



Title	恒常性自己調節モデルに対する数理的研究
Author(s)	陰山, 真矢
Citation	大阪大学, 2018, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/69711
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

恒常性自己調節モデルに対する数理的研究

提出先 大阪大学情報科学研究科

提出年月 2018 年 1 月

陰 山 真 矢

研究業績

原著論文

- [1] M. Kageyama and A. Yagi, Exponential Attractors for Self-Regulating Homeostasis Model on a Sphere, Sci. Math. Japonicae, 掲載決定.
- [2] M. Kageyama and A. Yagi, Pattern Formation for Self-Regulating Homeostasis Model in a Rectangle, Sci. Math. Japonicae, 掲載決定.

国際会議報告

- [1] M. Kageyama and A. Yagi, Pattern Formation in Self-Regulating Homeostasis Model, Proceedings of SICE International Symposium on Control Systems 2018, 掲載決定.

学会・国内発表

- [1] 陰山真矢, 植生・気候フィードバック拡散モデルに関する数値シミュレーション, 第11回数理科学研究センター談話会, October, 2015.
- [2] 陰山真矢, 八木厚志, 球面上のデージーワールドモデルに対する指数アトラクタ, 第42回発展方程式研究会, December, 2016.
- [3] 陰山真矢, 八木厚志, 球面上のデージーワールドモデルにおけるパターン形成, 第11回コンピューテーショナル・インテリジェンス研究会, 計測自動制御学会, June, 2017.
- [4] 陰山真矢, 八木厚志, 恒常性自己調節モデルに対する指数アトラクタ, 秋の偏微分方程式セミナー, September, 2017.

目次

第 1 章	序論	7
第 2 章	恒常性自己調節モデル	11
2.1	Watson-Lovelock モデル	11
2.2	平面拡散モデル	15
2.3	円周拡散モデル	18
2.4	恒常性自己調節モデル（球面拡散モデル）	21
2.4.1	モデル方程式の導入	21
第 3 章	恒常性自己調節モデルに対する力学系（球面領域）	23
3.1	S 上の拡散方程式	23
3.1.1	S の局所座標	23
3.1.2	S 上のラプラス作用素	24
3.1.3	$L_2(S)$ での Δ_S の実現	26
3.1.4	$-A$ によって生成される半群	27
3.2	解の構成	29
3.2.1	抽象的定式化	29
3.2.2	大域解	31
3.3	力学系	34
第 4 章	離散化スキームの実装（球面領域）	37
4.1	不等間隔格子	38
4.2	Half-Step-Shifted 格子スキーム	39
4.3	L'Hôpital の定理を用いるスキーム	42
第 5 章	数値計算による解の追跡（球面領域）	47
5.1	数値計算結果	47
第 6 章	恒常性自己調節モデルに対する力学系（2次元長方形領域）	51
6.1	モデル方程式	51
6.2	局所解	52
6.2.1	周期・Neumann 境界条件下でのラプラシアン	52
6.2.2	抽象的定式化	55
6.2.3	局所解の構成	55
6.3	大域解と力学系	57

6.3.1	大域解の構成	57
6.3.2	力学系	58
6.4	定数定常解	59
6.4.1	正の定数定常解	59
6.4.2	定数定常解の安定・不安定性	62
第 7 章	離散化スキームの実装（2 次元長方形領域）	67
7.1	ADI 法による離散方程式	67
第 8 章	数値計算による解の追跡（2 次元長方形領域）	77
8.1	初期値を変動させた場合	77
8.2	R の変動による棲み分けパターン	81
8.3	温度の恒常性	86
8.4	q を制御パラメータとした場合	90
第 9 章	結論	95
第 10 章	将来の展望	99
	謝辞	101

第1章

序論

1974年, J. E. Lovelock は地球における恒常性自己調節システムという概念を提唱した [23, 25]. これは, 生物相とそれを取り巻く環境が相互に作用することによって, 地球システム全体を安定化に向けて自己調節しているという考えである.

Lovelock によるこの仮説 (ガイア仮説 [19, 24]) の正当性を検証するには, 生物相とそれを取り巻く環境はあまりにも複雑で, それらの結びつきは多岐にわたる. そこで, Watson-Lovelock [40] は生物相はデイジーという単一種に, 環境は温度という単一変数にまで単純化した数理モデルを作った. それが「デイジーワールド」と呼ばれる仮想的モデルである.

デイジーワールドとは地球のような惑星で, 太陽のような恒星の周りを公転している. デイジーワールドには色の濃淡が異なる2種類のデイジーしか生息しておらず, これらは地球の植物と同じく互いの生育域を競い合っている. 我々はそれらの明暗差を強調するために, 濃色のデイジーを「黒」, 淡色のデイジーを「白」と呼んでいる. この仮想の惑星を照らし暖める恒星は, 太陽と同じく年月を経るごとに熱出力が上昇するという特徴を持つ. また, デイジーワールドは雲ひとつない惑星であり, 二酸化炭素のようなガスは常に安定した状態にある. これはデイジーの生育には十分だが, 気候に影響を及ぼすほどではない. したがって, 惑星の大域温度は恒星からの放射熱と, 地表面の反射率 (アルベド) によってのみ決まる. つまり, 地表面の色が濃いほど恒星からの光を吸収して温度が上昇しやすく, 色が薄いほどその逆に温度が低下しやすい.

恒星の温度上昇に伴うデイジーワールドの環境の変遷について簡単に述べておく. 最初, 恒星の温度が低いときには黒いデイジーが惑星上で優位に育ち, 白いデイジーは赤道付近の高温地帯にしか見られない. これは黒いデイジーが恒星からの光を吸収して暖まりやすいため, 低温で成長に有利となるからである. やがて黒いデイジーが生育域を拡げるにつれて, 地表面のアルベドが変化し, 植物自体だけでなく土壌と空気の温度が局所的に暖かく保たれる. この温度上昇によって黒いデイジーの成長はさらに促進され, 正のフィードバックを形成し, 惑星の大部分を黒いデイジーが覆うことになる. 恒星の熱出力が増大すると, 白いデイジーが勢いを得て黒いデイジーと競合しはじめる. そして最後には黒と白のデイジーは安定した状態に落ち着く. これは, 白いデイジーが恒星からの光を反射し, 自らの生育域や惑星全体を冷却することによって, 惑星の温度がデイジーの成長に理想的な状態となるからである. さらに恒星の熱出力が増大していくと, 黒いデイジーは衰えて白いデイジーの個体群が拡がる. このとき白いデイジーの冷却効果により, 惑星の温度はデイジーの成長に適した温度に保たれている. 最終的に恒星が非常な高温になると, 白いデイジーをもってしてもデイジーが許容できる温度に保つことができなくなり,

デイズワールドは滅びてしまう。

Watson と Lovelock によって導入されたモデル方程式は、空間的な拡がりの無い 0 次元のモデルであった。これは非常に単純なモデルであったにもかかわらず、仮想の惑星が予測や計画性無しに、大域的な温度をデイズの成長に最適な値へと自律的に調節するような結果を示した。

植生と気候のフィードバックシステムとして理想的に作られたデイズワールドは、ガイア仮説に関する多くの議論に用いられている（例えば、Lenton-van Oijen [22] を参照）。現在、地球上の生物が環境に何らかの影響を与えていることについてはもはや議論の余地はない。その一方で、デイズワールドモデルは最も単純な地球システムモデルのひとつとしてその有用性が期待されており、ガイア仮説から離れたところでも、様々な関連研究や拡張研究が行われている。例えば、モデルを解析的に研究しものでは De Gregorio-Pielke-Dalu [11], Saunders [31], Sugimoto [34] がある。デイズワールドモデルの拡張研究としては、惑星に生息する生命や環境に新たな条件を付加した Harding-Lovelock [15], Lenton-Lovelock [20], Lenton-Lovelock [21], Seto-Akagi [32], デイズと温度との相互作用に時間的な遅れを加えた Zeng-Pielke-Eykholt [46] などがある。さらに、空間次元の拡張においては、von Bloh-Block-Schellnhuber [39] のセルオートマトン法を用いた平面拡散モデル、球面拡散の効果を取り入れた Adams-Carr [4], Adams-Carr-Lenton-White [5] の円周拡散モデルなどがある。詳しくは Wood-Ackland-Dyke-Williams-Lenton [43] にまとめられている。

本論文では、Watson と Lovelock によって導入されたデイズワールドモデルに空間的な効果を加えた「恒常性自己調節モデル」を考え、それについて 2 つの領域上で議論する。

まず、既存のモデルに対して、球面上におけるデイズと温度の拡散特性を加えた完全な 2 次元モデルを扱う。これは、仮想の惑星をより現実的なものへと近づけることにより、デイズワールドの挙動に新たな効果が現れることを期待するものである。このモデルに対して放物型発展方程式の理論を用いて解の構成、力学系の定義、指数アトラクタの構成を行う。さらに、その結果をうけて数値シミュレーションを行い、デイズと温度の挙動を考察する。

次に、2 次元長方形領域上で恒常性自己調節モデルを考える。これは、球面上での恒常性自己調節モデルで得られた数値計算結果を受けて、そのさらに詳しい挙動を簡略化した領域上で調べることが目的である。このモデルに対して、球面上の場合と同様にして指数アトラクタの構成を行い、さらに定数定常解の安定性について調べる。これによってパターン形成が起こることを理論的に示唆し、実際に数値シミュレーションによって現れる解の考察を行う。

最後に、本論文の構成について簡単に説明する。

第 1 章は、本研究の背景、および目的について述べている。第 2 章では、従来の Watson-Lovelock によるデイズワールドモデルと、それに対する拡張モデルとして、von Bloh-Block-Schellnhuber の平面拡散モデル、そして Adams-Carr による円周拡散モデルについて説明し、既に知られているいくつかの結果を紹介する。さらに、章の最後に球面上での恒常性自己調節モデルの導入を行う。第 3 章では、球面上での恒常性自己調節モデルについて解析的に調べた結果を述べる。まず、球面ラプラシアン の定義を行い、球面上でモデルを定式化する。さらに、そのモデルに対して局所解および大域解を構成し、適切な無限

次元力学系を定義し、最後に指数アトラクタを構成する。第4章では、球面上の偏微分方程式に対する数値解法をいくつか紹介し、2つのスキームを用いて実際にモデルの離散化を行う。第5章では、球面上での恒常性自己調節モデルに対する数値計算結果を紹介する。第6章では、2次元長方形領域上で恒常性自己調節モデルを定式化し、それに対して局所解、大域解、力学系の構成を行い、指数アトラクタの存在を示す。さらに、方程式の定数定常解の存在について調べ、その安定性解析を行う。これにより、一様分布の不安定化が起こる条件を調べる。第7章では、2次元長方形領域上での偏微分方程式に対する数値解法として知られているADI法を用いて、恒常性自己調節モデルを離散化する。第8章では、2次元長方形領域上での恒常性自己調節モデルの数値計算結果を示し、デ이지ーの生存競争によって現れる棲み分けパターンと温度調節機構の関係について考察する。第9章では、各章での議論についてまとめる。最後に第10章では、将来の展望として、恒常性自己調節モデルによる惑星温暖化に対する研究の可能性について簡単に述べる。

第2章

恒常性自己調節モデル

Watson-Lovelock [40] によって導入されたデイズワールドモデルは、生命と環境の複雑な相互作用システムを記述する最も単純なモデルのひとつとして、多くの拡張研究や関連研究が行われている。

本章では、上記モデルに続き、von Bloh-Block-Schellnhuber [39] による平面拡散モデル、Adams-Carr [4] および Adams-Carr-Lenton-White [5] による円周拡散モデルの方程式について簡単に紹介する。また、最後に我々が取り扱うモデル方程式の導入を行う。

2.1 Watson-Lovelock モデル

Watson-Lovelock [40] によって導入された最初のデイズワールドモデルは、惑星全体を一点として考えた、いわゆる 0 次元のモデルである。惑星上に生息する 2 種類のデイズの成長は、以下のような方程式で記述される (Carter-Prince [9] を参照)。

$$\frac{du}{dt} = [(1 - u - v)\Phi(u, v, w) - f]u, \quad (2.1)$$

$$\frac{dv}{dt} = [(1 - u - v)\Psi(u, v, w) - f]v. \quad (2.2)$$

ここで、 $u(t)$ は時刻 t における白いデイズの被覆率、 $v(t)$ は時刻 t における黒いデイズの被覆率を表す。惑星上でデイズが育つことのできる土地の総面積を 1 としているため、 $u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1$ とし、デイズが育っていない裸地の割合は $1 - u - v$ で与えられる。 f はデイズの枯死率を表し、正定数とする。さらに、白と黒のデイズの成長率は、それぞれデイズの成長に最適な温度 $\bar{w}$ で最大値 1 をとるような放物型の正のカットオフ関数

$$\Phi(u, v, w) = [1 - \delta(\bar{w} - T_w)^2]_+, \quad (2.3)$$

$$\Psi(u, v, w) = [1 - \delta(\bar{w} - T_b)^2]_+, \quad (2.4)$$

で与えられる (図 2.1 を参照)。ここで、 δ は正定数であり、 T_w, T_b はそれぞれ白と黒のデイズの局所温度を表す。

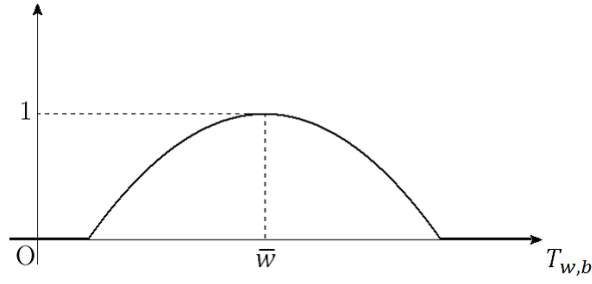


図 2.1: デイジーの成長率 $\Phi(u, v, w), \Psi(u, v, w)$.

局所温度は正の定数 q' を用いて次のように書ける.

$$T_w^4 = w^4 + q' [g(u, v) - a_w], \quad (2.5)$$

$$T_b^4 = w^4 + q' [g(u, v) - a_b]. \quad (2.6)$$

ただし, w は惑星の大域温度, $g(u, v)$ は惑星の平均光反射率 (アルベド) を表す. ここで, 式 (2.3), (2.4) より局所温度は $\bar{w} \pm \delta^{-1/2}$ の範囲内に入っている. したがって, 線形近似によって以下の式が得られる.

$$T_w = w + q [g(u, v) - a_w], \quad (2.7)$$

$$T_b = w + q [g(u, v) - a_b]. \quad (2.8)$$

ここで, $q = q' \bar{w}^3 / 4$ とする.

惑星全体の平均アルベド $g(u, v)$ は単純に,

$$\begin{aligned} g(u, v) &= a_w u + a_b v + a_g (1 - u - v) \\ &= (a_w - a_g) u + (a_b - a_g) v + a_g \end{aligned} \quad (2.9)$$

によって計算される. ここで, a_w, a_b, a_g はそれぞれ白いデイジー, 黒いデイジー, 裸地のアルベドを表し, $0 < a_b < a_g < a_w < 1$ を仮定する. この仮定から, $a_b \leq g(u, v) \leq a_w$ であることは明らかである.

最後に, デイジーワールドの大域温度 w [K] は, Stefan-Boltzmann の法則と Kirchhoff の法則より導き出される. Stefan-Boltzmann の法則より, 物体表面から単位面積, 単位時間あたりに放出される熱放射エネルギー E [W/m²] は, その物体の絶対温度の 4 乗に比例して,

$$E = \sigma w^4$$

となる. ただし, σ は Stefan-Boltzmann 定数であり,

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \quad [\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)]$$

で与えられる. また, 惑星に流入するすべてのエネルギー量は以下の式によって求まる.

$$SL[1 - g(u, v)].$$

このとき、 S は太陽フラックス、 L は太陽から届く光の強さを表すパラメータであり、それらの積 SL は惑星表面に入ってくる単位面積当たりの太陽エネルギーを表す。さらに、Kirchhoff の放射法則より、任意の物体に対して同一温度では吸収率は放射率に等しい。以上のことから、惑星の大域温度 w は、

$$\sigma w^4 = SL [1 - g(u, v)] \quad (2.10)$$

から求まる。

ここで、式 (2.7), (2.8) におけるパラメータ q について述べておく。式 (2.5), (2.6), (2.10) から以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} T_w^4 &= (1 - q\sigma/SL) w^4 + q(1 - a_w), \\ T_b^4 &= (1 - q\sigma/SL) w^4 + q(1 - a_b). \end{aligned}$$

これらの式に対して $q = 0$ とした場合、 $T_w = T_b = w$ となり、これは局所温度と大域温度の完全な熱の交換、つまり高温から低温への完全な熱の伝導を意味する。また、 $q = SL/\sigma$ と置くと、

$$\begin{aligned} T_w^4 &= \frac{SL}{\sigma}(1 - a_w), \\ T_b^4 &= \frac{SL}{\sigma}(1 - a_b), \end{aligned}$$

となり、これは局所温度における吸収と放射の平衡状態を表し、高温から低温への完全な断熱を意味している。さらに、 $q > SL/\sigma$ とした場合、これは低温から高温への温度勾配に反した熱の移動を意味するため、物理法則の観点から正しくない。以上のことから、パラメータ q は常に $q < SL/\sigma$ を仮定する。

次に方程式系 (2.1)-(2.10) に対する数値計算結果を示す。

各パラメータは、 $a_w = 0.75$, $a_g = 0.50$, $a_b = 0.25$, $q = 20$, $\delta = 0.003265$, $f = 0.3$, $\bar{w} = 295.5$, $S = 9.17 \times 10^5$ [erg cm⁻¹ s⁻¹] で与えられる。ここで与えたデイジーと裸地のアルベドの値は、実際に地球で観測されている値とは異なっていることに注意しなければ

地表面	アルベド	備考
裸地土壌	0.06~0.29	土壌が暗色、湿潤時アルベドは小、 明色、乾燥時アルベドは大。
砂漠	0.20~0.45	
アスファルト	0.12	
草地	0.16~0.26	短い草丈ほどアルベドは大。
森林（落葉樹）	0.15~0.20	
森林（針葉樹）	0.05~0.15	
積雪面	0.40~0.95	汚れや含水率が大きいときアルベドは小。
海面	0.04~0.50	曇天時アルベドは約 0.06。

表 2.1: 日射に対する地表面のアルベド [8, 47, 49].

ならない（表 2.1 を参照）．デージーワールドでは，3 種類のアルベドの高低差を際立たせるために，地球における観測データとは異なる値を考えている．また S の値は，実際の地球における太陽フラックス， $4S \approx 13.66 \times 10^5 [\text{erg cm}^{-1} \text{s}^{-1}]$ よりも高い値となっている．これは，衛星観測によって見積もられている地球の惑星アルベドが 0.30 ± 0.01 でありデージーワールドよりも低いこと（浅野 [47] を参照），そして地球での温室効果の影響を考慮しているためである．

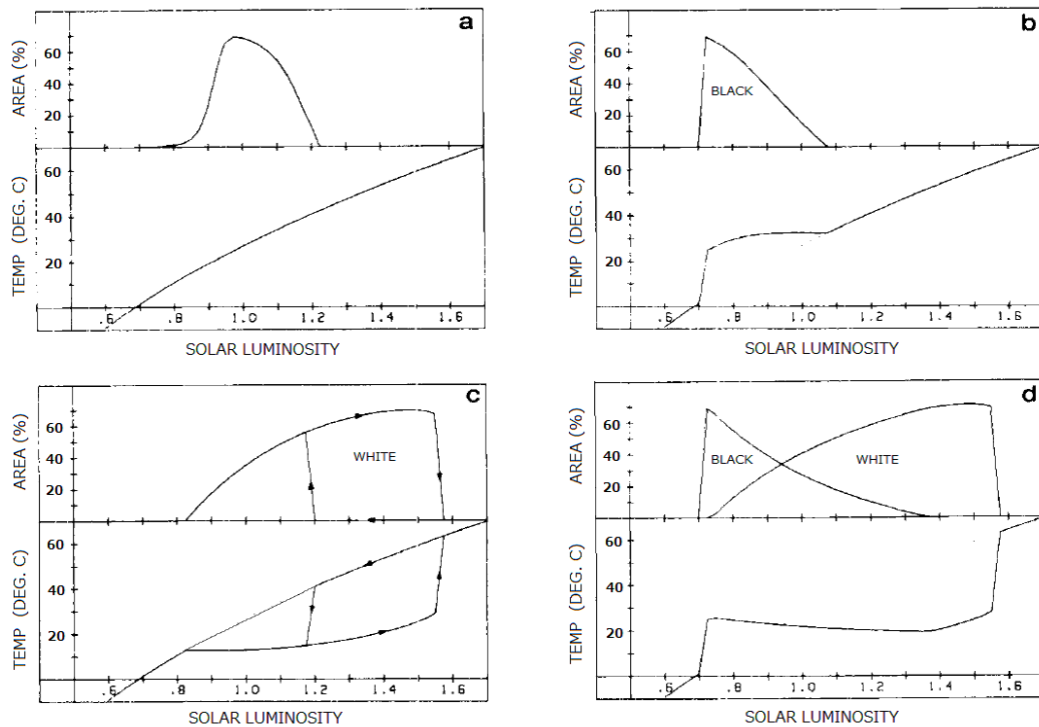


図 2.2: Watson-Lovelock モデルに対する数値計算結果 [40]．

図 2.2 は，太陽光度 L に対する惑星の大域温度とデージーの分布を表している．各グラフの縦軸上がデージーによって覆われている土地の面積比，下が大域温度を示している．横軸は太陽光度 L であり，太陽の温暖化を表現して，左から右へ現実の太陽の 50% から 150% まで推移する．

図 2.2(a) は裸地と同じアルベド (0.50) を持つデージーの反応を示している．この場合，温度 w の変化はデージーが存在しないときと等しくなり，温度の恒常性は見られない．このことからデージーの存在，または欠如が温度の違いをつくることはないと言える．また図 2.2 に示したすべての場合において，枯死率 f の影響によりデージーの被覆率は 0.7 を超えることはなく，必ず裸地が残っている．これについては，Hankin-Mitchell [14] が方程式から f を削除することでモデルを単純化し，裸地の割合を 0 へと近づけることに取り組んでいる．

図 2.2(b) は黒いデージー（アルベド 0.25）のみが育っている場合の反応を示しており，黒いデージーが存在している区間で温度の上昇が見られる．これは，黒いデージーの光を吸収する効果によるものである．

図 2.2(c) は白いデージー（アルベド 0.75）のみが育っている場合の反応を示している．

白いデイジーが存在している区間では、白の光を反射する効果により温度が低く抑えられている。また図 2.2(c) の矢印は太陽光度を増加させた場合と減少させた場合を表しており、2 つは必ずしも一致しないことを示す。これはヒステリシス（履歴効果）と呼ばれ、デイジーワールドの双安定性によって現れる。このデイジーワールドにおける双安定性については Lenton-Lovelock [21] に、ヒステリシスと温度恒常性の関係については Dyke-Harvey [12] で詳しく調べられている。

図 2.2(d) は黒と白の両方のデイジーが育っている場合の完全なモデルの振る舞いである。2 種類のデイジーの共存が見られる区間では、太陽光度が増加しているにもかかわらず温度の低下が起こっており、デイジーが存在しない場合よりも広範囲の L に対して温度の調節が行われていることが分かる。この結果は、デイジーが自らの成長に有利となるように気候を調節することが可能であることを示唆している。

2.2 平面拡散モデル

ここでは、von Bloh-Block-Schellnhuber [39] の平面拡散モデルについて述べる。これは、上記の単純な Watson-Lovelock モデルに対して、より現実的な地球システムモデルへの改良を目的に、熱の伝達や種の競争、突然変異などの要素を取り入れた 2 次元モデルである。

温度 $w(x, y, t)$ についての方程式は初歩的なエネルギー平衡方程式 (McGuffie-Henderson-Sellers [26] を参照) によって次のように記述される。

$$C \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w(x, y, t) + [1 - a(x, y, t)] SL - \sigma w^4(x, y, t). \quad (2.11)$$

ここで、 D は熱拡散係数、 C は熱容量、 $a(x, y, t)$ はアルベドの時空間分布を表す。その他のパラメータについては、特に言及しない限り Watson-Lovelock モデルと同じものとする。また、植生の成長に最適な日射として、

$$S' = S \frac{1 - a_g}{\sigma w^4}$$

を考える。アルベド $a(x, y, t)$ の時空間分布は無数の種からなる植生の分布パターンを反映しており、植生のダイナミクスがアルベドのダイナミクスへと完全に書き換えられたものとなっている。アルベドのダイナミクスについてはセルオートマトン法を用いて以下のようなルールで書き表される。

2 次元格子点 (x_i, y_j) に対して、 $x_i = i\Delta x$, $y_j = j\Delta y$ とし、各時間ステップは $t_n = n\Delta t$ とする。時刻 t_n における各セル (x_i, y_j) での植物の生育を $c_{i,j}^n$, アルベドを $A_{i,j}^n$ で表す。

[1] $c_{i,j}^n = 1$, すなわちセルが植物によって覆われている場合。

$$c_{i,j}^{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{確率 } 1 - f, \\ 0, & \text{確率 } f, \end{cases} \quad A_{i,j}^{n+1} = \begin{cases} A_{i,j}^n, & c_{i,j}^{n+1} = 1, \\ a_g, & c_{i,j}^{n+1} = 0. \end{cases}$$

[2] $c_{i,j}^n = 0$, すなわちセルが植物によって覆われていない場合.

