Hysteretic response at loading point of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (e) DM.

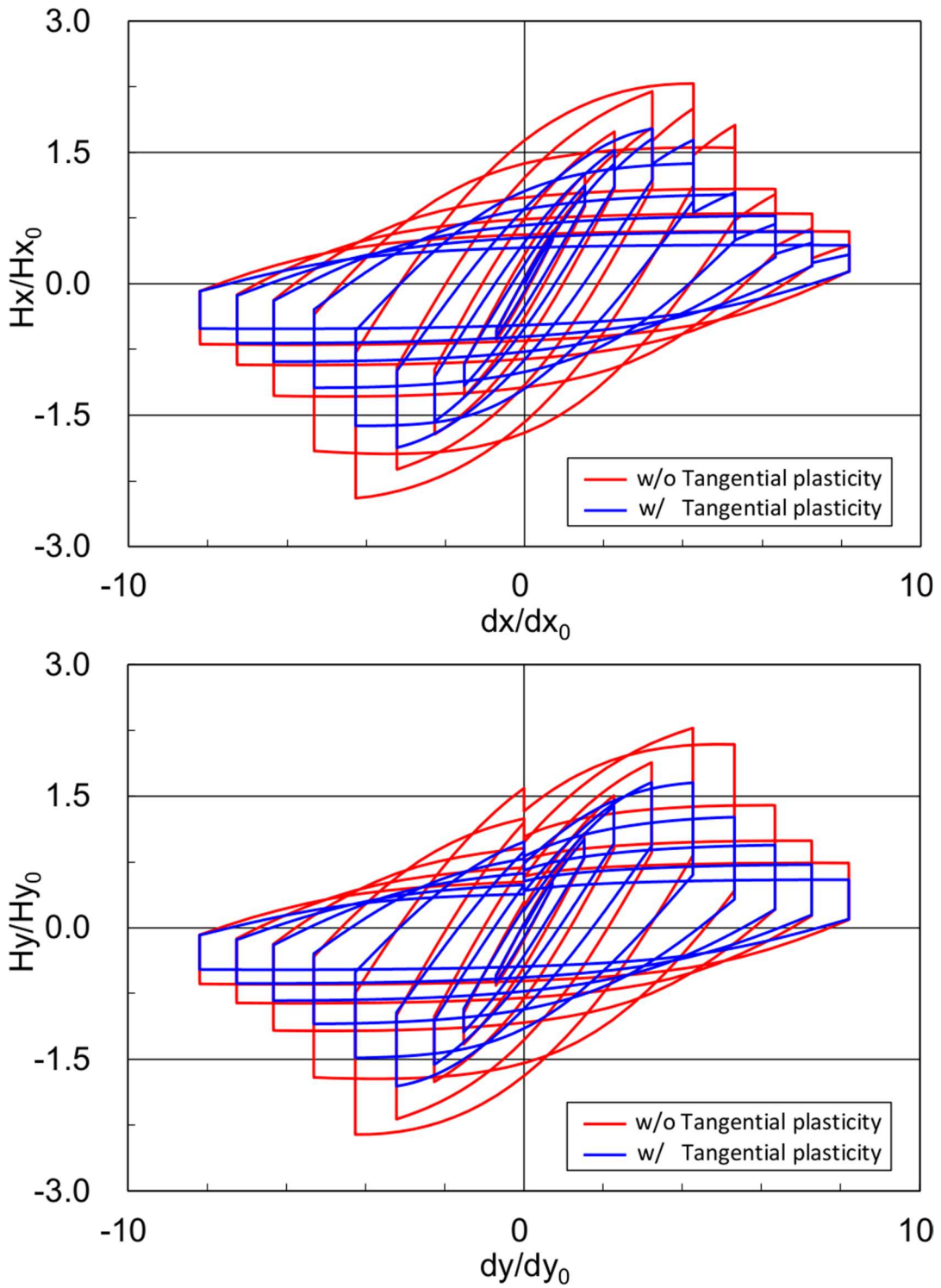


Fig. 5-5 Hysteretic response at loading point of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (f) SQ.

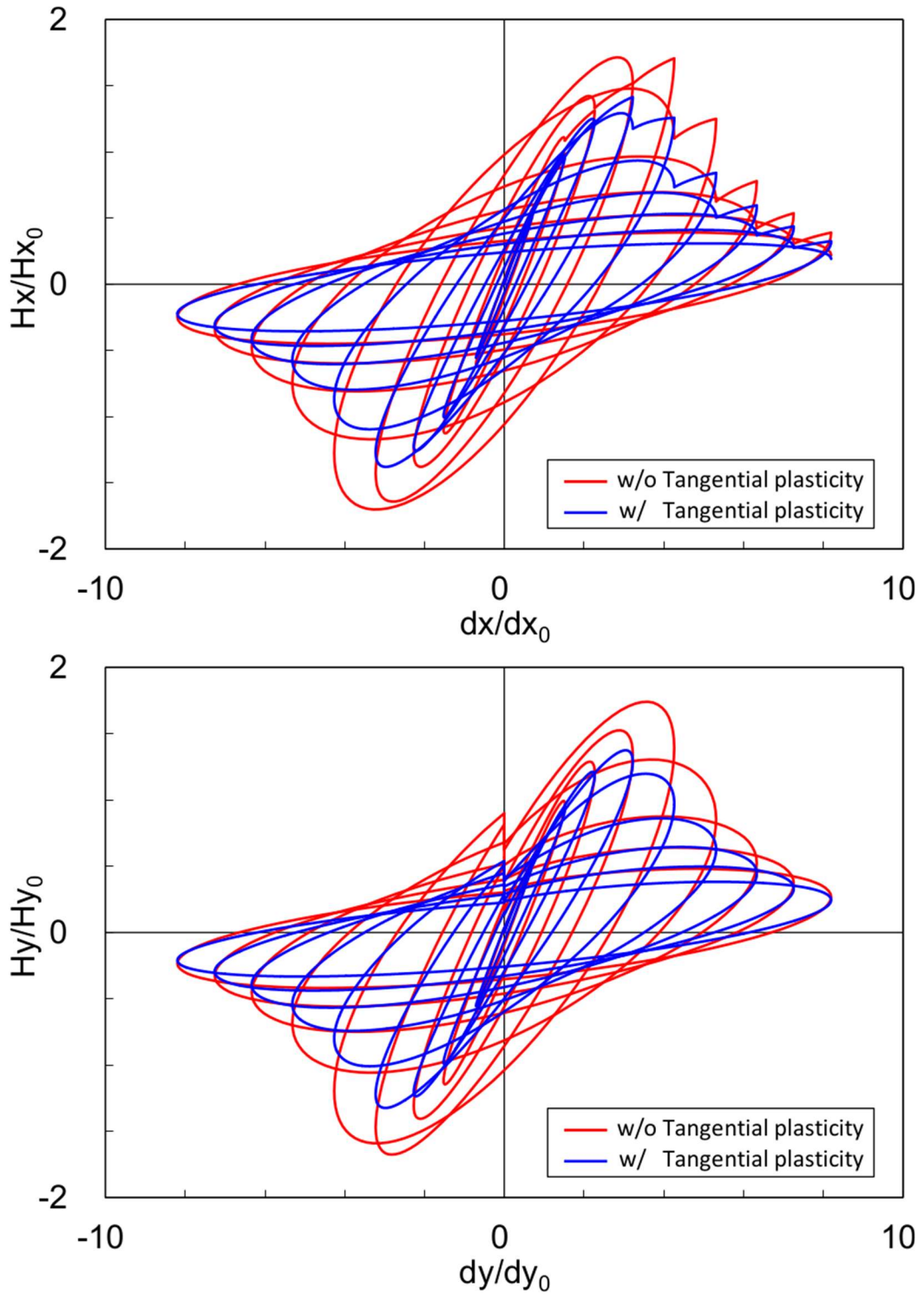


Fig. 5-6 Hysteretic response at loading point of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (g) CR.

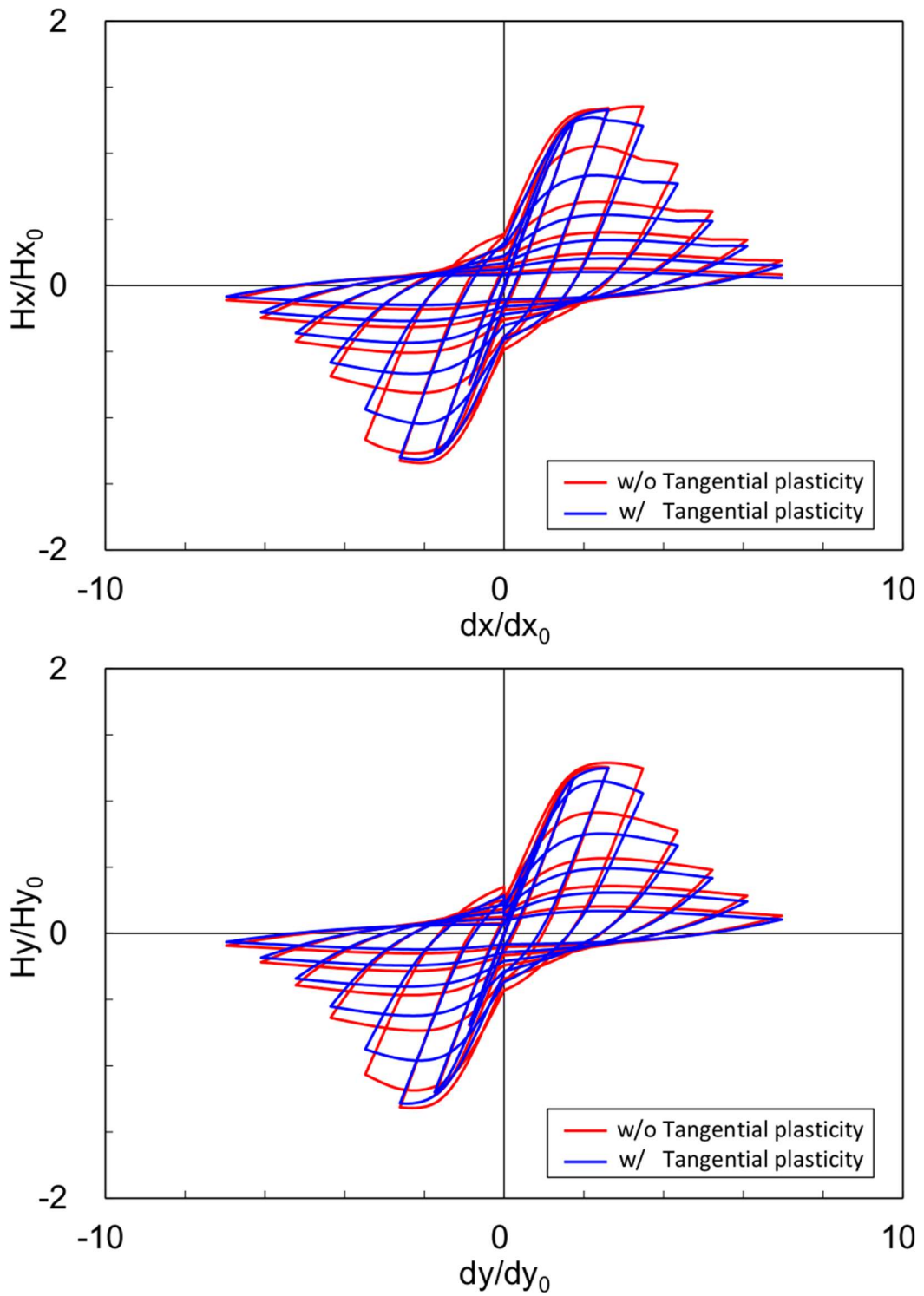


Fig. 5-7 Hysteretic response at loading point of steel pier with rectangular cross section (No.2) subjected to path (e) DM.

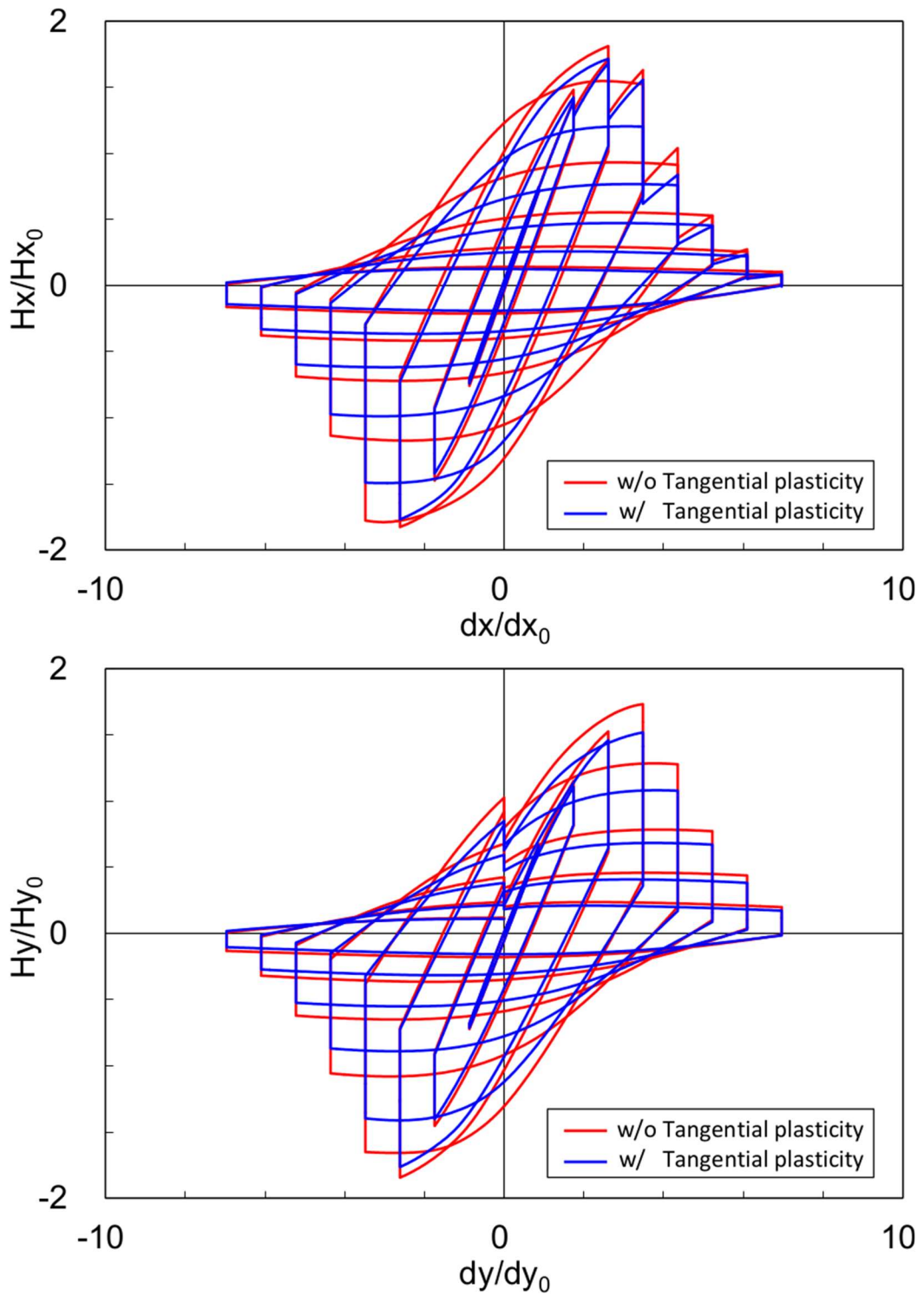


Fig. 5-8 Hysteretic response at loading point of steel pier with rectangular cross section (No.2) subjected to path (f) SQ.

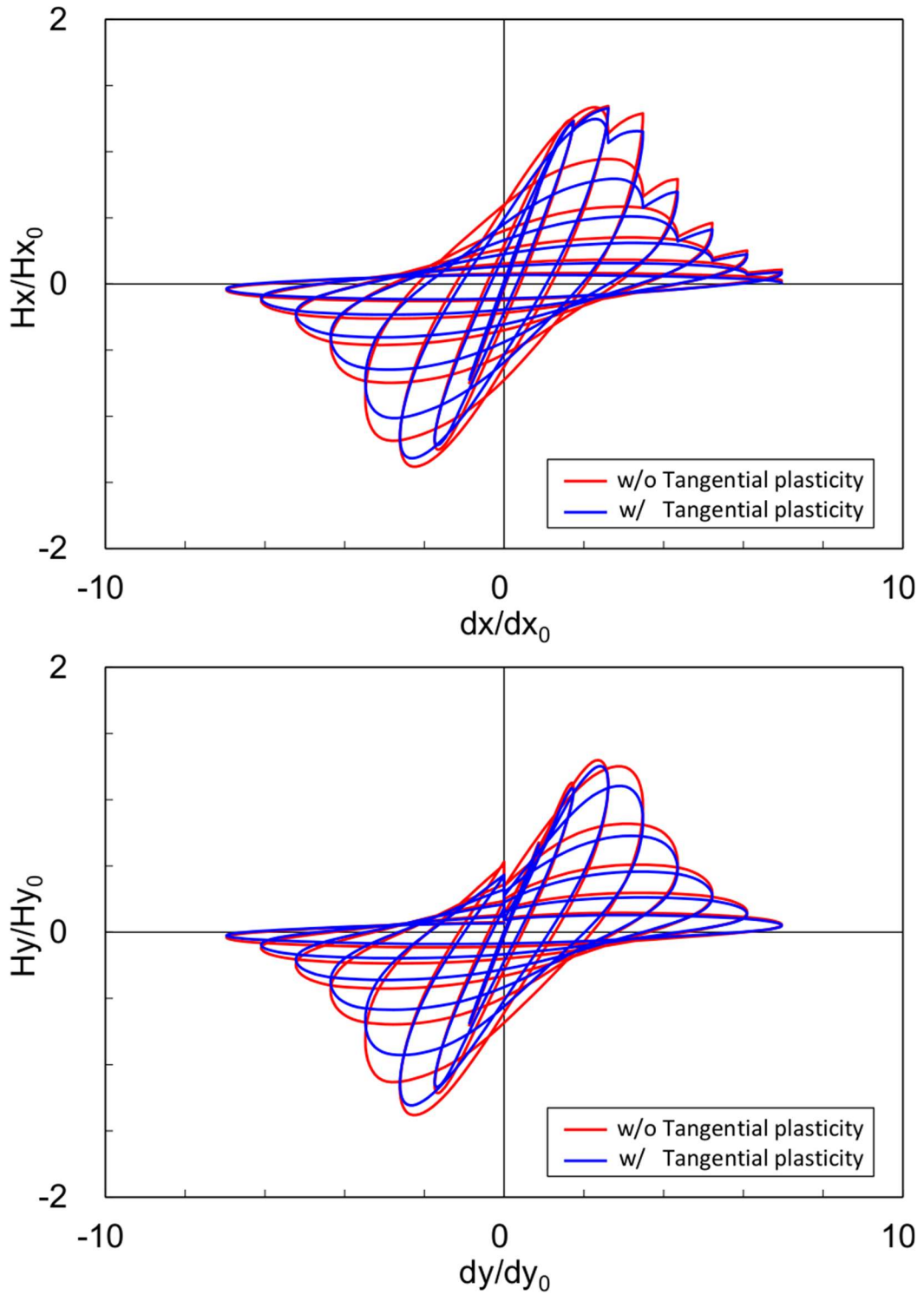


Fig. 5-9 Hysteretic response at loading point of steel pier with rectangular cross section (No.2) subjected to path (g) CR.

5.3.2 橋脚基部の局所変形

第 4, 6 および 8 サイクル終了時における円形断面鋼製橋脚基部の局所変形の様子を Fig. 5-1 から Fig. 5-14, 矩形断面鋼製橋脚の様子を Fig. 5-15 から Fig. 5-17 に示す. 最大主ひずみのカラースケールは, 円形断面鋼製橋脚ではサイクル毎に統一し, 矩形断面鋼製橋脚ではサイクルを通して統一している. 円形断面鋼製橋脚基部の特徴的な座屈変形パターンにおいては, いずれの負荷経路においても従来モデルと接線塑性モデルで大きな差異はない. また, 水平 1 軸の変形パターンとの顕著な差異も見受けられない. この点は Ucak(2009)が指摘した傾向と一致している. しかしながら, 水平 1 軸と同様に従来モデルに比べ接線塑性モデルは, より早い段階から, より局所的に座屈変形が卓越していることが確認できる. 従って, 前述のように接線塑性ひずみを考慮しない従来モデルに比べ接線塑性モデルのピーク荷重が低下したものと考えられる. また, (g)CR を除き座屈変形上部に最大主ひずみの差異が確認でき, 接線塑性モデルの方が従来モデルに比べて最大主ひずみが大きいことが分かる. 特にピーク荷重が生じる前後の 4 サイクル目および 6 サイクル目で, 橋脚頭部の負荷経路が急変する方向での差異が大きい. 例えば, Fig. 5-12 (e)DM における x 軸 y 軸方向や, Fig. 5-13 (f)SQ における x-y 軸 45° 方向などがそれに当たる. これは, 接線塑性ひずみ速度の定式化から, 橋脚基部の材料が比例負荷経路から強く逸脱する負荷履歴を受け, より強い非弾性ひずみ(塑性ひずみと接線塑性ひずみの和)が生じたためであると考えられる. さらにこの現象がサイクル全域に渡って繰り返されることで累積非弾性ひずみの大きさに差異が生じ, ピーク荷重および終局状態までの荷重低下へつながったものと考えられる.

