



Title	Studies on generalizations and complex behaviors of quantum modular values
Author(s)	Bin Ho, Le
Citation	大阪大学, 2018, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/69629">https://doi.org/10.18910/69629</a>
rights	©American Physical Society
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## Abstract of Thesis

Name (LE BIN HO)	
Title	Studies on generalizations and complex behaviors of quantum modular values (量子モジュラーヴァリューの一般化とその複素数的振る舞い)
<p><b>Abstract of Thesis</b></p> <p>Since Aharonov et al. proposed the concept of weak value in 1988, there have been a number of studies on weak values both theoretically and experimentally, and the number of the papers is still increasing a lot. A weak value was first defined as the expectation value of an observable measured by an infinitesimally weak measurement when the system's initial state is pre-selected and its final state is post-selected. It became clear that a weak value sometimes exceeds the range of the eigenvalues of an observable. Moreover, a weak value sometimes can be complex. However, weak values require infinitesimally small interaction strengths between the measured system and the measuring device.</p> <p>In order to allow a finite strength in the measurement interaction, the concept of modular value was proposed by Kedem and Vaidman in 2010. However, the research on modular values is not so well developed as research on weak values. A general relationship between modular values and weak values is still not explicitly stated. Furthermore, fully generalized characterizations, as well as the complex-behavior understanding of modular values, are still missing.</p> <p>This dissertation introduces and develops a general approach for modular value. Particularly, we first indicate generalized relationships between modular values and weak values for finite-dimensional systems by using the Lagrange interpolation. These relations enable us to evaluate weak values by experimentally obtainable modular values. As a result, we can analyze and interpret some quantum paradoxes by using modular values, such as the EPR, the Hardy, and the Cheshire-cat paradoxes.</p> <p>As for the generalizations, we implement a generalized modular-value-based scheme based on a positive-operator valued measure (POVM) approach for post-selection measurements, where we generalize from conventional two-level pointers to multi-level pointers and continuous pointers. These analyses lead to a so-called <i>generalized modular value</i>. One of the key results is that the amplification effect is observed in the case of the generalized modular value. We then apply our proposal to the case of a spin-<math>s</math> particle pointer, a semiclassical pointer state, and a continuous pointer state. After that, the time-dependent weak values and modular values are also generalized onto an enlarged Hilbert space. Therein, we propose an enlarged state, which combines both the initial and final states at a given time <math>t</math>. Using this enlarged state, the quantum weak and modular values can be completely interpreted as expectation values in the enlarged Hilbert space. This proposal thus potentially allows us to efficiently evaluate the weak and modular values at any time without using any quantum tomography calculation. We also apply our proposal to an example of a spin-1/2 particle. A method for implementing the enlarged Hamiltonian is also presented.</p> <p>As for clarifying the complex behaviors of modular values, we investigate the complex behaviors of modular values. We derive the polar decomposition of a modular value into the modulus and phase components and connect these components onto some physical properties. Then, we also discuss a relationship between the modulus and phase, wherein the derivative of the phase relates to the derivative of the logarithm of the modulus via a Berry-Simon-like connection, which is in the form of a weak value. As a consequence, the modulus-phase relation enables us to acquire these polar components whenever the connection is specified. Furthermore, we also illustrate the modulus-phase relation on the Bloch sphere.</p> <p>Our study provides detailed generalizations of quantum modular values as well as the complex behaviors in various aspects of quantum mechanics. This work, therefore, significantly contributes to the understanding and usage of quantum modular values and could also motive and guide further various exciting experiments.</p>	

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 ( LE BIN HO )			
	(職)	氏 名	
論文審査担当者	主 査	教 授	井元 信之
	副 査	教 授	藤本 聡
	副 査	教 授	小口 多美夫
	副 査	准教授	小林 弘和(高知工科大学・准教授)

論文審査の結果の要旨

量子力学の最も大きな目的は物理量の期待値を計算することにある。物理量の一つ決めても、その期待値は系の状態に依存するので、期待値を与える式には系の状態が座る座席が一つある (single-state formalism)。これが普通の状況であるが、たとえば光子が 2 回反射するとその都度偏光状態が変わるが、最終的にその光子を我々が検出したという条件のもとで一回目と二回目の反射の間で第三者が一般偏光測定をしたとき、その期待値を我々が言い当ててあげるという状況を考えると、一回目に指定された偏光状態と二回目で検出した偏光状態の両方がその計算に入ってくる。つまり期待値を与える式に始状態と終状態 (始状態からの発展ではなく独立に設定) の二状態が座る座席がある (two-state formalism)。その式は測定の仕方や強さで一意には決まらないが、ただ二つ、強測定の場合と弱測定の極限の場合は測定の仕方に依存しない式となる。その二つのうち強測定は系の状況を乱してしまうが、弱測定の場合は系に擾乱を与えないので、「系の客観的な状況」を表す期待値となる。たとえば干渉計の内部の物理量について、干渉を壊さずにその期待値を得ることができる。それをアハラノフは「弱値」と呼んだ。この弱値は相互作用が弱い場合のユニタリ演算子の期待値 (の虚部の一次展開) に相当するので、展開しない生のままの形の期待値をヴァイドマンは「モジュラー値」と呼んだ。期待値とはいえ、弱値と同様、物理的状态の座席が二つある。モジュラー値は測定強度が弱くない場合に応用が利くことが断片的に知られているが、その一般的性質は弱値ほどよく調べられておらず、物理的意味も定かではなかった。

BIN HO 氏の博士論文はこのモジュラー値の性質を明らかにし、物理的意味や使用法を発展的に明らかにしたものである。まず (1) モジュラー値と弱値の間の一般的関係を、ラグランジュの補完法と呼ばれる行列代数の方法を応用して明らかにした。これは系のヒルベルト空間が 3 次元以上のときは  $\Sigma$  (一般和) を含む式となるが、2 次元 (2 準位系や量子ビット) のときは簡単な線形関係になる。また (2) 弱値やモジュラー値は前記説明から明かなように、始状態と終状態の間の時刻の関数ではあるもののそれは因果的発展を意味しなく、終状態の検出を待って計算して初めて得られる「単なる時刻の関数」である。BIN HO 氏は系をより大きなヒルベルト空間の系に含まれるように拡大することにより、因果的発展をする意味で時間の関数になるような表式を見つけた。その表式は single-state formalism に戻っている。もしこれが架空の系でなく実際に元の系をシミュレートできる現実の系として構成できるなら、一方向の発展として観測することができる。さらに (3) モジュラー値の極分解からその物理的意味、特に相互作用発展に基づく位相の変化とベリー位相に分けられることを明らかにした。そして絶対値部と位相の間に積分変換の関係があることを (ちょうど一般感受率の実部と虚部のクラマース・クロニヒ関係が互いに積分変換であるように) 明らかにした。

以上の研究はモジュラー値の正体に関して多大な知見をもたらしたもので、その使い方についても多々提案したものである。弱値が使いにくい場合にそれと相補的なものとしてモジュラー値の多くの知見を得、それらの関係も明らかにするなど、理学的に多大な進歩をもたらした。よって博士 (理学) の学位論文として価値のあるものと認める。