(x_i, y_j) に隣接するセル $(x_{\text{next}}, y_{\text{next}})$ をランダムに選び, 以下のように $c_{i,j}^{n+1}, A_{i,j}^{n+1}$ を決める.

(a) $c_{\text{next}}^n = 0$ の場合.

$$c_{i,j}^{n+1} = 0, \quad A_{i,j}^{n+1} = a_g.$$

(b) $c_{\text{next}}^n = 1$ の場合.

$$c_{i,j}^{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{確率 } \beta, \\ 0, & \text{確率 } 1 - \beta, \end{cases} \quad A_{i,j}^{n+1} = \begin{cases} F(A_{\text{next}}^n), & c_{i,j}^{n+1} = 1, \\ a_g, & c_{i,j}^{n+1} = 0. \end{cases}$$

ここで, f, β はそれぞれ時刻 t_n での植物の枯死率と成長率を表す. 成長率 β としては, 以下の2つの選択肢が与えられている.

(A) 植生に覆われる前のセルでの温度に依存する場合, すなわち,

$$\beta = \beta(w(x_i, y_j, t_n)).$$

(B) 隣接するセルでの温度に依存する場合, すなわち,

$$\beta = \beta(w(x_{\text{next}}, y_{\text{next}}, t_n)).$$

また, 関数 F は生物学的に起こりうる様々な効果を組み込むために自由に決めることができる. 例えば [39] では, 植生の突然変異を考慮して,

$$F(A_{i,j}^n) = A_{i,j}^n + r, \quad r \in [-\hat{r}, \hat{r}],$$

としている. ここで r は乱数分布であり, $\hat{r} > 0$ は突然変異率を表す.

以下に平面拡散モデルの数値計算結果を示す.

セルオートマトンは周期境界条件を与えられ, 有限2次元格子 (200×200) 上で実行される. 各パラメータは, $a_g = 0.50$, $f = 0.02$, $\sigma = 5.6696 \times 10^{-8}$, $C = 2500$, $D = 500$, $\Delta x = \Delta y = 1$, $\Delta t = 1$ とし, 成長率は選択肢 (B) の場合を考える.

図 2.3 は, $S' = 1$ とした場合の温度とアルベドの分布を示している.

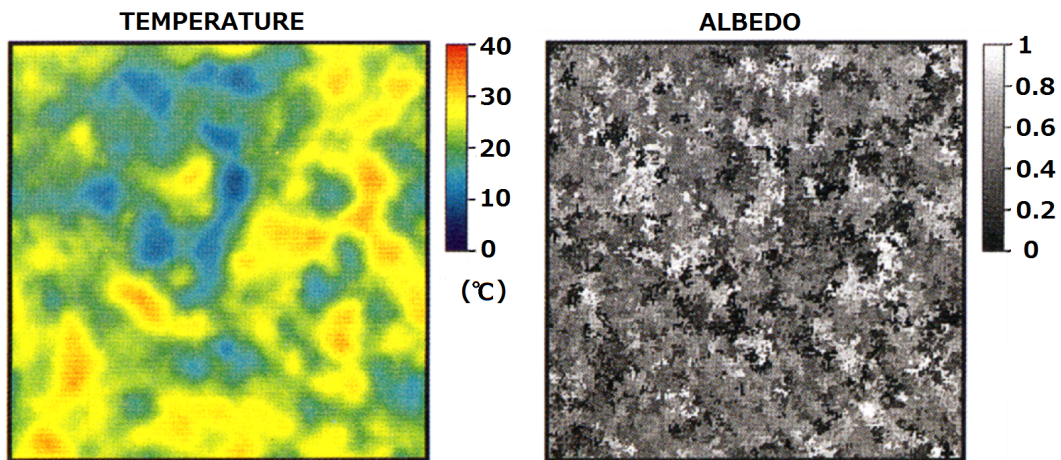


図 2.3: 平面拡散モデルに対する数値計算結果 [39].

図 2.4 は、 S' に対する大域平均温度 W の変化を示している。破線曲線は植生が全く無い場合の惑星の温度である。図 2.4 の (a) は突然変異率 $r = 0$, (b) は突然変異率 $r = 0.01$ とした場合の大域平均温度である。突然変異の無い (a) の場合よりも緩やかな突然変異を与えた (b) の場合の方が恒常性の効果が拡大していることが分かる。

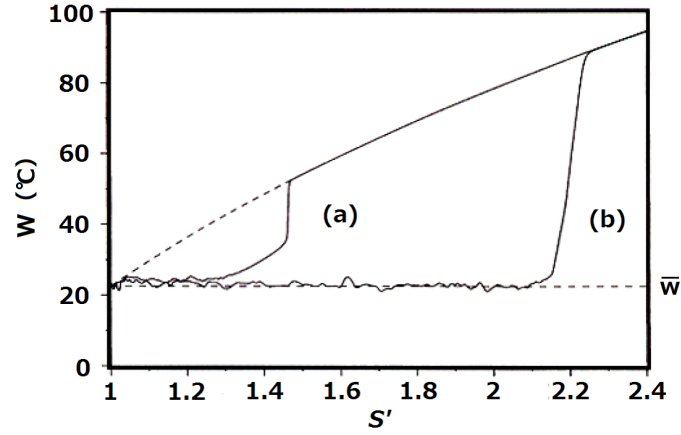


図 2.4: S' に対する大域平均温度 W の変化 [39].

この平面拡散モデルは様々な拡張研究がなされている（例えば、[1, 38, 41, 44] を参照）。von Bloh-Block-Parade-Schellnhuber [38] はデージーワールドに草食動物の存在を加えている。また、Wood-Ackland-Lenton [44] はデージーの成長に対する最適温度とアルベドに突然変異を組み込んだセルオートマトンモデルを考えている。

さらに 2 次元デージーワールドモデルのパターン形成については、Ackland-Clark-Lenton [2], Ackland-Wood [3], Punithan-Mckay [28, 29] で調べられている。[2, 3] では、上記の平面拡散モデルに曲率を加えた 2 次元モデルを考えており、特に [2] は温度の方程式を次のように書き換えている。

$$C \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w(x, y, t) + [1 - a(x, y, t)] S(y) - \sigma w^4(x, y, t).$$

ここで、太陽からの入射エネルギーは緯度 y に依存して、

$$S(y) = S_0 \frac{y_{\max} - |y_{\max}/2 - y|}{\int (y_{\max} - |y_{\max}/2 - y|) dy}$$

によって決まる。ただし、 S_0 は正規化された平均入射エネルギーであり、緯度は $0 \leq y \leq y_{\max}$ の範囲を考える。

このモデルに対する数値計算結果を図 2.5 に示す。

各パラメータは $a_g = 0.50$, $f = 0.02$, $r = 0.01$, $\sigma = 5.6696 \times 10^{-8}$, $C = 2500$, $D = 500$ としている。

図 2.5 の上はアルベドの分布を示し、下は温度分布を示している。図 2.5(a, b) は $S_0 = 1.7$ とした場合で、平均温度は植物の成長に適した温度の周辺に保たれている。図 2.5(e, f) は $S_0 = 1.8$ の場合で、極付近を残して砂漠を形成している。図 2.5(c, d) は S_0 を (a, b) と (e, f) の中間にとった場合で、円形の砂漠を形成している。

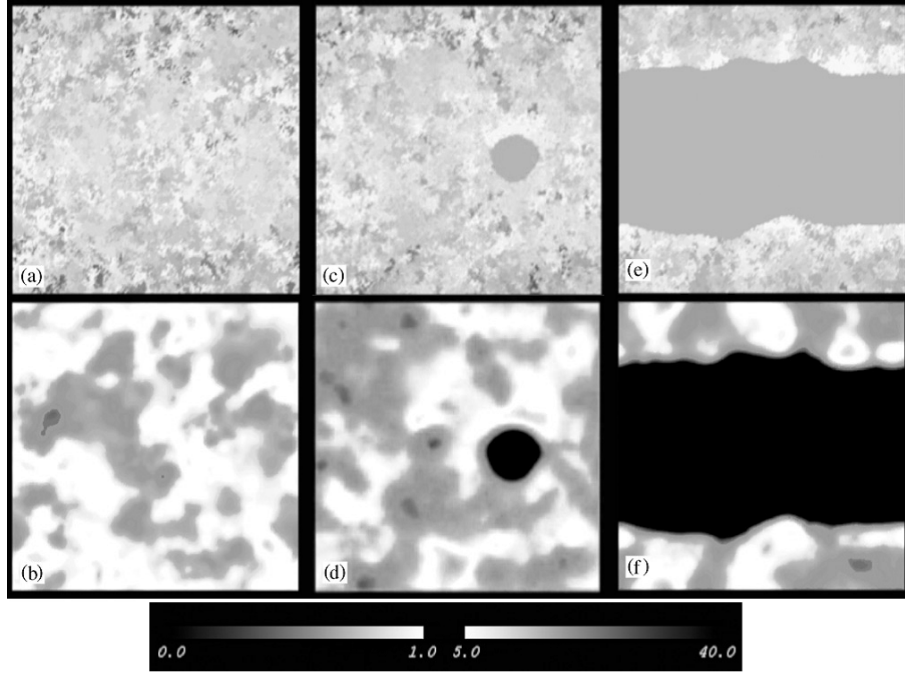


図 2.5: 曲率を加えた 2 次元 CA モデルの数値計算結果 [2].

2.3 円周拡散モデル

Adams-Carr [4], Adams-Carr-Lenton-White [5] は, Watson-Lovelock モデルに対して熱拡散と太陽入射エネルギーの分布に球面の特性を加えた 1 次元偏微分方程式モデルを導入した. このモデルは, デイジーワールドの最も重要な温度調節の効果を保った状態で, デイジーのストライプパターンが現れるという結果をもたらした.

[4, 5] では簡単のために, 惑星は太陽軌道面に垂直な軸上を回転すると仮定し, 北半球と南半球の違いはないものと考えている. したがって, 太陽からの放射の分布は軸に対して平行に届き, 緯度 θ の関数

$$R(\theta) = R_0 \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (2.12)$$

によって与えられる. ここで, $R_0 = 4 \cdot 917L/\pi$ であり, L は Watson-Lovelock モデルでの太陽光度に等しい. (2.12) は赤道上 ($\theta = 0$) で最大値をとり, 極 ($\theta = -\pi/2, \pi/2$) で最小値をとるような関数となっている. 惑星上での熱の伝達は拡散係数 D を用いて,

$$D\Delta w = \frac{D}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\cos \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \quad (2.13)$$

と表される. これは緯度方向の傾度を考慮した熱の伝達で, ここでの Δ は円周上のラプラシアンを表している.

以上のことから, 大域温度 $w(\theta, t)$ は,

$$\frac{\partial w(\theta, t)}{\partial t} = \frac{D}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\cos \theta \frac{\partial w(\theta, t)}{\partial \theta} \right] + [1 - g(u, v)] R(\theta) - \sigma w^4(\theta, t)$$

によって求まる．デイジーの被覆率 $u(\theta, t), v(\theta, t)$ については，Watson-Lovelock モデルと同様にして求められる．したがって，方程式系は，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [(1 - u - v)\Phi(u, v, w) - f]u, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = [(1 - u - v)\Psi(u, v, w) - f]v, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D\Delta w + [1 - g(u, v)]R(\theta) - \sigma w^4, \quad (2.16)$$

となる．ここで， $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ であり， u, v, w は境界上で Neumann 境界条件を満たす．以下に方程式系 (2.14)-(2.16) に対する数値計算結果を示す．

各パラメータは， $a_w = 0.75$, $a_g = 0.50$, $a_b = 0.25$, $q = 20$, $\delta = 0.003265$, $f = 0.3$ で与えられる．

図 2.6 は方程式系 (2.14)-(2.16) に対して，太陽光度 L が増加したときの惑星全体温度の変化を Watson-Lovelock モデルと比較している．ここで，惑星全体の温度 T_g は全地表面での加重平均を用いて以下のように計算される．

$$T_g = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w(\theta_i) \left| \sin \left(-\frac{\pi}{n} + \frac{i\pi}{n} \right) - \sin \left(-\frac{\pi}{n} + \frac{(i-1)\pi}{n} \right) \right|,$$

ただし， $\theta_i = -\pi/2 + (i-1/2)\pi/n$, ($i = 1, 2, \dots, n$) とし， n は空間の格子点数である．

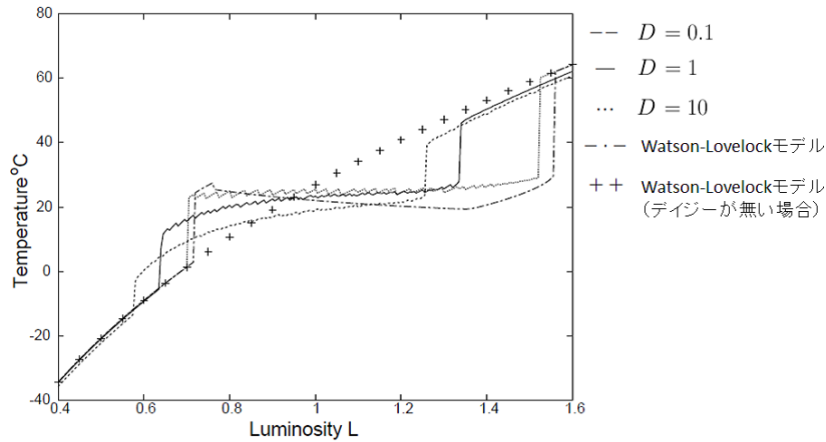


図 2.6: 異なる熱拡散係数 D に対する惑星全体の温度 T_g [5]. $\Delta L = 0.005$.

図 2.6 から分かるように，方程式系 (2.14)-(2.16) に対するすべての D に対して温度調節が見られる．特に拡散係数が大きい $D = 10$ の場合，温度は地表面上ですぐに一様となるため，Watson-Lovelock モデルに近い結果が得られる．拡散係数を小さくとると，2つのモデルの違いが明確に現われる． $D = 1, 0.1$ のとき，地表面の温度勾配が大きくなるため，デイジーによる温度の調節区間は Watson-Lovelock モデルの場合よりも低い L で始まり，低い L で終わる．つまり，赤道付近を例にとると，この地域では Watson-Lovelock モデルよりも低い太陽光度でデイジーが生育可能な温度になるため調節が早く始まり，低い太陽光度でデイジーが生育できない温度になるため調節が早く終わる．さらに，デイ

ジーの生育可能領域は常に制限されるため，温度調節能力が弱まってしまう．これらのことは図 2.8 から分かる．

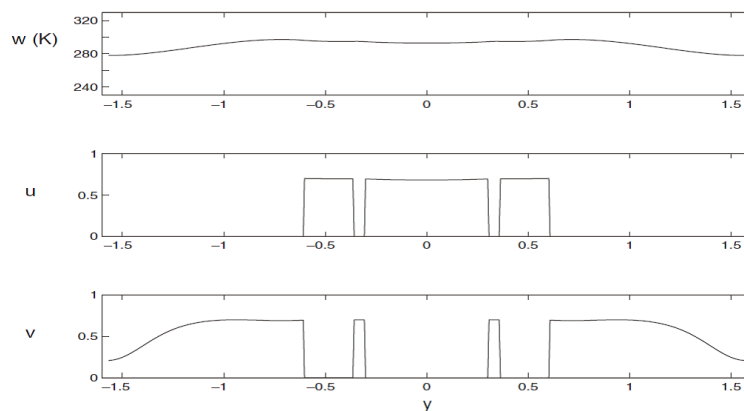


図 2.7: 方程式系 (2.14)-(2.16) に対する数値計算結果 [4]. $R_0 = 825.2$, $D = 1.0$.

また，図 2.7 は方程式系 (2.14)-(2.16) に対する数値計算結果を示しており，縦軸は上から，温度，白いデイズ，黒いデイズ，横軸は緯度を表す．これから分かるように，2 種類のデイズが同じ領域上で共存することのない，棲み分けが現れる．

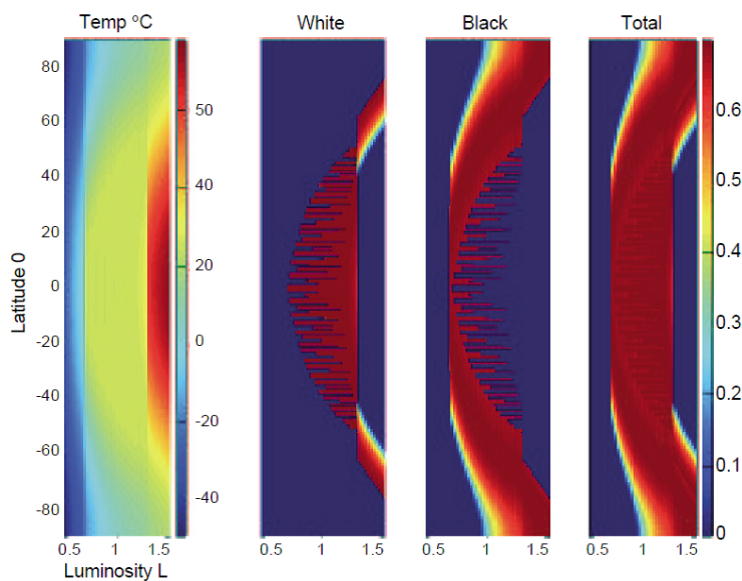


図 2.8: 太陽光度 L に対する温度，デイズの分布変化 [5]. $D = 1.0$.

図 2.8 は $D = 1.0$ での太陽光度 L に対するパターンの変化を表し，左から順に温度，白いデイズ，黒いデイズ，2 種類のデイズの合計を示している．これを見ると太陽光度が低いとき，黒いデイズが赤道付近に現れている．この黒いデイズの光を吸収する性質が隣接する領域を暖め，より多くの黒いデイズが生育可能となる．このとき， $D = 1.0$ では極付近まで熱が拡がらないためデイズは育っていない．太陽光度が上昇すると，黒いデイズは極に向かって移動し，赤道付近は白いデイズが優位に育っている．

さらに太陽光度が上昇すると、デイジーは極付近でしか育つことができず、急激な温暖化が起こる。また、デイジーの分布を見ると、ほとんどの場合でデイジーの個体群が約 0.7 もしくは 0 に近い値をとっており、2 種類は領域を分けて縞状のパターンを形成している。このモデルでは、Watson-Lovelock モデルにおいて共存が現れると予想される温度の区間で、一方の種が他の種を排除することによる黒と白の縞状の棲み分けパターンが現れる。

2.4 恒常性自己調節モデル（球面拡散モデル）

本稿では、球面における温度とデイジーの拡散を考慮した反応・拡散モデルを扱う。

2.4.1 モデル方程式の導入

原点を中心とし半径 ℓ の球面 $S \subset \mathbb{R}^3$ 上で次のような初期値・境界値問題を考える。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + [(1 - u - v)\Phi(u, v, w) - f]u, & (\omega, t) \in S \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v + [(1 - u - v)\Psi(u, v, w) - f]v, & (\omega, t) \in S \times (0, \infty), \\ \frac{\partial w}{\partial t} = D\Delta w + [1 - g(u, v)]R(\omega) - \sigma w^4, & (\omega, t) \in S \times (0, \infty), \\ u(\omega, 0) = u_0(\omega), v(\omega, 0) = v_0(\omega), w(\omega, 0) = w_0(\omega), & \omega \in S. \end{cases} \quad (2.17)$$

未知関数 $u(\omega, t), v(\omega, t)$ は、それぞれ各点 $\omega \in S$ 、各時刻 t での白いデイジーと黒いデイジーの被覆率を表し、 $w(\omega, t)$ は温度を表す。各パラメータについては Watson-Lovelock モデルに等しい。 d はデイジーの拡散率、 D は温度の拡散率を表し、 $0 < d < D$ とする。また、太陽から惑星に流入するエネルギー $R(\omega)$ は、

$$R(\omega) = R_0 \sqrt{1 - (z/\ell)^2}, \quad \omega = (x, y, z) \in S, \quad (2.18)$$

によって与えられる。

惑星を球体として考える場合の地表へ伝わる熱流量について述べておく。マントルから地表面に届く熱エネルギーは、太陽から地表面に届くそれよりもかなり少ないため、地球表面の温度や気候の変化に対して影響を与えていないと考えられる（例えば、[33, 50] を参照）。さらに、太陽から放射される熱エネルギーは地中へと伝わるが、地中の熱伝導率はそれほど高くないため、地中深くまで熱が伝わることはない（例えば、[48, 49] を参照）。これらのことから、惑星表面の温度を考える場合、惑星内部からの影響は無視することができる。したがって、問題 (2.17) は球表面 S 上で考え、微分演算子 Δ としては球面上のラプラシアン（Laplace-Beltrami 作用素）を用いることにする。球面上のラプラシアンは、

$$\Delta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.19)$$

によって与えられる（詳細は 3.1 節を参照）。また、Adams-Carr による円周拡散モデルでの微分演算子 (2.13) は、(2.19) を経度方向 ϕ について一定とすることで得られる。

第3章

恒常性自己調節モデルに対する力学系 (球面領域)

本章では、球面 S 上での連立偏微分方程式 (2.17) の力学系について述べる．先ず、 S 上でラプラシアンを定義する．さらに、(2.17) に対して局所解、大域解、力学系の構成を行い、指数アトラクタの存在を示す．

3.1 S 上の拡散方程式

リーマン多様体上の拡散方程式の理論については既によく知られている（例えば、Calin-Chang [7] を参照）．一般の場合としてはリーマン計量を用いた方法が構築されているが、(2.17) のような非線形拡散方程式の場合、関数解析の手法が大きな利点を持っている．ここでは、 S が $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた特別なリーマン多様体であることを用いて、 S 上での拡散方程式の理論を述べる．

3.1.1 S の局所座標

$\mathbb{R}^3$ で2つの極座標を用いる．ひとつは一般的なもので、 $H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0, x \geq 0\}$ とすると、 $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - H_1$ に対して、

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi, \\ y = r \sin \theta \sin \phi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad (3.1)$$

としたものを考える．ここで、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であり、 θ は OP と z 軸が成す天頂角、 ϕ は OQ と x 軸が成す方位角、 $Q = (x, y, 0)$ は xz 平面上での P の投影点である（図 3.1(a) を参照）．したがって、 (r, θ, ϕ) は $0 < r < \infty$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$ の範囲内を動く．もうひとつは、 $H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0, x \leq 0\}$, $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - H_2$ に対して、

$$\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z = r \cos \vartheta, \end{cases} \quad (3.2)$$

と置く．ここで， $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であり， ϑ は OP と y 軸が成す天頂角， φ は OQ と x 軸が成す方位角， $Q = (x, 0, z)$ は xz 平面上での P の投影点とする（図 3.1(b) を参照）．したがって， (r, ϑ, φ) は $0 < r < \infty$, $0 < \vartheta < \pi$, $-\pi < \varphi < \pi$ の範囲内を動く．

これらの極座標によって， S に対する局所座標系を与えることができる． $\Gamma_1 = S \cap H_1$, $S_1 = S - \Gamma_1$ とする．このとき， $r = \ell$ と固定すると，(3.1) から同相写像 $\Theta_1: S_1 \rightarrow D_1$ が得られる．ただし， $D_1 = \{(\theta, \phi); 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ とする．同様に， $\Gamma_2 = S \cap H_2$, $S_2 = S - \Gamma_2$ とすると，(3.2) から同相写像 $\Theta_2: S_2 \rightarrow D_2$ が得られる．ただし， $D_2 = \{(\vartheta, \varphi); 0 < \vartheta < \pi, -\pi < \varphi < \pi\}$ である． $\{(S_i, \Theta_i)\}_{i=1,2}$ により， S は可微分多様体となる．