矩形断面鋼製橋脚では円形断面鋼製橋脚と異なり, 水平 1 軸下の変形と異なる. 具体的には, 水平 1 軸では負荷方向に直交する方向の側面が, 面外方向に膨らむような座屈変形を示していたのに対して, 水平 2 軸ではいずれの方向の側面も橋脚内部に倒れこむような座屈変形を示していることが特徴と言える. 本結果の信頼性は同形状, 同負荷条件の実験との比較を待つ他なく, 今後の検討課題の一つと言える.

さて, 弾塑性モデルによる変形の違いに着目すると, 円形断面鋼製橋脚と同様に, 特徴的な変形パターンに大きな差異はない. ただし, Fig. 5-17(g) CR では 6 サイクルまでの変形では差異が見られないものの, 8 サイクル目では折れ曲がり変形の水平方向からの角度に差異が認められる. 接線塑性ひずみを考慮しない従来の弾塑性モデルに比べ, 接線塑性弾塑性モデルは, より早い負荷サイクルから局所的にひずみが集中し, かつ, 座屈変形の程度が大きいことがわかる.

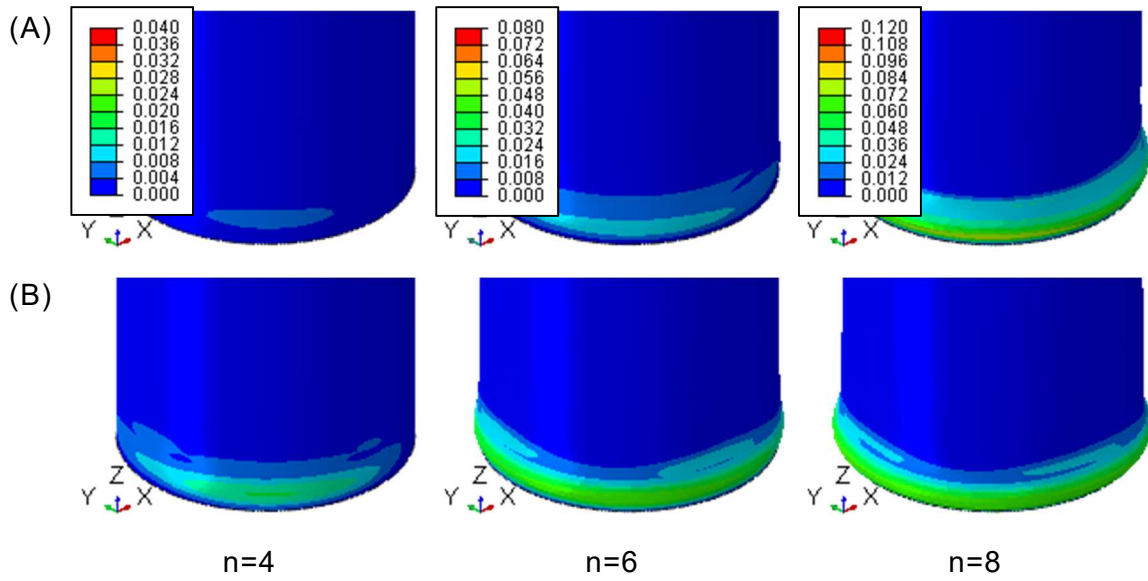


Fig. 5-10 Deformations and maximum principal strain distributions of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (a) BS. Extended subloading surface model (A) without tangential plasticity and (B) with tangential plasticity.

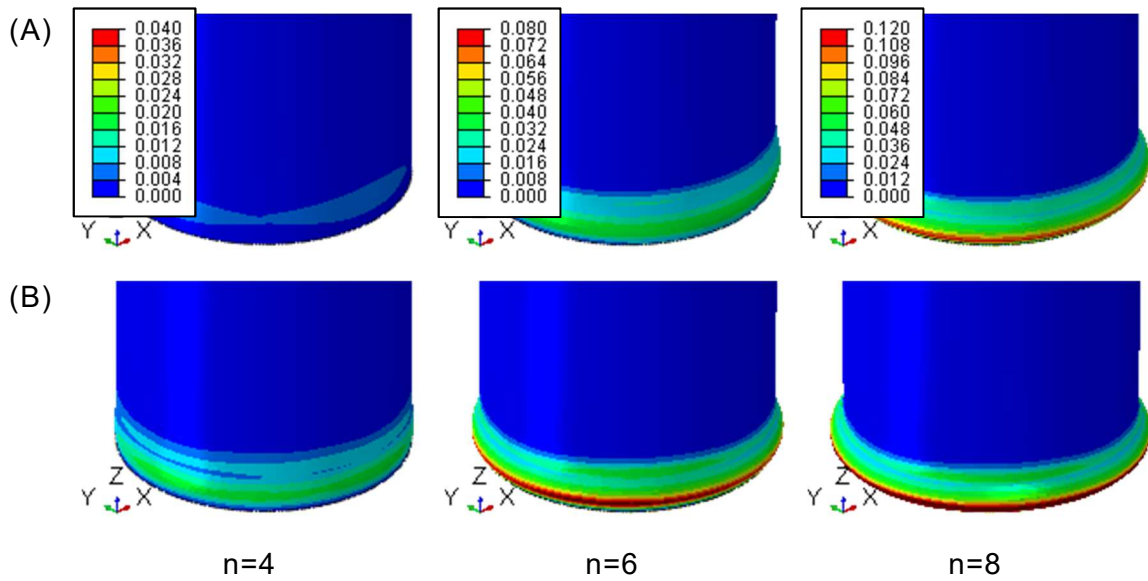


Fig. 5-11 Deformations and maximum principal strain distributions of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (c) XU. Extended subloading surface model (A) without tangential plasticity and (B) with tangential plasticity.

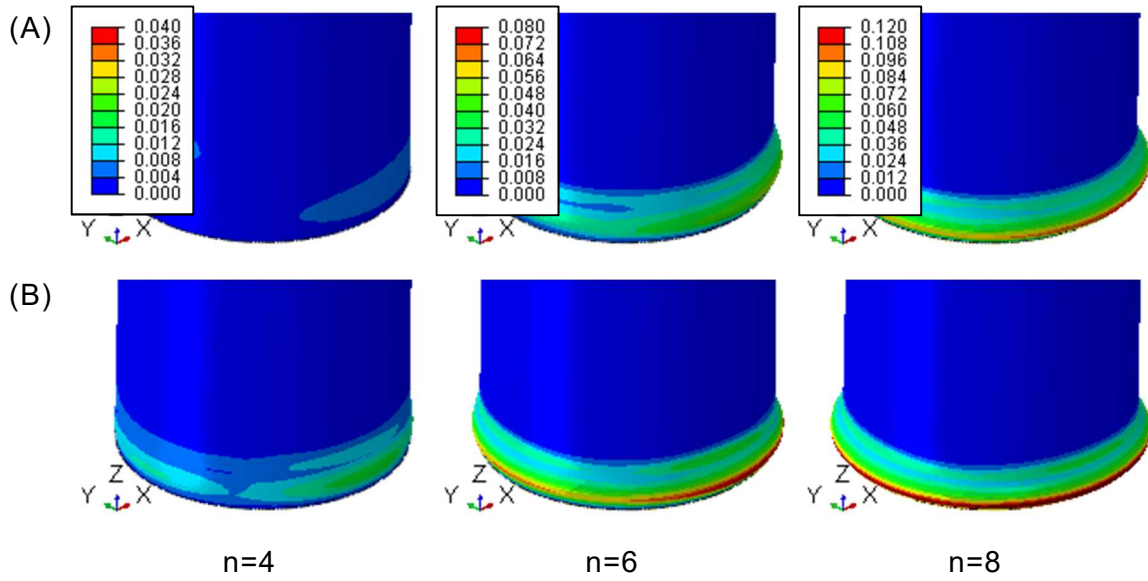


Fig. 5-12 Deformations and maximum principal strain distributions of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (e) DM. Extended subloading surface model (A) without tangential plasticity and (B) with tangential plasticity.

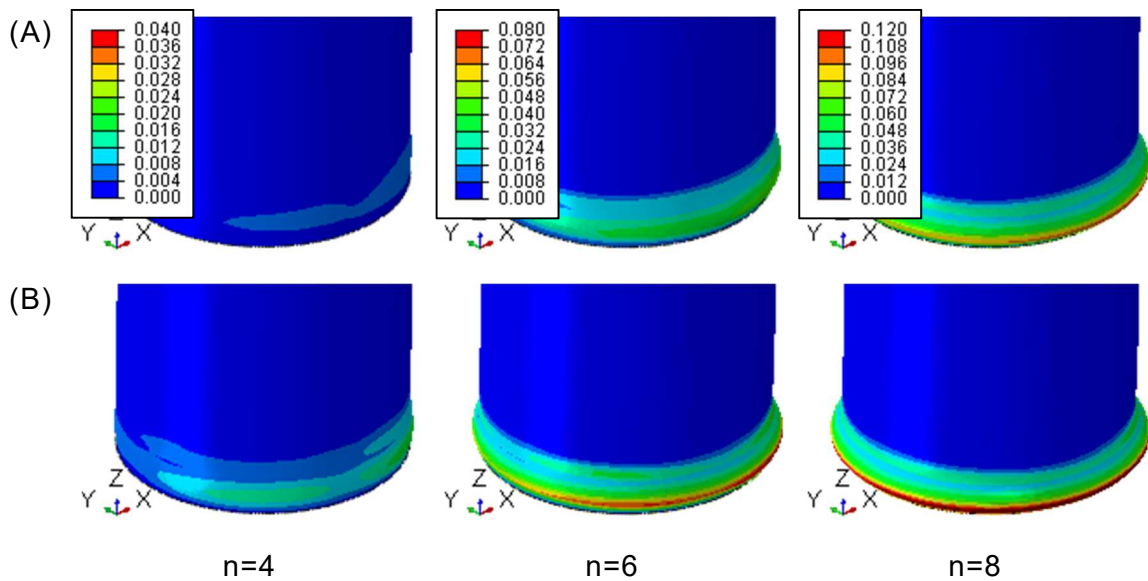


Fig. 5-13 Deformations and maximum principal strain distributions of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (f) SQ. Extended subloading surface model (A) without tangential plasticity and (B) with tangential plasticity.

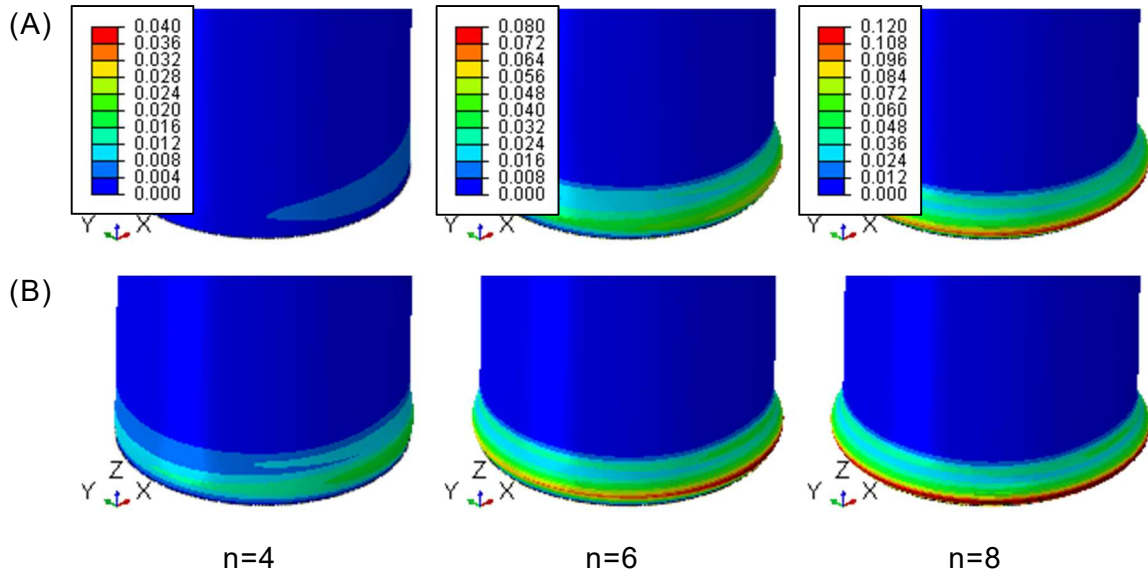


Fig. 5-14 Deformations and maximum principal strain distributions of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (g) CR. Extended subloading surface model (A) without tangential plasticity and (B) with tangential plasticity.

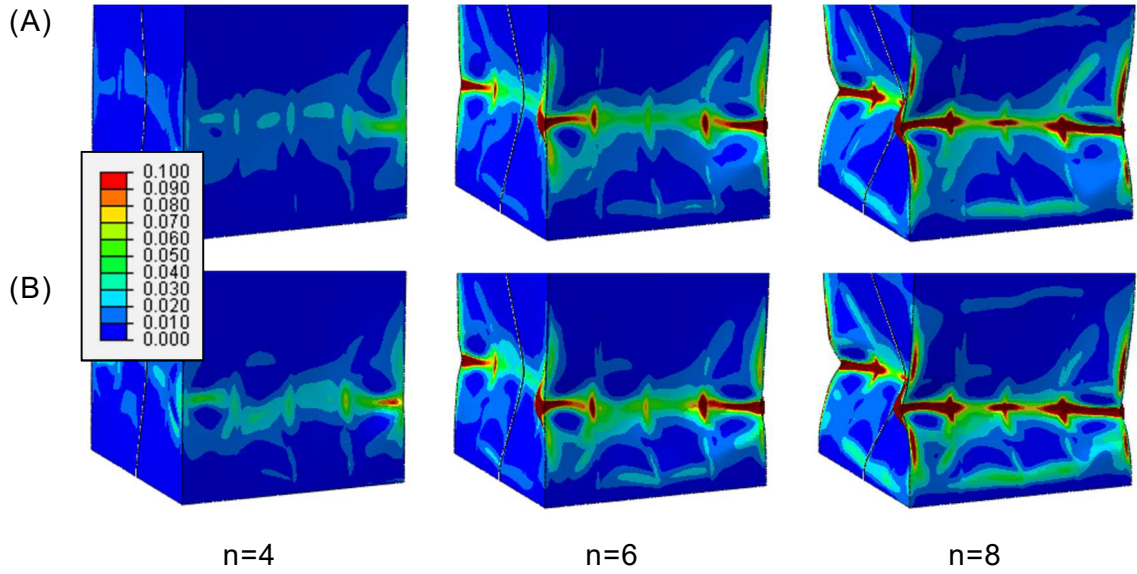


Fig. 5-15 Deformations and maximum principal strain distributions of steel pier with rectangular cross section (No.8) subjected to path (e) DM. Extended subloading surface model (A) without tangential plasticity and (B) with tangential plasticity.

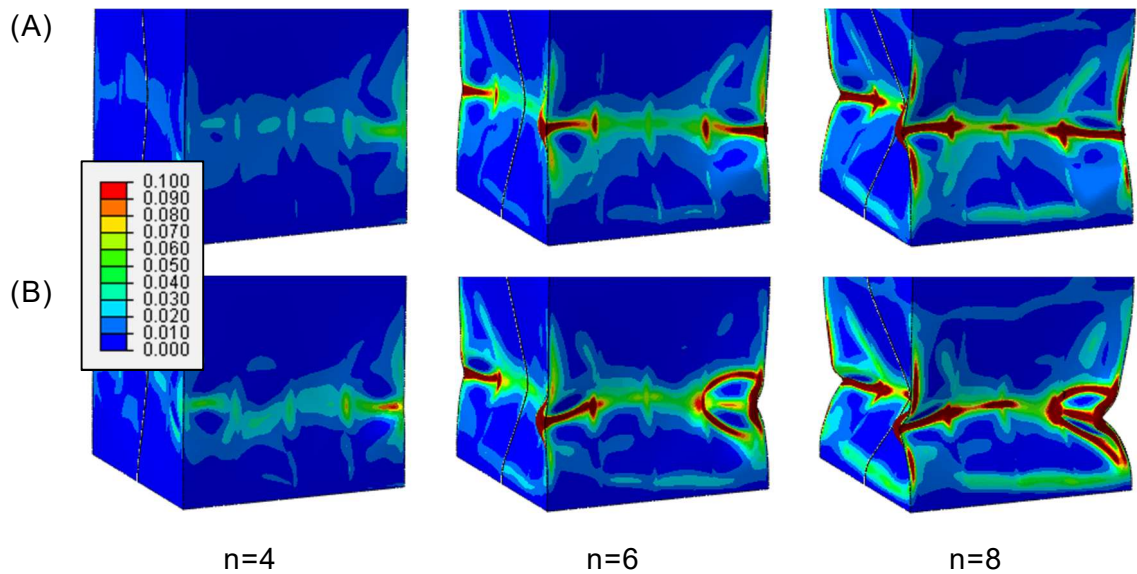


Fig. 5-16 Deformations and maximum principal strain distributions of steel pier with rectangular cross section (No.8) subjected to path (f) SQ. Extended subloading surface model (A) without tangential plasticity and (B) with tangential plasticity.

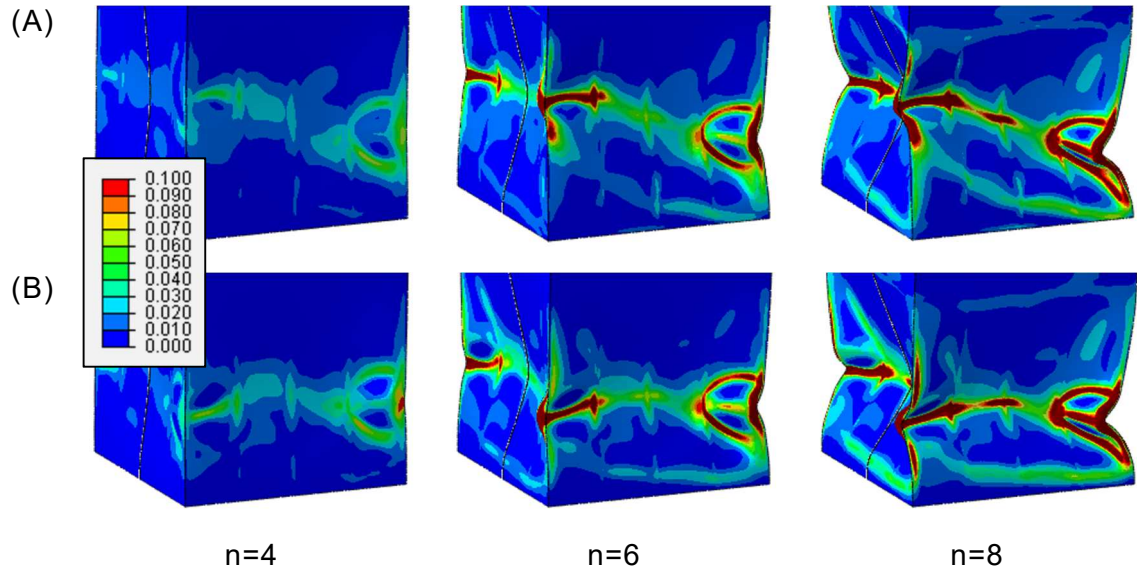


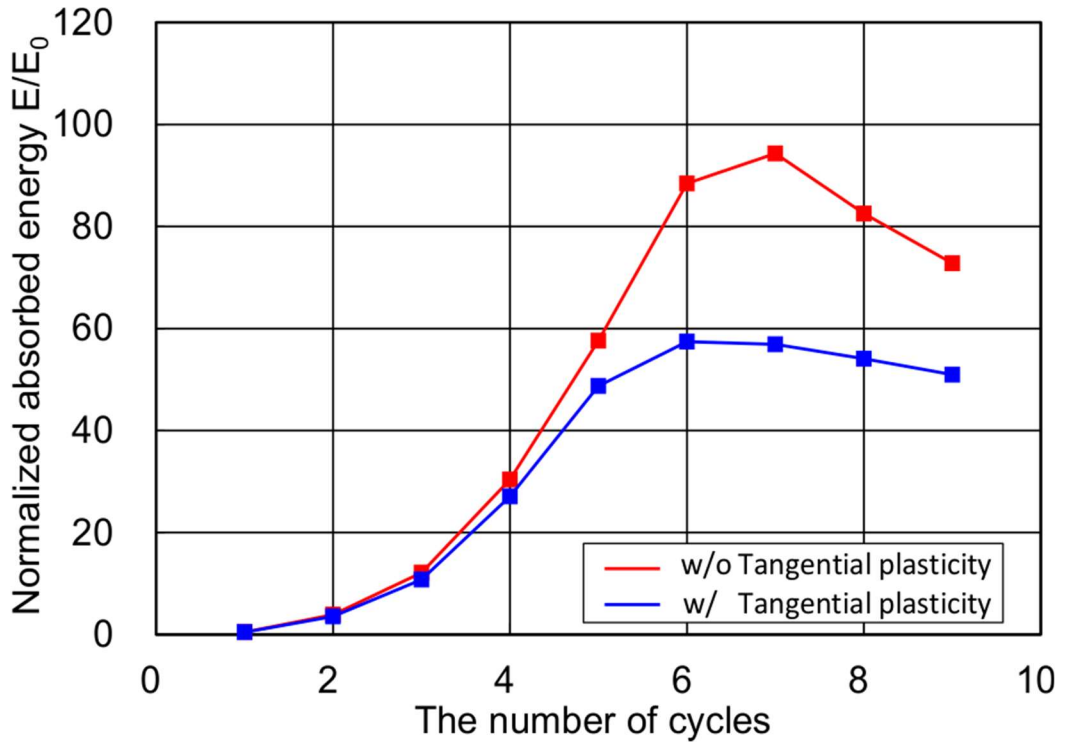
Fig. 5-17 Deformations and maximum principal strain distributions of steel pier with rectangular cross section (No.8) subjected to path (g) CR. Extended subloading surface model (A) without tangential plasticity and (B) with tangential plasticity.