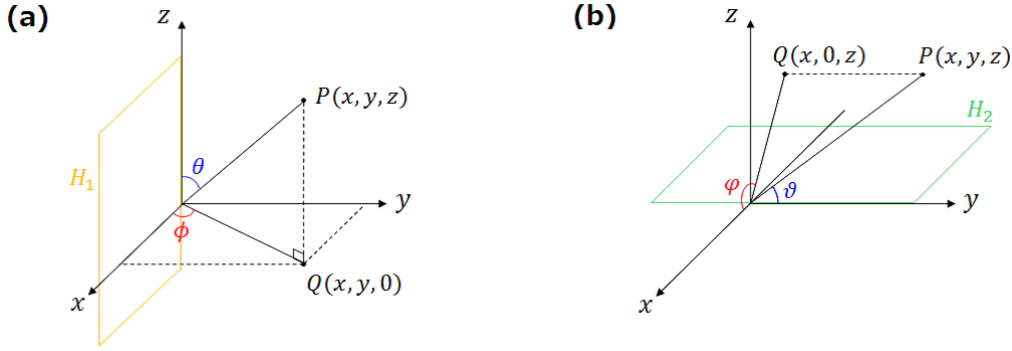


図 3.1: $\mathbb{R}^3$ 内の 2 つの極座標系．

$\{\psi_i(\omega)\}_{i=1,2}$ を $\{S_i, \Theta_i\}$ に対する 1 の分割のパーティションとする．すなわち， $\psi_i(\omega)$ は S 上で $0 \leq \psi_i(\omega) \leq 1$, $\psi_1(\omega) + \psi_2(\omega) \equiv 1$ であり， $\text{supp } \psi_i \subset S_i$ であるような S 上の滑らかな関数である．さらに，適当な長方形領域 $G_i \subset D_i$ を与える． $i = 1, 2$ に対して， G_i は

$$\Theta_i(\text{supp } \psi_i) \subset G_i \subset \overline{G_i} \subset D_i$$

とする．

表面測度 $d\omega$ を持つような S を考える． $1 \leq p \leq \infty$ に対して， $L_p(S)$ は S 上で $|f(\omega)|^p$ が可積分であるようなすべての可測関数の空間である．このとき， $L_p(S)$ は Banach 空間であり， $p = 2$ のとき $L_2(S)$ は通常の内積を有する Hilbert 空間である．当然， $f \in L_p(S)$ は $\psi_i f \in L_p(S_i)$, $i = 1, 2$ の必要十分条件である．さらに， $\psi_i f \in L_p(S_i)$ は $(\psi_i f) \circ \Theta_i^{-1} \in L_p(G_i)$ と同値であり， $\|\psi_i f\|_{L_p(S_i)}$ と $\|(\psi_i f) \circ \Theta_i^{-1}\|_{L_p(G_i)}$ とでノルム同値となる．

3.1.2 S 上のラプラス作用素

$\tilde{u}(x, y, z) = u\left(\frac{\ell_x}{r}, \frac{\ell_y}{r}, \frac{\ell_z}{r}\right)$ によって $u(\omega)$ を $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ の関数へと拡張することによって， S 上でのナブラ演算子 ∇_S を

$$\nabla_S u(\omega) = [\nabla_{\mathbb{R}^3} \tilde{u}(x, y, z)]|_S, \quad \omega \in S, \quad (3.3)$$

と定義する．

S_1 上の極座標 (3.1) を用いると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial r} &= \sin \theta \cos \phi, & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \phi, & \frac{\partial x}{\partial \phi} &= -r \sin \theta \sin \phi, \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta \sin \phi, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta \sin \phi, & \frac{\partial y}{\partial \phi} &= r \sin \theta \cos \phi, \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= \cos \theta, & \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -r \sin \theta, & \frac{\partial z}{\partial \phi} &= 0,\end{aligned}$$

が得られる。また,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x},$$

であることから,

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \sin \theta \cos \phi, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin \theta \sin \phi, & \frac{\partial r}{\partial z} &= \cos \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi, & \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{1}{r} \sin \theta, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta}, & \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\cos \phi}{r \sin \theta}, & \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0,\end{aligned}$$

となる。このことから $\mathbb{R}^3 - H_1$ でのヤコビ行列は,

$$\begin{aligned}\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \phi)} &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{D(r, \theta, \phi)}{D(x, y, z)} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \phi & r^2 \sin^2 \theta \sin \phi & r^2 \cos \theta \sin \theta \\ r \cos \theta \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \theta \sin \phi & -r \sin^2 \theta \\ -r \sin \phi & r \cos \phi & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

と計算され,

$$\begin{aligned}\nabla_S = & \left(\sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \right. \\ & \left. \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (3.4)\end{aligned}$$

が得られる。 $\partial \tilde{u} / \partial r = 0$ であることから, S_1 上で,

$$\nabla_S u = \frac{1}{\ell} \left(\cos \theta \cos \phi \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi}, \cos \theta \sin \phi \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi}, -\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (3.5)$$

となることは明らか。ここで $\omega \in S_1$ ならば, 各 ω での法線ベクトルは $n_\omega = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ となる。したがって, $\nabla_S u(\omega) \cdot n_\omega = 0$ となり, S 上の関数 $u(\omega)$ に対して $\nabla_S u(\omega)$ は S の接線ベクトルとなっていることが確認できる。

$\omega \in S_2$ に対する $\nabla_S u(\omega)$ についても同様のことを示すことができ、 ∇_S の定義 (3.3) が正しいと言える。

今、 ∇_S を用いて、 S 上に Sobolev 空間 $H^1(S)$ を定義することができる。実際に、 $H^1(S)$ は $|\nabla_S u| \in L_2(S)$ であるようなすべての関数 $u \in L_2(S)$ の空間となっている。また、 $u \in H^1(S)$ が $\psi_i u \in H^1(S), i = 1, 2$ の必要十分条件であることは容易に確かめられる。さらに、(3.5) から、

$$|\nabla_S u|^2 = \frac{1}{\ell^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right)^2 \right]$$

が導かれることから、 $\psi_1 u \in H^1(S)$ は $(\psi_1 u) \circ \Theta_1^{-1} \in H^1(G_1)$ の必要十分条件である。同様のことが $\psi_2 u \in H^1(S)$ に対しても言える。ここで内積

$$(u, v)_{H^1} = \int_S (\nabla_S u \cdot \nabla_S \bar{v} + u \bar{v}) d\omega, \quad u, v \in H^1(S),$$

を有するような $H^1(S)$ を考える。このとき $H^1(S)$ は Hilbert 空間となる。そのノルム $\|\psi_i u\|_{H^1}$ は $\|(\psi_1 u) \circ \Theta_i^{-1}\|_{H^1(G_i)}, i = 1, 2$ とノルム同値である。

最後に、ラプラス作用素 Δ_S を以下のように定義する。

$$\Delta_S u(\omega) = [\nabla_{\mathbb{R}^3} \cdot \nabla_{\mathbb{R}^3} \tilde{u}(x, y, z)]|_S, \quad \omega \in S. \quad (3.6)$$

(3.4) より、 $\mathbb{R}^3 - H_1$ 内で、

$$\Delta_S = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

を得る。 $\partial \tilde{u} / \partial r = 0$ であることから、 S_1 上で、

$$\Delta_S u = \frac{1}{\ell^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right] \quad (3.7)$$

となる。また、(3.5), (3.7) より、 S_1 上で

$$\Delta_S = \nabla_S \cdot \nabla_S \quad (3.8)$$

であることが分かる。(3.2) を用いると同様のことが、 S_2 上の Δ_S に対して確かめられる。

3.1.3 $L_2(S)$ での Δ_S の実現

空間 $L_2(S)$ で作用するような線形作用素として Δ_S を定義するために、 $u, v \in H^1(S)$ に対して半双線形形式 $a(u, v) = (u, v)_{H^1}$ を考える。明らかに $a(u, v)$ は $H^1(S)$ で連続かつ強圧的である。各 $u \in H^1(S)$ に対して、写像 $u \mapsto a(u, v)$ は反線形連続汎関数である。このとき、その写像が $L_2(S)$ の位相で連続であるような要素 $u \in H^1(S)$ を取ってくる。Riesz の定理により、そのような u に対して、すべての $v \in H^1(S)$ について $a(u, v) = (f, v)_{L_2}$ であるような唯一つの要素 $f \in L_2(S)$ が存在する。そのとき $\Lambda u = f$ と定める、すなわち、

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\Lambda) = \{u \in H^1(S); \text{すべての } v \in H^1(S) \text{ に対して } (u, v)_{H^1} = (f, v)_{L_2}\}, \\ \Lambda u = f, \end{cases}$$

とする．直ちに分かるように, $u \mapsto f = Au$ は $\mathcal{D}(A)$ から $L_2(S)$ への線形作用素である．さらに変分法の理論 (Dautray-Lions [10] を参照せよ) により, $\mathcal{D}(A)$ は $L_2(S)$ で稠密であり, A は $L_2(S)$ の正定値自己共役作用素であることが分かる．また $\mathcal{D}(A)$ は, $i = 1, 2$ に対して $(\psi_i u) \circ \Theta_i^{-1} \in H^2(G_i)$ であるような関数 $u \in L_2(S)$ から成る Sobolev 空間 $H^2(S)$ と一致することが示されている．

ここで, $A = A - 1$ とする．ただし, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A) = H^2(S)$ である．定義により, $u \in \mathcal{D}(A)$ ならばすべての $v \in H^1(S)$ に対して,

$$(Au, v)_{L_2} = \int_S \nabla_S u \cdot \nabla_S \bar{v} d\omega$$

である．したがって, A は $L_2(S)$ の非負自己共役作用素である．また, $Au = 0$ は $|\nabla_S u|^2 \equiv 0$ を意味するため, u は定数関数となる．部分積分によって $u \in \mathcal{D}(A)$ に対して $Au = -\Delta_S u$ であることが確認でき, そのため A は $L_2(S)$ における $-\Delta_S$ の実現である． $\mathcal{D}(A)$ が $L_2(S)$ のコンパクトな埋め込みであることから, A は次のような形で分解される．

$$Au = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (u, e_k)_{L_2} e_k. \quad (3.9)$$

ここで λ_k と $e_k(\omega)$ はそれぞれ λ_k に対応する A の固有値と固有関数である．ここで明らかに,

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots \rightarrow \infty$$

である．また, $e_k(\omega)$ は $L_2(S)$ の正規直交基底を構成する．上記のように, $e_0(\omega)$ は S 上の定数関数でなければならないので, $e_0(\omega) \equiv \frac{1}{2\sqrt{\pi\ell}}$ となる．

3.1.4 $-A$ によって生成される半群

A が非負自己共役作用素であることから, $-A$ は $L_2(S)$ 上で解析的かつ縮小半群 e^{-tA} , $0 \leq t < \infty$ を生成する, つまり $\|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(L_2(S))} \leq 1$ である．最小の固有値 λ_0 が 0 ならば, 任意の $0 \leq t < \infty$ に対して,

$$\|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(L_2(S))} = 1 \quad (3.10)$$

でなければならない．任意の初期関数 $u_0 \in L_2(S)$ に対して, e^{-tA} は S 上の Cauchy 問題

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_S u, & S \times (0, \infty), \\ u(\omega, 0) = u_0(\omega), & S, \end{cases} \quad (3.11)$$

に唯一つの解を与える．実際に, $u(t) = e^{-tA}u_0$ は関数空間

$$u \in \mathcal{C}((0, \infty); H^2(S)) \cap \mathcal{C}([0, \infty); L_2(S)) \cap \mathcal{C}^1((0, \infty); L_2(S))$$

での (3.11) に対する唯一つの解である．(3.9) から, $e^{-tA}u_0$ は,

$$e^{-tA}u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_k t} (u_0, e_k)_{L_2} e_k, \quad u_0 \in L_2(S), \quad (3.12)$$

と表すことができる.

式 (3.12) は, 直ちに以下のような (3.11) に対する解 $u(t)$ の性質をもたらす.

定理 3.1.1. 任意の $0 < t < \infty$ に対して, $u_0 \geq 0$ ならば, $e^{-tA}u_0 \geq 0$ である.

証明. $0 \leq u_0 \in L_2(S)$ とする. $u(\omega, t)$ が (3.11) に対する解ならば, その複素共役 $\overline{u(\omega, t)}$ も同じ Cauchy 問題の解である. したがって, 解の一意性から $u(\omega, t)$ と $\overline{u(\omega, t)}$ は一致する. すなわち, $u(\omega, t)$ は実数値である.

次に $\mathbb{R}$ 上で以下の $\mathcal{C}^2$ 級カットオフ関数を導入する.

$$H(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}, & -\infty < u \leq -1, \\ -\frac{1}{6}u^3, & -1 \leq u < 0, \\ 0, & 0 \leq u < \infty. \end{cases} \quad (3.13)$$

また, 関数

$$h(t) = \int_S H(u(\omega, t)) d\omega, \quad 0 < t < \infty,$$

を考える. このとき, $0 < t < \infty$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt}(t) &= \int_S H'(u) \frac{\partial u}{\partial t} d\omega = \int_S H'(u) \Delta u d\omega \\ &= - \int_S \nabla H'(u) \cdot \nabla u d\omega = - \int_S H''(u) |\nabla u|^2 d\omega \end{aligned}$$

となる. $0 \leq H''(u) \leq 1$ より, $\frac{dh}{dt}(t) \leq 0$ であることが分かる. すなわち, 任意の $0 < t < \infty$ に対して $h(t) \leq h(0) = 0$ となる. これは, 任意の $(\omega, t) \in S \times (0, \infty)$ に対して $u(\omega, t) \geq 0$ であることを意味する. $\square$

定理 3.1.2. 任意の $0 < t < \infty$ に対して, $\int_S e^{-tA}u_0 d\omega = \int_S u_0 d\omega$ である.

証明. S で (3.12) を積分する. そのときすべての $k \geq 1$ に対して $\int_S e_k(\omega) d\omega = 0$ であることから上の結果が得られる. $\square$

定理 3.1.3. $P_0 u_0 = (u_0, e_0)_{L_2} e_0$ を $L_2(S)$ から $\lambda_0 = 0$ に対する固有値への射影とする. そのとき任意の $0 < t < \infty$ に対して,

$$\|e^{-tA} - P_0\|_{\mathcal{L}(L_2(S))} \leq e^{-\lambda_1 t} \quad (3.14)$$

である.

証明. $u_0 \in L_2(S)$ に対して, (3.12) を考慮すると,

$$\|e^{-tA}u_0 - P_0 u_0\|_{L_2} = e^{-\lambda_1 t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2(\lambda_k - \lambda_1)t} |(u_0, e_k)_{L_2}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq e^{-\lambda_1 t} \|u_0\|_{L_2}$$

により評価式 (3.14) が導かれる. $\square$

定理 3.1.4. $L_2(S)$ から $H^1(S)$ への作用素であることから, e^{-tA} は任意の $0 < t < \infty$ に対して,

$$\|\nabla_S e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(L_2(S))} \leq \left(\lambda_1 + \frac{1}{et}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda_1 t} \quad (3.15)$$

を満たす.

証明. 定理 3.1.3 の証明と同様に,

$$\begin{aligned} \|\nabla_S e^{-tA} u_0\|_{L_2}^2 &= (Ae^{-tA} u_0, [e^{-tA} - P_0] u_0)_{L_2} \leq \|Ae^{-tA} u_0\|_{L_2} \|[e^{-tA} - P_0] u_0\|_{L_2} \\ &\leq \|Ae^{-tA}\|_{\mathcal{L}(L_2(S))} \|e^{-tA} - P_0\|_{\mathcal{L}(L_2(S))} \|u_0\|_{L_2}^2 \end{aligned}$$

により評価式 (3.15) が導かれる. □

定理 3.1.5. $L_2(S)$ から $H^2(S)$ への作用素であることから, e^{-tA} は任意の $0 < t < \infty$ に対して,

$$\|\Delta_S e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(L_2(S))} \leq \left(\lambda_1 + \frac{1}{et}\right) e^{-\lambda_1 t} \quad (3.16)$$

を満たす.

証明. 定理 3.1.3 の証明と同様に,

$$\begin{aligned} \|\Delta_S e^{-tA} u_0\|_{L_2} &= \|Ae^{-tA} u_0\|_{L_2} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{-\lambda_k t} (u_0, e_k)_{L_2} e_k \right\|_{L_2} \\ &= e^{-\lambda_1 t} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} [t^{-1}(\lambda_k - \lambda_1)t + \lambda_1] e^{-(\lambda_k - \lambda_1)t} (u_0, e_k)_{L_2} e_k \right\|_{L_2} \\ &\leq e^{-\lambda_1 t} [t^{-1}e^{-1} + \lambda_1] \|u_0\|_{L_2} \end{aligned}$$

により評価式 (3.16) が導かれる. □

3.2 解の構成

この節では, Cauchy 問題 (2.17) に対する大域解と, それによって定められる力学系を構成する. 先ずは抽象的な形で (2.17) を定式化する ([18, 35, 45] を参照せよ).

3.2.1 抽象的定式化

(2.17) を L_2 の直積空間

$$X = \left\{ U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}; u \in L_2(S), v \in L_2(S), w \in L_2(S) \right\}$$

で考えたい． X は通常の内積による複素 Hilbert 空間である． $\mathcal{A}$ は X の線形作用素とし，

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} dA & 0 & 0 \\ 0 & dA & 0 \\ 0 & 0 & DA \end{pmatrix}$$

によって与えられる．ここで， A は 3.1 節で導入された $L_2(S)$ での $-\Delta_S$ の実現である．このとき， $\mathcal{A}$ は X の非負自己共役作用素であり， X 上で $\text{diag}\{e^{-tdA}, e^{-tdA}, e^{-tDA}\}$ によって表される解析的半群 $e^{-t\mathcal{A}}$ を生成する．(3.10) より，

$$\|e^{-t\mathcal{A}}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (3.17)$$

となる．また，(3.15) より，

$$\begin{aligned} \|\nabla_S e^{-tdA}\|_{\mathcal{L}(L_2(S))} &\leq \left(\lambda_1 + \frac{1}{edt}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-d\lambda_1 t}, & 0 < t < \infty, \\ \|\nabla_S e^{-tDA}\|_{\mathcal{L}(L_2(S))} &\leq \left(\lambda_1 + \frac{1}{eDt}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-D\lambda_1 t}, & 0 < t < \infty, \end{aligned}$$

であり，その結果として次の不等式が得られる．

$$\|\nabla_S e^{-t\mathcal{A}}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \left(\lambda_1 + \frac{1}{edt}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-d\lambda_1 t}, \quad 0 < t < \infty. \quad (3.18)$$

モデリングの観点から，解は $u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1, 0 \leq w \leq (R_0/\sigma)^{\frac{1}{4}}$ の範囲に存在することが期待される．これらの条件から， X の非線形作用素 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F}(U) = \begin{pmatrix} [H_1(1 - \text{Re } u - \text{Re } v)\Phi(H_1(\text{Re } u), H_1(\text{Re } v), H_2(\text{Re } w)) - f]H_1(\text{Re } u) \\ [H_1(1 - \text{Re } u - \text{Re } v)\Psi(H_1(\text{Re } u), H_1(\text{Re } v), H_2(\text{Re } w)) - f]H_1(\text{Re } v) \\ [1 - g(H_1(\text{Re } u), H_1(\text{Re } v))]R(w) - \sigma H_2(\text{Re } w)^4 \end{pmatrix}$$

によって導入する．ここで， $H_1(\xi)$ と $H_2(\xi)$ はそれぞれ次のように定義されたカットオフ関数である．

$$H_1(\xi) = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi \leq 0, \\ \xi, & 0 < \xi \leq 1, \\ 1, & 1 < \xi < \infty, \end{cases} \quad H_2(\xi) = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi \leq 0, \\ \xi, & 0 < \xi \leq (R_0/\sigma)^{\frac{1}{4}}, \\ (R_0/\sigma)^{\frac{1}{4}}, & (R_0/\sigma)^{\frac{1}{4}} < \xi < \infty. \end{cases}$$

以上より，問題 (2.17) は X で Cauchy 問題

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + \mathcal{A}U = \mathcal{F}(U), & 0 < t < \infty, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (3.19)$$

によって定式化される．ただし， $U(t) = {}^t(u(t), v(t), w(t))$ は未知関数， U_0 は初期値である．初期値の空間としては，

$$K = \left\{ U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in X; u_0 \geq 0, v_0 \geq 0, u_0 + v_0 \leq 1, 0 \leq w_0 \leq \left(\frac{R_0}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \right\} \quad (3.20)$$

を設定する.

$-\infty < \xi < \infty$ に対して $H_1(\xi)$ と $H_2(\xi)$ は一様有界であり, 大域的に Lipschitz 連続な関数であることは明らかである. その結果, $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$ に対して $\Phi(H_1(\operatorname{Re} u), H_1(\operatorname{Re} v), H_2(\operatorname{Re} w))$ と $\Psi(H_1(\operatorname{Re} u), H_1(\operatorname{Re} v), H_2(\operatorname{Re} w))$ は一様有界であり, 大域的に Lipschitz 連続な関数となる. したがって, $\mathcal{F}$ が有界作用素であり Lipschitz 条件を満たすこと, すなわち,

$$\|\mathcal{F}(U)\|_X \leq C_1, \quad U \in X, \quad (3.21)$$

$$\|\mathcal{F}(U) - \mathcal{F}(V)\|_X \leq C_2 \|U - V\|_X, \quad U, V \in X, \quad (3.22)$$

であることは容易に確認できる. ここで, $C_i > 0, i = 1, 2$ は適当な定数である.

このとき, 抽象放物型発展方程式の一般的な理論 ([45, Theorem 4.4] を参照) を (3.19) に適用することができ, 任意の $U_0 \in K$ に対して関数空間

$$U \in \mathcal{C}((0, T_{U_0}]; \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}([0, T_{U_0}]; X) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{U_0}]; X)$$

で (3.19) に対する唯一つの局所解が存在することが言える. ここで, 時刻 $T_{U_0} > 0$ はノルム $\|U_0\|_X$ によってのみ決まる.

3.2.2 大域解

上で構成された局所解 $U(t)$ が, 空間 K でその値をとることが確認できる.

命題 3.2.1. 条件 $U_0 \in K$ は, 任意の $0 < t \leq T_{U_0}$ に対して $U(t) \in K$ であることを意味する.

証明. $U(t)$ が (3.19) の局所解ならば, その複素共役 $\overline{U(t)}$ も同じ初期値を持つ局所解であるということが簡単に示される. したがって, $U(t) = \overline{U(t)}$ であり, $U(t)$ は実数値である.

まず, $u(t) \geq 0$ の場合を考える. ここで, (3.13) で与えられるカットオフ関数 $H(u)$ を再び用いる. $h(t) = \int_S H(u(\omega, t)) d\omega$ と置くと, $0 < t \leq T_{U_0}$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt}(t) &= \int_S H'(u) \frac{\partial u}{\partial t} d\omega = d \int_S H'(u) \Delta_S u d\omega \\ &\quad + \int_S H'(u) [H_1(1 - u - v) \Phi(H_1(u), H_1(v), H_2(w)) - f] H_1(u) d\omega \end{aligned}$$

となる. また,

$$\int_S H'(u) \Delta_S u d\omega = - \int_S \nabla_S H'(u) \cdot \nabla_S u d\omega = - \int_S H''(u) |\nabla_S u|^2 d\omega \leq 0$$

であることと, $-\infty < u < \infty$ に対して $H'(u)H_1(u) \equiv 0$ であることから, 任意の $0 < t \leq T_{U_0}$ に対して $\frac{dh}{dt}(t) \leq 0$, i.e., $h(t) \leq h(0) = 0$ が導かれる.

$v(t)$ に対しても同様の議論を繰り返すことで, 任意の $0 < t \leq T_{U_0}$ に対して $v(t) \geq 0$ が言える.

次に, $u(t) + v(t) \leq 1$ であることを確認する. ここで, $z(t) = 1 - u(t) - v(t)$ が,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = d\Delta_S z - [\Phi(H_1(u), H_1(v), H_2(w)) + \Psi(H_1(u), H_1(v), H_2(w))]H_1(z) + f[H_1(u) + H_1(v)]$$

の解とみなせることに注目する. これにより, $u(t)$ と $v(t)$ についての議論と同様にして, 任意の $0 < t \leq T_{U_0}$ に対して $z(t) \geq 0$ であることが言える.

次に, 任意の $0 < t \leq T_{U_0}$ に対して $0 \leq w \leq (R_0/\sigma)^{\frac{1}{4}}$ であることを示す. $w(t) \geq 0$ については $u(t)$ と $v(t)$ の場合と同様の議論によって示される. $w_1(t) = (R_0/\sigma)^{\frac{1}{4}} - w(t)$ と置くと, (2.18) より,

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = D\Delta_S w_1 - \sigma[R_0/\sigma - H_2(w)^4] + R_0 \left\{ 1 + [g(u, v) - 1]\sqrt{1 - (z/\ell)^2} \right\}$$

である. ここで, $h_1(t) = \int_S H(w_1(\omega, t))d\omega$ と置く. $-\infty < w < \infty$ に対して $H'((R_0/\sigma)^{\frac{1}{4}} - w)[R_0/\sigma - H_2(w)^4] \equiv 0$ であることから, $\frac{dh_1}{dt}(t) \leq 0$, すなわち $h_1(t) \leq h_1(0) = 0$ が得られる. よって, 任意の $0 < t \leq T_{U_0}$ に対して $(R_0/\sigma)^{\frac{1}{4}} - w(t) \geq 0$ となる. $\square$

この命題は, ノルム $\|U(t)\|_X$ が区間 $[0, T_{U_0}]$ 上で一様有界のままであることを示している. そしてこれは, 一様な時間区間を持つ任意の局所解を常に拡張できるということを意味している. したがって, 次の結果が得られる.

定理 3.2.1. 任意の $U_0 \in K$ に対して, (3.19) は関数空間

$$U \in \mathcal{C}((0, \infty); \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}([0, \infty); X) \cap \mathcal{C}^1((0, \infty); X)$$

で唯一つの大域解 $U(t)$ を有する.