5.3.3 吸収エネルギー

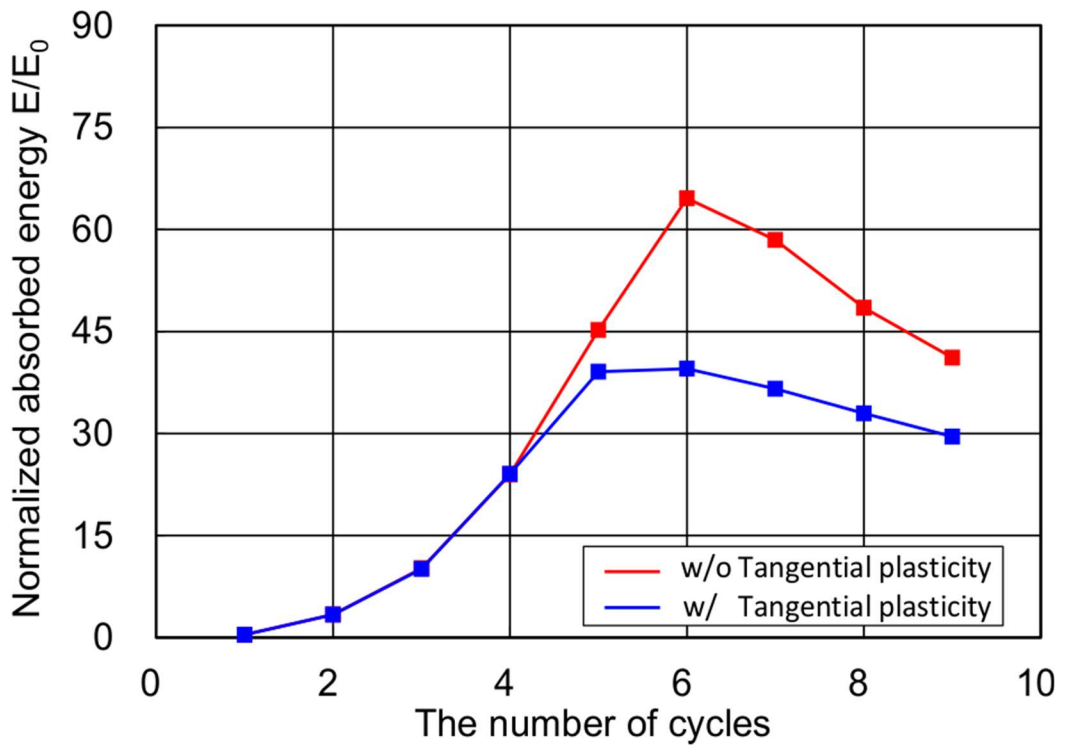
Fig. 5-18 から Fig. 5-22 に各サイクル毎に鋼製橋脚が吸収したエネルギーを示す. 水平 1 軸同様に, この吸収エネルギーは式(4.2)および式(4.3)で算定される基本水平変位 d_0 および初期水平荷重 H_0 の積に $1/2$ を乗じた値で正規化した. 接線塑性ひずみを考慮しない従来の弾塑性モデルは接線塑性弾塑性モデルに比べ, サイクルで吸収されるエネルギーが大きく, また吸収エネルギーが低下し始めるまでのサイクルが大きくなる傾向が見られる. この傾向は水平 1 軸と同様であり, 従来の弾塑性モデルでは構造物の耐震性能を過大に見積もる傾向があることを示唆している.

変位経路の違いに着目すると, Fig. 5-18 の(a)BS および(c)XU では最大荷重を示すサイクル(変位経路や採用する弾塑性モデルによって異なるが, 4 サイクルから 6 サイクルの間)まで両モデル間に大きな差異は認められないが, 一方で Fig. 5-19 の (e)DM および(f)SQ, Fig. 5-20 の(g)CR ではより早い段階から両モデル間に差異が確認でき, いずれの場合も接線塑性弾塑性モデルの方が従来の弾塑性モデルに比べて小さい値を示す. この傾向は柱頭部がより倒れ変形を受けている状態で, 非比例的な経路変化が生じる場合に顕著になるものと考えられる. 言い換えると, 橋脚基部が引張り応力あるいは圧縮応力を受けている状態で

せん断応力が加わることで、接線塑性ひずみが生じ構造物の耐荷重が低下し、その結果吸収エネルギーが低下したものと考えられる。いずれの変位経路が橋脚基部の材料にとって複雑であるかは議論の余地があるものの、実際の地震動によって生じる変位経路に近いと考えられる(g)CRの円形型やそれに近い(e)DMダイヤモンド型、(f)SQ四角形型で両モデル間の差異が大きくなる点は注目される。

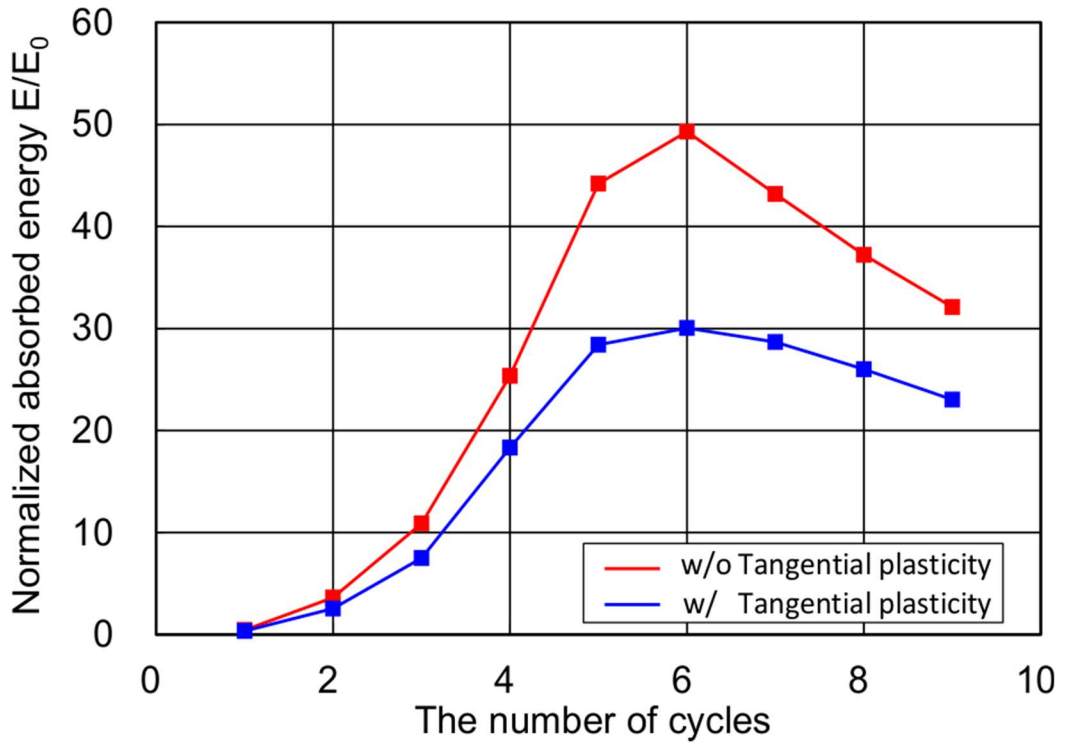


(a) BS

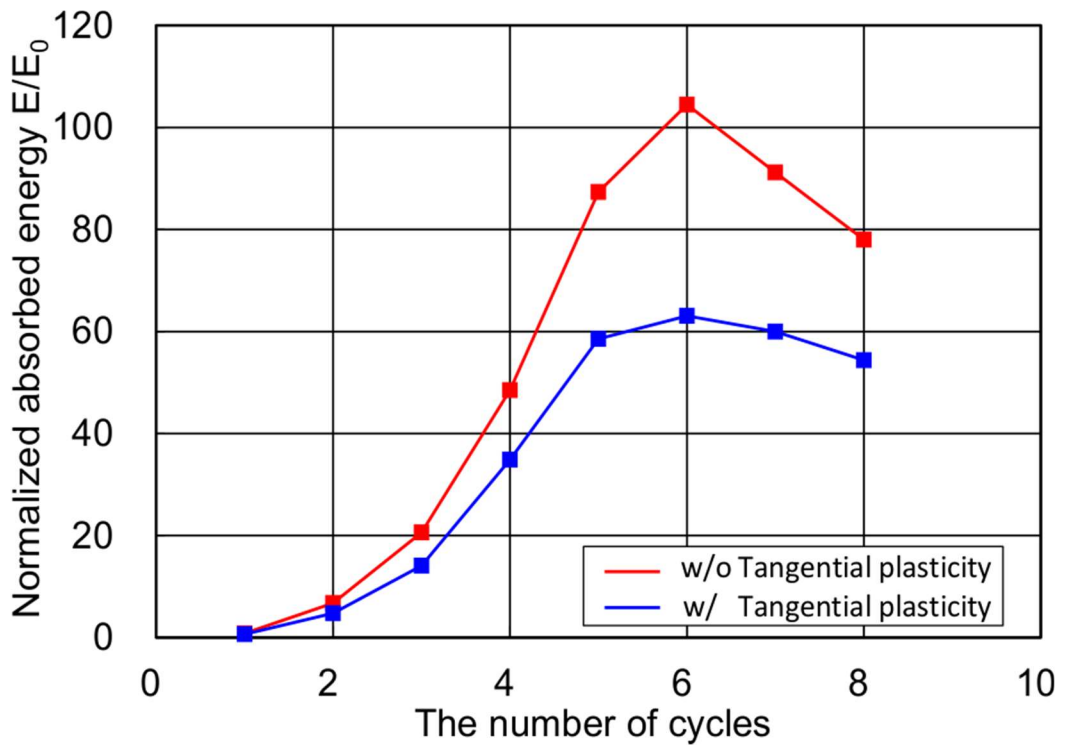


(c) XU

Fig. 5-18 Absorbed energy of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (a) BS and (c) XU.



(e) DM



(f) SQ

Fig. 5-19 Absorbed energy of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (e) DM and (f) SQ.

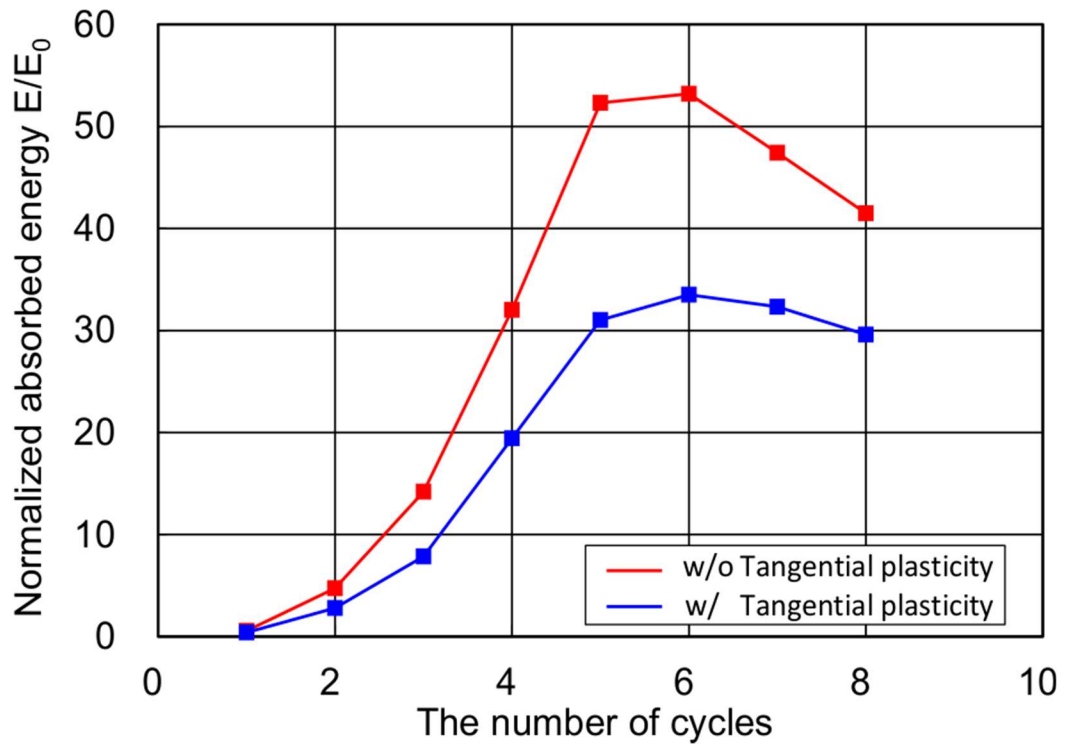
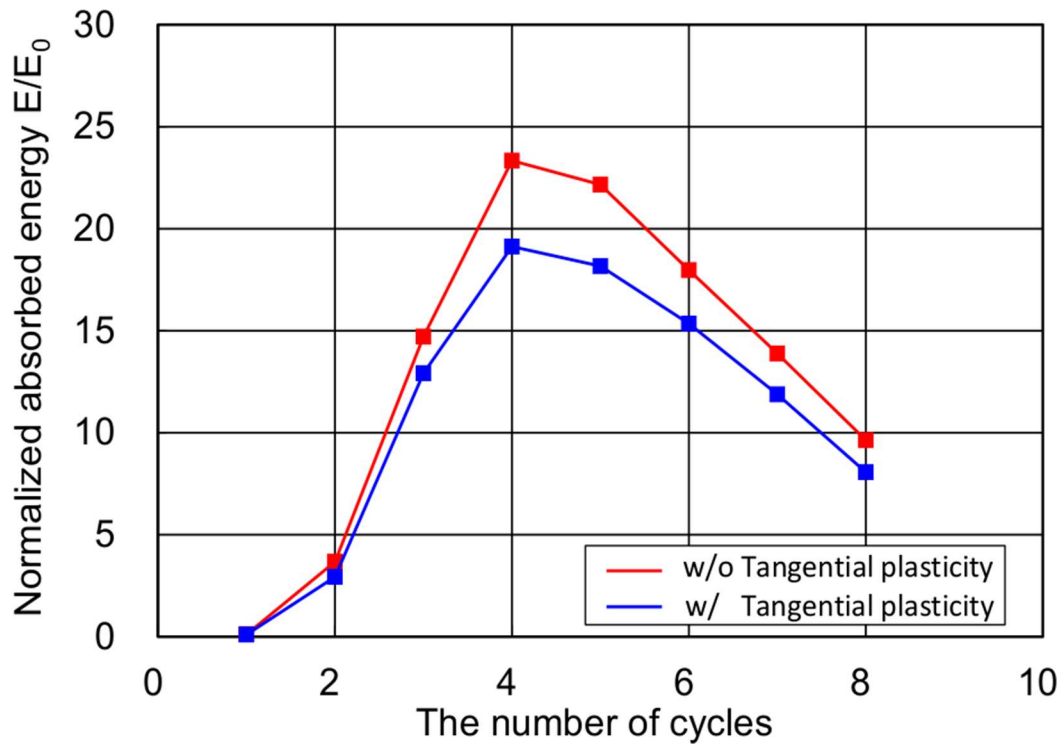
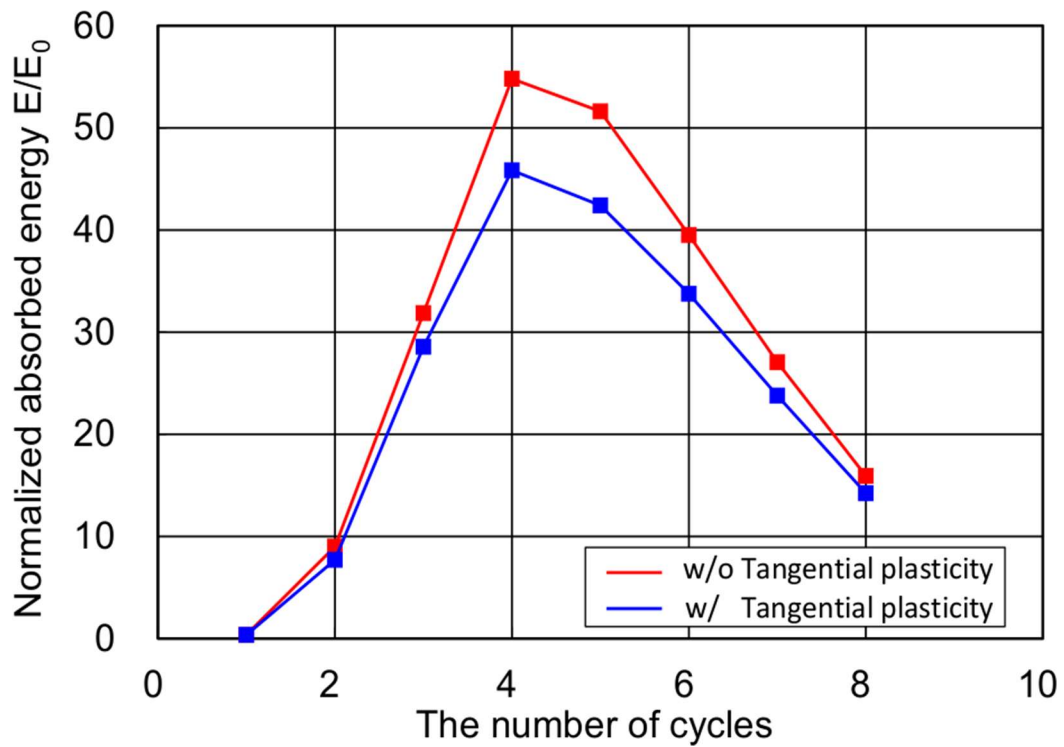


Fig. 5-20 Absorbed energy of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (g) CR.



(e) DM



(f) SQ

Fig. 5-21 Absorbed energy of steel pier with rectangular cross section (No.2) subjected to path (e) DM and (f) SQ.

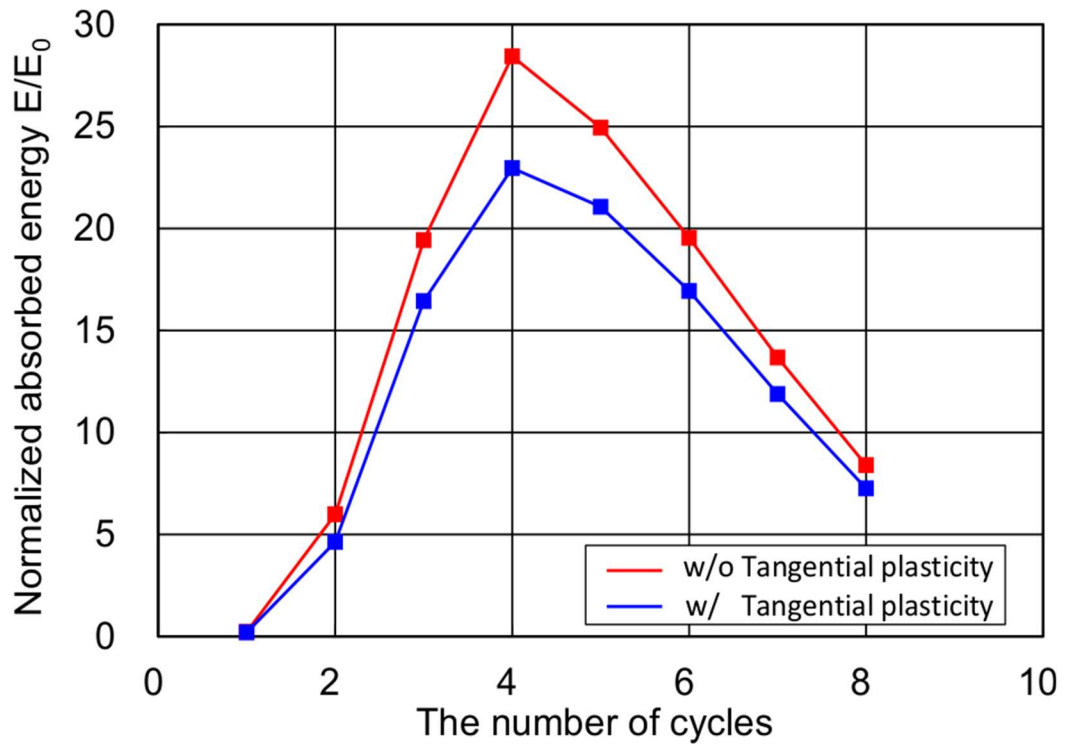


Fig. 5-22 Absorbed energy of steel pier with rectangular cross section (No.2) subjected to path (g) CR.

5.4 結言

本章では、第 4 章に続き、一定軸力下・水平 2 軸の漸増繰返し負荷を受ける無補剛円形断面鋼製橋脚ならびに補剛矩形断面鋼製橋脚の有限要素解析を実施し、接線塑性ひずみを考慮しない従来の弾塑性モデルと、接線塑性弾塑性モデルを比較し、以下の結論を得た。

1. 両鋼製橋脚の水平 2 軸負荷下における従来モデルと接線塑性モデルを比較した結果、両者の間に大きな変形パターンの差異はないものの、いずれの負荷経路においても接線塑性モデルで予測される荷重は従来モデルに比べて低いという水平 1 軸負荷の傾向と同じであった。
2. ただし、接線塑性モデルの従来モデルに対する荷重の低下率は負荷経路に依存する。これは、第 2 章の接線塑性弾塑性構成式の定式化で述べた通り、接線塑性モデルは従来モデルに比べ、材料が受ける負荷経路の依存性をより明確に表現できるためであると考えられる。
3. 特にサイクル毎の吸収エネルギーの相違という観点から、橋脚基部が受ける負荷経路がより複雑なほどその差は早い段階から、かつ、より大きくなる。
4. 以上、第 4 章および本章を通じて、実稼動下の複雑な荷重履歴を受ける構造物の信頼性を、数値解析を用いてより高精度に予測するには、採用する弾塑性構成式に、従来の塑性ポテンシャル面外向き法線方向に生じる塑性ひずみに加え、同面接線方向に生じる接線塑性ひずみを考慮することが重要であることが示された。

今後の課題として、種々の水平 2 軸下における鋼製橋脚の実験結果との照査や実際に鋼製橋脚に用いられる鋼材の多軸非比例負荷要素試験を用いたより精緻な材料定数の同定、さらには材料の非比例負荷挙動をより正確に表現可能な接線塑性ひずみ発展則の一層の拡張が挙げられる。一方で、鋼製橋脚基部のひずみ履歴を詳細に取得し、接線塑性ひずみ発現メカニズムの明確化およびその定性的・定量的評価を行うために、結晶塑性論的アプローチを通じた検討(e.g. 堤ら, 2013)などが期待される

5.5 Appendix

本 Appendix には水平 2 軸の負荷経路(b)BA, (d)XP を受ける無補剛円形断面鋼製橋脚の柱頭部の荷重－変位履歴、橋脚基部の変形図および最大主ひずみ分布、負荷サイクル

毎の吸収エネルギーを示す.

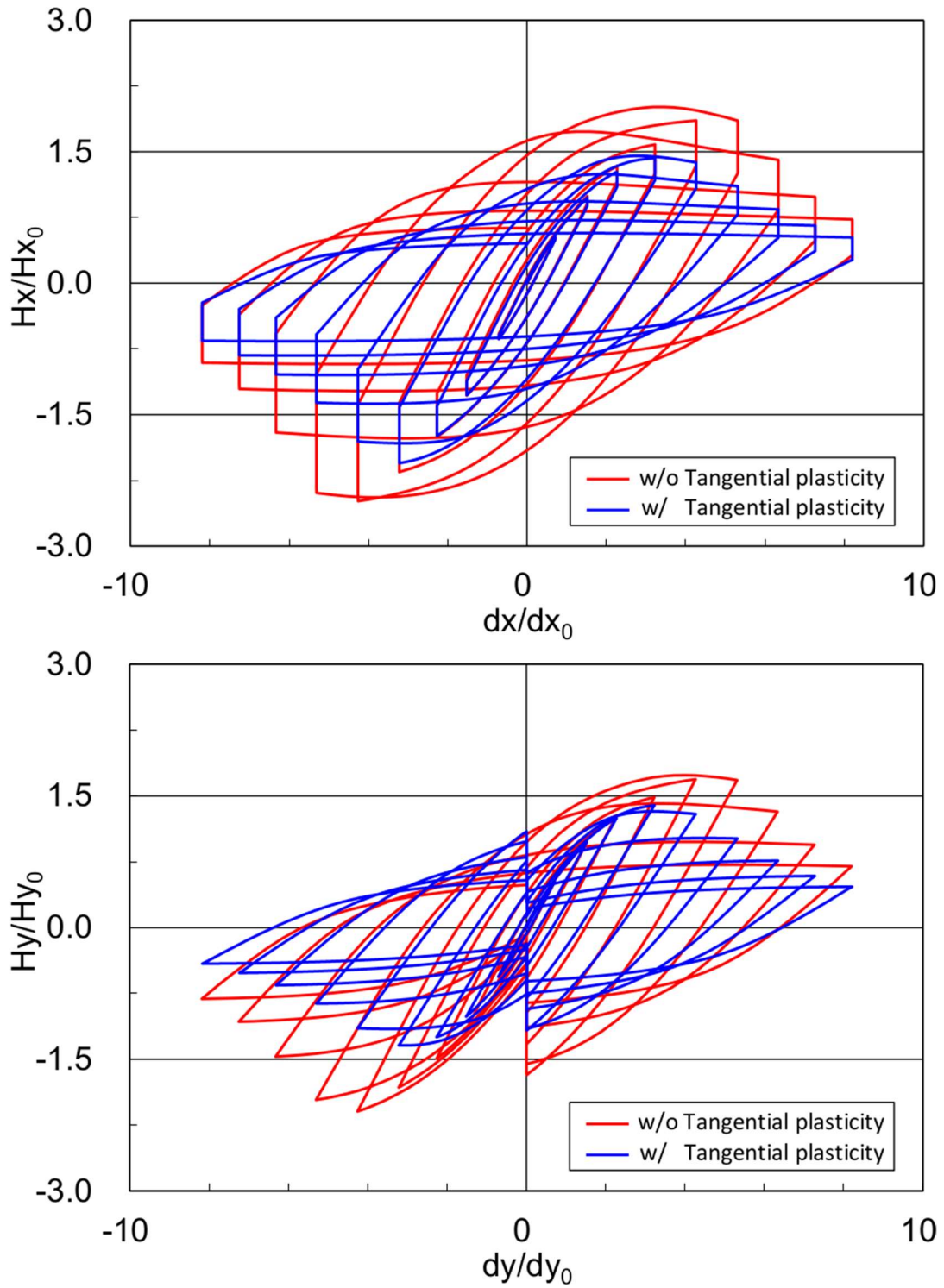


Fig. 5-23 Hysteretic response at loading point of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (b) BA.

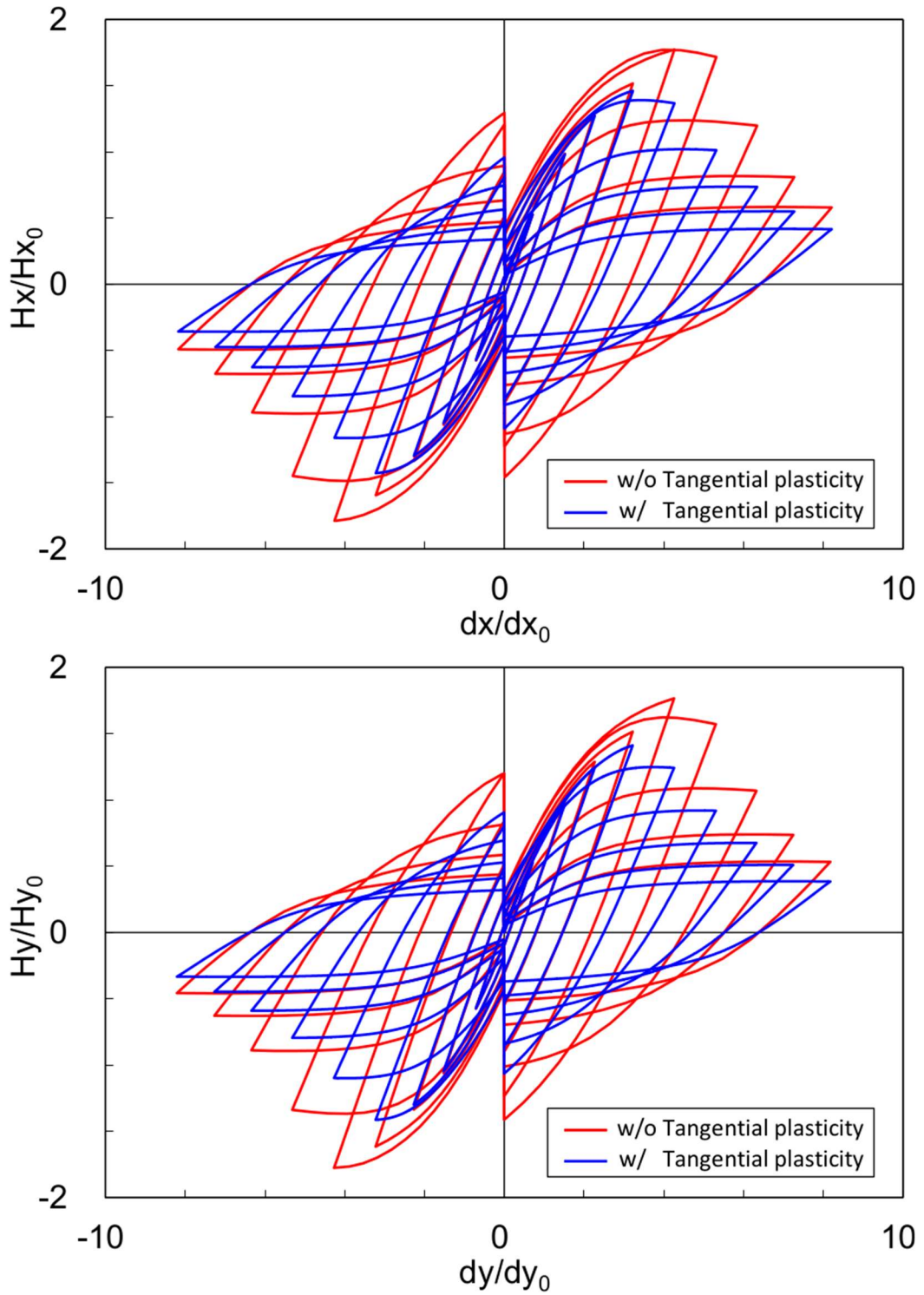


Fig. 5-24 Hysteretic response at loading point of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (d) XP.

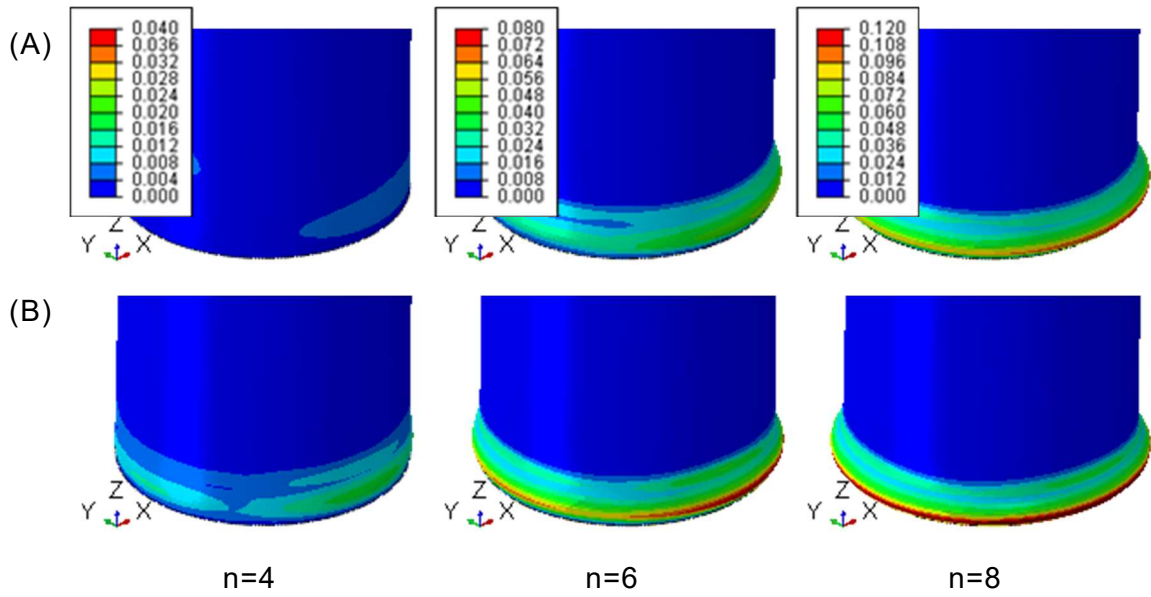


Fig. 5-25 Deformations and maximum principal strain distributions of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (b) BA. Extended subloading surface model (A) without tangential plasticity and (B) with tangential plasticity.

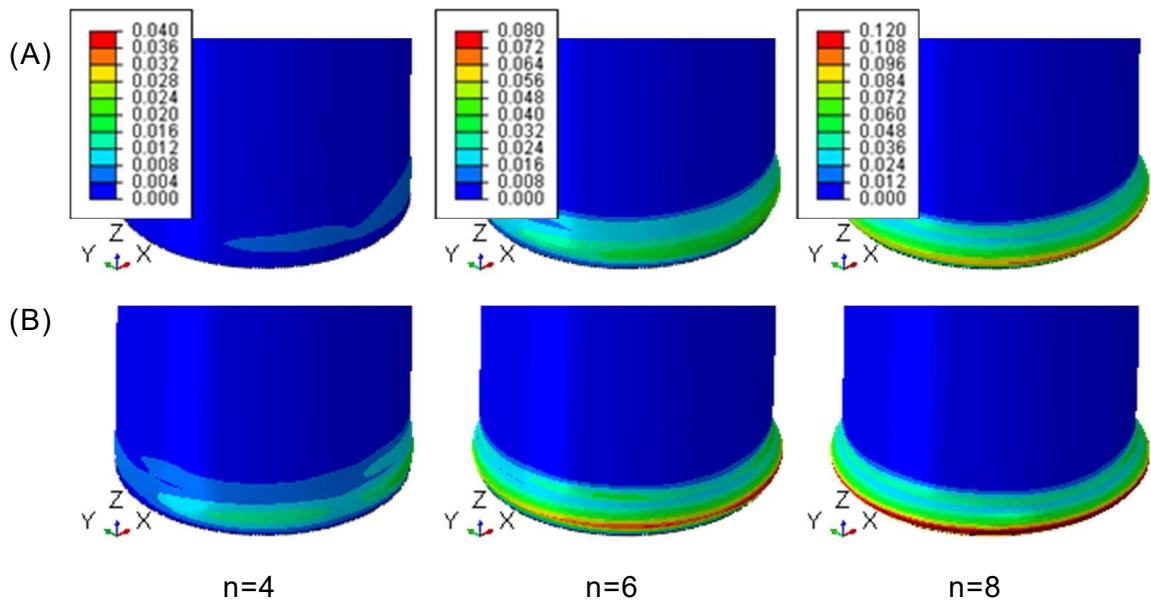
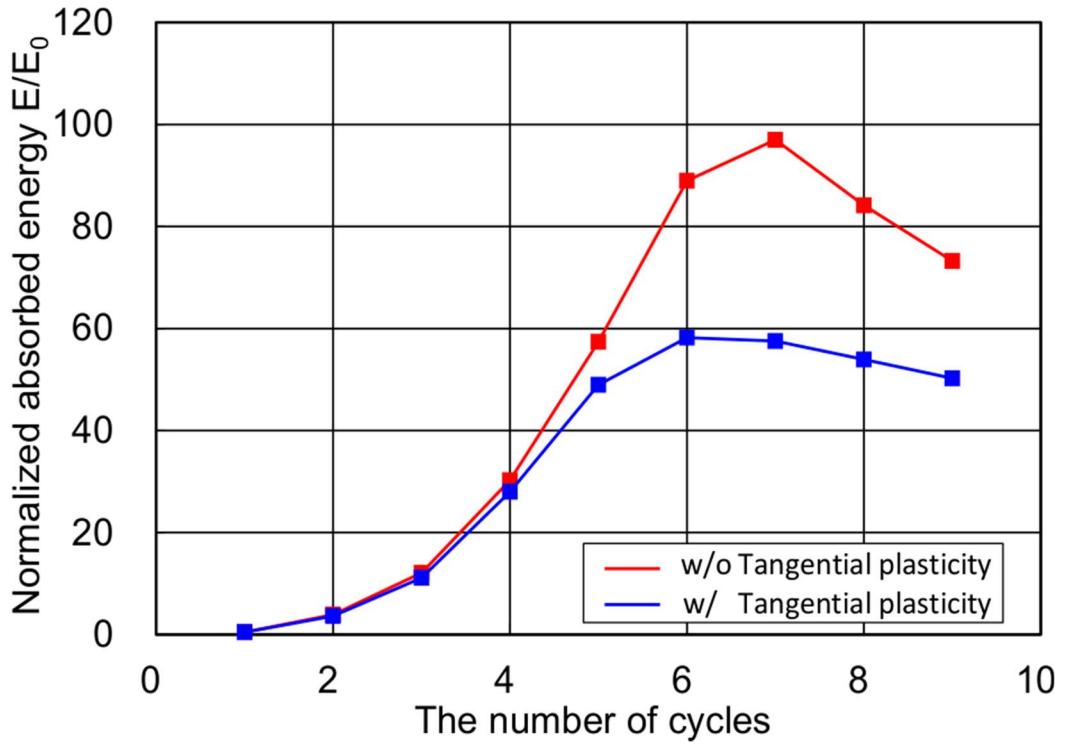
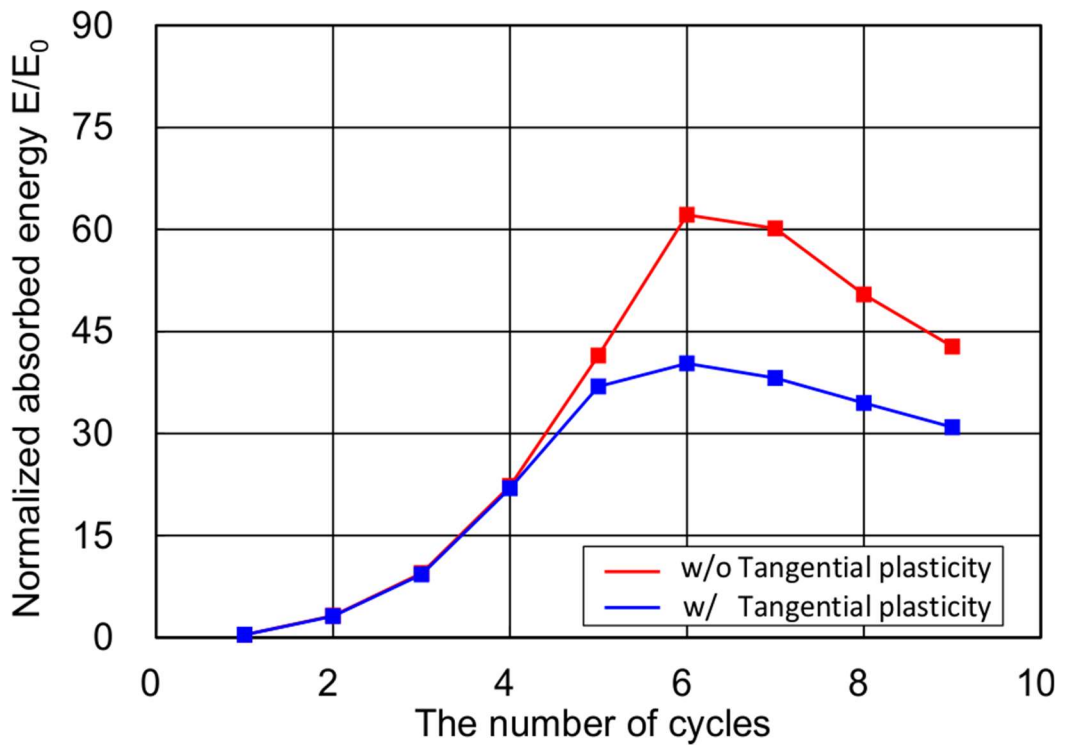


Fig. 5-26 Deformations and maximum principal strain distributions of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (d) XP. Extended subloading surface model (A) without tangential plasticity and (B) with tangential plasticity.



(b) BA



(d) XP

Fig. 5-27 Absorbed energy of steel pier with circular cross section (No.8) subjected to path (b) BA and (d) XP.

6章 降伏応力以下の繰返し非比例負荷を受ける金属材料の軟化挙動解析

6.1 緒言

繰返し荷重が作用する土木・機械構造物の変形および破壊挙動を高精度に予測することは、各種構造物の力学設計の観点から重要である。繰返し荷重による疲労き裂発生・伝播寿命を支配する重要な力学的因子の一つとして、繰返し荷重に伴う塑性ひずみの発生とその累積が挙げられる(Suresh, 1998; 豊貞と丹羽, 2001)。繰返し荷重によって生じる応力が供される材料の降伏応力よりも大きな応力が支配的な、いわゆる“低(もしくは極低)サイクル疲労”試験で観測される応力-ひずみ曲線では、ヒステリシスループやラチェット現象などの塑性変形が確認される(菊川ら, 1972; 飯田ら, 1981; 飯田ら, 1983; 服部ら, 2004)。また低サイクル疲労試験中に計測される塑性ひずみ振幅($\Delta\varepsilon^p$)と破断寿命(N)との相関は高く、いわゆる Manson-Coffin 則が成立すると言われおり、実際の力学設計にも積極的に用いられている。

一方で材料に生じる応力が降伏応力よりも小さな繰返し荷重が作用する“高サイクル疲労”試験では、繰返し荷重初期段階では明確な塑性変形は確認されない、いわゆる巨視的弾性応答を示す(堤ら, 2007)ものの、繰返し数の増加に伴い突如として塑性ひずみが発生する繰返し軟化挙動を示し、その累積の後疲労き裂発生・破断に至ることが報告されている(Suresh, 1998; 菊川ら, 1972; 飯田ら, 1981; 飯田ら, 1983; 堤ら, 2007,2008; 服部ら, 2004)。

さて、このような材料の変形挙動を予測するために提案された現象論的弾塑性構成式(e.g. Mroz, 1967; Dafalias and Popov, 1975; Ohno and Wang, 1993ab; Hashiguchi and Yoshimaru, 1995; 大沢ら, 1998,2006)の多くは、前者の降伏応力以上の現象を対象としたものが主流であった。しかしながらこれらの弾塑性構成式は、後者の巨視的弾性条件下で突如発現する塑性ひずみの急増・累積といった高サイクル疲労特有の変形挙動の予測には適応できない。このような背景のもと、堤ら(2007,2008)は、巨視的弾性条件下における材料の変形挙動の予測を目的に繰返し弾塑性構成式を提案している。それによれば SM490 を用いた高サイクル疲労実験結果で観察された、繰返し荷重増加に伴う塑性ひずみ急増現象の予測に適応可能であることが示されている。

ところで、各種構造物に作用する実稼働荷重は繰返し負荷であることに加え、1)ピーク荷重の大きさが構造物の曝される状況に応じて時々刻々変化する、いわゆる変動荷重、2)単軸

負荷状態よりはむしろ多軸負荷状態, 3)繰返し荷重の軸方向間の位相変化, などが挙げられる. ここで, 3)では材料に生じる応力やひずみの主軸方向が時間的に変化するため, 非比例負荷と呼ばれる. この非比例負荷を受ける代表的なものとして, 3 軸成分を有する地震動を受ける社会基盤支持構造物(Ucak and Tsopelas, 2012,2014; 後藤ら, 2005,2007), 車や鉄道車両などによる移動荷重を受ける地盤材料やレール, 機械応力と熱応力が重畳する圧力容器や熱交換器(伊藤ら, 2013), 成形過程におけるプレス鋼板(後藤, 1990)などがある. また, 巨視的には単軸載荷状態と見なせる場合であっても複雑形状を有する溶接止端部などの応力集中部は非比例負荷状態となることから, 非比例負荷を受ける部材や材料は少なくない.