命題 3.2.1 から確認できるように, すべての $0 < t < \infty$ に対して $U(t)$ は K 内での値をとる. したがって, すべての $0 < t < \infty$ に対して $H_1(u(t)) = u(t)$, $H_1(v(t)) = v(t)$, $H_1(1 - u(t) - v(t)) = 1 - u(t) - v(t)$, $H_2(w(t)) = w(t)$ となる. これは (3.19) の大域解 $U(t)$ が, 元の問題 (2.17) に対する大域解としても考えられることを示している.

最後に大域ノルム評価と初期値への解の連続依存性を確かめる.

定理 3.2.2. $U_0 \in K$ とし, $U(t)$ は (3.19) の大域解とする. このとき, 適当な定数 C_3 を用いて,

$$\|\nabla_S U(t)\|_X \leq C_3 \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-d\lambda_1 t} \|U_0\|_X + 1 \right], \quad 0 < t < \infty, \quad (3.23)$$

となる.

証明. Duhamel の原理により, $U(t)$ は,

$$U(t) = e^{-tA}U_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}\mathcal{F}(U(s))ds$$

と書くことができる. したがって,

$$\nabla_S U(t) = \nabla_S e^{-tA}U_0 + \int_0^t \nabla_S e^{-(t-s)A}\mathcal{F}(U(s))ds$$

となる. (3.18), (3.21) により,

$$\begin{aligned}\|\nabla_S U(t)\|_X &\leq \left(\lambda_1 + \frac{1}{edt}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-d\lambda_1 t} \|U_0\|_X + C_1 \int_0^t \left(\lambda_1 + \frac{1}{ed(t-s)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-d\lambda_1(t-s)} ds \\ &\leq \left(\lambda_1 + \frac{1}{edt}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-d\lambda_1 t} \|U_0\|_X + C_1 \int_0^\infty \left(\lambda_1 + \frac{1}{eds}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-d\lambda_1 s} ds\end{aligned}$$

となる. よって, (3.23) が確かめられた. $\square$

定理 3.2.3. $U_0, V_0 \in K$ とし, $U(t)$ と $V(t)$ はそれぞれ初期値 U_0 と V_0 を有する (3.19) の大域解とする. このとき, 適当な定数 C_4 を用いて,

$$\|U(t) - V(t)\|_X \leq e^{C_2 t} \|U_0 - V_0\|_X, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (3.24)$$

$$\|\nabla_S [U(t) - V(t)]\|_X \leq C_4 \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}} + te^{C_2 t} \right] \|U_0 - V_0\|_X, \quad 0 < t < \infty, \quad (3.25)$$

となる.

証明. 再び Duhamel の原理を用いて,

$$U(t) - V(t) = e^{-tA} [U_0 - V_0] + \int_0^t e^{-(t-s)A} [\mathcal{F}(U(s)) - \mathcal{F}(V(s))] ds$$

が得られる. (3.17) と (3.22) を考慮すると,

$$\|U(t) - V(t)\|_X \leq \|U_0 - V_0\|_X + C_2 \int_0^t \|U(s) - V(s)\|_X ds$$

である. これにより (3.24) が得られる.

同様に,

$$\nabla_S [U(t) - V(t)] = \nabla_S e^{-tA} [U_0 - V_0] + \int_0^t \nabla_S e^{-(t-s)A} [\mathcal{F}(U(s)) - \mathcal{F}(V(s))] ds$$

から, (3.18), (3.22), (3.24) によって,

$$\begin{aligned}\|\nabla_S [U(t) - V(t)]\|_X &\leq \left[\left(\lambda_1 + \frac{1}{edt}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-d\lambda_1 t} + C_2 \int_0^t \left(\lambda_1 + \frac{1}{ed(t-s)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-d\lambda_1(t-s)+C_2 s} ds \right] \|U_0 - V_0\|_X \\ &\leq \left[\left(\lambda_1 + \frac{1}{edt}\right)^{\frac{1}{2}} + C_2 e^{C_2 t} \int_0^t \left(\lambda_1 + \frac{1}{ed(t-s)}\right)^{\frac{1}{2}} ds \right] \|U_0 - V_0\|_X\end{aligned}$$

となり, (3.25) が確かめられる. $\square$

3.3 力学系

本節では、(3.19) によって定められた力学系の構成とアトラクタ集合の存在を示す。そのためには、半線形抽象放物型発展方程式の Cauchy 問題に対する既に知られている一般的な手続きに従えばよい ([45, Section 6.5] を参照せよ)。

$U_0 \in K$ に対して、 $U(t; U_0)$ は (3.19) の大域解とする。さらに、

$$S(t)U_0 = U(t; U_0), \quad 0 \leq t < \infty,$$

とする。このとき $S(t)$ は K 上の非線形半群である。すなわち、 $0 \leq s, t < \infty$ に対して $S(0) = I$, $S(t+s) = S(t)S(s)$ である。さらに $S(t)$ は、 $(t, U_0) \mapsto S(t)U_0$ が、 $[0, \infty) \times K$ から X へ連続であるという意味で連続とみなされる。実際に $(t, U_0) \in [0, \infty) \times K$ を固定する。(3.24) より、

$$\begin{aligned} \|S(t')U'_0 - S(t)U_0\|_X &\leq \|S(t')U'_0 - S(t')U_0\|_X + \|S(t')U_0 - S(t)U_0\|_X \\ &\leq e^{C_2 t'} \|U'_0 - U_0\|_X + \|S(t')U_0 - S(t)U_0\|_X \end{aligned}$$

である。このとき $(t', U'_0) \rightarrow (t, U_0)$ は、 X で $S(t')U'_0 \rightarrow S(t)U_0$ であることを意味する。よって、 $S(t)$ は空間 X で $(S(t), K, X)$ として表されるような力学系を定義する ([6, 36] を参照せよ)。位相空間 K は有界かつ X の閉部分集合である。

よく知られているように、散逸評価 (3.23) はグローバルアトラクタの存在を与える。 K の部分集合 B を次のように定める。

$$B = K \cap \{U \in [H^1(S)]^3; \|\nabla U\|_X \leq C_3 + 1\}.$$

このとき、(3.23) は各 $t \geq T$ に対して $S(t)K \subset B$ であるような時刻 T が存在する、つまり B が吸収集合であることを意味している。さらに、 B は X のコンパクト集合である。したがって、 B は $(S(t), K, X)$ のコンパクト吸収集合である。各 $t \geq T$ に対して、 $S(t)B \subset B$ であることは明らか。よって K の部分集合 $\mathcal{K}$ を次のように定義する。

$$\mathcal{K} = \bigcup_{0 \leq t \leq T} S(t)B.$$

このとき各 $t > 0$ に対して $S(t)\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ 、すなわち $\mathcal{K}$ は不変集合である。したがって $\mathcal{K}$ はコンパクトかつ吸収集合というだけでなく、不変でもある。これは、 $(S(t), K, X)$ の軌道の漸近挙動が、力学系 $(S(t), \mathcal{K}, X)$ に帰着されることを意味する。

一般的な議論により、 $\mathcal{B} = \bigcap_{0 \leq t < \infty} S(t)\mathcal{K}$ は $(S(t), \mathcal{K}, X)$ のグローバルアトラクタであることが分かる。

さらに、評価式 (3.25) により、指数アトラクタを構成できる。以下の条件を満たす部分集合 $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ は $(S(t), \mathcal{K}, X)$ の指数アトラクタと呼ばれる。

[1] $\mathcal{M}$ は有限フラクタル次元を持つ X のコンパクト集合である。

[2] $\mathcal{M}$ はグローバルアトラクタ $\mathcal{B}$ を含んでいる。

[3] $\mathcal{M}$ は不変集合, すなわち, 各 $t > 0$ に対して $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ である.

[4] 以下を満たすような指数 $k > 0$ が存在する.

$$h(S(t)\mathcal{K}, \mathcal{M}) \leq C_5 e^{-kt}, \quad 0 < t < \infty.$$

ただし, $C_5 > 0$ は適当な定数.

ここで, $h(K_1, K_2) = \sup_{F \in K_1} \inf_{G \in K_2} \|F - G\|_X$ は $\mathcal{K}$ の 2 つの部分集合 K_1, K_2 の擬距離である.

[45, Section 6.4] で説明されているように, 任意の固定時刻 $t^* > 0$ について $S(t^*)$ のコンパクト平滑化

$$\|S(t^*)U_0 - S(t^*)V_0\|_{H^1(S)} \leq C_6 \|U_0 - V_0\|_X, \quad U_0, V_0 \in \mathcal{K},$$

は指数アトラクタの存在をもたらす. しかし, 今の場合ではこの性質は評価式 (3.24) と (3.25) にすぎない.

以上により, 次の定理が得られる.

定理 3.3.1. 力学系 $(S(t), K, X)$ は指数アトラクタを有する.

証明. 上述したように, $(S(t), \mathcal{K}, X)$ に対する指数アトラクタ $\mathcal{M}$ が存在することについては既を示した. このとき, $S(T)K \subset B \subset \mathcal{K}$ ならば, $\mathcal{M}$ が $(S(t), K, X)$ に対する指数アトラクタでもあることがすぐに示される. $\square$

第4章

離散化スキームの実装（球面領域）

本章では，問題 (2.17) に対して 2 種類の離散化スキームを実装する．

球面上の偏微分方程式に対する数値計算においては，地球ダイナモシミュレーションの分野などで多くの手法が開発されている．主な手法としては，有限差分法，有限要素法，有限体積法，スペクトル法などがよく知られている．その中でも有限差分法は，計算効率が高く，極めて汎用性の高い手法として古くから偏微分方程式の解法に用いられている．さらに，差分格子としては，空間を等間隔に分割する緯度経度格子（図 4.1 を参照）を用いるのが比較的簡単だろう．しかし，この緯度経度格子を用いる場合，極付近でのいくつかの問題に注意する必要がある．

先ずひとつは，極が座標特異点となっていることである．この問題については，そもそも極上に格子点を置かない，L' Hôpital の定理を用いて解くべき方程式を座標特異点の無い形に書き換える（例えば，Kageyama-Sato [17] を参照）などの方法によって回避することができる．他にも格子のとり方を工夫したものでは，Kageyama-Sato [16] による Yin-Yang 格子，Ronchi-Iacono-Paolucci [30] による Cubed Sphere 格子，さらに Half-Step-Shifted 格子（例えば，Fornberg-Merrill [13] を参照）を用いる計算手法などがある．Williamson [42] にいくつかの手法がまとめられているのでそちらも参照せよ．これらの数値計算手法のほとんどは，計算コストと計算精度のトレードオフとなっている．今回の場合は，極上から半グリッドずつずらした格子（Half-Step-Shifted 格子）を用いる手法と L' Hôpital の定理を用いる手法の 2 つを考える．

もうひとつの問題は，極付近に格子点が集中することにより，経度方向の格子点間隔が極めて狭くなることである．これについては，極に近づくほど緯度方向の格子間隔を狭くとした不等間隔格子を用いることで対応する（例えば，[51] を参照）．

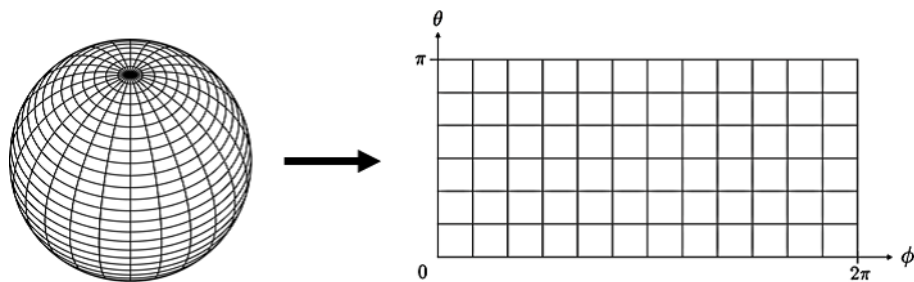


図 4.1: 緯度経度格子．球面座標系（左）を直交座標系（右）にマッピングすることで離散化を行う．

4.1 不等間隔格子

差分法によって微分方程式を解く場合、その方程式の解が領域の一部で急激に変化することがある。問題 (2.17) の場合では、Laplace-Beltrami 作用素 Δ_S の中の $1/\sin \theta$ の項によって、極付近の値が大きく変化することが分かる（図 4.2 を参照）。このような場合、その急激な変化を見せる領域だけ格子幅を細かくとるという手法がよく使われる。ここでは 1 次元座標変換を用いて元の方程式を変換し、差分近似する方法を述べる。

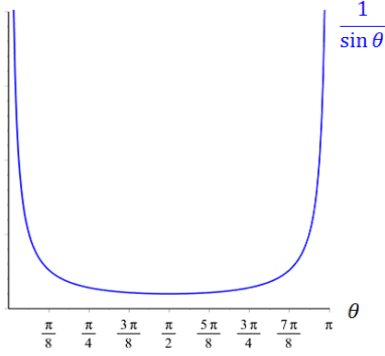


図 4.2: $1/\sin \theta$ のグラフ.

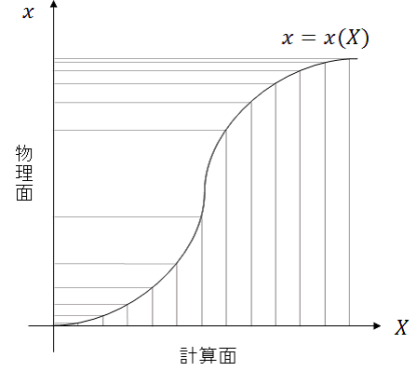


図 4.3: 1 次元座標変換.

図 4.3 のような関数 $x = x(X)$ を考える。まず、変数変換式

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{dX}{dx} \frac{\partial}{\partial X} = \frac{1}{dx/dX} \frac{\partial}{\partial X}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{dx/dX} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{dx/dX} \frac{\partial}{\partial X} \right) = \frac{1}{(dx/dX)^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{d^2x/dX^2}{(dx/dX)^3} \frac{\partial}{\partial X}, \quad (4.2)$$

を用いて、元の微分方程式に対して X を独立変数とするように変数変換を行う。

このとき、 $x(X)$ の変換は必ずしも式で与えられている必要はなく、変換式 (4.1), (4.2) の係数 $1/(dx/dX)$, $1/(dx/dX)^2$, $\dots$ が計算できればよい。例えば、 $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=x_i}$ を中心差分を用いて近似すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_i} &= \frac{1}{dx/dX} \frac{\partial u}{\partial X} \Big|_{x=x_i} \\ &= \frac{1}{(x_{i+1} - x_{i-1})/2\Delta X} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta X} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \end{aligned}$$

となり、係数は各格子点での x の座標から求まることが分かる。

式 (3.7) より、 $\ell = 1$ のとき $\Delta_S u$ は、

$$\Delta_S u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (4.3)$$

となる．ここで，式 (4.3) を上述の方法を用いて差分する．第 1 項は，

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\
& \approx \frac{1}{\sin \theta_i} \frac{1}{(d\theta/dX)_i} \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right] \\
& \approx \frac{1}{\sin \theta_i} \frac{2\Delta X}{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}} \frac{1}{\Delta X} \left(\sin \theta_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta X}{\theta_{i+1} - \theta_i} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta X} - \sin \theta_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Delta X}{\theta_i - \theta_{i-1}} \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta X} \right) \\
& = \frac{1}{\sin \theta_i} \frac{2}{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}} \left(\sin \theta_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{\theta_{i+1} - \theta_i} - \sin \theta_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{\theta_i - \theta_{i-1}} \right)
\end{aligned}$$

と計算される．さらに，第 2 項については， ϕ 方向の刻みは等間隔であることから，

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \approx \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \left(\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta \phi)^2} \right)$$

となる．以上より，式 (4.3) は，

$$\begin{aligned}
\Delta_S u \approx & \frac{1}{\sin \theta_i} \frac{2}{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}} \left(\sin \theta_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{\theta_{i+1} - \theta_i} - \sin \theta_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{\theta_i - \theta_{i-1}} \right) \\
& + \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \left(\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta \phi)^2} \right)
\end{aligned}$$

と差分できる．

以降で紹介する 2 つのスキームには，不等間隔格子を用いるものとする．

4.2 Half-Step-Shifted 格子スキーム

$\theta = [0, \pi]$, $\phi = [0, 2\pi]$ を考える場合，式 (4.3) から分かるように $\theta = 0, \pi$ は座標特異点となる．そこで，特異点を避けるように半グリッドずつずらした図 4.4 の実線で示すような格子を考える．図 4.4 の黒い点線は通常の緯度経度格子における緯度方向の格子線を表し，赤線で示した緯度方向 (θ 方向) の格子線は，通常の格子線を半グリッドずつずらして配置したものである．

緯度方向には極に近づくほど間隔が狭まっていくような不等間隔な刻み幅 $\Delta \theta_i$ を与え，経度方向には等間隔な刻み幅 $\Delta \phi = 2\pi/M$ を与える．したがって，

$$\begin{aligned}
\theta_i &= \left(i - \frac{1}{2} \right) \Delta \theta_i, & (i = 1, 2, \dots, N), \\
\phi_j &= j \Delta \phi, & (j = 0, 1, \dots, M),
\end{aligned}$$

とする．時間の刻み幅を Δt とし， $t_n = n\Delta t$ とする．このモデル方程式の解 $u(\theta_i, \phi_j, t_n)$, $v(\theta_i, \phi_j, t_n)$, $w(\theta_i, \phi_j, t_n)$ に対応する近似値を $U_{i,j}^n$, $V_{i,j}^n$, $W_{i,j}^n$ とする．

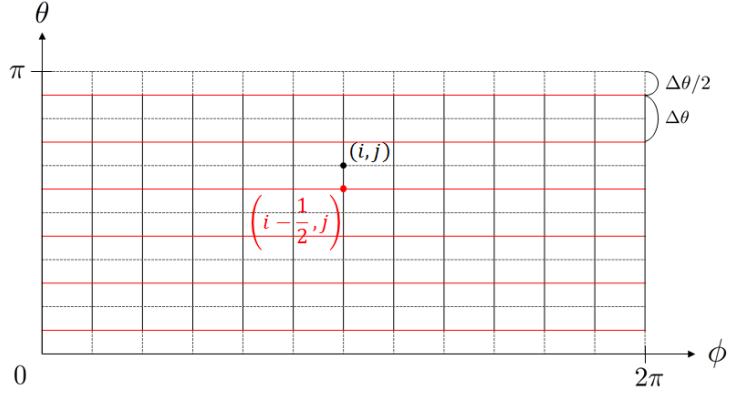


図 4.4: Half-Step-Shifted 格子.

[1] 白いデイズー $u(x, y, t)$ の離散化式

$i \in [1, N], j \in [0, M]$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} = & [(1 - U_{i,j}^n - V_{i,j}^n) \Phi(U_{i,j}^n, V_{i,j}^n, W_{i,j}^n) - f] U_{i,j}^n \\ & + d \left[\frac{1}{\sin \theta_i} \frac{1}{\Delta \theta_i} \left(\sin \theta_{i+\frac{1}{2}} \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n}{\Delta \theta_i} - \sin \theta_{i-\frac{1}{2}} \frac{U_{i,j}^n - U_{i-1,j}^n}{\Delta \theta_i} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \left(\frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{(\Delta \phi)^2} \right) \right] \end{aligned}$$

ここで, ϕ 方向には周期境界条件より,

$$U_{i,-1}^n = U_{i,M-1}^n, \quad U_{i,M+1}^n = U_{i,1}^n, \quad U_{i,0}^n = U_{i,M}^n, \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

を満たす. さらに, $i = 1, N$ では以下の条件を満たす (図 4.5 を参照).

$$\begin{aligned} U_{0,j} &= U_{1, \frac{M}{2}+j}, & U_{N+1,j} &= U_{N, \frac{M}{2}+j}, & (j = 0, 1, \dots, M/2), \\ U_{0,j} &= U_{1, -\frac{M}{2}+j}, & U_{N+1,j} &= U_{N, -\frac{M}{2}+j}, & (j = M/2 + 1, \dots, M). \end{aligned}$$

[2] 黒いデイズー $v(x, y, t)$ の離散化式

$i \in [1, N], j \in [0, M]$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\Delta t} = & [(1 - U_{i,j}^n - V_{i,j}^n) \Psi(U_{i,j}^n, V_{i,j}^n, W_{i,j}^n) - f] V_{i,j}^n \\ & + d \left[\frac{1}{\sin \theta_i} \frac{1}{\Delta \theta_i} \left(\sin \theta_{i+\frac{1}{2}} \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i,j}^n}{\Delta \theta_i} - \sin \theta_{i-\frac{1}{2}} \frac{V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n}{\Delta \theta_i} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \left(\frac{V_{i,j+1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j-1}^n}{(\Delta \phi)^2} \right) \right] \end{aligned}$$

ここで、 ϕ 方向は周期境界条件より、

$$V_{i,-1}^n = V_{i,M-1}^n, \quad V_{i,M+1}^n = V_{i,1}^n, \quad V_{i,0}^n = V_{i,M}^n, \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

を満たす。さらに、 $i = 1, N$ では以下の条件を満たす（図 4.5 を参照）。

$$\begin{aligned} V_{0,j} &= V_{1,\frac{M}{2}+j}, & V_{N+1,j} &= V_{N,\frac{M}{2}+j}, & (j = 0, 1, \dots, M/2), \\ V_{0,j} &= V_{1,-\frac{M}{2}+j}, & V_{N+1,j} &= V_{N,-\frac{M}{2}+j}, & (j = M/2 + 1, \dots, M). \end{aligned}$$

[3] 温度 $w(x, y, t)$ の離散化式

$i \in [1, N], j \in [0, M]$ に対して、

$$\begin{aligned} \frac{W_{i,j}^{n+1} - W_{i,j}^n}{\Delta t} &= [1 - g(U_{i,j}^n, V_{i,j}^n)] R(\theta_i) - \sigma(W_{i,j}^n)^4 \\ &+ D \left[\frac{1}{\sin \theta_i} \frac{1}{\Delta \theta_i} \left(\sin \theta_{i+\frac{1}{2}} \frac{W_{i+1,j}^n - W_{i,j}^n}{\Delta \theta_i} - \sin \theta_{i-\frac{1}{2}} \frac{W_{i,j}^n - W_{i-1,j}^n}{\Delta \theta_i} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \left(\frac{W_{i,j+1}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i,j-1}^n}{(\Delta \phi)^2} \right) \right] \end{aligned}$$

ここで、 ϕ 方向は周期境界条件より、

$$W_{i,-1}^n = W_{i,M-1}^n, \quad W_{i,M+1}^n = W_{i,1}^n, \quad W_{i,0}^n = W_{i,M}^n, \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

を満たす。さらに、 $i = 1, N$ では以下の条件を満たす（図 4.5 を参照）。

$$\begin{aligned} W_{0,j} &= W_{1,\frac{M}{2}+j}, & W_{N+1,j} &= W_{N,\frac{M}{2}+j}, & (j = 0, 1, \dots, M/2), \\ W_{0,j} &= W_{1,-\frac{M}{2}+j}, & W_{N+1,j} &= W_{N,-\frac{M}{2}+j}, & (j = M/2 + 1, \dots, M). \end{aligned}$$

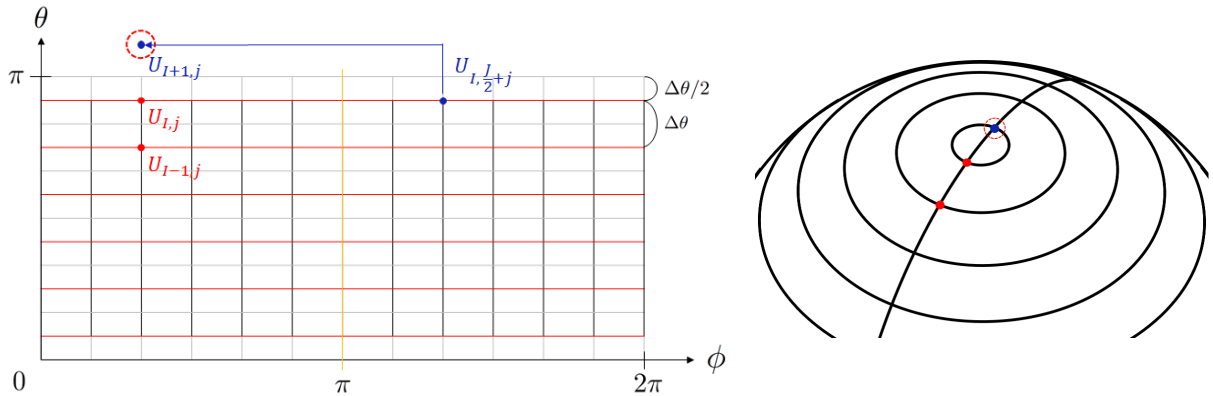


図 4.5: 数値計算上の境界条件

4.3 L'Hôpital の定理を用いるスキーム

式 (4.3) に対して, $\theta = [0, \pi]$, $\phi = [0, 2\pi]$ を考えると $\theta = 0, \pi$ は座標特異点となる. そこで, 特異点では L'Hôpital の定理を適用した方程式に書き換える.