さて, 非比例負荷を受ける材料の弾塑性変形挙動の予測において, 先に挙げた弾塑性構成式を用いた場合, 精度の高い数値解析結果を得ることが困難な場合があることは, 第 2 章 6 節に示した通りで, 第 4 章および第 5 章で, Hashiguchi and Tsutsumi(2001,2003), Tsutsumi and Hashiguchi(2005)が提案した接線塑性弾塑性構成式を用いて, 非比例負荷を受ける円形・矩形断面を有する鋼製橋脚の繰返し弾塑性変形問題に適用し, その適用性の高さを検証した. この適用例では, 初期降伏応力以上の応力状態が支配的で, かつ, 繰返し負荷も少なく 10 回程度で構造崩壊に至る大変形問題を対象としたものがあった.

ところで, 降伏応力以下の非比例負荷条件下にある材料の疲労寿命は, 比例負荷条件下のそれに比べ, 負荷経路によっては疲労寿命が著しく低下することが実験的な研究により指摘されている(伊藤ら, 2013; Itoh et al., 2013). このように多軸非比例負荷下の疲労現象に対して疲労寿命の推定や寿命低下と破壊メカニズムの関係について研究が行われているものの, 非比例繰返し負荷サイクルを通した応力-ひずみ関係を記述する弾塑性構成式は著者の知る限り提案されていない. また先に示した接線塑性弾塑性構成式においても, 降伏応力以下の非比例繰返し疲労問題に対する応答特性は検証されていない.

そこで, 本章では降伏応力以下の非比例繰返し負荷問題を対象とし, 軸応力-せん断応力空間内で円形経路の非比例繰返し負荷を受ける金属材料の繰返し軟化挙動を表現できるように, これまでに提案された接線塑性弾塑性構成式を拡張する. 次に当該負荷条件の数値解析を実施し, 従来の弾塑性構成式と提案する弾塑性構成式の応答特性の違いについて考察する.

6.2 非比例繰返し負荷による金属材料の軟化現象

本研究で対象とする繰返し負荷による金属の軟化現象は、Fig. 6-1(堤ら, 2008)ように示される現象である。横軸は負荷の繰返し数、縦軸 $\Delta\varepsilon^p$ は繰返し応力ひずみ曲線において除荷時に応力 0 を横切る際のひずみ幅である。本材料の上降伏応力は 412.3MPa, 下降伏応力は 359.5MPa であるため、図から降伏応力に満たない繰返し応力が作用した場合においても、繰返し数の増加に伴い突如塑性変形が発現していることが確認できる。本結果は、単軸両振りの試験条件であり、本研究で対象とする非比例負荷時の応答ではない。ただし、新田ら(1987), Wang and Brown(1993), 伊藤ら(2007,2013), Reis et al.(2009), Itoh et al.(2013)により、非比例負荷条件化の金属材料の疲労寿命は比例(単軸)負荷のそれに比べて著しく低下することが指摘されていることから、降伏応力以下の非比例繰返し負荷条件においても、Fig. 6-1 に準ずる応答が得られるものと推察される。今後は非比例繰返し負荷試験においても同様に応力ひずみ関係を取得し、比例繰返し負荷試験同様に、非弾性ひずみの発現を確認することが必要であるものの、先んじて非比例負荷条件化における繰返し軟化挙動を表現可能な接線塑性構成式の拡張を試みる。

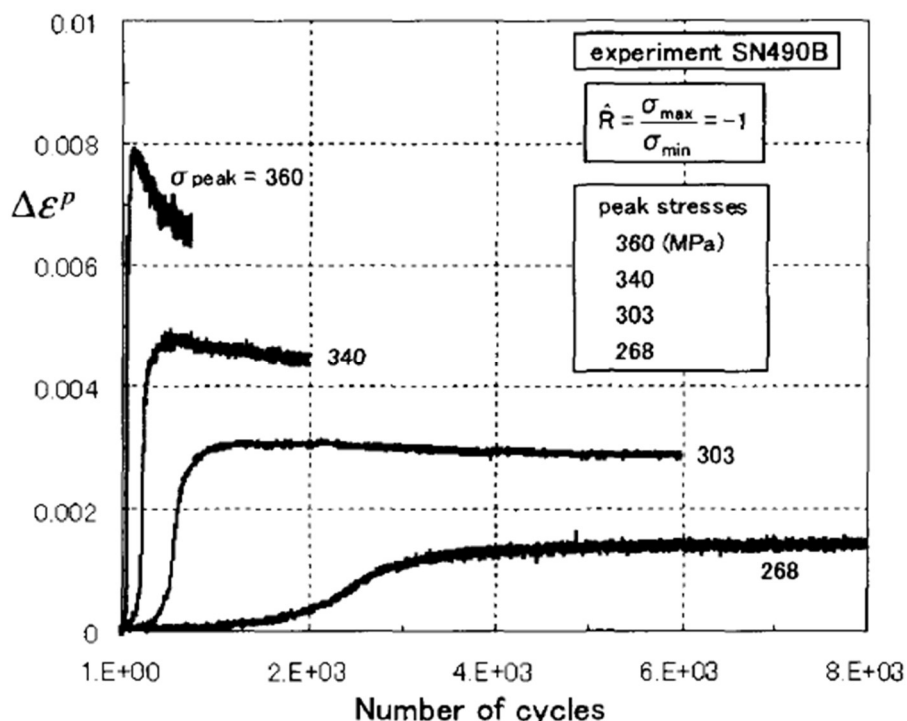


Fig. 6-1 Evolution of plastic strain amplitude with the increase of number of cycles under uniaxial cyclic loading measured for SM490B (Tsutsumi et al.(2008), Fig.10).

6.3 金属の材料関数と材料特性

本章で対象とする材料は SM490B(溶接構造用圧延鋼)とし, 塑性ひずみ速度に関する具体関数は下式を用いる.

1. Mises 降伏条件に基づく負荷関数

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}'\| \quad (6.1)(\text{re-record of 2.112})$$

2. 相似中心の発展則

c, χ を定数とした次式を採用する.

$$\dot{\mathbf{s}} = c \|\mathbf{D}^p\| \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) \hat{\mathbf{s}} \right) + \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{F'}{F} \dot{H} \hat{\mathbf{s}} \quad (6.2)(\text{re-record of 2.64})$$

ただし, 式(2.64)の異方硬化変数 $\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}$ は $\mathbf{0}$ とした.

3. 等方硬化関数およびその発展則

$$F(H) = F_0 \{1 + h_1 [1 - \exp(-h_2 H)]\} \quad (6.3)(\text{re-record of 2.113})$$

$$F' = F_0 h_1 h_2 \exp(-h_2 H) \quad (6.4)(\text{re-record of 2.114})$$

$$\dot{H} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{D}^p\|, \quad h = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (6.5)(\text{re-record of 2.115})$$

4. 移動硬化の発展則

本章では, 低応力範囲での移動硬化の発展を促進するために, 非線形の移動硬化則を改良しパラメータ を新たに導入した次式(堤ら, 2008)を採用する

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{a} \|\mathbf{D}^p\| \\ &= a_1 (a_2 \bar{\mathbf{N}} - \boldsymbol{\alpha}) \left[1 + a_3 \left(1 - \frac{\langle R - R^e \rangle}{1 - R^e} \right) \right] \|\mathbf{D}^p\| \end{aligned} \quad (6.6)$$

5. 接線塑性

$$A = \frac{T}{2G(1-T)} \quad (6.7)(\text{re-record of 2.110})$$

$$T = \xi \bar{R}^b \quad (6.8)(\text{re-record of 2.111})$$

上記具体関数に用いられる材料特性は、Tsutsumi et al.(2008)が実施した砂時計型丸棒試験片にする単軸引張および両振り繰返し載荷試験結果を用いて材料定数を同定した。同定結果を Fig. 6-2 に示す。ただし、単軸繰返し試験結果から接線塑性に関する材料特性は同定できないため、Table 6-1 に記載した値は第 4 章で用いた値に準ずるものとした。負荷サイクルを通じて計算結果は試験結果を良好に再現できていることがわかる。

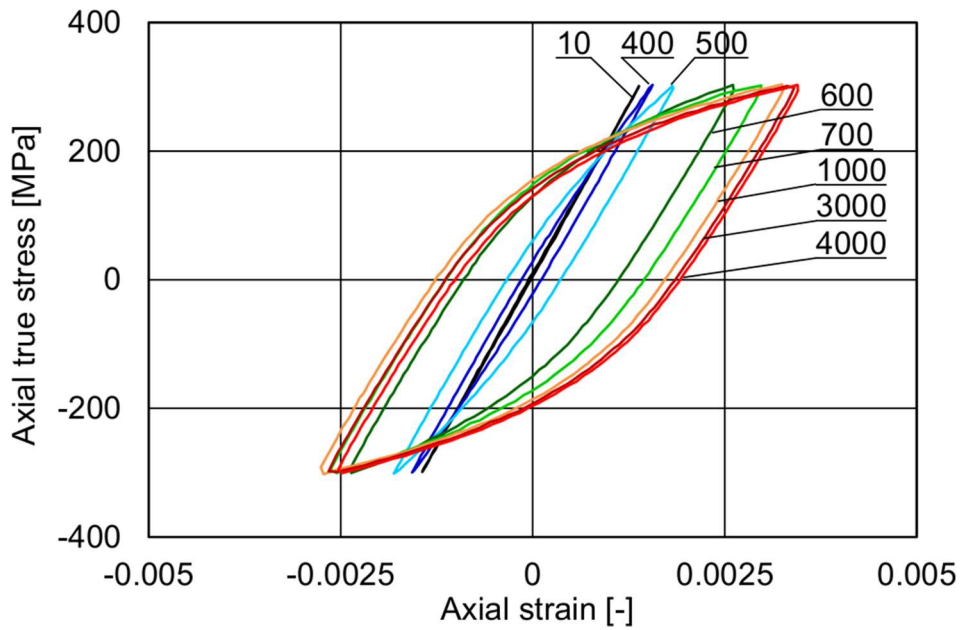
6.4 有限要素モデルと境界条件

供試体は Fig. 6-3 に示す薄肉円筒型供試体を想定し、有限要素モデルを作成した。供試体の寸法は全長 90mm、応力・ひずみの評価部を含む平行部長さは 8.46mm、同部厚さは 1.5mm である。平行部は厚さ方向に 10 等分割とし 0.15mm 四方の 4 節点 1 次軸対称要素を用いた。当該要素は供試体軸周りのねじり自由度を有する。

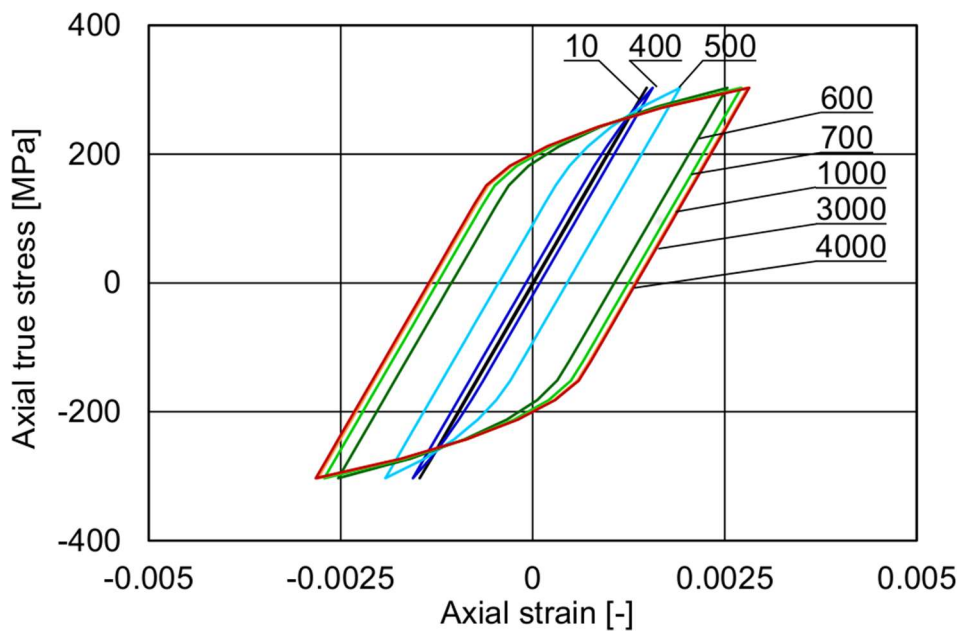
境界条件は供試体片端部を完全固定し、もう方端部に軸方向荷重およびねじり方向モーメントを負荷する。これらの荷重の位相関係は、平行部中央最外表面の要素に生じる応力が、

Table 6-1 Material constants of SM490B for Extended Subloading Surface model with tangential plasticity.

Elastic Modulus	$E=206.8$ [GPa], $\nu=0.3$
Initial yield stress	$F_0=350.0$ [MPa]
Yield stress plateau limit	$H_p=0.01$ [as strain]
Isotropic hardening	$h_1=0.0$, $h_2=0.0$
Kinematic hardening	$a_1=2.5$, $a_2=750$ [MPa], $a_3=4.0$
Evolution of Subloading surface	$u_0=20000$, $u_s=5.0$, $R^e=0.4$
Evolution of simirality center	$c=200.0$, $\chi=0.95$
Tangential plasticity	$\xi=0.25$, $b=2.0$



(a)



(b)

Fig. 6-2. Stress strain curve of SM490B, (a) experiment (Tsutsumi et al., 2008),
(b) simulation.

Fig. 6-4 に示すように軸方向応力とせん断方向応力の応力空間で常に一定となる円形経路となるように負荷した. この円形応力経路は偏差応力の大きさが一定となる **Mises** 型の降伏曲面に相当する. すなわち, 背応力が原点に固定されている場合を仮定すると, 応力増分は常に降伏曲面上を辿るため, 当該繰返し荷重によって降伏曲面外向き法線方向の非弾性ひ

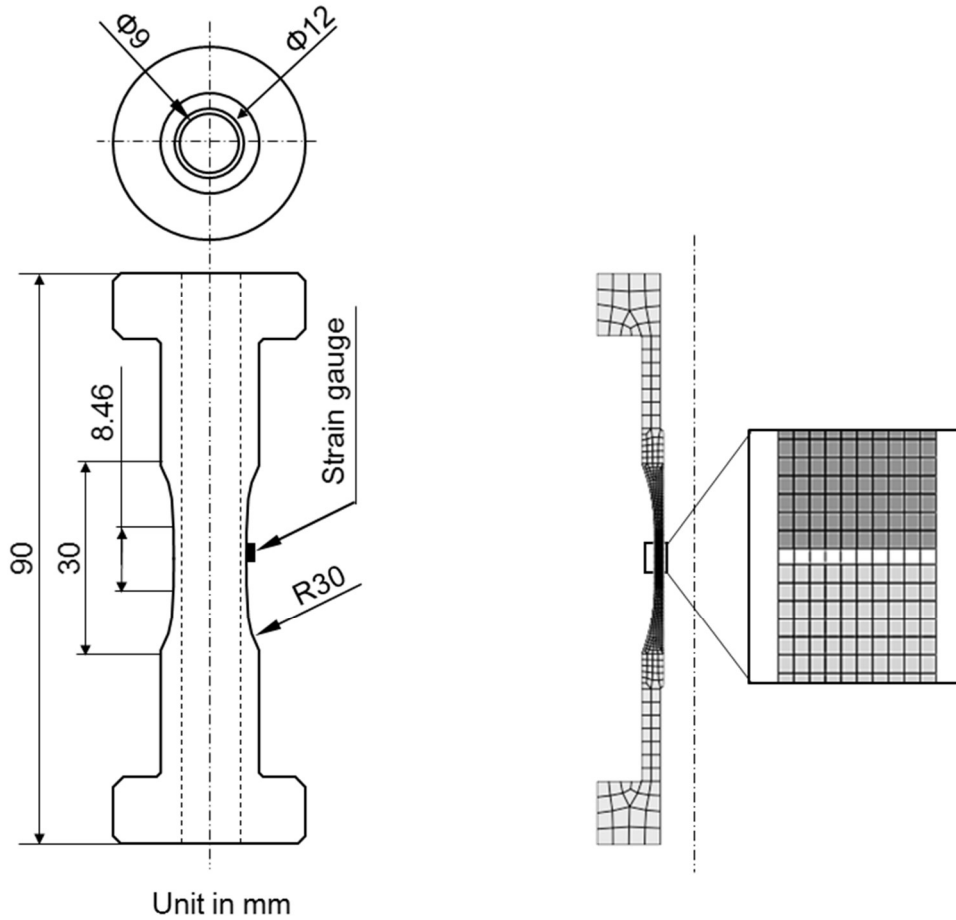


Fig. 6-3 Schematic representation of the specimen and finite element model.

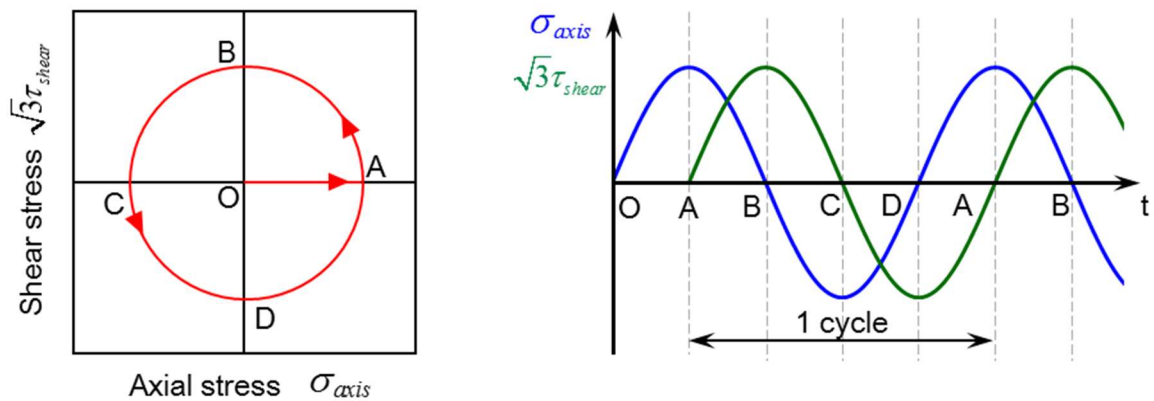


Fig. 6-4 Circular non-proportional stress path (a) in two-dimensional stress space; (b) in time domain.

ずみ(塑性ひずみ)は生じ得ない。荷重の大きさ(応力円の半径)は、SM490B(溶接構造用圧延鋼)の降伏応力 350MPa に対して、その比 0.93 の 325MPa とした。

6.5 解析結果と考察

Fig. 6-5 に接線塑性ひずみを考慮しない従来の弾塑性モデルの結果を示す。図中の数字は負荷繰返し数を表す。本モデルによれば応力振幅が降伏応力以下であっても、応力速度方向が塑性ポテンシャル面外向き成分を有すれば、繰返し負荷により塑性ひずみが累積する、いわゆる力学的ラチェット現象を表現可能であるものの、当該負荷経路では応力速度が塑性ポテンシャル面上を辿るため、塑性ひずみ速度は生じ得ず、その結果弾性解析結果と同じ応答を示す。ただし、Fig. 6-5 に弾性解析結果の掲載は控える。

次に接線塑性ひずみを考慮した弾塑性モデルの解析結果を Fig. 6-6 に示す。本モデルでは塑性ポテンシャル面接線方向の応力速度による非弾性ひずみが生じるため、ひずみ振幅は従来の弾塑性モデルに比べ大きくなるものの、負荷繰返し数の増加に伴うひずみ振幅の増大という現象は確認できない。これは式(6.7), (6.8)に示したように、接線非弾性係数およびそれを規定する材料定数が一定であるためであると考えられる。

以上のことから、繰返し非比例負荷下における非弾性ひずみの増大、特に本負荷経路のように偏差応力の大きさが常に一定となる円形応力経路下における材料の軟化挙動を表現するには、接線塑性ひずみの累積を考慮した定式化に拡張する必要があると考えられる。

6.6 接線非弾性係数の拡張

前節の考察から本節では接線非弾性係数を拡張する。本章で採用した偏差応力の大きさが常に一定となる面上を応力経路とした円形繰返し負荷経路では、中立負荷状態を保持すると考えられるため、負荷サイクル全域に渡って塑性ひずみの発生・集積は考えにくく、そのため正規降伏面の硬化・軟化も生じないと考えられる。従って第 2 章で示した接線塑性弾塑性構成式においても、正規降伏面と現応力状態の接近度合いを示す正規降伏比 R は負荷サイクル中に変化は生じず、式(6.8)から接線塑性ひずみ速度の増大は期待できない。そこで接線非弾性係数の拡張に当たり以下を仮定する。

1. 接線塑性ひずみの累積値 H_t の増大とともに、任意の大きさの偏差接線応力速度 $\dot{\sigma}_t^0$ に対する接線塑性ひずみ速度 \mathbf{D}^t も大きくなる。

$$H_t \equiv \int \|\mathbf{D}^t\| dt \quad (6.9)$$

2. 接線塑性ひずみの累積値 H_t の増大とともに、接線塑性ひずみ速度 \mathbf{D}^t も大きくなるが、やがて一定値に漸近する、いわゆる塑性シェークダウン状態に達する。

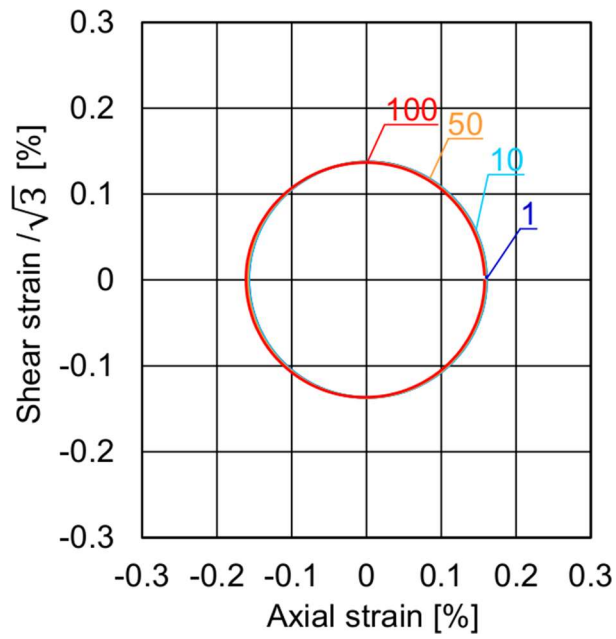


Fig. 6-5 Numerical experiment under cyclic circular stress path by Extended Subloading Surface model without tangential plasticity ($T = 0$).

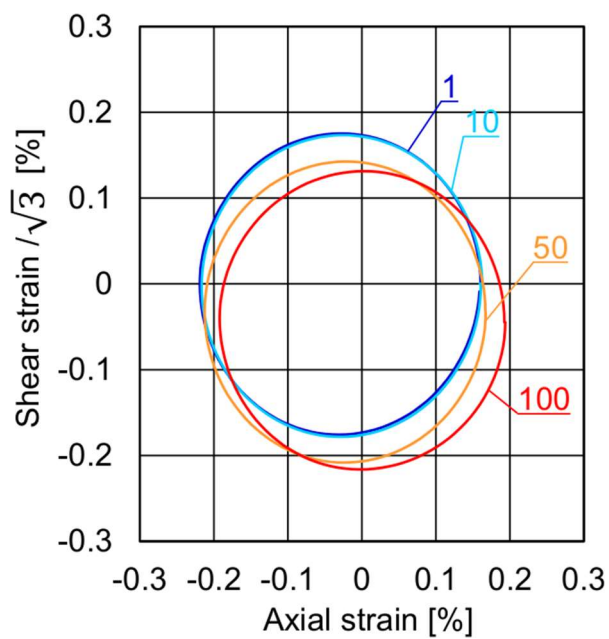


Fig. 6-6 Numerical experiment under cyclic circular stress path by Extended Subloading Surface model with tangential plasticity ($T \neq 0$).

以上の仮定を基に接線非弾性係数 A を 2 個の材料定数 τ_1, τ_2 を含む下式に拡張した.

$$A = \frac{T}{2G(1-T)} B(H_t) \quad (6.10)$$

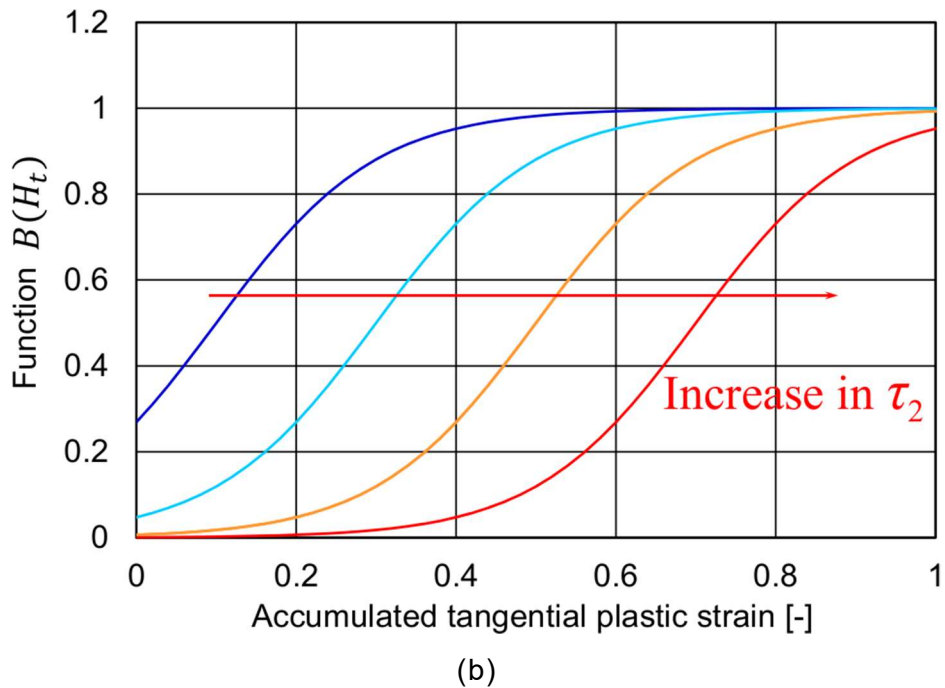
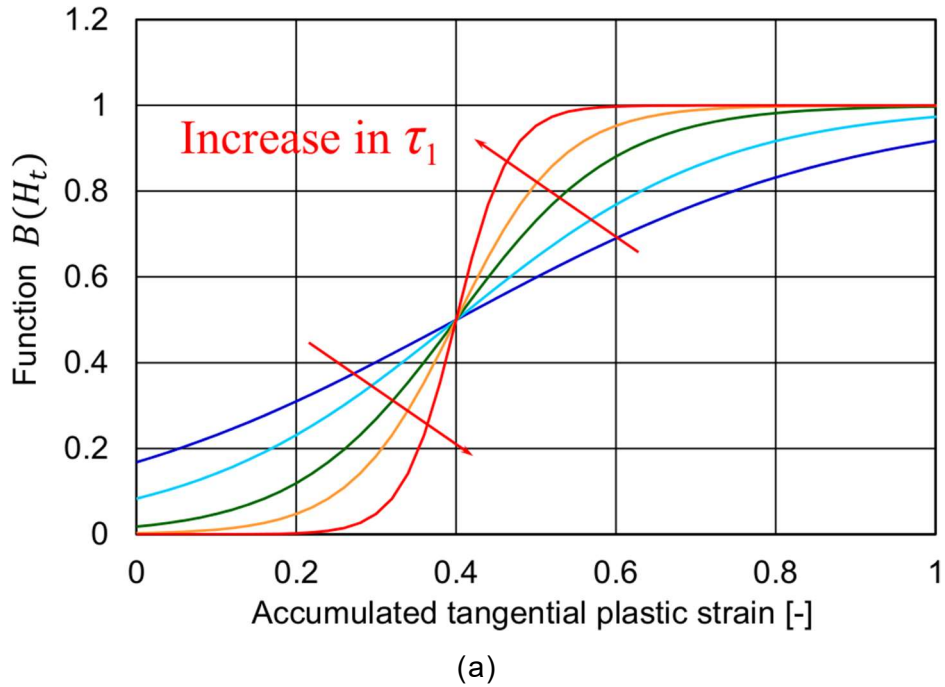


Fig. 6-7 Influences of the material constants τ_1, τ_2 for Function $B(H_t)$, (a) variation of τ_1 , (b) variation of τ_2 .

$$B(H_t) = \frac{1}{\exp(\tau_1(\tau_2 - H_t)) + 1} \quad (6.11)$$

Fig. 6-7 に接線塑性ひずみ累積値の関数 $B(H_t)$ の変化特性を示す。図に示すように、 $B(H_t)$ は累積接線塑性ひずみ H_t の単調増加関数でその値は 1 に漸近する。材料定数 τ_1, τ_2 の変更により $B(H_t)$ の初期値および漸近速度が規定できる。また $\tau_1 = \infty, \tau_2 = 0$ とすることで、 $B \cong 1$ for $H_t = 0$ となり、従来の接線非弾性係数と一致する。

本式を採用した数値解析結果を Fig. 6-8 に示す。追加した材料定数 τ_1, τ_2 はそれぞれ 14.0 および 0.125 である。本論で拡張したモデルでは繰返し負荷サイクルの増加に伴い、ひずみ振幅が増大することが確認できる。次に繰返し負荷全域におけるひずみ振幅の増加傾向を確認する。1 サイクルにおけるひずみ振幅を Fig. 6-9 のように定義し、繰返し負荷数に対するひずみ振幅の推移をこれら 3 モデルに対して整理した結果を Fig. 6-10 に示す。なお、Fig. 6-10 の縦軸は弾性理論で与えられるひずみ振幅で正規化した値を用いている。

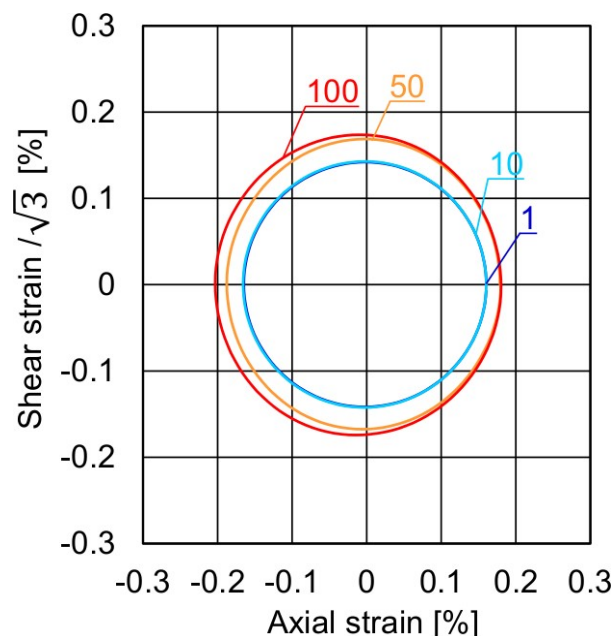


Fig. 6-8 Numerical experiment under cyclic circular stress path by Extended Subloading Surface model with tangential plasticity incorporating accumulated tangential plastic strain.

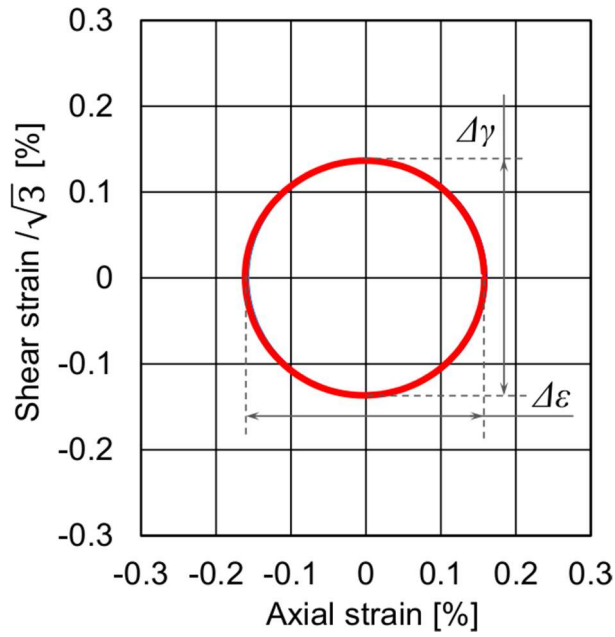


Fig. 6-9 Definition of strain amplitude of the one cycle.

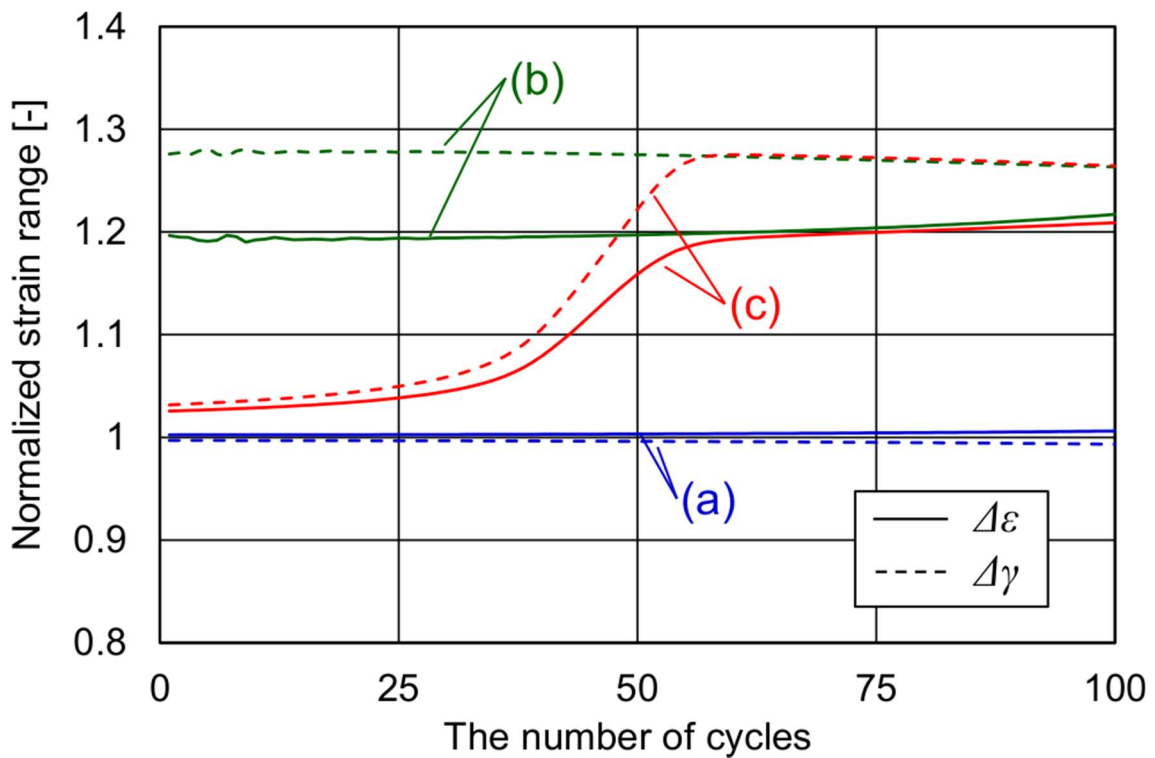


Fig. 6-10 Normalized strain range vs. the number of cycles, (a) Extended Subloading Surface model without tangential plasticity, (b) Extended Subloading Surface model with tangential plasticity, (c) Extended Subloading Surface model with tangential plasticity incorporating accumulated tangential plastic strain.

Fig. 6-10(a) の接線塑性ひずみを考慮しない従来の弾塑性モデルでは、負荷サイクル全域に渡って弾性解で与えられるひずみ振幅にはほぼ一致している。また、(b)に示す従来の接線塑性弾塑性モデルでは負荷サイクルの初期からひずみ振幅は大きいものの、負荷サイクルの増加に伴うひずみ振幅の増大は認められない。一方、本論で拡張した(c)は負荷サイクルの初期のひずみ振幅は(a)の従来型弾塑性モデルと変わらないが負荷サイクルが 40 回程度でひずみ振幅が増大し始め、60 回程度でそれが一定値に漸近する、いわゆる塑性シェイクダウンに相当する状態に達していることが確認できる。

一定値に達したひずみ振幅は(b)に示す従来の接線塑性弾塑性モデルのそれに等しいが、これは接線塑性ひずみ累積値の関数 $B(H_t)$ が 1 に達したためである。このように、本論で拡張した繰返し接線塑性モデルは、非比例負荷を受ける材料の繰返し軟化挙動を表現できることが示された。しかしながら、材料定数 τ_1, τ_2 の同定や $B(H_t)$ の具体関数の決定は、実際の金属材料の試験結果を用いて検討することが必要であり、今後の課題である。

6.7 応力振幅の影響

前節では、繰返し負荷荷重が降伏応力比 0.93(325MPa)の解析例を示した。本節では、

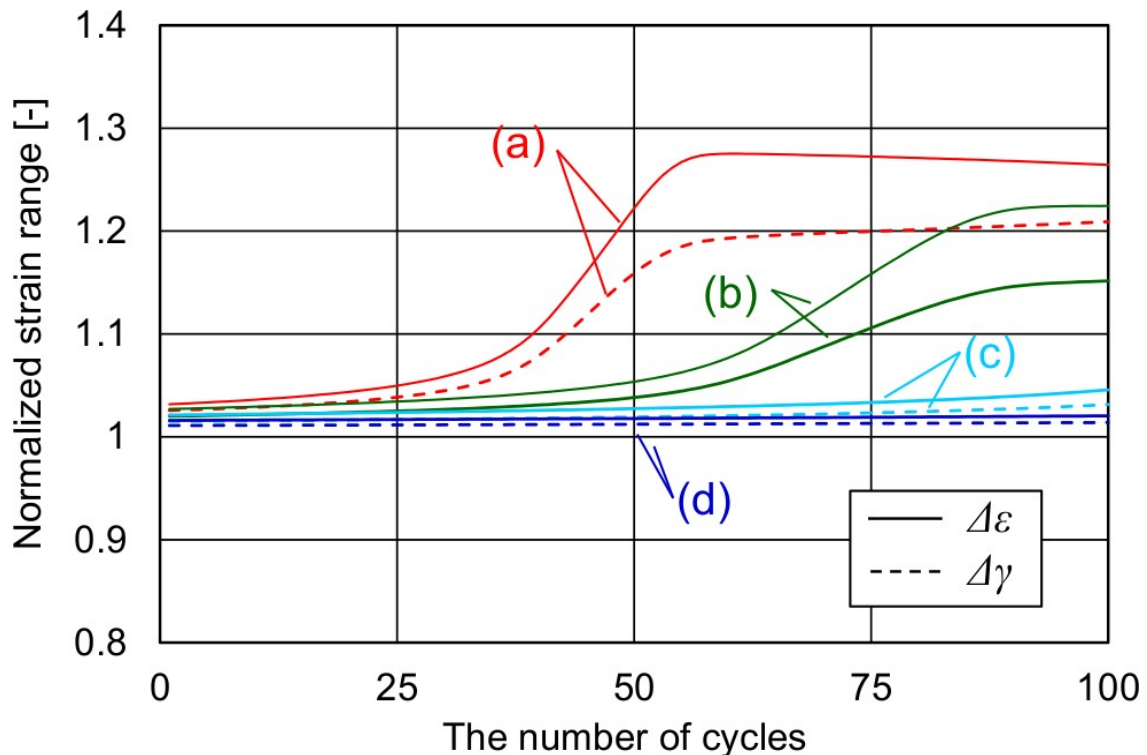


Fig. 6-11 development of strain amplitude under various stress amplitude, (a)325MPa, (b)298MPa, (c)263MPa and (d)228MPa.

その応力レベルを変化させた場合のひずみ振幅の推移を調査した. 具体的には降伏応力比 0.85(298MPa), 同 0.75(263MPa), および同 0.65(228MPa)の 3 条件を追加した.

負荷荷重の応力振幅を変更した場合の繰返しサイクル数に対するひずみ振幅の変化を Fig. 6-11 に示す. 前節に示した降伏応力比 0.93(325MPa)に加え, これらの荷重条件下では応力レベルの違いによりひずみ振幅が異なるため, 各々の応力振幅下で得られる弾性理論解のひずみ振幅で正規化した. 図から応力振幅レベルの低下に伴って, ひずみ振幅が急増するまでの負荷サイクルが多くなっていることがわかる. この傾向は, 実験結果との比較考察が必要であるものの, 金属材料の力学的応答として受け入れやすい傾向と言えるであろう.

応力振幅 325MPa と 298MPa に着目すると, ひずみ振幅が一定値に漸近するまでの負荷サイクルの違いに加え, その漸近値が異なる. これは累積接線塑性ひずみの関数 $B(H_t)$ は両者共にほぼ 1 に到達しているが, 式(6.10)右辺における係数部分が式(6.8)の形で正規降伏比 \bar{R} の関数になっており, 応力レベルが高いほどより大きな接線塑性ひずみが生じるためである. すなわち, 応力レベルが高いほどひずみ振幅が急増するまでの繰返し数が小さくな

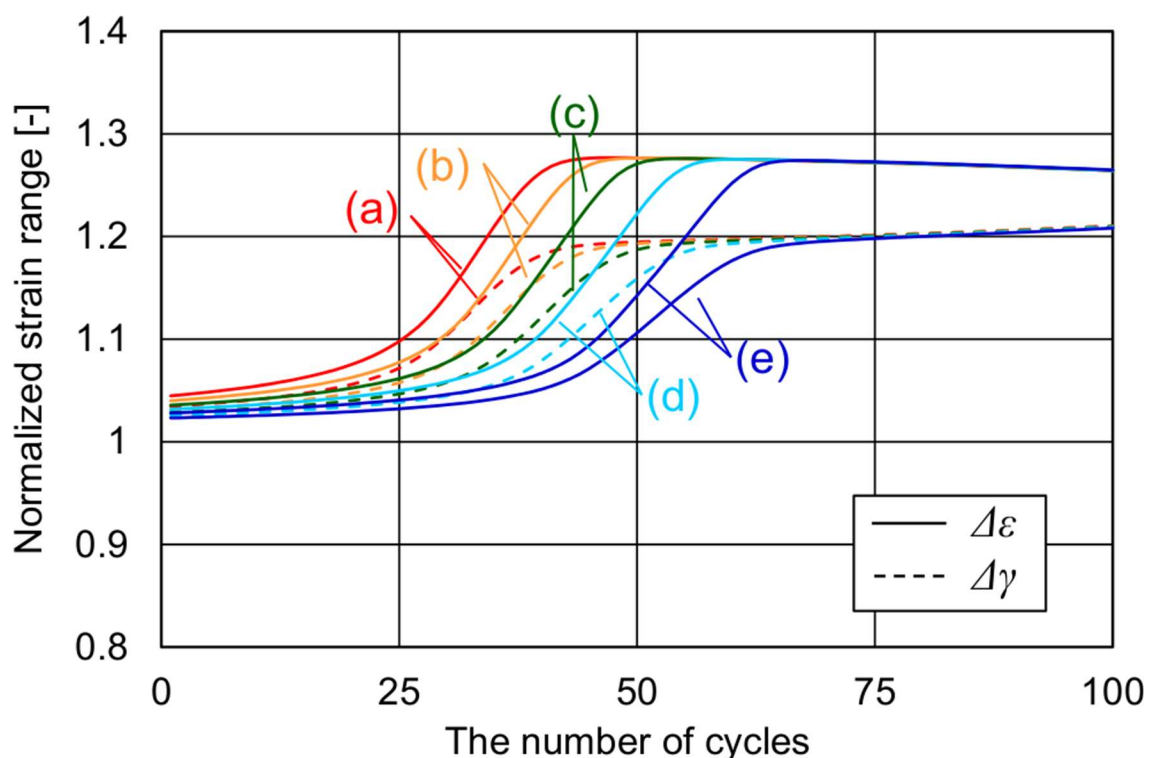


Fig. 6-12 Strain amplitude development under various material constants τ_1 of tangential plasticity incorporating accumulated tangential plastic strain, (a) $\tau_1 = 11.0$, (b) $\tau_1 = 12.0$, (c) $\tau_1 = 13.0$, (d) $\tau_1 = 14.0$ and (e) $\tau_1 = 15.0$.