まず, $\theta = 0$ のとき第 1 項は,

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\sin \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad (\because \text{L'Hôpital の定理}) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} \right) \right) \\ &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$

と書き換えられる. $\theta = \pi$ の場合も同様の計算により,

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

となる. 式 (4.3) の第 2 項については, $\theta = 0, \pi$ のとき,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{o(\theta^N)}{o(\theta)} = 0$$

である. 以上より, $\theta = 0, \pi$ では,

$$\Delta_S u = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

を考える.

緯度方向には極に近づくほど間隔が狭まっていくような不等間隔な刻み幅 $\Delta\theta_i$ を与える. また, 経度方向の刻み幅は等間隔であり, $\Delta\phi = 2\pi/M$ とする. したがって,

$$\begin{aligned} \theta_i &= i\Delta\theta_i, & (i = 0, 1, \dots, N), \\ \phi_j &= j\Delta\phi, & (j = 0, 1, \dots, M), \end{aligned}$$

である. 時間の刻み幅は Δt とし, $t_n = n\Delta t$ とする. モデル方程式 (3.15) の解 $u(\theta_i, \phi_j, t_n)$, $v(\theta_i, \phi_j, t_n)$, $w(\theta_i, \phi_j, t_n)$ に対応する近似値を $U_{i,j}^n$, $V_{i,j}^n$, $W_{i,j}^n$ とする.

[1] 白いデイジー $u(x, y, t)$ の離散化式

(i) $S \setminus \{(0, \phi) \cup (\pi, \phi)\}$ 上での差分方程式

$i \in [1, N-1]$, $j \in [0, M]$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} &= [(1 - U_{i,j}^n - V_{i,j}^n) \Phi(U_{i,j}^n, V_{i,j}^n, W_{i,j}^n) - f] U_{i,j}^n \\ &\quad + d \left[\frac{1}{\sin \theta_i} \frac{1}{\Delta\theta_i} \left(\sin \theta_{i+\frac{1}{2}} \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n}{\Delta\theta_i} - \sin \theta_{i-\frac{1}{2}} \frac{U_{i,j}^n - U_{i-1,j}^n}{\Delta\theta_i} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \left(\frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{(\Delta\phi)^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

- (ii) $(\theta, \phi) = (0, \phi)$ での差分方程式
 $i = 0, j \in [0, M]$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{U_{0,j}^{n+1} - U_{0,j}^n}{\Delta t} = & [(1 - U_{0,j}^n - V_{0,j}^n) \Phi(U_{0,j}^n, V_{0,j}^n, W_{0,j}^n) - f] U_{0,j}^n \\ & + 2d \left(\frac{U_{1,j}^n - 2U_{0,j}^n + U_{-1,j}^n}{(\Delta\theta_i)^2} \right). \end{aligned}$$

- (iii) $(\theta, \phi) = (\pi, \phi)$ での差分方程式
 $i = N, j \in [0, M]$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{U_{N,j}^{n+1} - U_{N,j}^n}{\Delta t} = & [(1 - U_{N,j}^n - V_{N,j}^n) \Phi(U_{N,j}^n, V_{N,j}^n, W_{N,j}^n) - f] U_{N,j}^n \\ & + 2d \left(\frac{U_{N+1,j}^n - 2U_{N,j}^n + U_{N-1,j}^n}{(\Delta\theta_i)^2} \right). \end{aligned}$$

数値計算上で u は、 ϕ 方向に対して周期境界条件

$$U_{i,-1}^n = U_{i,M-1}^n, \quad U_{i,M+1}^n = U_{i,1}^n, \quad U_{i,0}^n = U_{i,M}^n, \quad (i = 0, 1, \dots, N),$$

を満たす。さらに、 $\theta = 0, \pi$ のとき次の条件を満たす。

$$\begin{aligned} U_{-1,j} &= U_{1,j}, \quad U_{0,j} = C_1, \\ U_{N+1,j} &= U_{N-1,j}, \quad U_{N,j} = C_1, \quad (j = 0, 1, \dots, M). \end{aligned}$$

ここで、 C_1 は適切に与えられた定数とする。

[2] 黒いデイジー $v(x, y, t)$ の離散化式

- (i) $S \setminus \{(0, \phi) \cup (\pi, \phi)\}$ 上での差分方程式
 $i \in [1, N-1], j \in [0, M]$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\Delta t} = & [(1 - U_{i,j}^n - V_{i,j}^n) \Psi(U_{i,j}^n, V_{i,j}^n, W_{i,j}^n) - f] V_{i,j}^n \\ & + d \left[\frac{1}{\sin \theta_i} \frac{1}{\Delta\theta_i} \left(\sin \theta_{i+\frac{1}{2}} \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i,j}^n}{\Delta\theta_i} - \sin \theta_{i-\frac{1}{2}} \frac{V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n}{\Delta\theta_i} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \left(\frac{V_{i,j+1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j-1}^n}{(\Delta\phi)^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

- (ii) $(\theta, \phi) = (0, \phi)$ での差分方程式
 $i = 0, j \in [0, M]$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{V_{0,j}^{n+1} - V_{0,j}^n}{\Delta t} = & [(1 - U_{0,j}^n - V_{0,j}^n) \Phi(U_{0,j}^n, V_{0,j}^n, W_{0,j}^n) - f] V_{0,j}^n \\ & + 2d \left(\frac{V_{1,j}^n - 2V_{0,j}^n + V_{-1,j}^n}{(\Delta\theta_i)^2} \right). \end{aligned}$$

- (iii) $(\theta, \phi) = (\pi, \phi)$ での差分方程式
 $i = N, j \in [0, M]$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{V_{N,j}^{n+1} - V_{N,j}^n}{\Delta t} &= [(1 - U_{N,j}^n - V_{N,j}^n) \Phi(U_{N,j}^n, V_{N,j}^n, W_{N,j}^n) - f] V_{N,j}^n \\ &\quad + 2d \left(\frac{V_{N+1,j}^n - 2V_{N,j}^n + V_{N-1,j}^n}{(\Delta \theta_i)^2} \right). \end{aligned}$$

数値計算上で v は, ϕ 方向に対して周期境界条件

$$V_{i,-1}^n = V_{i,M-1}^n, \quad V_{i,M+1}^n = V_{i,1}^n, \quad V_{i,0}^n = V_{i,M}^n, \quad (i = 0, 1, \dots, N),$$

を満たす. さらに, $\theta = 0, \pi$ のとき次の条件を満たす.

$$\begin{aligned} V_{-1,j} &= V_{1,j}, \quad V_{0,j} = C_2, \\ V_{N+1,j} &= V_{N-1,j}, \quad V_{N,j} = C_2, \quad (j = 0, 1, \dots, M). \end{aligned}$$

ここで, C_2 は適切に与えられた定数とする.

[3] 温度 $w(x, y, t)$ の離散化式

- (i) $S \setminus \{(0, \phi) \cup (\pi, \phi)\}$ 上での差分方程式
 $i \in [1, N-1], j \in [0, M]$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{W_{i,j}^{n+1} - W_{i,j}^n}{\Delta t} &= [1 - g(U_{i,j}^n, V_{i,j}^n)] R(\theta_i) - \sigma(W_{i,j}^n)^4 \\ &\quad + D \left[\frac{1}{\sin \theta_i} \frac{1}{\Delta \theta_i} \left(\sin \theta_{i+\frac{1}{2}} \frac{W_{i+1,j}^n - W_{i,j}^n}{\Delta \theta_i} - \sin \theta_{i-\frac{1}{2}} \frac{W_{i,j}^n - W_{i-1,j}^n}{\Delta \theta_i} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \left(\frac{W_{i,j+1}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i,j-1}^n}{(\Delta \phi)^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

- (ii) $(\theta, \phi) = (0, \phi)$ での差分方程式
 $i = 0, j \in [0, M]$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{W_{0,j}^{n+1} - W_{0,j}^n}{\Delta t} &= [1 - g(U_{0,j}^n, V_{0,j}^n)] R(\theta_0) - \sigma(W_{0,j}^n)^4 \\ &\quad + 2D \left(\frac{W_{1,j}^n - 2W_{0,j}^n + W_{-1,j}^n}{(\Delta \theta_i)^2} \right). \end{aligned}$$

- (iii) $(\theta, \phi) = (\pi, \phi)$ での差分方程式
 $i = N, j \in [0, M]$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{W_{N,j}^{n+1} - W_{N,j}^n}{\Delta t} &= [1 - g(U_{N,j}^n, V_{N,j}^n)] R(\theta_N) - \sigma(W_{N,j}^n)^4 \\ &\quad + 2D \left(\frac{W_{N+1,j}^n - 2W_{N,j}^n + W_{N-1,j}^n}{(\Delta \theta_i)^2} \right). \end{aligned}$$

数値計算上で w は, ϕ 方向に対して周期境界条件

$$W_{i,-1}^n = W_{i,M-1}^n, \quad W_{i,M+1}^n = W_{i,1}^n, \quad W_{i,0}^n = W_{i,M}^n, \quad (i = 0, 1, \dots, N),$$

を満たす. さらに, $\theta = 0, \pi$ のとき次の条件を満たす.

$$\begin{aligned} W_{-1,j} &= W_{1,j}, & W_{0,j} &= C_3, \\ W_{N+1,j} &= W_{N-1,j}, & W_{N,j} &= C_3, \end{aligned} \quad (j = 0, 1, \dots, M).$$

ここで, C_3 は適切に与えられた定数とする.

第5章

数値計算による解の追跡 (球面領域)

本章では、球面上の恒常性自己調節モデル (2.17) に対して、数値計算によって得られた結果を紹介する。アルゴリズムの実装には、Half-Step-Shifted 格子スキームと不等間隔格子を組み合わせたものを用いる (4.2 節を参照)。また、簡単のために昼夜の変化は考えず平均化されているとし、地軸の傾きについても無視している。

各パラメータは Watson-Lovelock モデル [40], 円周拡散モデル [5] と同様に、

$$\begin{aligned} a_b &= 0.25, & a_g &= 0.50, & a_w &= 0.75, \\ \delta &= 0.003265, & f &= 0.3, & \bar{w} &= 295.5, & R_0 &= 4 \cdot 917L/\pi, & \sigma &= 5.67 \times 10^{-8}, \end{aligned}$$

とする。ただし、 $q = 40$ とし、デイジーと温度の拡散率はそれぞれ $d = 10^{-6}$, $D = 1.0$ で与える。

5.1 数値計算結果

図 5.2 は、定数関数 $\bar{u}_0(\theta, \phi) \equiv 0.321$, $\bar{v}_0(\theta, \phi) \equiv 0.291$, $\bar{w}_0(\theta, \phi) \equiv 290.96$ に微小な擾乱を与えたものを初期関数 $u_0(\theta, \phi)$, $v_0(\theta, \phi)$, $w_0(\theta, \phi)$ とした場合の数値計算結果を示している。図 5.2(a) は白いデイジーの分布, (b) は黒いデイジーの分布, (c) は温度の分布であり、これらの解は時刻 $t = 600$ でほとんど定常状態に近づいたものである。この場合、比較的高温で優位に育つ白いデイジーは赤道付近に生育域を拡げ、逆に低温で優位に育つ黒いデイジーは極付近で生育しており、2 種類の棲み分けが見られる。Watson-Lovelock モデルでは、同様の太陽光度 L に対して、2 種類のデイジーの共存が見られる。円周拡散モデルでは、同様の太陽光度 L において、図 5.2 と同じく赤道付近と極付近に白と黒のデイジーが棲み分けて生育している (図 5.1)。ただし図 5.1 では、赤道付近で白と黒のデイジーによって形成される縞模様がより細かくなっている。また、図 5.2 では赤道上に黒が育っているが、これは白の冷却効果によって黒が生育可能となったためだと考えられる。さらに、 θ 方向について対称なストライプパターンとなっているが、白と黒のデイジーの境界上ではジグザグの曲線が見てとれる。

また、この結果については、L'Hôpital の定理を用いるスキームによる数値計算でも同様の結果が得られている。

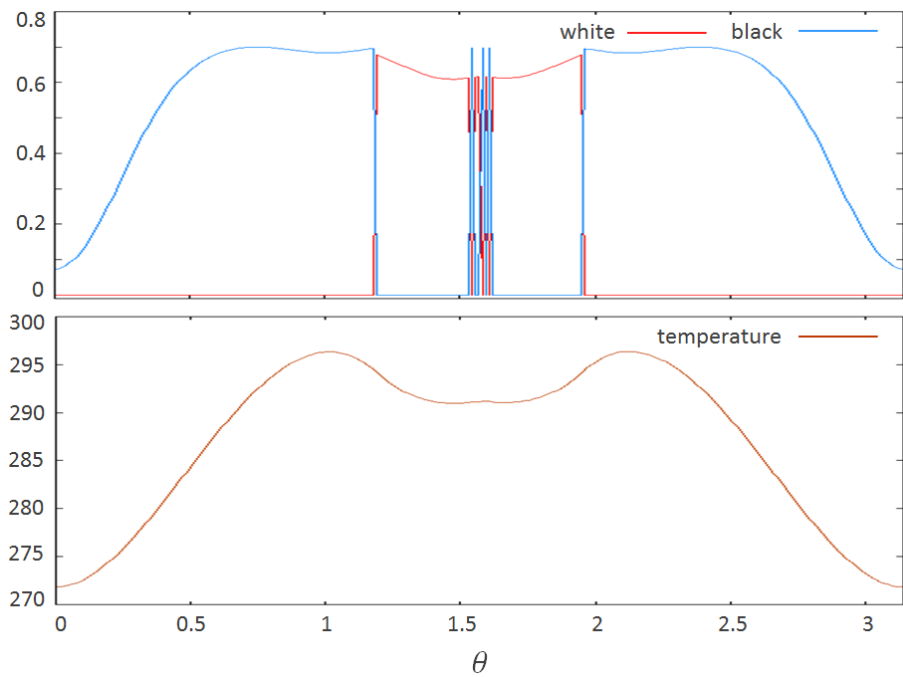


図 5.1: 円周拡散モデルの数値解.

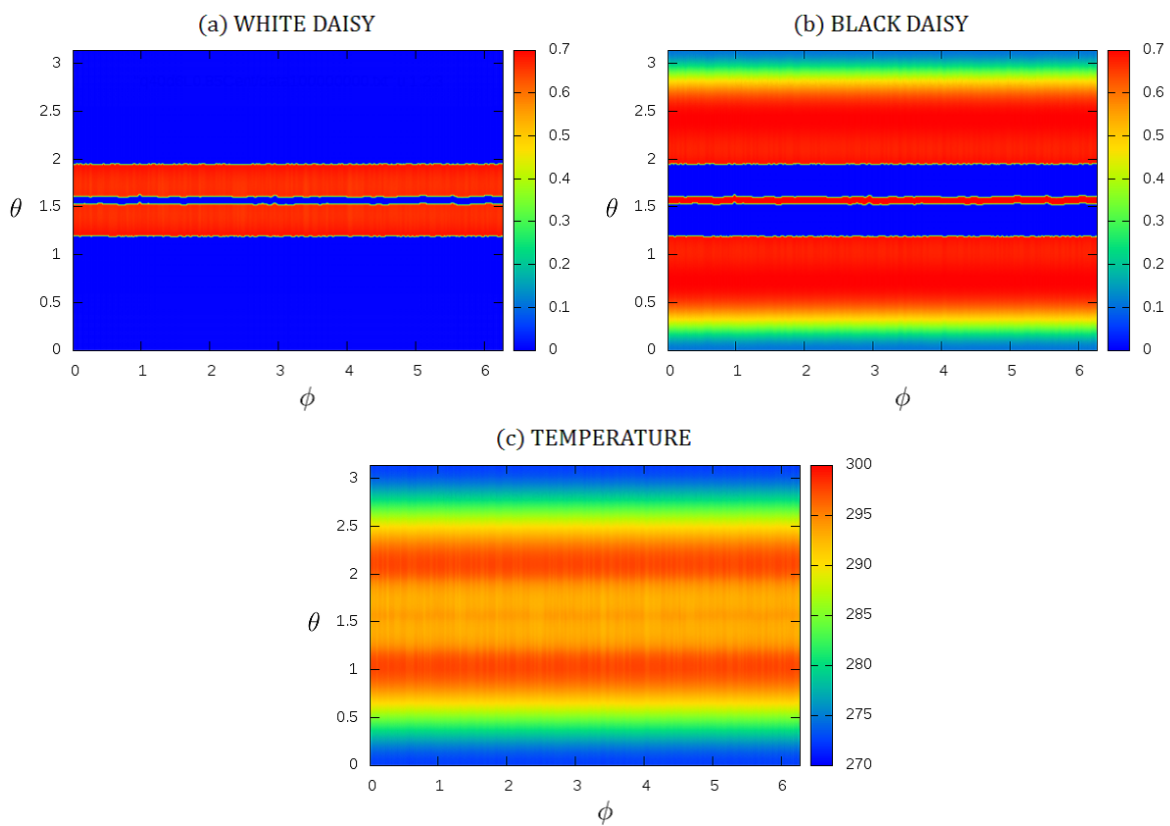


図 5.2: (a) $u(\theta, \phi, 600)$, (b) $v(\theta, \phi, 600)$, (c) $w(\theta, \phi, 600)$ をプロットしたグラフ.

図 5.3 は初期関数をランダムに与えた場合の初期値と $t = 600$ での数値計算結果である．この場合，パターンの対称性が崩れていることが分かる．また， $t = 600$ での解は指数アトラクタ上の挙動となっていると考えられる．

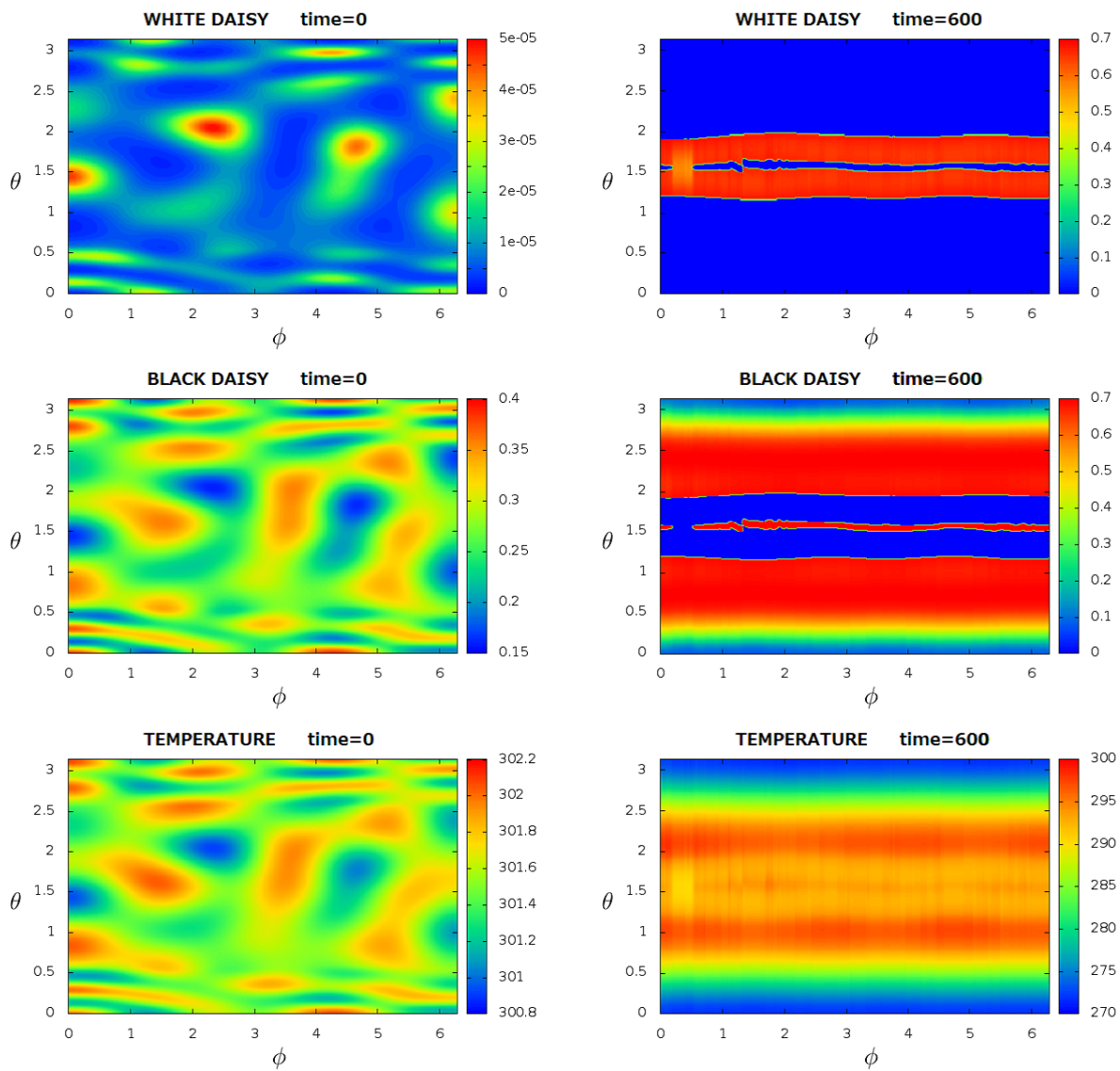


図 5.3: 左は $u_0(\theta, \phi)$, $v_0(\theta, \phi)$, $w_0(\theta, \phi)$ をプロットしたグラフ．右は解 $u(\theta, \phi, 600)$, $v(\theta, \phi, 600)$, $w(\theta, \phi, 600)$ をプロットしたグラフ．

第6章

恒常性自己調節モデルに対する力学系 (2次元長方形領域)

球面上での恒常性自己調節モデルに対する数値計算結果（図5.2）では，白と黒のデ이지の棲み分けパターンを観測した．本章では，この棲み分けパターンについて詳細に調べるために，恒常性自己調節モデルを長方形領域上で考える．これによって，解の安定性解析を行うことができ，一様状態の不安定化が起こる条件を調べることができる．加えて，モデルに対する指数アトラクタの存在を示すことで解の挙動を有限自由度なものへと絞り込み，パターン形成が起こることを理論的に示唆することができる．

6.1 モデル方程式

本節では，2次元長方形領域 Ω 上で次の反応拡散系を考える．

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + [(1-u-v)\Phi(u,v,w) - f]u, & (x,y,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v + [(1-u-v)\Psi(u,v,w) - f]v, & (x,y,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \frac{\partial w}{\partial t} = D\Delta w + [1 - g(u,v)]R - \sigma w^4, & (x,y,t) \in \Omega \times (0,\infty). \end{cases} \quad (6.1)$$

ここで， $\Omega = (-\ell_x, \ell_x) \times (0, \ell_y)$ とし， $0 < \ell_x < \infty, 0 < \ell_y < \infty$ とする．各パラメータは球面拡散モデル (2.17) と等しい．したがって，惑星全体のアルベドについては Watson-Lovelock モデルと同様に，

$$g(u,v) = (a_w - a_g)u + (a_b - a_g)v + a_g$$

によって決まり， $0 < a_b < a_g < a_w < 1$ とする．さらに，デ이지の成長についても (2.3)-(2.8) より，以下のように与えられる．

$$\begin{aligned} \Phi(u,v,w) &= \{1 - \delta(\bar{w} - w - q[g(u,v) - a_w])^2\}_+, \\ \Psi(u,v,w) &= \{1 - \delta(\bar{w} - w - q[g(u,v) - a_b])^2\}_+. \end{aligned}$$

各パラメータ $q, \delta, f, \bar{w}$ は正定数， d, D は正の拡散係数である．また，このモデルでのパラメータ R は正の定数を考えており， $R > \sigma q$ を満たしている（2.1 節を参照）．

未知関数 $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$ は, x 方向に周期境界条件, y 方向に Neumann 境界条件を課す. したがって, 境界 $\{-\ell_x, \ell_x\} \times (0, \ell_y) \times (0, \infty)$ 上で,

$$\begin{aligned} u(-\ell_x, y, t) &= u(\ell_x, y, t), & \frac{\partial u}{\partial x}(-\ell_x, y, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(\ell_x, y, t), \\ v(-\ell_x, y, t) &= v(\ell_x, y, t), & \frac{\partial v}{\partial x}(-\ell_x, y, t) &= \frac{\partial v}{\partial x}(\ell_x, y, t), \\ w(-\ell_x, y, t) &= w(\ell_x, y, t), & \frac{\partial w}{\partial x}(-\ell_x, y, t) &= \frac{\partial w}{\partial x}(\ell_x, y, t), \end{aligned} \quad (6.2)$$

を満たし, 境界 $(-\ell_x, \ell_x) \times \{0, \ell_y\} \times (0, \infty)$ 上では,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x, \ell_y, t) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, 0, t) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x, \ell_y, t) = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial y}(x, 0, t) &= \frac{\partial w}{\partial y}(x, \ell_y, t) = 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

を満たす. また, 初期条件については,

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad v(x, y, 0) = v_0(x, y), \quad w(x, y, 0) = w_0(x, y), \quad (6.4)$$

によって与えられる.