り、かつ、その振幅も大きくなるといった拡張がなされたことが確認できた。今後は繰返し数の増加や異なる応力レベルに加え、本論では検討していない他の非比例負荷経路においても同様の検討を実施し、累積接線塑性ひずみの関数の検証や具体関数形の修正および拡張が必要であるものと考えられる。

6.8 材料パラメータの影響

本節では提案した累積接線塑性ひずみを考慮した接線非弾性係数の材料定数 τ_1, τ_2 が、ひずみ振幅の変化に与える影響を調査する。Fig. 6-12 では τ_2 は 0.125 一定のまま τ_1 を 11.0 から 15.0 へ変化させた結果を示す。図から τ_1 の増加に伴いひずみ振幅が急増する繰返し負荷数が増加していることがわかる。一方でひずみ振幅が増加する速度に大きな変化は確認できない。次に τ_1 を 14.0 一定に保ったまま τ_2 を 0.1 から 0.175 へ変化させた結果を Fig. 6-13 に示す。ひずみ振幅が急増するまでの繰返し負荷数が増加する点は τ_1 のみを変化させた場

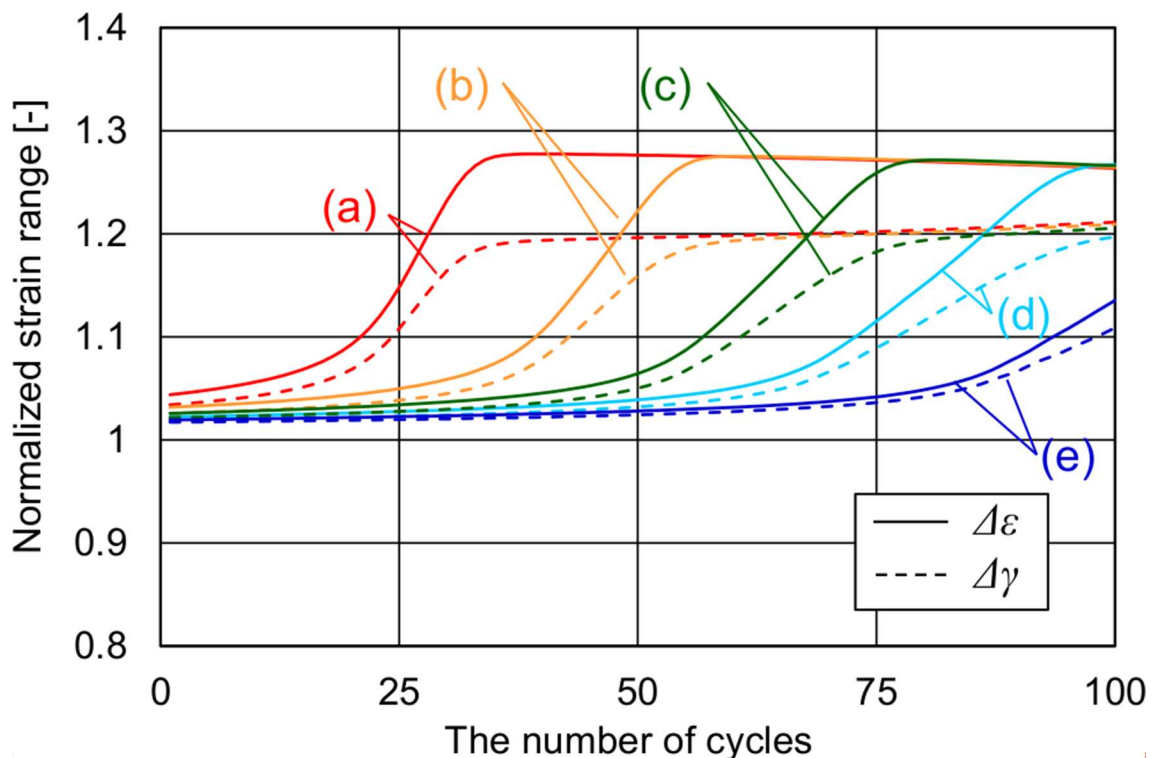


Fig. 6-13 Strain amplitude development under various material constants τ_2 of tangential plasticity incorporating accumulated tangential plastic strain, (a) $\tau_2 = 0.100$, (b) $\tau_2 = 0.125$, (c) $\tau_2 = 0.140$, (d) $\tau_2 = 0.160$ and (e) $\tau_2 = 0.175$.

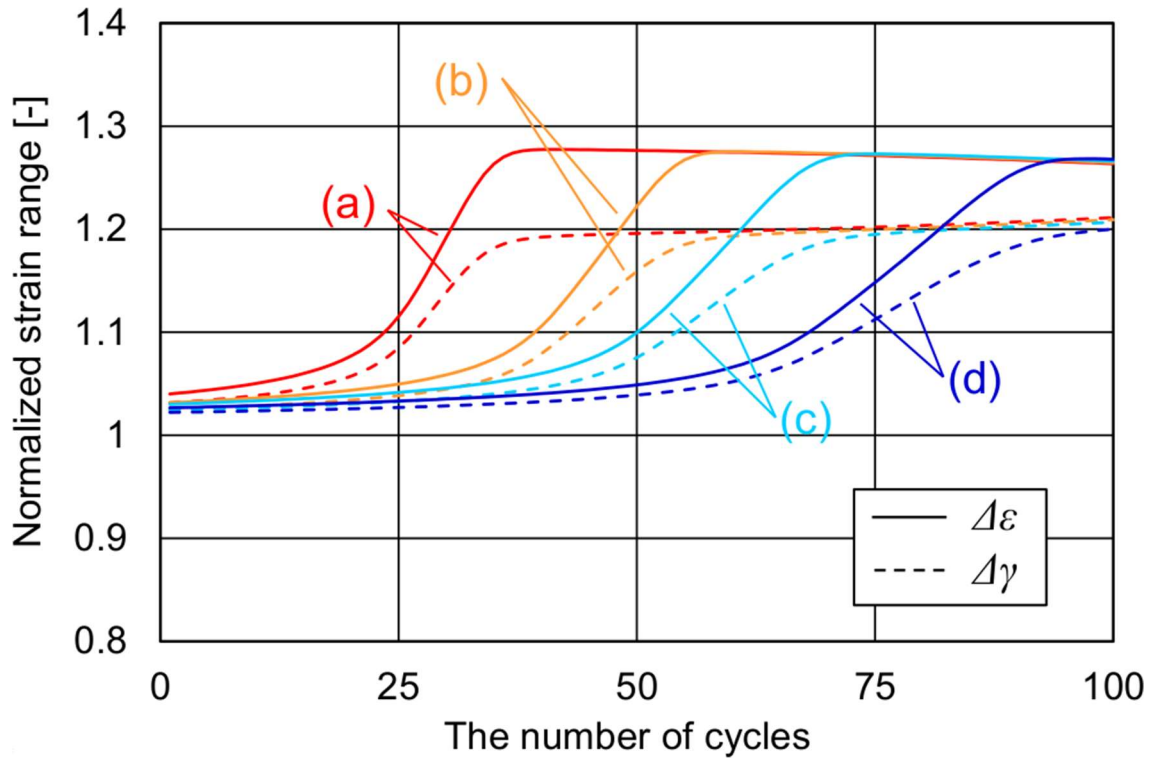


Fig. 6-14 Strain amplitude development under various material constants τ_1 and τ_2 of tangential plasticity incorporating accumulated tangential plastic strain,

- (a) $\tau_1 = 15.0, \tau_2 = 0.100$, (b) $\tau_1 = 14.0, \tau_2 = 0.125$,
(c) $\tau_1 = 12.0, \tau_2 = 0.150$ and (d) $\tau_1 = 11.0, \tau_2 = 0.175$.

合と同様であるが、その速度が低下していることがわかる。最後に τ_1 および τ_2 を同時に変化させた結果を Fig. 6-14 に示す。 τ_1 を大きくしつつ τ_2 を小さくすることで、ひずみ振幅が急増するまでの繰返し負荷数が小さくなり、かつ、その傾きが急峻になっていることが確認できる。つまり塑性シェイクダウンの状態に速い段階で到達する傾向になる。一方で τ_1 を小さくしつつ τ_2 を大きくすることで、ひずみ振幅が急増するまでの繰返し負荷数が大きくなるとともに、その速度も緩やかになっていることが確認できる。

このように累積接線塑性ひずみの関数を規定する材料定数 τ_1, τ_2 を変化させることで、ひずみ振幅が急増するまでの繰返し負荷数やその傾きを変化させることができることから、種々の金属材料における非比例繰返し軟化現象を表現できる可能性が示唆されたと考えられる。今後の課題として、異なる応力経路や種々の金属材料を対象に、非比例繰返し負荷条件の試験を行い、提案した累積接線塑性ひずみの関数 $B(H_t)$ の妥当性の検証、さらには必要

に応じて $B(H_t)$ の具体関数形の修正や拡張が挙げられる。

6.9 結言

本章では、降伏応力以下の繰返し非比例負荷下における金属材料の軟化挙動の表現を目的として、接線塑性構成式の拡張を試みた。拡張した累積接線塑性ひずみを考慮する接線塑性弾塑性モデルと従来の接線塑性弾塑性モデルおよび接線塑性ひずみを考慮しない従来の弾塑性モデルの三者を比較し、以下の結論を得た。

1. 塑性ポテンシャル面接線方向の非弾性ひずみである接線塑性ひずみを考慮しない従来の弾塑性モデルおよびこれまでに提案された接線塑性弾塑性モデルでは、降伏応力以下の非比例繰返し負荷サイクルの増加に伴うひずみ振幅の増大、いわゆる繰返し軟化現象は表現できなかった。
2. 一方、本研究で拡張した累積接線塑性ひずみを考慮する接線塑性弾塑性モデルによれば、繰返し数の増加に伴って発現する当該現象を表現することができた。
3. 本提案モデルを用いて、異なる応力レベルの数値実験を行い、応力レベルが高いほどひずみ振幅が急増するまでの繰返し数が小さくなり、かつ、その振幅も大きくなるという力学的応答として受け入れやすい傾向を示した。
4. 新たに追加した材料定数を変更することで、ひずみ振幅が急増するまでの繰返し負荷サイクルやその急増速度を変化させることができる。従って、異なる金属材料にも適用性があるものと考えられる。

今後は、実在金属材料に対する種々の非比例負荷試験を実施し、本研究で提案した累積接線塑性ひずみの関数の妥当性を検証するとともに、必要に応じて具体関数の改良が必要である。

7章 総括

本研究では、非比例繰返し負荷を受ける金属材料の非弾性挙動の高精度な解析手法の確立を目的として、まず、これまでに提案された接線塑性ひずみを考慮可能な非共軸性の弾塑性構成式を、具体的な境界値問題として、鋼製橋脚の一定軸力下・水平 1 軸および水平 2 軸の漸増繰返し負荷問題に適用することでその妥当性および有用性を検証した。次に降伏応力以下の非比例繰返し負荷を受ける金属材料で生じると推測される繰返し軟化挙動を表現可能なように、接線塑性弾塑性構成モデルを拡張し、種々の金属材料の当該現象を検討し得ることを示した。以下に各章で得られた結論を列挙し、本研究を総括する。

第 1 章では、本研究の背景について述べるとともに、過去の研究の問題点について言及することで、本研究の目的を明示した。次に、本論文の構成を示し、各章の検討内容について概説した。

第 2 章では、本研究で採用する非古典弾塑性構成式に属する拡張下負荷面モデルおよび接線塑性問題への拡張について詳細に述べた。特に、これまでに提案された種々の繰返し弾塑性構成モデルの数学的・物理的問題点を指摘し、その問題点を克服した非共軸性の接線塑性拡張下負荷面モデルについてその定式化を詳細に記述した。最後に本論文で対象とする炭素鋼特有の降伏棚挙動を有する硬化特性を表現可能なように硬化関数を拡張した上で、採用する負荷関数、相似中心の発展則、等方・移動硬化則および接線塑性ひずみ発展則の具体関数を規定した。

第 3 章では、第 2 章で述べた接線塑性弾塑性構成式を非線形有限要素法へ実装する数値計算的手続きについてその具体的計算手法について詳細に述べた。できる限り計算コストを抑えつつ計算精度の低下を招かない数値計算を可能とするために、カッティングプレーン・プロジェクションに基づく定式化を行った。次に、本数値計算手法を用いた数値実験を実施し、参照解として与えられる前進 Euler 法による結果と比較し、計算精度を低下させることなく、計算速度が向上することを示した。

第 4 章では、接線塑性拡張下負荷面モデルの妥当性を検証することを目的に、2 種類の

鋼製橋脚(無補剛円形断面鋼製橋脚および補剛矩形断面鋼製橋脚)を例題に、一定軸力下・水平 1 軸の漸増繰返し負荷実験に相当する非線形有限要素解析を実施した。いずれの鋼製橋脚においても、接線塑性ひずみを考慮しない従来の弾塑性モデルによれば、両供試体柱頭部の荷重-変位履歴特性は、実験結果に比べ高い最大荷重を示し、また最大荷重が生じた後のサイクルにおいても各サイクルで生じる最大荷重あるいは最大変位時の荷重は、実験結果に比べ高い値を、つまり構造物として危険側の予測結果を示した。一方、非共軸性の接線塑性弾塑性モデルを用いた場合、最大荷重のみならず、それ以降のサイクルで生じる荷重の低下といった終局状態までの履歴特性を極めて高精度に予測し得ることを示した。以上の結果から、接線塑性弾塑性モデルの妥当性が示された。

続く第 5 章では、第 4 章で用いた有限要素モデルを用いて、全 7 負荷経路の一定軸力下・水平 2 軸の漸増繰返し負荷解析を実施し、共軸性の従来の弾塑性モデルと非共軸性の接線塑性弾塑性モデルによる結果の違いを詳細に調査した。その結果、両者の間に変形パターンの大きな差異はないものの、いずれの負荷経路においても接線塑性モデルで予測される荷重は従来モデルに比べて低いという水平 1 軸負荷の傾向と同じであったが、接線塑性モデルの従来モデルに対する荷重の低下度は負荷経路に強く依存することを示した。これは、第 2 章の接線塑性弾塑性構成式の定式化で述べた通り、接線塑性モデルは従来モデルに比べ、材料が受ける負荷経路の依存性をより明確に表現できるためであると考えられる。負荷サイクル毎の吸収エネルギーの相違という観点から、鋼製橋脚が受ける負荷経路がより複雑なほどその差は早い段階から生じ、かつ、その程度は大きくなることが示された。以上の結果および前述第 4 章の結果を通じて、実稼動下の複雑な荷重履歴を受ける構造物の信頼性を、数値解析を用いてより高精度に予測するには、従来の塑性ポテンシャル面外向き法線方向に生じる塑性ひずみに加え、同面接線方向に生じる接線塑性ひずみを考慮可能な非共軸性の弾塑性構成式の有用性が示された。

第 6 章では、降伏応力以下の非比例繰返し負荷を受ける金属材料の軟化挙動の表現を目的として、接線塑性構成式の拡張を試みた。接線塑性ひずみを考慮しない従来の弾塑性モデルおよび第 5 章までに採用した接線塑性弾塑性モデルでは、降伏応力以下の非比例繰返し負荷サイクルの増加に伴うひずみ振幅の増大、いわゆる繰返し軟化現象は表現できないことを確認した。そこで、各増分で生じる微小な接線塑性ひずみの累積値を内部状態変数と

して構成式に導入することで、負荷サイクルの増加に伴う塑性ひずみ振幅の発生・成長を表現しうるように接線塑性弾塑性構成式を拡張した。その結果、拡張した累積接線塑性ひずみを考慮可能な接線塑性弾塑性構成式は当該現象を表現することが可能であることを確認した。さらに、異なる応力レベルの数値実験を行い、提案モデルは、応力レベルが高いほどひずみ振幅が急増するまでの繰返し数が小さくなり、かつ、その振幅も大きくなるという力学的応答として受け入れやすい傾向を示すことが確認できた。また、新たに追加した材料定数を変更することで、ひずみ振幅が急増するまでの繰返し負荷サイクルやその急増速度を変化させることができるように拡張されたことを示した。以上のことから提案した累積接線塑性ひずみを考慮した接線塑性弾塑性モデルは、種々の金属材料の軟化現象を検討し得ることを示した。

以上を総括し、本論文は、非比例負荷を受ける金属材料の非弾性変形挙動をより高精度に表現し得るように提案された接線塑性弾塑性構成モデルを有限要素法に実装することにより、具体的境界値問題に適用し、その適用性の高さを示す一端となる結果を得るとともに、降伏応力以下の非比例負荷問題における繰返し軟化挙動を表現し得るように当該弾塑性構成モデルを拡張し、その一形式を新たに提案したものである。

今後残された課題として、鋼製橋脚に用いられた同鋼材に対する多軸非比例負荷要素試験を実施し、より精緻な接線塑性ひずみの発展側に関する材料定数の同定、種々の水平 2 軸負荷を受ける鋼製橋脚の実験結果との比較・照査により接線塑性弾塑性構成モデルのより一層の適用性検証が挙げられる。一方で、鋼製橋脚基部のひずみ履歴を詳細に取得し、接線塑性ひずみの発現メカニズムの明確化およびその定性的・定量的評価を行うために、結晶塑性論的アプローチを通じた検討(堤ら, 2013)などが期待される。非比例繰返し負荷を受ける金属材料の繰返し軟化問題に対しては、実在の金属材料を用いて非比例繰返し負荷試験を実施し、応力振幅あるいはひずみ振幅のみならず、繰返し負荷中の応力-ひずみ関係を取得することで、累積接線塑性ひずみの発展則の検証やその具体関数形の修正および拡張が必要であるものと考えられる。

参考文献

- Armstrong, P.J. and Frederick, C.O., 1966. "A Mathematical Representation of the Multi Axial Bauschinger Effect." *CEGB Report RD/B/N 731*.
- Batdorf, S.B., Budiansky, B., 1949. "A Mathematical Theory of Plasticity Based on the Concept of Slip." National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note, 1871, 1-33.
- Budiansky, B., 1959. "A Reassessment of Deformation Theories of Plasticity." *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, 26, 259-264.
- Chaboche, J.L., Dang Van, K., Cordier, G., 1979. "Modelization of the Strain Memory Effect on the Cyclic Hardening of 316 Stainless Steel." IASMiRT, SMiRT 5 - Berlin, Germany.
- Chaboche, J.L., 2008. "A Review of Some Plasticity and Viscoplasticity Constitutive Theories." *International Journal of Plasticity*, 24, 1642-1693.
- Christoffersen, J., Hutchinson, J. W., 1979. "A Class of Phenomenological Corner Theories of Plasticity." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27, 465-487.
- Dafalias, Y.F., Popov, E.P., 1975. "A Model of Nonlinearly Hardening Materials for Complex Loading." *Acta Mechanica*, 23, 173-192.
- Dafalias, Y.F., Popov, E.P., 1977. "Cyclic Loading for Materials with a Vanishing Elastic Region." *Nuclear Engineering and Design*, 41, 293-302.
- Dafalias, Y.F., 1986. "Bounding Surface Plasticity. I: Mathematical Foundation and Hypoplasticity." *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 112, 966-987.
- Dassault Systèmes Simulia Corp, 2013. "Abaqus User's Manual version 6.13."
- Doong, S. H., Socie. D. F. and Robertson, I.M., 1990. "Dislocation substructure and nonproportional hardening." *Transaction of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Engineering Materials and Technology*, 112, 456-464.
- Doong, S. H., Socie. D. F., 1991. "Constitutive modeling of metals under non-proportional cyclic loading." *Transaction of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Engineering Materials and Technology*, 113, 23-30.
- Drucker, D.C., 1988. "Conventional and Unconventional Plastic Response and Representation." *Review Articles in Applied Mechanics*, 41, 151-167.
- Ellyin, F., 1989. "An Anisotropic Hardening Rule for Elastoplastic Solids Based on Experimental Observations." *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, 56, 499-507.
- Fincato, R., Tsutsumi, S., 2015. "Cyclically Triggered Instability and Yield-vertex Effect on a Welded Plate Investigated by means of the Extended Subloading Surface Model with Tangential Plasticity." *Quarterly Journal of the Japan Welding Society*, 33, 111s-115s.
- Fukumoto, Y., 2004. "Cyclic Performance Assessment of Stiffened Box Columns with Thickness Tapered Plates." *Proceedings of the 2004 Annual Stability Conference, SSRC*, 1-18.
- 葛 漢彬, 高 聖彬, 宇佐美 勉, 松村 寿男, 1997. "鋼製パイプ断面橋脚の繰り返し弾塑性挙動に関する数値解析的研究." *土木学会論文集*, I-41, 181-190.

- Gotoh, M., 1985a. "A Class of Plastic Constitutive Equations with Vertex Effect-i. General Theory." *International Journal of Solids and Structures*, 21, 1101-1116.
- Gotoh, M., 1985b. "A Class of Plastic Constitutive Equations with Vertex Effect-ii. Discussions on the Simplest Form." *International Journal of Solids and Structures*, 21, 1117-1129.
- Gotoh, M., 1985c. "A Class of Plastic Constitutive Equations with Vertex Effect-iii. Applications to Calculation of FLD of Metal Sheets." *International Journal of Solids and Structures*, 21, 1131-1145.
- 後藤 学, 1990. "プレス成形における金属薄板の成形限界ひずみの理論的予測について." *日本機械学会論文集 (A 編)*, 56, 1990.
- 後藤 芳顯, 王 慶雲, 小畑 誠, 高橋 宣男, 1997. "繰り返し荷重を受ける鋼製橋脚の有限要素解析と材料構成則." *土木学会 鋼製橋脚の数値解析と耐震設計に関する論文集*, 197-202.
- 後藤 芳顯, 王 慶雲, 高橋 宣男, 小畑 誠, 1998. "繰り返し荷重下の鋼製橋脚の有限要素法による解析と材料構成則." *土木学会論文集*, I-43, 189-206.
- 後藤 芳顯, 江 坤生, 小畑 誠, 2005. "2 方向繰り返し荷重を受ける薄肉円形断面鋼製橋脚柱の履歴特性." *土木学会論文集*, I-70, 181-198.
- 後藤 芳顯, 江 坤生, 小畑 誠, 2007. "2 方向繰り返し荷重を受ける 矩形断面鋼製橋脚柱の履歴特性." *土木学会論文集 A*, 63, 122-141.
- 後藤 芳顯, 小山 亮介, 藤井 雄介, 小畑 誠, 2009. "2 方向地震 動を受ける矩形断面鋼製橋脚の動特性と耐震設計法 における限界値." *土木学会論文集 A*, 65, 61-80.
- 濱田 政則, 2002. "兵庫県南部地震後の耐震基準の改訂." *土木学会誌*, 83.
- Hashiguchi, K., Ueno, M., 1977. "Elastoplastic Constitutive Laws of Granular Materials." *Constitutive Equations of Soils. Proc. 9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Spec. Session 9, Tokyo. JSSMFE*, 73-82.
- Hashiguchi, K., 1980. "Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition." *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, 47, 266-272.
- Hashiguchi, K., 1986. "Elastoplastic Constitutive Model with a Subloading Surface." In: Yagawa G., Atluri S.N., *Computational Mechanics '86*. Springer, Tokyo.
- Hashiguchi, K., 1989. "Subloading Surface Model in Unconventional Plasticity." *International Journal of Solids and Structures*, 25, 917-945.
- 橋口 公一, 1990. "最新弾塑性学." 朝倉書店.
- Hashiguchi, K., 1993. "Fundamental Requirements and Formulation of Elastoplastic Constitutive Equations with Tangential Plasticity." *International Journal of Plasticity*, 9, 525-549.
- Hashiguchi, K., Yoshimaru, T., 1995. "A Generalized Formulation of the Concept of Nonhardening Region." *International Journal of Plasticity*, 11, 347-365.
- Hashiguchi, K., 1997. "The Extended Flow Rule in Plasticity." *International Journal of Plasticity*, 13, 37-58.
- Hashiguchi, K., 1998. "The Tangential Plasticity." *Metals and Materials*, 4, 652-656.

- Hashiguchi, K., 2000. "Fundamentals in Constitutive Equation: Continuity and Smoothness Conditions and Loading Criterion." *Soils and Foundations*, 40, 155-161.
- Hashiguchi, K., Tsutsumi, S., 2001. "Elastoplastic Constitutive Equation with Tangential Stress Rate Effect." *International Journal of Plasticity*, 17, 117-145.
- Hashiguchi, K., Tsutsumi, S., 2003. "Shear Band Formation Analysis in Soils by the Subloading Surface Model with Tangential Stress Rate Effect." *International Journal of Plasticity*, 19, 1651-1677.
- Hashiguchi, K., 2005. "Subloading Surface Model with Tangential Relaxation." *Proceedings International Symposium Plasticity*, 259-261.
- 橋口 公一, 2007. "一般化共回転速度テンソルおよび降伏関数の共回転微分への変換." *日本機会学会論文集(A編)*, 73, 60-65.
- Hashiguchi, K., Tsutsumi, S., 2007. "Gradient Plasticity with the Tangential-subloading Surface Model and the Prediction of Shear-band Thickness of Granular Materials." *International Journal of Plasticity*, 23, 767-797.
- Hashiguchi, K., Mase, T., Ueno, M., 2011. "Subloading Surface Model and its Return-mapping Formulation." *ACTA 60th National Congress of Theoretical and Applied Mechanics*.
- Hashiguchi, K., Ueno, M., Ozaki, T., 2012. "Elastoplastic Model of Metals with Smooth Elastic-plastic Transition." *Acta Mechanica*, 223, 985-1013.
- Hashiguchi, K., 2013. "General Description of Elastoplastic Deformation/Sliding Phenomena of Solids in High Accuracy and Numerical Efficiency: Subloading Surface Concept." *Archives of Computational Methods in Engineering*, 20, 361-417.
- 橋口 公一, 鈴木 規之, 上野 正実, 2014. "下負荷面モデルに基づくリターンマッピングおよび整合接線係数テンソルの導入による弾塑性変形解析 (第1報, リターンマッピングの定式化)." *日本機械学会論文集*, 80, 1-20.
- 服部 修次, 伊藤 隆基, 後藤 光昭, 2004. "ロジスティック解析に基づく金属材料の高サイクル疲労過程中に生じる塑性ひずみ幅の変化." *日本機械学会論文集(A編)*, 70, 1326-1331.
- Hencky, H., 1924. "Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen." *Z.A.M.M*, 4, 323-334.
- Hill, R., 1959. "Some Basic Principles in the Mechanics of Solids without a Natural Time." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 7, 209-225.
- Hill, R., 1966. "Generalized Constitutive Relations for Incremental Deformation of Metal Crystals by Multislip." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 14, 95-102.
- Hill, R., 1967. "On the Classical Constitutive Laws for Elastic/Plastic Solids." *Recent Progress in Applied Mechanics*, 241-249.
- Huang, J., Griffiths, D., 2009. "Return Mapping Algorithms and Stress Predictors for Failure Analysis in Geomechanics." *Journal of Engineering Mechanics*, 135, 276-284.
- Huges, T.J.R., Pister, K.S., 1978. "Consistent linearization in mechanics of solids and structures." *Computers & Structures*, 9, 391-397.

- 兵庫県南部地震道路橋震災対策委員会, 1995. "兵庫県南部地震における道路橋の被災に関する調査:中間報告書."
- 飯田 國廣, 小沢 継太郎, 永井 英晴, 洪 性祚, 1981. "歪制御低サイクル疲労におけるヒステリシスループの解析と寿命推定." 日本造船学会論文集, 150, 471-481.
- 飯田 國廣, 洪 性作, 1983. "P 分布荷重による累積疲労被害: 第二報: 低・高サイクル寿命域疲労に対する改良モデル." 日本造船学会論文集, 152, 372-380.
- Itoh, T., Sakane, M., Ohnami M., Socie D.F., 1995. "Non-proportional low cycle fatigue criterion for type 304 stainless steel", Transaction of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Engineering Materials and Technology, 117, 285-292.
- 伊藤 隆基, 村嶋 克俊, 平井 孝典, 2007. "非比例負荷における多軸低サイクル疲労強度特性の材料依存性." 材料, 56, 157-163.
- 伊藤 隆基, 福元 謙一, 羽木 秀樹, 伊藤 晃, 齋藤 大地, 2013. "改良 9Cr-1Mo 鋼の非比例多軸低サイクル疲労強度評価." 材料, 62, 110-116.
- Itoh, T., Sakane, M., Ohsuga, K., 2013. "Multiaxial Low Cycle Fatigue Life under Non-proportional Loading." International Journal of Pressure Vessels and Piping, 110, 50-56.
- Iwan, W.D., 1967. "On a Class of Models for Yielding Behavior of continuous and composite systems." Journal of Applied Mechanics (ASME), 34, 612-617.
- Jiang, L., Goto, Y., Obata, M., 2001. "Multiple Spring Model for 3d-hysteretic Circular Behavior of Thin-walled Circular Steel Piers." Structural Engineering/Earthquake Engineering, JSCE, 18, 111-127.
- 菊川 真, 城野 政弘, 宋 智浩, 1972. "繰返し塑性ひずみと累積疲労損傷 (疲労限度以下の応力による疲労損傷)." 材料, 21, 753-758.
- 北川 浩, 1982. "塑性ひずみ局所化現象の解析 -最近の動向と問題点-." 日本機械学会論文集, A48, 250-258.
- Koiter, W.T., 1953. "Stress-strain Relations, Uniqueness and Variational Theorems for Elastic-plastic Materials with a Singular Yield Surface." Quarterly of Applied Mathematics, 11, 350-354.
- Krieg, R. D., 1975. "A Practical Two Surface Plasticity Theory." Journal of Applied Mechanics (ASME), 42, 641-646.
- Krieg, R.D., Krieg, D.B., 1977. "Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic models." Journal of Pressure Vessel Technology (ASME), 99, 510-515.
- Kuroda, M., Tvergaard, V., 2001a. "A Phenomenological Plasticity Model with Non-normality Effects Representing Observations in Crystal Plasticity." Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 49, 1239-1263.
- Kuroda, M., Tvergaard, V., 2001b. "Shear Band Development Predicted by a Non-normality Theory of Plasticity and Comparison to Crystal Plasticity Predictions." International Journal of Solids and Structures, 38, 8945-8960.
- Kuroda, M., Tvergaard, V., 2001c. "Plastic Spin Associated with a Non-normality Theory of Plasticity." European Journal of Mechanics - A/Solids, 20, 893-905.
- Mandel, J., 1965. "Generalisation de la theorie de plasticite de W. T. Koiter." International Journal of Solids and Structures, 1, 273-295.

- McDowell, D. L., 1985a. "A Two Surface Model for Transient Nonproportional Cyclic Plasticity, Part 1: Development of Appropriate Equations." *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, 52, 298-302.
- McDowell, D. L., 1985b. "A Two Surface Model for Transient Nonproportional Cyclic Plasticity, Part 2: Comparison of Theory with Experiments." *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, 52, 303-308.
- Miehe, C., 1996. "Numerical Computation of Algorithmic (Consistent) Tangent Moduli in Large Strain Computational Inelasticity." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134, 223-240.
- Moosbrugger, J.C., McDowell, D.L., 1990. "A Rate-dependent Bounding Surface Model with a Generalized Image Point for Cyclic Nonproportional Viscoplasticity." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38, 627-656.
- Mroz, Z., 1966. "On Forms of Constitutive Laws for Elastic-plastic Solids." *Arch. Mech. Stos.*, 18, 3-35.
- Mroz, Z., 1967. "On the Description of Anisotropic Workhardening." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15, 163-175.
- Mroz, Z., Norris, V.A., Zienkiewicz, O.C., 1981. "An Anisotropic, Critical State Model for Soils Subject to Cyclic Loading." *Geotechnique*, 31, 451-469.
- 中井 博, 河井 章好, 吉川 紀, 北田 俊行, 酒造 敏広, 1982a. "鋼製ラーメン橋脚の実績調査(上)." *橋梁と基礎*, 35-40.
- 中井 博, 河井 章好, 吉川 紀, 北田 俊行, 酒造 敏広, 1982b. "鋼製ラーメン橋脚の実績調査(下)." *橋梁と基礎*, 43-49.
- 中島 伸幸, 山田 稔, 2000. "大変形域における一般構造用鋼 SS400 材の塑性履歴特性." *日本建築学会構造系論文集*, 536, 17-22.
- 日本道路協会, 2002. "道路橋示方書・同解説 (V耐震設計編)." .
- Nishikawa, K., Yamamoto, S., Natori, T., Terao, K., Yasunami, H., Terada, M., 1998. "Retrofitting for seismic upgrading of steel bridge columns." *Engineering Structures*, 20, 540-551.
- 新田 明人, 緒方 隆志, 桑原 和夫, 1987. "SUS304 鋼の高温多軸疲労寿命に及ぼす引張圧縮-ねじり負荷位相の影響." *材料*, 36, 376-382.
- Ohno, N., 1982. "A Constitutive Model of Cyclic Plasticity with a Non-hardening strain Region." *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, 49, 721-727.
- Ohno, N., Kachi, Y., 1986. "A Constitutive Model of Cyclic Plasticity for Nonlinear Hardening Materials." *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, 53, 395-403.
- Ohno, N., Wang, J.D., 1993a. "Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic Recovery, Part I: Formulation and Basic Features for Ratcheting Behavior." *International Journal of Plasticity*, 9, 375-390.
- Ohno, N., Wang, J.D., 1993b. "Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic Recovery, Part II: Application to Experiments of Ratcheting Behavior." *International Journal of Plasticity*, 9, 391-403.
- 大沢 直樹, 上野 大輝, 下池 亮, 橋本 聖史, 稲見 彰則, 2006. "造船用鋼材の繰返し軟化特性とき裂伝播速度の関係に関する一考察." *日本船舶海洋工学会論文集*, 4, 257-267.

- Prager, W., 1949. "Recent Developments in the Mathematical Theory of Plasticity." *Journal of Applied Physics*, 20, 235-241.
- Reis, L., Li, B., Freitas, M., 2009. "Crack Initiation and Growth Path under Multiaxial Fatigue Loading in Structural Steels." *International Journal of Fatigue*, 31, 1660-1668.
- Rice, J.R., 1976. "The Localization of Plastic Deformation." *Theoretical and Applied Mechanics*, W.T. Loiter, ed., 207-220.
- Rudnicki, J.W., Rice, J.R., 1975. "Conditions for the Localization of Deformation in Pressure-sensitive Dilatant Materials." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23, 371-394.
- Sewell, M.J., 1973. "A Yield-surface Corner Lowers the Buckling Stress of an Elastic-plastic Plate under Compression." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 21, 19-45.
- Sewell, M.J., 1974. "A Plastic Flow Rule at a Yield Vertex." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 22, 469-490.
- Simo, J. C., Ortiz, M., 1985. "A Unified Approach to Finite Deformation Elastoplastic Analysis Based on the Use of Hyperelastic Constitutive Equations." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49, 221-245.
- Simo, J. C., 1987. "A J2-flow Theory Exhibiting a Corner-like Effect and Suitable for Large-scale Computation." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 62, 169-194.
- Suresh, S., 1998. "Fatigue of Materials." Cambridge University Press.
- 鈴木 雄大, 小野 潔, 池内 智行, 岡田 誠司, 西村 宣男, 高橋 実, 2003. "実用的な鋼材の構成式の開発." 第6回地震時保有耐力法に基づく橋梁等構造の耐震設計に関するシンポジウム講演論文集, 351-358.
- 只野 裕一, 2004. "有限要素法による板材および管材の 塑性局所化解析に関する研究" 博士学位論文.
- 豊貞 雅宏, 丹羽 敏男, 2001. "鋼構造物の疲労寿命予測." 共立出版.
- Toyosada, M., Gotoh, K., Niwa, T., 2004. "Fatigue crack propagation for a through thickness crack: a crack propagation law considering cyclic plasticity near the crack tip." *International Journal of Fatigue*, 26, 983-992.
- Tsutsumi, S., Hashiguchi, K., 2005. "General Non-proportional Loading Behavior of Soils." *International Journal of Plasticity*, 21, 1941-1969.
- Tsutsumi, S., Toyosada, M., Hashiguchi, K., 2006. "Extended Subloading Surface Model Incorporating Elastic Limit Concept." *Journal of Applied Mechanics (JSCE)*, 9, 455-462.
- 堤 成一郎, 豊貞 雅宏, 村上 幸治, 2007. "巨視的弾性条件下での一定両振り荷重繰返しに伴う塑性ひずみ成長挙動." *日本機械学会論文集 (A 編)*, 73, 52-59.
- 堤 成一郎, 村上 幸治, 後藤 浩二, 豊貞 雅宏, 2008. "高サイクル疲労過程の繰返し応力-ひずみ関係 -繰返し損傷を考慮した弾塑性モデル-." *日本船舶海洋工学会論文集*, 7, 243-250.
- 堤 成一郎, 大和 真征, 後藤 浩二, 渡邊 育夢, Fionn Dunne, 2013. "結晶塑性 FE 解析による巨視的弾性応力下の 繰返し軟化挙動の考察." *スマートプロセス学会誌*, 2, 123-127.

- Tsutsumi, S., Fincato, R., 2014. "Return Mapping Technique for the Extended Subloading Surface Model with Tangential Plasticity." Transaction of JWRI, 43, 33-38.
- Tvergaard, V., Needleman, A., Lo, K.K., 1981. "Flow Localization in the Plane Strain Tensile Test." Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 29, 115-142.
- Ucak, A., 2009. "Instabilities in Thin-Walled Steel Columns under Three Dimensional Nonproportional Cyclic Loading." Ph.D. thesis, The Catholic University of America, USA.
- Ucak, A., Tsopelas, P., 2012. "Accurate Modeling of the Cyclic Response of Structural Components Constructed of Steel with Yield Plateau." Engineering Structures, 35, 272-280.
- Ucak, A., Tsopelas, P., 2014. "Load Path Effects in Circular Steel Columns under Bidirectional Lateral Cyclic Loading." Journal of Structural Engineering, 1-11.
- Wang, C.H., Brown, M.W., 1993. "A Path-independent Parameter for Fatigue under Proportional and Non-proportional Loading." Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, 16, 1285-1297.
- 王 慶雲, 後藤 芳顯, 高橋 宣男, 小畑 誠, 1997. "繰り返し荷重下の鋼製橋脚の有限要素法による解析について." 土木学会 第2回 阪神・淡路大震災に関する学術講演会 論文集, 369-376.
- Wilkins, M.L., 1964. "Calculation of Elastic-Plastic Flow." Methods of Computational Physics, 3, B. Alder, ed., Academic Press, New York.
- 安波 博道, 寺田 昌弘, 名取 暢, 寺尾 圭史, 西川 和廣, 1996. "弾塑性 FEM による鋼管柱載荷実験のシミュレーション解析." 鋼構造論文集, 3, 1-10.
- Yoshida, F., Uemori, T, 2002a. "Elastic-plastic Behavior of Steel Sheets under In-plane Cyclic Tension-compression at Large Strain." International Journal of Plasticity, 18, 633-659.
- Yoshida, F., Uemori, T, 2002b. "A Large-strain Cyclic Plasticity Describing the Bauschinger Effect and Workhardening Stagnation." International Journal of Plasticity, 18, 661-686.

謝辞

本論文は著者が大阪大学大学院工学研究科地球総合工学専攻博士後期課程に在籍中の研究成果をまとめたものである。大阪大学接合科学研究所 准教授 堤成一郎先生には指導教官として本研究の実施の機会を与えて戴き、またその遂行にあたって御多忙中にも関わらず、終始格別の御指導を戴いた。ここに深謝の意を表す。

本論文の作成に当たり、副査としてそれぞれの専門の立場から御高覧戴き、貴重な御意見や御助言を賜った大阪大学大学院工学研究科地球総合工学専攻 教授 奈良敬先生、並びに、同専攻 教授 鎌田敏郎先生に深謝の意を表す。

本研究の遂行に当たり、大阪大学接合科学研究所 特任助教 **Riccardo Fincato** 博士には並々ならぬ御支援を戴いた。特に弾塑性構成式の実装に関する数値解法や実装手続きなど、研究の細部に至るまで御教示を戴き、博士の御協力なくしては本研究成果をまとめるに至らなかった。ここに深く感謝の意を表す。

著者の九州大学時代の恩師である同大学名誉教授 橋口公一先生には、折に触れ本研究に対して御指導戴くとともに、とりわけ弾塑性構成式の最新の研究動向について示唆に富んだ御意見を賜り、深く感謝の意を表す。

本博士後期課程入学時に著者が在籍していた株式会社エステック 技術部長 古本昌司氏、同実験部シニアプロジェクトマネージャ 池田聡博士には、本入学を快諾していただくとともに、業務の傍ら研究に没頭できる時間を御配慮戴き、感謝の意を表す次第である。

著者が有意義な研究生活を過ごすことができたのは川重テクノロジー株式会社設計ソリューション部 主事 矢嶋泰基氏、大阪大学接合科学研究所接合設計学分野の植田一史氏(現 川崎重工株式会社)並びに森田花清氏(現 株式会社 IHI)をはじめとした学生諸氏の御協力あつてのものと感じる次第である。この場を借りて感謝の意を表す。

最後に、著者の研究と生活をいつも支え見守ってくれた妻 綾子と娘たち 朝妃、葵衣、あかりに深く感謝する。

2018年2月

梶井秀斗