6.2 局所解

6.2.1 周期・Neumann 境界条件下でのラプラシアン

(6.1)-(6.4) を $L_2(\Omega)$ で定式化するために, 境界条件 (6.2), (6.3) の下での線形作用素 Δ を定義する.

空間 $H_{\text{per}}^1(\Omega)$ で与えられる半双線形形式

$$a(u, v) = a \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, dx + c \int_{\Omega} u \bar{v} \, dx, \quad u, v \in V, \quad (6.5)$$

を考える. ここで, a, c は正定数とする. また, 空間 $H_{\text{per}}^1(\Omega)$ は次のように定義される.

$$H_{\text{per}}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u(-\ell_x, y) = u(\ell_x, y), y \in (0, \ell_y)\}. \quad (6.6)$$

$u \in H^1(\Omega)$ であることから $u|_{\partial\Omega} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subset L_2(\partial\Omega)$ であり, $u(-\ell_x, y) = u(\ell_x, y)$ が $L_2(0, \ell_y)$ の関数として意味を持つ. したがって, $H_{\text{per}}^1(\Omega)$ は $H^1(\Omega)$ の閉部分集合であり, H^1 内積を持つ Hilbert 空間となる. ここで, 当然 $H_{\text{per}}^1(\Omega)$ は $L_2(\Omega)$ で稠密である. よって,

$$H_{\text{per}}^1(\Omega) \subset L_2(\Omega) \subset H_{\text{per}}^1(\Omega)^*$$

は空間の3つ組となる．ところで，(6.5)で与えられる $a(u, v)$ は， $H_{\text{per}}^1(\Omega)$ で連続かつ強圧的な半双線形形式である．変分法の理論 ([10] を参照) より， $a(u, v)$ に対応する線形作用素 $\mathcal{A}$ が次のように決まる．

$$\text{すべての } u, v \in H_{\text{per}}^1(\Omega) \text{ について } a(u, v) = \langle \mathcal{A}, v \rangle_{H_{\text{per}}^1(\Omega)^* \times H_{\text{per}}^1(\Omega)}.$$

ここで， $\mathcal{A}$ は領域 $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = H_{\text{per}}^1(\Omega)$ を持つ $H_{\text{per}}^1(\Omega)^*$ の角域作用素となる．したがって， $\mathcal{A}$ は空間 $H_{\text{per}}^1(\Omega)^*$ での $-a\Delta + c$ の実現とみなすことができる．

$\mathcal{A}$ の $L_2(\Omega)$ 部分を

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in H_{\text{per}}^1(\Omega); \mathcal{A}u \in L_2(\Omega)\}, \\ \mathcal{A}u = Au, \end{cases}$$

と定義する．つまり， $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ であるための必要十分条件は，ある $f \in L_2(\Omega)$ により，すべての $v \in H_{\text{per}}^1(\Omega)$ に対して $a(u, v) = (f, v)$ となることである．再び変分法の理論を用いると， A は稠密に定義された $L_2(\Omega)$ の線形作用素となる．さらに， $a(u, v)$ が対称であることから， A は $L_2(\Omega)$ の正定値自己共役作用素となる．今の場合，領域 $\mathcal{D}(A)$ は以下のように特徴づけられる．

命題 6.2.1. 領域 $\mathcal{D}(A)$ は次のように与えられる．

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in H^2(\Omega); u \text{ は } \partial\Omega \text{ 上で条件 (6.2), (6.3) を満たす}\}. \quad (6.7)$$

さらに，

$$\|u\|_{H^2} \leq C\|Au\|_{L_2}, \quad u \in \mathcal{D}(A), \quad (6.8)$$

が成り立つ．

証明. $u \in H^2(\Omega)$ は条件 (6.2), (6.3) を満たしており， $v \in H_{\text{per}}^1(\Omega)$ は任意の関数とする．このとき，部分積分によって，

$$\iint_{\Omega} u_x \bar{v}_x dx dy = \int_0^{\ell_y} dy \int_{-\ell_x}^{\ell_x} u_x \bar{v}_x dx = \int_0^{\ell_y} dy \left\{ [u_x \bar{v}]_{x=-\ell_x}^{x=\ell_x} - \int_{-\ell_x}^{\ell_x} u_{xx} \bar{v} dx \right\}$$

となる．ここで， y 方向では周期境界条件を満たしていることにより，

$$[u_x \bar{v}]_{x=-\ell_x}^{x=\ell_x} = u_x(\ell_x, y) \bar{v}(\ell_x, y) - u_x(-\ell_x, y) \bar{v}(-\ell_x, y) = 0, \quad \text{a.e. } y \in (0, \ell_y).$$

したがって， $\iint_{\Omega} u_x \bar{v}_x dx dy = -\iint_{\Omega} u_{xx} \bar{v} dx dy$ である．同様の議論によって，

$$\iint_{\Omega} u_y \bar{v}_y dx dy = \int_{-\ell_x}^{\ell_x} dx \left\{ [u_y \bar{v}]_{y=0}^{y=\ell_y} - \int_0^{\ell_y} u_{yy} \bar{v} dy \right\} = -\iint_{\Omega} u_{yy} \bar{v} dx dy$$

が得られる．このようにして， $(\nabla u, \nabla v) = (-\Delta u, v)$ となることが分かる．(6.5) を考慮すると，これは実際に $a(u, v) = (-a\Delta u + cu, v)$ であることを示しており，それにより $u \in \mathcal{D}(A)$ かつ $Au = -a\Delta u + cu$ となる．

$u \in \mathcal{D}(A)$ ならば $u \in H^2(\Omega)$ であることを示すために、 $L_2(\Omega)$ に属す関数に対して 2 重フーリエ展開を用いる．変数 $x \in (-\ell_x, \ell_x)$ に対しては、基底関数 $\cos \frac{m\pi}{\ell_x}x$ と $\sin \frac{m\pi}{\ell_x}x$ によって展開し、また、変数 $y \in (0, \ell_y)$ に対しては、基底関数 $\cos \frac{n\pi}{\ell_y}y$ によって展開する．ただし、 $m, n = 0, 1, 2, \dots$ とする．そのため、 u は次のように級数展開される．

$$u = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[u_{mn} \cos \frac{m\pi}{\ell_x}x + v_{mn} \sin \frac{m\pi}{\ell_x}x \right] \cos \frac{n\pi}{\ell_y}y.$$

ここで、 u_{mn}, v_{mn} は基底関数によって決まるフーリエ係数であり、 $\sum_{m,n} |u_{mn}|^2 < \infty$, $\sum_{m,n} |v_{mn}|^2 < \infty$ を満たす．また、

$$-\Delta u = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{m\pi}{\ell_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell_y} \right)^2 \right] \left[u_{mn} \cos \frac{m\pi}{\ell_x}x + v_{mn} \sin \frac{m\pi}{\ell_x}x \right] \cos \frac{n\pi}{\ell_y}y$$

となる． $u \in \mathcal{D}(A)$ とすると、 $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset H_{\text{per}}^1(\Omega)$ であることから、条件 $Au \in L_2(\Omega)$ は $-\Delta u = f \in L_2(\Omega)$ を意味する．したがって、 f_{mn}, g_{mn} が f のフーリエ係数ならば、すべての $(m, n) \neq (0, 0)$ に対して、

$$u_{mn} = \left[\left(\frac{m\pi}{\ell_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell_y} \right)^2 \right]^{-1} f_{mn}, \quad v_{mn} = \left[\left(\frac{m\pi}{\ell_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell_y} \right)^2 \right]^{-1} g_{mn},$$

が導かれる．これにより、

$$\|u_{xx}\|_{L_2}^2 + \|u_{xy}\|_{L_2}^2 + \|u_{yy}\|_{L_2}^2 \leq C \left(\sum_{m,n} |f_{mn}|^2 + \sum_{m,n} |g_{mn}|^2 \right) \leq C \|f\|_{L_2}^2 \quad (6.9)$$

が得られる．よって、 u は $H^2(\Omega)$ に属する． $u \in \mathcal{D}(A)$ が $u \in H^2(\Omega)$ を意味していることから、上記の議論を繰り返すことで、すべての $v \in H_{\text{per}}^1(\Omega)$ に対して、以下の 2 つの積分

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell_y} [u_x \bar{v}]_{x=-\ell_x}^{x=\ell_x} dy &= \int_0^{\ell_y} [u_x(\ell_x, y) \bar{v}(\ell_x, y) - u_x(-\ell_x, y) \bar{v}(-\ell_x, y)] dy, \\ \int_{-\ell_x}^{\ell_x} [u_y \bar{v}]_{y=0}^{y=\ell_y} dx &= \int_{-\ell_x}^{\ell_x} [u_y(x, \ell_y) \bar{v}(x, \ell_y) - u_y(x, 0) \bar{v}(x, 0)] dx, \end{aligned}$$

が必ず 0 になると結論付けられる．(6.6) の定義から、ほとんど至るところでの $y \in (0, \ell_y)$ に対して $u_x(\ell_x, y) - u_x(-\ell_x, y) = 0$ であり、ほとんど至るところでの $x \in (-\ell_x, \ell_x)$ に対して $u_y(x, \ell_y) - u_y(x, 0) = 0$ であること、すなわち、 u が境界条件 (6.2), (6.3) を満たしていることが確認できる．

最後に、 $\|u\|_{H^1} \leq C \|Au\|_{L_2}$ であることから、(6.8) が (6.9) から直ちに確認できる． $\square$

以上より、周期・Neumann 境界条件下で A が $L_2(\Omega)$ での $-a\Delta + c$ の実現であることが示された．

6.2.2 抽象的定式化

問題 (6.1)-(6.4) を Banach 空間 X における抽象発展方程式に対する Cauchy 問題

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = F(U), & 0 < t < \infty, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (6.10)$$

として定式化する． X は L_2 の積空間

$$X = \left\{ U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}; u \in L_2(\Omega), v \in L_2(\Omega), w \in L_2(\Omega) \right\}$$

を考える．作用素 A は X の作用素行列で， $\text{diag}\{A_d, A_d, A_D\}$ で与えられる．ここで， A_d と A_D はそれぞれ微分作用素 $-d\Delta + f$ と $-D\Delta + 1$ に境界条件 (6.2), (6.3) を付して $L_2(\Omega)$ で実現した作用素である．また， A は X の正定値自己共役作用素である．当然， $\mathcal{D}(A)$ は (6.2), (6.3) によって特徴付けられる．

非線形作用素 $F(U)$ は (6.1) に含まれる反応項から定められる．しかし，モデリングの観点から，解は必ず $u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1, 0 \leq w \leq (R/\sigma)^{\frac{1}{4}}$ の範囲に存在していなければならない．これらの条件から， X の非線形作用素 F を

$$F(U) = \begin{pmatrix} H_1(1 - \text{Re } u - \text{Re } v) \Phi(H_1(\text{Re } u), H_1(\text{Re } v), H_2(\text{Re } w)) H_1(\text{Re } u) \\ H_1(1 - \text{Re } u - \text{Re } v) \Psi(H_1(\text{Re } u), H_1(\text{Re } v), H_2(\text{Re } w)) H_1(\text{Re } v) \\ [1 - g(H_1(\text{Re } u), H_1(\text{Re } v))] R - \sigma H_2(\text{Re } w)^4 + H_2(\text{Re } w) \end{pmatrix}$$

によって導入する．ここで， $H_1(\xi)$ と $H_2(\xi)$ はそれぞれ次のように定義されたカットオフ関数である．

$$H_1(\xi) = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi \leq 0, \\ \xi, & 0 < \xi \leq 1, \\ 1, & 1 < \xi < \infty, \end{cases} \quad H_2(\xi) = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi \leq 0, \\ \xi, & 0 < \xi \leq (R/\sigma)^{\frac{1}{4}}, \\ (R/\sigma)^{\frac{1}{4}}, & (R/\sigma)^{\frac{1}{4}} < \xi < \infty. \end{cases}$$

最後に，初期値 U_0 の空間を次のように設定する．

$$K = \left\{ U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in X; u_0 \geq 0, v_0 \geq 0, u_0 + v_0 \leq 1, 0 \leq w_0 \leq \left(\frac{R}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \right\}.$$

6.2.3 局所解の構成

(6.10) に対する局所解は，抽象放物型発展方程式の理論を用いて容易に構成できる．実際に， $H_1(\xi)$ と $H_2(\xi)$ が $-\infty < \xi < \infty$ に対して一様有界であり Lipschitz 連続な関数であることは明らかである．そのため， $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$ に対して $\Phi(H_1(\text{Re } u), H_1(\text{Re } v), H_2(\text{Re } w))$

と $\Psi(H_1(\operatorname{Re} u), H_1(\operatorname{Re} v), H_2(\operatorname{Re} w))$ は一様有界で Lipschitz 連続な関数である。したがって、 $F(U)$ が X の有界作用素であり Lipschitz 条件を満たすこと、すなわち、

$$\begin{aligned} \|F(U)\|_X &\leq C_1, \quad U \in X, \\ \|F(U) - F(V)\|_X &\leq C_2 \|U - V\|_X, \quad U, V \in X, \end{aligned}$$

は容易に確認できる。ここで、 $C_i > 0, i = 1, 2$ は適当な定数である。

[45, Theorem 4.4] の方法を適用すると、任意の $U_0 \in X$ に対して関数空間

$$U \in \mathcal{C}([0, T_{U_0}]; X) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{U_0}]; X) \cap \mathcal{C}((0, T_{U_0}]; \mathcal{D}(A))$$

で (6.10) に対する唯一つの局所解が存在することが言える。さらに、解 $U(t)$ は次のようなノルム評価を満たす。

$$\|U(t)\|_X + t \|AU(t)\|_X \leq C_{U_0}, \quad 0 < t \leq T_{U_0}. \quad (6.11)$$

ここで、定数 C_{U_0} と時刻 $T_{U_0} > 0$ は $\|U_0\|_X$ によってのみ決まる。

次に、 U_0 が K に含まれている場合に各 $0 < t \leq T_{U_0}$ に対する局所解 $U(t)$ も K に含まれていることを示す。

命題 6.2.2. $U_0 \in K$ ならば、各 $0 < t \leq T_{U_0}$ に対して $U(t) \in K$ である。

証明. $U(t)$ の複素共役 $\overline{U(t)}$ も (6.10) の局所解であることから容易に示される。解の一意性から、各時刻 $0 < t \leq T_{U_0}$ に対して $U(t) = \overline{U(t)}$ であることが言える。よって、 $U(t)$ は実数値である。

先ず、 $u(t) \geq 0$ を証明する。ここで、 $H(u) = \frac{1}{2}u^2$ ($-\infty < u < 0$), $H(u) = 0$ ($0 \leq u < \infty$) によって与えられるカットオフ関数を用いる。このとき、 $g(t) = \iint_{\Omega} H(u(x, y, t)) dx dy$ と置くと、 $0 < t \leq T_{U_0}$ に対して、

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt}(t) &= \iint_{\Omega} H'(u) \frac{\partial u}{\partial t} dx dy = d \iint_{\Omega} H'(u) \Delta u dx dy \\ &\quad + \iint_{\Omega} H'(u) [H_1(1 - u - v) \Phi(H_1(u), H_1(v), H_2(w)) H_1(u) - fu] dx dy \end{aligned}$$

となる。ここで、 $H'(u) \in H_{\text{per}}^1(\Omega)$ であることを考慮して、

$$\iint_{\Omega} H'(u) \Delta u dx dy = - \iint_{\Omega} \nabla H'(u) \cdot \nabla u dx dy = - \iint_{\Omega} H''(u) |\nabla u|^2 dx dy \leq 0$$

が得られる。また、すべての $-\infty < u < \infty$ に対して、 $H'(u)H_1(u) = 0$ かつ $-H'(u)u \leq 0$ であることから、 $\frac{dg}{dt}(t) \leq 0$ 、すなわち、 $g(t) \leq g(0) = 0$ が導かれる。これは、各時刻 $0 < t \leq T_{U_0}$ に対して $u(t) \geq 0$ であることを意味する。

$v(t)$ に対しても同様の議論を繰り返すことで、各時刻 $0 < t \leq T_{U_0}$ に対して $v(t) \geq 0$ が言える。

次に、 $u(t) + v(t) \leq 1$ であることを確認する。ここで、 $z(t) = 1 - u(t) - v(t)$ が、

$$\frac{\partial z}{\partial t} = d \Delta z - [\Phi(H_1(u), H_1(v), H_2(w)) + \Psi(H_1(u), H_1(v), H_2(w))] H_1(z) + f[u + v]$$

の解とみなせることに注目する．これにより， $z(t)$ に対する同様の議論から $z(t) \geq 0$ ，すなわち， $u(t) + v(t) \leq 1$ が各時刻 $0 < t \leq T_{U_0}$ に対して成り立っていることが示される．

次に， $0 \leq w(t) \leq (R/\sigma)^{\frac{1}{4}}$ を証明する．非負性 $w(t) \geq 0$ に注意すると， $u(t)$ と $v(t)$ の場合と同様である． $w_1(t) = (R/\sigma)^{\frac{1}{4}} - w(t)$ と置くと， $w_1(t)$ は，

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = D\Delta w_1 - \sigma[R/\sigma - H_2(w)^4] + Rg(u, v) + [w - H_2(w)]$$

の解となる．ここで，関数 $h(t) = \iint_{\Omega} H(w_1(x, y, t)) dx dy$ を微分する．すべての $-\infty < w < \infty$ に対して， $H'((R/\sigma)^{\frac{1}{4}} - w)[R/\sigma - H_2(w)^4] = 0$ かつ $H'((R/\sigma)^{\frac{1}{4}} - w)[w - H_2(w)] \leq 0$ であることから， $\frac{dh}{dt}(t) \leq 0$ ，すなわち， $h(t) \leq h(0) = 0$ であることが導かれる．よって，各 $0 < t \leq T_{U_0}$ に対して $(R/\sigma)^{\frac{1}{4}} - w(t) \geq 0$ である．

したがって， $U(t)$ が K に含まれているためのすべての条件が確認できた． $\square$

$U(t) \in K$ とすると， $U(t)$ は確かに $H_1(u(t)) = u(t)$ ， $H_1(v(t)) = v(t)$ ， $H_1(1 - u(t) - v(t)) = 1 - u(t) - v(t)$ ，そして $H_2(w(t)) = w(t)$ を満たしている．これは，上で構成された (6.10) に対する局所解 $U(t)$ が元の問題 (6.1)-(6.4) の局所解とみなせることを意味している．

6.3 大域解と力学系

6.3.1 大域解の構成

任意の $U_0 \in K$ に対して，(6.10) に対する大域解は簡単に構成できる．実際に，命題 6.2.2 はノルム $\|U(t)\|_X$ が区間 $[0, T_{U_0}]$ 上で一様有界のままであることを示している．そしてこれは，任意の局所解が K に含まれていることから， $\|U(T_{U_0})\|_X$ のみによって決まる時間区間 $[0, T_{U_0} + \tau]$ ， $\tau > 0$ で局所解を常に拡張できるということを意味している．

したがって，次の存在定理が得られる．

定理 6.3.1. 任意の $U_0 \in K$ に対して，(6.10) は関数空間

$$U \in \mathcal{C}([0, \infty); X) \cap \mathcal{C}^1((0, \infty); X) \cap \mathcal{C}((0, \infty); \mathcal{D}(A))$$

で唯一つの大域解 $U(t)$ を有し，各 $0 < t < \infty$ に対して $U(t)$ は K の値をとる．

さらに， $U(t)$ は大域評価

$$\|U(t)\|_X + t(1+t)^{-1}\|AU(t)\|_X \leq C_3, \quad 0 < t < \infty, \quad (6.12)$$

を満たす．ここで， C_3 は K での初期値に依存しない適当な定数である．

証明. (6.12) が区間 $(0, \tau]$ で局所的に成り立っていることは既に分かっている．ここでの τ は上で述べた時間区間である．そこで，初期値を $U_1 = U(\frac{\tau}{2}) \in K$ に決めなおし，この局所解に (6.11) を適用すると，

$$\|U(t)\|_X + (t - \frac{\tau}{2})\|AU(t)\|_X \leq C, \quad \tau \leq t \leq \frac{3\tau}{2},$$

となる．これは，拡張された区間 $(0, \frac{3\tau}{2}]$ で (6.12) が成り立っていることを示している．この手順を繰り返すことで，すべての区間 $(0, \infty)$ で (6.12) が得られる． $\square$

K から選んだ初期値に関して大域解が Lipschitz 連続であることも確認できる。ただし、その証明については定理 3.2.3 の場合と同様である。

定理 6.3.2. $U_0, V_0 \in K$ とし、 $U(t)$ と $V(t)$ はそれぞれ初期値 U_0 と V_0 を持つ (6.10) の大域解とする。このとき、 K から選んだ初期値に対して一様であるような適当な指数 $\beta > 0$ と適当な定数 $C_4 > 0$ を用いて、

$$\|U(t) - V(t)\|_X \leq C_4 e^{\beta t} \|U_0 - V_0\|_X, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (6.13)$$

$$\sqrt{t} \|\nabla[U(t) - V(t)]\|_X \leq C_4 e^{\beta t} \|U_0 - V_0\|_X, \quad 0 < t < \infty, \quad (6.14)$$

となる。

6.3.2 力学系

本節では、(6.10) によって定められた力学系の構成とアトラクタ集合の存在を示す。 $U_0 \in K$ に対して、 $U(t; U_0)$ は (6.10) の大域解とする。さらに、

$$S(t)U_0 = U(t; U_0), \quad 0 \leq t < \infty,$$

とする。このとき、 $S(t)$ は K 上の非線形半群である。すなわち、 $0 \leq s, t < \infty$ に対して $S(0) = I$, $S(t+s) = S(t)S(s)$ である。さらに、 $S(t)$ は $(t, U_0) \mapsto S(t)U_0$ が $[0, \infty) \times K$ から X へ連続であるという意味で連続とみなされる。実際に、 $(t, U_0) \in [0, \infty) \times K$ を固定すると、

$$\begin{aligned} \|S(s)V_0 - S(t)U_0\|_X &\leq \|S(s)V_0 - S(s)U_0\|_X + \|S(s)U_0 - S(t)U_0\|_X \\ &\leq e^{\beta s} \|V_0 - U_0\|_X + \|S(s)U_0 - S(t)U_0\|_X \end{aligned}$$

である。よって、 $(s, V_0) \rightarrow (t, U_0)$ のとき、 X で $S(s)V_0 \rightarrow S(t)U_0$ である。よって、 $S(t)$ は空間 X で $(S(t), K, X)$ として表されるような力学系を定義する。ここで、相空間 K は有界かつ X の閉部分集合である。

よく知られているように、散逸評価はグローバルアトラクタの存在を与える。 K の部分集合 B を次のように定める。

$$B = K \cap \{U \in \mathcal{D}(A); \|AU\|_X \leq C_3 + 1\}.$$

このとき、各 $t \geq T$ に対して $S(t)K \subset B$ であるような時刻 T が存在する。つまり、 B は吸収集合である。さらに、 B は X のコンパクト集合である。したがって、 B は $(S(t), K, X)$ のコンパクト吸収集合である。 $S(T)B \subset S(T)K \subset B$ であることから、相空間を代わりに

$$\mathcal{K} \equiv \bigcup_{0 \leq t \leq T} S(t)B \subset K$$

と変更する。このとき、各 $t > 0$ に対して $S(t)\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ 、すなわち、 $\mathcal{K}$ は不変集合である。したがって、 $\mathcal{K}$ はコンパクトかつ吸収集合というだけでなく不変でもある。これは、

$(S(t), K, X)$ の軌道の漸近挙動が、力学系 $(S(t), \mathcal{K}, X)$ に帰着されることを意味する。ここで、位相空間 $\mathcal{K}$ は X のコンパクト集合である。一般的な議論により、 $\mathcal{B} = \bigcap_{0 \leq t < \infty} S(t)\mathcal{K}$ は $(S(t), \mathcal{K}, X)$ のグローバルアトラクタであることが分かる。

さらに、3.3 節と同様に、評価式 (6.14) は指数アトラクタの存在をもたらす。したがって、以下の定理を得る。

定理 6.3.3. 力学系 $(S(t), K, X)$ は指数アトラクタを有する。

証明. $(S(t), \mathcal{K}, X)$ に対する指数アトラクタ $\mathcal{M}$ が存在することについては既に表示されている。このとき、 $S(T)K \subset B \subset \mathcal{K}$ ならば、 $\mathcal{M}$ が $(S(t), K, X)$ に対する指数アトラクタであることがすぐに示される。□

6.4 定数定常解

方程式系 (6.1)-(6.4) に対する定数定常解の存在とその安定性について述べる。

u, v, w に対して以下の連立方程式を考える。

$$\varphi(u, v, w) \equiv [(1 - u - v)\Phi(u, v, w) - f]u = 0, \quad (6.15)$$

$$\psi(u, v, w) \equiv [(1 - u - v)\Psi(u, v, w) - f]v = 0, \quad (6.16)$$

$$\chi(u, v, w) \equiv [1 - g(u, v)]R - \sigma w^4 = 0. \quad (6.17)$$

各パラメータの値は [40] と同様に、

$$\begin{aligned} a_b &= 0.25, & a_g &= 0.50, & a_w &= 0.75, \\ q &= 20, & \delta &= 0.003265, & f &= 0.3, & \bar{w} &= 295.5, & \sigma &= 5.67 \times 10^{-8}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

とした場合を考える。ただし、 R は制御パラメータとして扱う。

6.4.1 正の定数定常解

$u \neq 0, v \neq 0$ より、方程式 (6.15), (6.16) は次のように書き換えられる。

$$(1 - u - v)\Phi(u, v, w) - f = 0, \quad (6.15')$$

$$(1 - u - v)\Psi(u, v, w) - f = 0. \quad (6.16')$$

(6.15'), (6.16') より、

$$\begin{aligned} (1 - u - v) \{1 - \delta(\bar{w} - w - q[g(u, v) - a_w])^2\} \\ = (1 - u - v) \{1 - \delta(\bar{w} - w - q[g(u, v) - a_b])^2\} \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 a_b, a_g, a_w の値を代入すると、

$$(1 - u - v)\delta q \left[w - \bar{w} + \frac{q}{4}(u - v) \right] = 0$$

となる．したがって， $\delta \neq 0, q \neq 0$ であること，さらに， $1 - u - v \neq 0$ であることが $f \neq 0$ から直ちに導かれ，

$$u - v = \frac{4}{q}(\bar{w} - w) \quad (6.19)$$

が得られる．(6.19) より，(6.17) は次のような w についての 4 次方程式に変形できる．

$$w^4 - \rho(w - w_0) = 0. \quad (6.20)$$

ここで， $\rho = R/(q\sigma)$ ， $w_0 \equiv \bar{w} - q/2 > 0$ とする．(6.19) より，(6.15')，(6.16') は，

$$(1 - u - v) \left(1 - \frac{q^2}{4^2} \delta \right) - f = 0$$

と変形でき，

$$u + v = 1 - \frac{f}{1 - (q/4)^2 \delta} \quad (6.21)$$

が得られる．

ここで， $k_1(w) = w^4$ ， $k_2(w) = \rho(w - w_0)$ と置くと， k_1 と k_2 のグラフは図 6.1 のようになる． k_1 と k_2 が接する場合（図 6.1(ii) の場合），2 つのグラフの交点は，

$$w = \frac{4}{3}w_0$$

となる．したがって，(6.20) から， k_1 と k_2 が接する場合での R は以下のように求まる．

$$R = \frac{4^4}{3^3} q \sigma w_0^3.$$

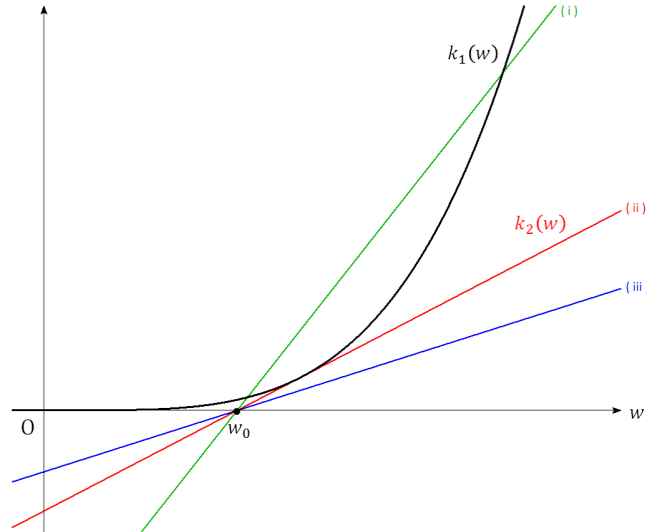


図 6.1: $k_1(w)$ と $k_2(w)$ のグラフ．

したがって, $k_1(w)$ と $k_2(w)$ の位置関係より, (6.19)-(6.21) の解の個数は,

$$\begin{cases} R > \frac{4^4}{3^3} q \sigma w_0^3 \text{ のとき } 2 \text{ つ} & \dots \text{ (i)} \\ R = \frac{4^4}{3^3} q \sigma w_0^3 \text{ のとき } 1 \text{ つ} & \dots \text{ (ii)} \\ R < \frac{4^4}{3^3} q \sigma w_0^3 \text{ のときなし} & \dots \text{ (iii)} \end{cases} \quad (6.22)$$

と定まる.

ここで, (6.22)-(i) の条件を満たしている場合について考える. このとき, w の正であるような2つの解をそれぞれ w^*, w_* とする. ただし, $w_0 < w_* < \frac{4}{3}w_0 < w^*$ である. これら2つの定数定常解に対して, それぞれ

$$0 \leq u_* + v_* \leq 1, \quad u_* \geq 0, \quad v_* \geq 0,$$

が満たされていなければならない. (6.21) より, $0 \leq u_* + v_* \leq 1$ となるためには,

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 - \frac{f}{1 - (q/4)^2 \delta} \leq 1 \\ \Leftrightarrow \quad q^2 &\leq \frac{16(1-f)}{\delta} \end{aligned} \quad (6.23)$$

を満たしていればよい. さらに, $u_* \geq 0$ であるためには,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left[1 - \frac{f}{1 - (q/4)^2 \delta} \right] + \frac{2}{q} (\bar{w} - w_*) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad &\frac{f}{1 - (q/4)^2 \delta} - \frac{4}{q} (\bar{w} - w_*) \geq 1 \\ \Leftrightarrow \quad &0 \leq \frac{4}{q} (w_* - \bar{w}) \leq 1 \\ \Leftrightarrow \quad &\bar{w} \leq w_* \leq \frac{q}{4} + \bar{w} \end{aligned} \quad (6.24)$$

を満たしている必要がある. $v_* \geq 0$ についても同様に, 条件

$$\frac{q}{4} - \bar{w} \leq w_* \leq \bar{w} \quad (6.25)$$

が得られる. (6.24), (6.25) を R についての条件に書き直すと,

$$\frac{\sigma q \left(\bar{w} - \frac{q}{4} \right)^4}{\bar{w} - w_* - \frac{q}{2}} \leq R \leq \frac{\sigma q \left(\bar{w} + \frac{q}{4} \right)^4}{\bar{w} - w_* - \frac{q}{2}} \quad (6.26)$$

となる. ここで, パラメータ (6.18) に対して, 条件式 (6.23), (6.26) を満たすような定数定常解 u_*, v_* は w_* に対してのみ存在し, w^* に対しては存在しないことが計算によって確認できる.

6.4.2 定数定常解の安定・不安定性

次に、正であるような定数定常解 $\mathbf{u}^* = {}^t(u_*, v_*, w_*)$ の安定性について調べる．連立偏微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= d\Delta u + \varphi(u, v, w), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= d\Delta v + \psi(u, v, w), \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= D\Delta w + \chi(u, v, w),\end{aligned}\tag{6.27}$$

の右辺をベクトル $\mathcal{L}$ で表すと,

$$\mathcal{L}(u, v, w) = \begin{pmatrix} d\Delta u + \varphi \\ d\Delta v + \psi \\ D\Delta w + \chi \end{pmatrix}\tag{6.28}$$

となる．Fréchet 微分を用いて, $\mathcal{L}$ を定数定常解 $\mathbf{u}^*$ の周りで線形化する． $\tilde{u} = u - u_*$ と置くと, $\partial u / \partial t$ は次のように書ける．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{u} + u_*) &= \varphi(\tilde{u} + u_*, \tilde{v} + v_*, \tilde{w} + w_*) + d\Delta(\tilde{u} + u_*) \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &\approx \varphi(u_*, v_*, w_*) + \varphi_u(u_*, v_*, w_*)\tilde{u} + \varphi_v(u_*, v_*, w_*)\tilde{v} + \varphi_w(u_*, v_*, w_*)\tilde{w} + d\Delta\tilde{u} \\ &= \varphi_u^*\tilde{u} + \varphi_v^*\tilde{v} + \varphi_w^*\tilde{w} + d\Delta\tilde{u}\end{aligned}\tag{6.29}$$

$\partial v / \partial t, \partial w / \partial t$ についても同様に,

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \approx \psi_u^*\tilde{u} + \psi_v^*\tilde{v} + \psi_w^*\tilde{w} + d\Delta\tilde{v},\tag{6.30}$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} \approx \chi_u^*\tilde{u} + \chi_v^*\tilde{v} + \chi_w^*\tilde{w} + D\Delta\tilde{w},\tag{6.31}$$

と計算でき, 定数定常解 $\mathbf{u}^*$ に対する線形化作用素

$$\mathcal{L}^* = \begin{pmatrix} \varphi_u^* + d\Delta & \varphi_v^* & \varphi_w^* \\ \psi_u^* & \psi_v^* + d\Delta & \psi_w^* \\ \chi_u^* & \chi_v^* & \chi_w^* + D\Delta \end{pmatrix}\tag{6.32}$$

が得られる．ここで,

$$\mathbf{u} = {}^t(u, v, w), \quad \mathbf{F} = {}^t\left(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)\right),$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{d, d, D\},$$

とすると, (6.1)-(6.3) の線形化方程式は定数定常解 $\mathbf{u}^*$ の近傍で,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{D} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}(\mathbf{u}), & (x, y, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}_0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ \mathbf{u}(-\ell_x, y, t) = \mathbf{u}(\ell_x, y, t), & (x, y, t) \in \{-\ell_x, \ell_x\} \times (0, \ell_y) \times (0, \infty), \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(-\ell_x, y, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(\ell_x, y, t), & (x, y, t) \in \{-\ell_x, \ell_x\} \times (0, \ell_y) \times (0, \infty), \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}(x, 0, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}(x, \ell_y, t) = \mathbf{0}, & (x, y, t) \in (-\ell_x, \ell_x) \times \{0, \ell_y\} \times (0, \infty), \end{array} \right. \quad (6.33)$$

と書ける。

線形化作用素 $\mathcal{L}^*$ の固有値問題

$$\mathbf{D} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}'(\mathbf{u}^*) \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \quad (6.34)$$

について調べる。境界条件を考慮して $\mathbf{u}$ の各成分を

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{m,n} \xi_{m,n}(x, y) + d_{m,n} \eta_{m,n}(x, y)), \\ v(x, y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (b_{m,n} \xi_{m,n}(x, y) + e_{m,n} \eta_{m,n}(x, y)), \\ w(x, y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (c_{m,n} \xi_{m,n}(x, y) + f_{m,n} \eta_{m,n}(x, y)), \end{aligned}$$

とフーリエ展開する。ここで、 $m, n = 0, 1, 2, \dots$ に対して、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_{m,n}(x, y) &= \begin{pmatrix} \xi_{m,n}(x, y) \\ \eta_{m,n}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{m\pi}{\ell_x} x \cos \frac{n\pi}{\ell_y} y \\ \sin \frac{m\pi}{\ell_x} x \cos \frac{n\pi}{\ell_y} y \end{pmatrix}, \\ \mu_{m,n} &= \left(\frac{m\pi}{\ell_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell_y} \right)^2, \\ \mathbf{a}_{m,n} &= \begin{pmatrix} a_{m,n} & d_{m,n} \\ b_{m,n} & e_{m,n} \\ c_{m,n} & f_{m,n} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

とするとベクトル的に以下のように表せる。

$$\mathbf{u}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_{m,n} \boldsymbol{\xi}_{m,n}(x, y)$$

これを (6.34) に代入すると、

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \mathbf{D} \mathbf{a}_{m,n} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{m,n}}{\partial y^2} \right) + \mathbf{F}'(\mathbf{u}^*) \mathbf{a}_{m,n} \boldsymbol{\xi}_{m,n} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \mathbf{a}_{m,n} \boldsymbol{\xi}_{m,n}$$

となる．ここで，

$$\frac{\partial \xi_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi_{m,n}}{\partial y^2} = -\mu_{m,n} \xi_{m,n}$$

であることに注意して $\mathbf{a}_{m,n}$ について整理すると，両辺の係数は等しくなる．

$$-\mu_{m,n} \mathbf{D} \mathbf{a}_{m,n} + \mathbf{F}'(\mathbf{u}^*) \mathbf{a}_{m,n} = \lambda \mathbf{a}_{m,n}, \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

また，

$$M_{m,n} = -\mu_{m,n} \mathbf{D} + \mathbf{F}'(\mathbf{u}^*) = \begin{pmatrix} \varphi_u^* - \mu_{m,n} d & \varphi_v^* & \varphi_w^* \\ \psi_u^* & \psi_v^* - \mu_{m,n} d & \psi_w^* \\ \chi_u^* & \chi_v^* & \chi_w^* - \mu_{m,n} D \end{pmatrix}$$

とすると， λ は行列 $M_{m,n}$ の固有値であることが分かる．すなわち， λ は固有値問題 (6.34) の固有値でもある． $M_{m,n}$ の固有多項式を $Q_{m,n}(\lambda)$ とすると，

$$\begin{aligned} Q_{m,n}(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - (\varphi_u^* - \mu_{m,n} d) & -\varphi_v^* & -\varphi_w^* \\ -\psi_u^* & \lambda - (\psi_v^* - \mu_{m,n} d) & -\psi_w^* \\ -\chi_u^* & -\chi_v^* & \lambda - (\chi_w^* - \mu_{m,n} D) \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 \end{aligned}$$

となる．ただし，各係数は，

$$\begin{aligned} a_1 &= -\varphi_u^* - \psi_v^* - \chi_w^* + 2\mu_{m,n} d + \mu_{m,n} D, \\ a_2 &= (\varphi_u^* - \mu_{m,n} d)(\psi_v^* - \mu_{m,n} d) - \varphi_v^* \psi_u^* - \varphi_w^* \chi_u^* - \psi_w^* \chi_v^* \\ &\quad + (\varphi_u^* + \psi_v^* - 2\mu_{m,n} d)(\chi_w^* - \mu_{m,n} D), \\ a_3 &= -(\varphi_u^* - \mu_{m,n} d)(\psi_v^* - \mu_{m,n} d)(\chi_w^* - \mu_{m,n} D) - \varphi_w^* \psi_u^* \chi_v^* - \varphi_v^* \psi_w^* \chi_u^* \\ &\quad + (\varphi_u^* - \mu_{m,n} d) \psi_w^* \chi_v^* + \varphi_w^* (\psi_v^* - \mu_{m,n} d) \chi_u^* + \varphi_v^* \psi_u^* (\chi_w^* - \mu_{m,n} D), \end{aligned}$$

である．ここで， $\mathbf{F}'(\mathbf{u}^*)$ の各要素は以下のように計算される．

$$\begin{aligned} \varphi_u^* &= \left(\frac{q^2 \delta}{16} + \frac{2f q^2 \delta}{16 - q^2 \delta} - 1 \right) u_*, \quad \varphi_v^* = \left(\frac{q^2 \delta}{16} - \frac{2f q^2 \delta}{16 - q^2 \delta} - 1 \right) u_*, \quad \varphi_w^* = \frac{8f q \delta}{16 - q^2 \delta} u_*, \\ \psi_u^* &= \left(\frac{q^2 \delta}{16} - \frac{2f q^2 \delta}{16 - q^2 \delta} - 1 \right) v_*, \quad \psi_v^* = \left(\frac{q^2 \delta}{16} + \frac{2f q^2 \delta}{16 - q^2 \delta} - 1 \right) v_*, \quad \psi_w^* = -\frac{8f q \delta}{16 - q^2 \delta} v_*, \\ \chi_u^* &= -\frac{R}{4}, \quad \chi_v^* = \frac{R}{4}, \quad \chi_w^* = -4\sigma w_*^3. \end{aligned}$$

各 m, n に対する $M_{m,n}$ の固有方程式 $Q_{m,n}(\lambda) = 0$ のすべての解 λ について調べる．

以降では，各パラメータを (6.18) で与える．さらに一例として，制御パラメータを $R = 917$ と固定した場合に対して不安定化が起こる d, D の条件を調べる．

$u \neq 0, v \neq 0$ の場合， u, v, w の条件を満たすような定数定常解は唯一つであり，

$$\begin{pmatrix} u_* \\ v_* \\ w_* \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.402071 \\ 0.271265 \\ 294.846 \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

となる.

ここで, 固有方程式

$$Q_{m,n}(\lambda) \equiv \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

を考える. Routh-Hurwitz の条件より, $Q_{m,n}(\lambda) = 0$ の解 λ に対して $\text{Re}\lambda > 0$ となるためには,

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 - a_3 > 0,$$

を満たしていればよい. 定数定常解 (6.35) に対して, $a_1 > 0$, $a_1a_2 - a_3 > 0$ は明らかである. したがって, a_3 の正負について調べればよい. a_3 の式を整理すると,

$$\begin{aligned} a_3 = & d^2 D \mu_{m,n}^3 - \chi_w^* d^2 \mu_{m,n}^2 - (\varphi_u^* + \psi_v^*) d D \mu_{m,n}^2 \\ & + (\varphi_u^* \chi_w^* - \varphi_w^* \chi_u^* + \psi_v^* \chi_w^* - \psi_w^* \chi_v^*) d \mu_{m,n} + (\varphi_u^* \psi_v^* - \varphi_v^* \psi_u^*) D \mu_{m,n} \\ & - \varphi_u^* \psi_v^* \chi_w^* + \varphi_u^* \psi_w^* \chi_v^* + \varphi_v^* \psi_u^* \chi_w^* - \varphi_v^* \psi_w^* \chi_u^* - \varphi_w^* \psi_u^* \chi_v^* + \varphi_w^* \psi_v^* \chi_u^* \end{aligned} \quad (6.36)$$

となる. (6.36) に (6.35) を代入すると, 以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} a_3 \approx & d^2 D \mu_{m,n}^3 + 5.81338 d^2 \mu_{m,n}^2 + 0.582467 d D \mu_{m,n}^2 \\ & + 5.03247 d \mu_{m,n} - 0.0213664 D \mu_{m,n} + 0.855438. \end{aligned} \quad (6.37)$$

ここで, 拡散係数 d, D について,

$$D = kd \quad (k > 0)$$

と置くと, (6.37) は,

$$\begin{aligned} a_3 = & kd^3 \mu_{m,n}^3 + 5.81338 d^2 \mu_{m,n}^2 + 0.582467 kd^2 \mu_{m,n}^2 \\ & + 5.03247 d \mu_{m,n} - 0.0213664 k D \mu_{m,n} + 0.855438 \end{aligned}$$

と書き換えられる. これは, 任意の $X \geq 0$ を用いて連続的に考えると,

$$\begin{aligned} a_3(X) = & kd^3 X^3 + (5.81338 + 0.582467k) d^2 X^2 \\ & + (5.03247 - 0.0213664k) dX + 0.855438 \end{aligned}$$

と書けて, さらに $dX = X$ と置き換えると, 次のような式が得られる.

$$a_3(X) = kX^3 + (5.81338 + 0.582467k) X^2 + (5.03247 - 0.0213664k) X + 0.855438.$$

これを d について微分すると,

$$a_3'(X) = 3kd^2 + 2(5.81338 + 0.582467k)X + 5.03247 - 0.0213664k$$

が得られる. $a_3'(X)$ の第3項について, $5.03247 - 0.0213664k > 0$ のとき,

$$a_3''(X) = 6kd + 2(5.81338 + 0.582467k) > 0$$

となるので、 $a'_3(X)$ のグラフは $k > 0$ で単調増加関数となる。したがって、 $a_3(X)$ についても単調増加となり a_3 は正であり、 $0 < k < 239.619\dots$ では定数定常解 (6.35) は安定である。

次に、 $5.03247 - 0.0213664k < 0$ のとき、上と同様にして $a'_3(X)$ のグラフが $k > 0$ で単調増加であることが分かる。よって、 $a_3(X)$ の極小値が正のときは $a_3 > 0$ となり安定、負のときに不安定となる。ここで、 $a_3(X) = 0$ の2つの解のうち極小値を持つものを X_+ とすると、 $a_3(X_+) < 0$ となるのは、

$$k = \frac{D}{d} > 5118.84\dots \quad (6.38)$$

の場合である。このとき、 $a_3 < 0$ であるような X が存在し、定数定常解 (6.35) は不安定となる。

以上の結果は $R = 917$ とした特別な場合であるが、 $687.75 \leq R \leq 1237.95$ の区間に対しては、正の定数定常解 ${}^t(u_*, v_*, w_*)$ が存在し、さらにその解は d と D の選び方によって不安定となることが上記と同様の計算によって確認できる。

ところで、(6.36), (6.37) の計算から、 a_3 が負であるためには、

$$(\varphi_u^* \psi_v^* - \varphi_v^* \psi_u^*) D \mu_{m,n}$$

の項が負へと大きく働き、それ以外の正の項はできるだけ小に抑えられていればよいことが分かる。つまり、 $\varphi_u^* \psi_v^* - \varphi_v^* \psi_u^* < 0$ であり、 d が十分小さく、 D が十分大きければ定数定常解 (6.35) は不安定となる。

ここで、係数 $\varphi_u^* \psi_v^* - \varphi_v^* \psi_u^*$ について述べておく。ふたたび (6.27) の線形近似式 (6.29)-(6.31) を見る。このとき、(6.29), (6.30) より、 $\varphi_u^* < 0$, $\psi_v^* < 0$, $\varphi_v^* < 0$, $\psi_u^* < 0$ であることから、これらの係数はダイジーの成長に対して減衰の働きをすることが分かる。したがって、(6.29), (6.30) において、 $\varphi_u^* \tilde{u}$, $\psi_v^* \tilde{v}$ は種内競争を表す項であり、 $\varphi_v^* \tilde{v}$, $\psi_u^* \tilde{u}$ は種間競争を表す項となっている。つまり、係数 $\varphi_u^* \psi_v^* - \varphi_v^* \psi_u^*$ が負となることは、種内競争よりも種間競争が強まっていることを意味する。

以上のことから、種間競争が強まり、なおかつ、熱の拡散率 D がダイジーの拡散率 d に対して十分大きいという条件から不安定化が起こることが分かる。1952年に Turing [37] は、反応拡散系において、拡散率の違いが空間的に一様な状態の不安定化を生み、空間的なパターンが自発的に形成されることを示した。これは、拡散誘導不安定性と呼ばれている。本節の結果は、恒常性自己調節モデルに対しても拡散誘導不安定性のようなものが現れることを示している。

第7章

離散化スキームの実装 (2次元長方形領域)

Peaceman-Rachford [27] によって導入された ADI 法 (Alternating Direction Implicit method, 交互方向陰解法) は, 楕円型や放物型の偏微分方程式に対する数値解法のひとつである. これは, 陽解法のように空間と時間の刻みに制約がなく, さらに, 陰解法よりも解くべき連立方程式の数が少ないことで, 長方形領域を考える場合は特に有効な方法として知られている. ここでは, 2次元長方形領域上での恒常性自己調節モデルに対して, ADI 法による離散化を行う.

7.1 ADI 法による離散方程式

領域を $\Omega = (0, \ell_x) \times (0, \ell_y)$ とし, 経度方向に N 等分割, 緯度方向に M 等分割する. 空間の刻み幅を $\Delta x = \ell_x/N, \Delta y = \ell_y/M$, 時間の刻み幅を Δt とし, $x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, t_n = n\Delta t$ と置く. このモデルの解 $u(x_i, y_j, t_n), v(x_i, y_j, t_n), w(x_i, y_j, t_n)$ に対応する近似値を, それぞれ $U_{i,j}^n, V_{i,j}^n, W_{i,j}^n$ とする. 以下に, モデル方程式を離散化した式を示す.

まず, w についての方程式は次のように離散化される.

$$\begin{aligned} \frac{W_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - W_{i,j}^n}{\Delta t/2} &= [1 - g(U_{i,j}^n, V_{i,j}^n)] R - \sigma(W_{i,j}^n)^4 \\ &\quad + D \left[\frac{W_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2W_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + W_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} + \frac{W_{i,j+1}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right], \\ \frac{W_{i,j}^{n+1} - W_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} &= [1 - g(U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}})] R - \sigma(W_{i,j}^{n+\frac{1}{2}})^4 \\ &\quad + D \left[\frac{W_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2W_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + W_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} + \frac{W_{i,j+1}^{n+1} - 2W_{i,j}^{n+1} + W_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right]. \end{aligned}$$

ここで, $\alpha_x = \frac{D}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}, \alpha_y = \frac{D}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$ としてそれぞれの両辺を整理すると,

$$\begin{aligned}
& -\alpha_x W_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1+2\alpha_x) W_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \alpha_x W_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
& = \frac{\Delta t}{2} \left\{ [1 - g(U_{i,j}^n, V_{i,j}^n)] R - \sigma(W_{i,j}^n)^4 \right\} \\
& \quad + \alpha_y W_{i,j+1}^n + (1-2\alpha_y) W_{i,j}^n + \alpha_y W_{i,j-1}^n, \quad (7.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha_y W_{i,j+1}^{n+1} + (1+2\alpha_y) W_{i,j}^{n+1} - \alpha_y W_{i,j-1}^{n+1} \\
& = \frac{\Delta t}{2} \left\{ \left[1 - g(U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}) \right] R - \sigma(W_{i,j}^{n+\frac{1}{2}})^4 \right\} \\
& \quad + \alpha_x W_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1-2\alpha_x) W_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_x W_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (7.2)
\end{aligned}$$

u, v についての方程式も同様に,

$$\begin{aligned}
\frac{U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^n}{\Delta t/2} & = [(1 - U_{i,j}^n - V_{i,j}^n) \Phi(U_{i,j}^n, V_{i,j}^n, W_{i,j}^n) - f] U_{i,j}^n \\
& \quad + d \left[\frac{U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} & = \left[\left(1 - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) \Phi(U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, W_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}) - f \right] U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
& \quad + d \left[\frac{U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - V_{i,j}^n}{\Delta t/2} & = [(1 - U_{i,j}^n - V_{i,j}^n) \Psi(U_{i,j}^n, V_{i,j}^n, W_{i,j}^n) - f] V_{i,j}^n \\
& \quad + d \left[\frac{V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} + \frac{V_{i,j+1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} & = \left[\left(1 - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) \Psi(U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, W_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}) - f \right] V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
& \quad + d \left[\frac{V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} + \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right],
\end{aligned}$$

と離散化され, $\beta_x = \frac{d}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, $\beta_y = \frac{d}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$ として両辺を整理すると,

$$\begin{aligned}
& -\beta_x U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1+2\beta_x) U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \beta_x U_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
& = \frac{\Delta t}{2} [(1 - U_{i,j}^n - V_{i,j}^n) \Phi(U_{i,j}^n, V_{i,j}^n, W_{i,j}^n) - f] U_{i,j}^n \\
& \quad + \beta_y U_{i,j+1}^n + (1-2\beta_y) U_{i,j}^n + \beta_y U_{i,j-1}^n, \quad (7.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta_y U_{i,j+1}^{n+1} + (1+2\beta_y) U_{i,j}^{n+1} - \beta_y U_{i,j-1}^{n+1} \\
& = \frac{\Delta t}{2} \left[\left(1 - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\right) \Phi(U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, W_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}) - f \right] U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
& \quad + \beta_x U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1-2\beta_x) U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_x U_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (7.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta_x V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1+2\beta_x) V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \beta_x V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
& = \frac{\Delta t}{2} \left[\left(1 - U_{i,j}^n - V_{i,j}^n\right) \Psi(U_{i,j}^n, V_{i,j}^n, W_{i,j}^n) - f \right] V_{i,j}^n \\
& \quad + \beta_y V_{i,j+1}^n + (1-2\beta_y) V_{i,j}^n + \beta_y V_{i,j-1}^n, \quad (7.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta_y V_{i,j+1}^{n+1} + (1+2\beta_y) V_{i,j}^{n+1} - \beta_y V_{i,j-1}^{n+1} \\
& = \frac{\Delta t}{2} \left[\left(1 - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\right) \Psi(U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, W_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}) - f \right] V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
& \quad + \beta_x V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1-2\beta_x) V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_x V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (7.6)
\end{aligned}$$

ただし, (7.1), (7.3), (7.5) は $0 \leq i \leq N$, (7.2), (7.4), (7.6) は $0 \leq j \leq M$ で成り立つ.

(7.1) に対して, x 方向は周期境界条件を満たすので,

$$W_{-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = W_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad W_{N+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = W_{1,j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (j = 0, 1, \dots, M).$$

したがって, (7.1) の左辺の列ベクトルは,

$$\begin{aligned}
& ((7.1) \text{ の左辺}) = \left[-\alpha_x W_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1+2\alpha_x) W_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \alpha_x W_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \right] \\
& = \begin{bmatrix} 1+2\alpha_x & -\alpha_x & & & -\alpha_x \\ -\alpha_x & 1+2\alpha_x & -\alpha_x & & \\ & -\alpha_x & 1+2\alpha_x & -\alpha_x & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\alpha_x & 1+2\alpha_x & -\alpha_x \\ & -\alpha_x & & & -\alpha_x & 1+2\alpha_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ W_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ W_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ W_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ W_{N,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\
& = A \mathbf{w}, \quad (j = 0, 1, \dots, M).
\end{aligned}$$

係数行列 A を LU 分解すると,

$$A = \begin{bmatrix} 1+2\alpha_x & -\alpha_x & & & -\alpha_x \\ -\alpha_x & 1+2\alpha_x & -\alpha_x & & \\ & -\alpha_x & 1+2\alpha_x & -\alpha_x & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\alpha_x & 1+2\alpha_x & -\alpha_x \\ & -\alpha_x & & & -\alpha_x & 1+2\alpha_x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_0 & & & & & \\ m_1 & l_1 & & & & \\ & m_2 & l_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & m_{N-1} & l_{N-1} & \\ n_0 & n_1 & n_2 & \dots & m_N & l_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_0 & & & d_0 \\ & 1 & c_1 & & d_1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & c_{N-2} \\ & & & & 1 & c_{N-1} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} = LU$$

となり, LU と係数行列 A の各要素を比べると行列 L と U は一意に求まる. 以下, 簡単のために (7.1) の右辺について, j を固定した場合の列ベクトルを次のように置く.

$$((7.1) \text{ の右辺}) = {}^t \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_{N-1} & y_N \end{bmatrix} = \mathbf{y}.$$

したがって, (7.1) は $A = LU$ より,

$$LU\mathbf{w} = \mathbf{y}$$

となる. $U\mathbf{w} = \mathbf{z}$ と置くと, $L\mathbf{z} = \mathbf{y}$ となり次のように書ける.

$$\begin{bmatrix} l_0 & & & & & \\ m_1 & l_1 & & & & \\ & m_2 & l_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & m_{N-1} & l_{N-1} & \\ n_0 & n_1 & n_2 & \dots & m_N & l_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_0 z_0 \\ m_1 z_0 + l_1 z_1 \\ m_2 z_1 + l_2 z_2 \\ \vdots \\ m_{N-1} z_{N-2} + l_{N-1} z_{N-1} \\ \sum_{k=0}^{N-2} n_k z_k + m_N z_{N-1} + l_N z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & c_0 & & & d_0 \\ & 1 & c_1 & & d_1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & c_{N-3} & d_{N-3} \\ & & & & 1 & c_{N-2} \\ & & & & & 1 & c_{N-1} \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{N-3} \\ w_{N-2} \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 + c_0 w_1 + d_0 w_{N-1} \\ w_1 + c_1 w_2 + d_1 w_{N-1} \\ \vdots \\ w_{N-3} + c_{N-3} w_{N-2} + d_{N-3} w_{N-1} \\ w_{N-2} + c_{N-2} w_{N-1} \\ w_{N-1} + c_{N-1} w_N \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{N-3} \\ z_{N-2} \\ z_{N-1} \\ z_N \end{bmatrix}.$$

これらの各要素を比較して解くと, $W_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ ($i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, M$) の値が求まる.

(7.3), (7.5) に対して, x 方向は周期境界条件を満たすので,

$$\begin{aligned} U_{-1,j}^{n+\frac{1}{2}} &= U_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}}, & U_{N+1,j}^{n+\frac{1}{2}} &= U_{1,j}^{n+\frac{1}{2}}, \\ V_{-1,j}^{n+\frac{1}{2}} &= V_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}}, & V_{N+1,j}^{n+\frac{1}{2}} &= V_{1,j}^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (j = 0, 1, \dots, M),$$

となる. したがって, (7.3), (7.5) の左辺の列ベクトルは, 次のように書ける.

$$\begin{aligned} ((7.3) \text{ の左辺}) &= \left[-\beta_x U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 2\beta_x) U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \beta_x U_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 1 + 2\beta_x & -\beta_x & & & -\beta_x \\ -\beta_x & 1 + 2\beta_x & -\beta_x & & \\ & -\beta_x & 1 + 2\beta_x & -\beta_x & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\beta_x & 1 + 2\beta_x & -\beta_x \\ & -\beta_x & & & -\beta_x & 1 + 2\beta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ U_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ U_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ U_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ U_{N,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\ &= B\mathbf{u}, \quad (j = 0, 1, \dots, M). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((7.5) \text{ の左辺}) &= \left[-\beta_x V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 2\beta_x) V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \beta_x V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 1 + 2\beta_x & -\beta_x & & & -\beta_x \\ -\beta_x & 1 + 2\beta_x & -\beta_x & & \\ & -\beta_x & 1 + 2\beta_x & -\beta_x & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\beta_x & 1 + 2\beta_x & -\beta_x \\ & -\beta_x & & & -\beta_x & 1 + 2\beta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ V_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ V_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ V_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ V_{N,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\ &= B\mathbf{v}, \quad (j = 0, 1, \dots, M). \end{aligned}$$

係数行列 B を LU 分解すると,

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 1 + 2\beta_x & -\beta_x & & & -\beta_x \\ -\beta_x & 1 + 2\beta_x & -\beta_x & & \\ & -\beta_x & 1 + 2\beta_x & -\beta_x & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\beta_x & 1 + 2\beta_x & -\beta_x \\ & -\beta_x & & & -\beta_x & 1 + 2\beta_x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_0 & & & & \\ m_1 & l_1 & & & \\ & m_2 & l_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & m_{N-1} & l_{N-1} \\ n_0 & n_1 & n_2 & \dots & n_{N-1} & n_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_0 & & & d_0 \\ & 1 & c_1 & & d_1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & c_{N-2} \\ & & & & 1 & c_{N-1} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} = LU \end{aligned}$$

となり, LU と係数行列 B の各要素を比べると行列 L と U は一意に求まる. 簡単のために,

$$((7.3) \text{ の右辺}) = {}^t \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-1} & y_N \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$

とすると, (7.3) は $B = LU$ より,

$$LU\mathbf{u} = \mathbf{y}$$

となる. $U\mathbf{u} = \mathbf{z}$ と置くと, $L\mathbf{z} = \mathbf{y}$ となり, 次のように書ける.

$$\begin{bmatrix} l_0 & & & & & \\ m_1 & l_1 & & & & \\ & m_2 & l_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & m_{N-1} & l_{N-1} & \\ n_0 & n_1 & n_2 & \cdots & m_N & l_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_0 z_0 \\ m_1 z_0 + l_1 z_1 \\ m_2 z_1 + l_2 z_2 \\ \vdots \\ m_{N-1} z_{N-2} + l_{N-1} z_{N-1} \\ \sum_{k=0}^{N-2} n_k z_k + m_N z_{N-1} + l_N z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & c_0 & & & d_0 \\ & 1 & c_1 & & d_1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & c_{N-3} & d_{N-3} \\ & & & & 1 & c_{N-2} \\ & & & & & 1 & c_{N-1} \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-3} \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 + c_0 u_1 + d_0 u_{N-1} \\ u_1 + c_1 u_2 + d_1 u_{N-1} \\ \vdots \\ u_{N-3} + c_{N-3} u_{N-2} + d_{N-3} u_{N-1} \\ u_{N-2} + c_{N-2} u_{N-1} \\ u_{N-1} + c_{N-1} u_N \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{N-3} \\ z_{N-2} \\ z_{N-1} \\ z_N \end{bmatrix}.$$

各要素を比較して解くと, すべての i, j について $U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ の値が求まる. (7.5) についても同様に, すべての i, j に対する $V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ の値を求めることができる.

次に, (7.2) に対して, y 方向には Neumann 境界条件を満たすので,

$$W_{i,-1}^{n+1} = W_{i,1}^{n+1}, \quad W_{i,M+1}^{n+1} = W_{i,M-1}^{n+1}, \quad (i = 0, 1, \dots, N).$$

したがって, (7.2) の左辺の列ベクトルは,

$$((7.2) \text{ の左辺}) = \begin{bmatrix} -\alpha_y W_{i,j+1}^{n+1} + (1 + 2\alpha_y) W_{i,j}^{n+1} - \alpha_y W_{i,j-1}^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1+2\alpha_y & -2\alpha_y & & & & \\ -\alpha_y & 1+2\alpha_y & -\alpha_y & & & \\ & -\alpha_y & 1+2\alpha_y & -\alpha_y & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\alpha_y & 1+2\alpha_y & -\alpha_y \\ & & & & -2\alpha_y & 1+2\alpha_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{i,0}^{n+1} \\ W_{i,1}^{n+1} \\ W_{i,2}^{n+1} \\ \vdots \\ W_{i,M-1}^{n+1} \\ W_{i,M}^{n+1} \end{bmatrix} \\
&= A\mathbf{w}, \quad (i = 0, 1, \dots, N),
\end{aligned}$$

となる．係数行列 A を LU 分解すると，

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1+2\alpha_y & -2\alpha_y & & & \\ -\alpha_y & 1+2\alpha_y & -\alpha_y & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\alpha_y & 1+2\alpha_y & -\alpha_y \\ & & & -2\alpha_y & 1+2\alpha_y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & l_{M-1} & 1 & \\ & & & l_M & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 & c_0 & & & \\ & d_1 & c_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_{M-1} & c_{M-1} \\ & & & & d_M \end{bmatrix} = LU
\end{aligned}$$

となり， LU と係数行列 A の各要素を比べると，行列 L ， U は一意に求まる．以下，簡単のために (7.2) の右辺について i を固定した場合の列ベクトルを次のように置く．

$$((7.2) \text{ の右辺}) = {}^t [y_0 \ y_1 \ \dots \ y_{M-1} \ y_M] = \mathbf{y}.$$

したがって，(7.2) は $A = LU$ より，

$$LU\mathbf{w} = \mathbf{y}$$

となる． $U\mathbf{w} = \mathbf{z}$ と置くと， $L\mathbf{z} = \mathbf{y}$ となり以下のように書ける．

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & l_{M-1} & 1 & \\ & & & l_M & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{M-1} \\ z_M \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z_0 \\ l_1 z_0 + z_1 \\ \vdots \\ l_{M-1} z_{M-2} + z_{M-1} \\ l_M z_{M-1} + z_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{M-1} \\ y_M \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} d_0 & c_0 & & & \\ & d_1 & c_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_{M-1} & c_{M-1} \\ & & & & d_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{M-1} \\ w_M \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d_0 w_0 + c_0 w_1 \\ d_1 w_1 + c_1 w_2 \\ \vdots \\ d_{M-1} w_{M-1} + c_{M-1} w_M \\ d_M w_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{M-1} \\ z_M \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

各要素を比較して解くと、すべての i, j について $W_{i,j}^{n+1}$ の値が求まる.

(7.4), (7.6) に対して、 y 方向は Neumann 境界条件を満たすので、

$$\begin{aligned} U_{i,-1}^{n+1} &= U_{i,1}^{n+1}, & U_{i,M+1}^{n+1} &= U_{i,M-1}^{n+1}, \\ V_{i,-1}^{n+1} &= V_{i,1}^{n+1}, & V_{i,M+1}^{n+1} &= V_{i,M-1}^{n+1}, \end{aligned} \quad (i = 0, 1, \dots, N),$$

となる. したがって、(7.4), (7.6) 式の左辺の列ベクトルは以下のようになる.

$$\begin{aligned} ((7.4) \text{ の左辺}) &= \begin{bmatrix} -\beta_y U_{i,j+1}^{n+1} + (1 + 2\beta_y) U_{i,j}^{n+1} - \beta_y U_{i,j-1}^{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + 2\beta_y & -2\beta_y & & & & \\ -\beta_y & 1 + 2\beta_y & -\beta_y & & & \\ & -\beta_y & 1 + 2\beta_y & -\beta_y & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\beta_y & 1 + 2\beta_y & -\beta_y \\ & & & & -2\beta_y & 1 + 2\beta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,0}^{n+1} \\ U_{i,1}^{n+1} \\ U_{i,2}^{n+1} \\ \vdots \\ U_{i,M-1}^{n+1} \\ U_{i,M}^{n+1} \end{bmatrix} \\ &= B\mathbf{u}, \quad (i = 0, 1, \dots, N). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((7.6) \text{ の左辺}) &= \begin{bmatrix} -\beta_y V_{i,j+1}^{n+1} + (1 + 2\beta_y) V_{i,j}^{n+1} - \beta_y V_{i,j-1}^{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + 2\beta_y & -2\beta_y & & & & \\ -\beta_y & 1 + 2\beta_y & -\beta_y & & & \\ & -\beta_y & 1 + 2\beta_y & -\beta_y & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\beta_y & 1 + 2\beta_y & -\beta_y \\ & & & & -2\beta_y & 1 + 2\beta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i,0}^{n+1} \\ V_{i,1}^{n+1} \\ V_{i,2}^{n+1} \\ \vdots \\ V_{i,M-1}^{n+1} \\ V_{i,M}^{n+1} \end{bmatrix} \\ &= B\mathbf{v}, \quad (i = 0, 1, \dots, N). \end{aligned}$$

係数行列 B を LU 分解すると、

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 1 + 2\beta_y & -2\beta_y & & & & \\ -\beta_y & 1 + 2\beta_y & -\beta_y & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -\beta_y & 1 + 2\beta_y & -\beta_y & \\ & & & -2\beta_y & 1 + 2\beta_y & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ l_1 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & l_{M-1} & 1 & & \\ & & & l_M & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 & c_0 & & & & \\ & d_1 & c_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & d_{M-1} & c_{M-1} & \\ & & & & d_M & \end{bmatrix} = LU \end{aligned}$$

となり，行列 L と U は一意に求まる．以下，簡単のために，

$$((7.4) \text{ の右辺}) = {}^t \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{M-1} & y_M \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$

とすると，(7.4) は $B = LU$ より，

$$LU\mathbf{u} = \mathbf{y}$$

となる． $U\mathbf{u} = \mathbf{z}$ と置くと， $L\mathbf{z} = \mathbf{y}$ となり以下のように書ける．

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & l_{M-1} & 1 & \\ & & & l_M & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{M-1} \\ z_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ l_1 z_0 + z_1 \\ \vdots \\ l_{M-1} z_{M-2} + z_{M-1} \\ l_M z_{M-1} + z_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{M-1} \\ y_M \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} d_0 & c_0 & & & \\ & d_1 & c_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_{M-1} & c_{M-1} \\ & & & & d_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{M-1} \\ u_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 u_0 + c_0 u_1 \\ d_1 u_1 + c_1 u_2 \\ \vdots \\ d_{M-1} u_{M-1} + c_{M-1} u_M \\ d_M u_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{M-1} \\ z_M \end{bmatrix}.$$

各要素を比較するとすべての i, j について $U_{i,j}^{n+1}$ の値が求まる．(7.6) についても同様にし
て，すべての i, j に対する $V_{i,j}^{n+1}$ の値を求めることができる．

第8章

数値計算による解の追跡 (2次元長方形領域)

本章では、2次元長方形領域 $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ において恒常性自己調節モデル (6.1)-(6.4) を考え、モデルに現れるデイジーの棲み分けパターンについて、さらなる詳細を数値的に調べる。

各パラメータは6.4節と同様に、

$$\begin{aligned} a_b &= 0.25, & a_g &= 0.50, & a_w &= 0.75, \\ \delta &= 0.003265, & f &= 0.3, & \bar{w} &= 295.5, & \sigma &= 5.67 \times 10^{-8}, \end{aligned} \quad (8.1)$$

で与える。ただし、温度の拡散率は $D = 1.0$ とし、 R, q, d は制御パラメータとして扱う。ここでパラメータ R は、太陽フラックス $S = 917$ と太陽光度 L を用いて、 $R = 917L$ と書くことができる。以降では、いずれも L を変動させた場合を考えている。また、初期関数 $u_0(x, y), v_0(x, y), w_0(x, y)$ については、定数関数 $\bar{u}_0(x, y), \bar{v}_0(x, y), \bar{w}_0(x, y)$ に微小な擾乱を与えたものとする。

8.1節では、 L, q, d を固定し、初期値を変えた場合の結果について述べている。これによって、そのパターン解は初期値に依らず定性的に同じ解へ漸近し、さらにその解はほとんど定常状態となっていることを数値的に示している。続いて8.2節、8.3節では、 q, d を固定し、太陽光度 L を変化させた場合に現れるデイジーの棲み分けパターンについて調べる。さらに、Watson-Lovelock モデル [40]、円周拡散モデル [5] と同じく、我々のモデルに対しても温度恒常性機能が保たれていることを示す。最後に8.4節では、 L, d を固定し、 q を変動させた場合の数値計算結果について述べている。 q を動かすことは、デイジーワールドにおける大域温度と局所温度の熱交換の度合いを変化させることに等しい。これによって、デイジーワールドの挙動にどのような影響を与えるのかを調べる。

8.1 初期値を変動させた場合

本節では、 $q = 20, L = 1.00$ ($R = 917$), $d = 10^{-5}$ とした場合の結果について述べる。このとき空間の刻み幅は、 $\Delta x = \Delta y = 256$ としており、それぞれを2倍に刻んだ場合でも同様の結果が得られている。

図8.1は、 $\bar{u}_0(x, y) \equiv 0.347553, \bar{v}_0(x, y) \equiv 0, \bar{w}_0(x, y) \equiv 285.900$ とした場合の $u(x, y), v(x, y), w(x, y)$ の時間発展の様子を示している。この結果から、解は急速に指数アトラク

タへと引き寄せられており，その後 $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$ の変化はほとんどなくなっていることが見てとれる．

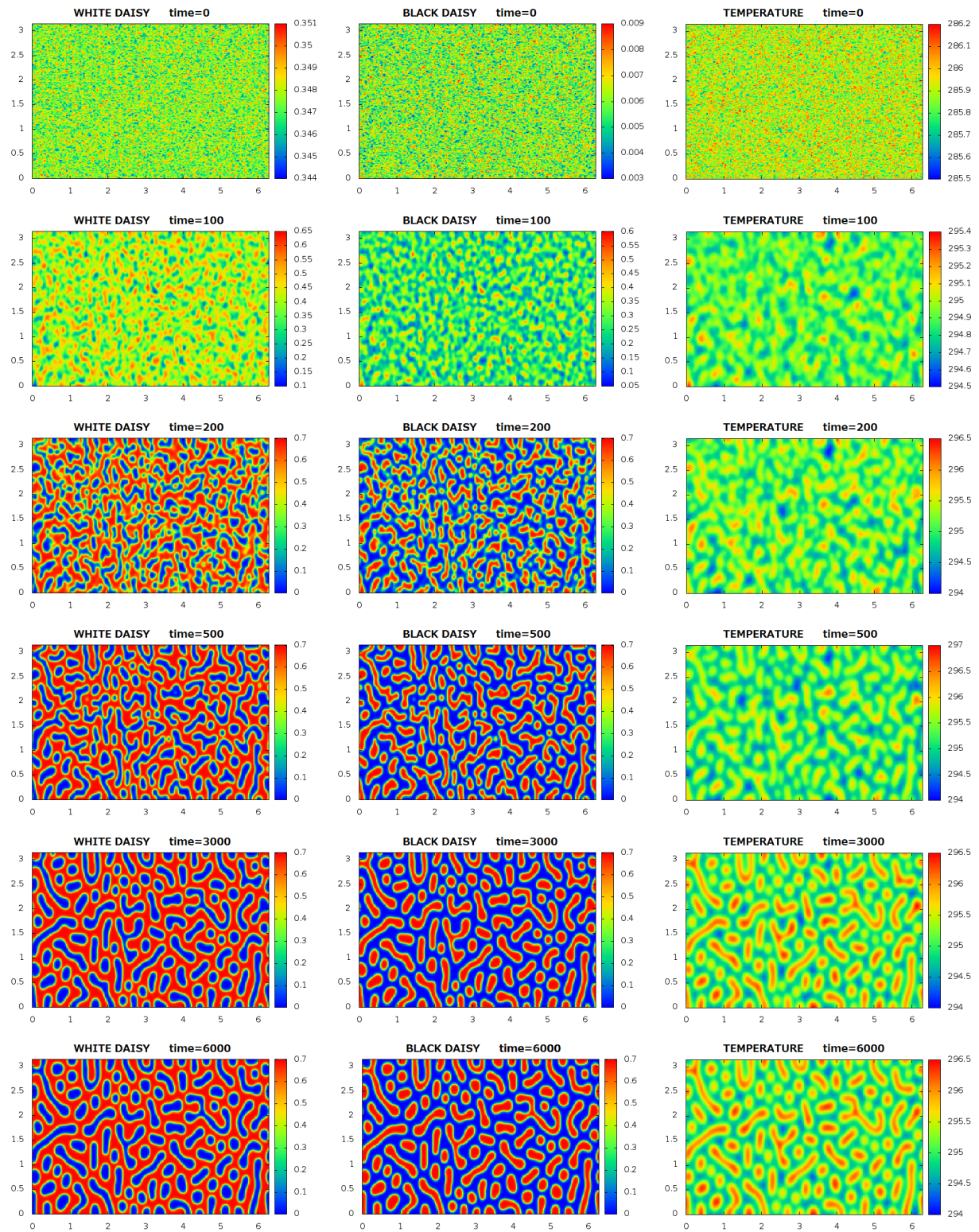


図 8.1: $L = 1.00$. $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$ の時間発展.

図 8.2-8.5 は各パラメータを固定し、初期値を変動させた場合の初期値と時刻 $t = 6,000$ での数値計算結果を示している。いずれの結果も $t = 6,000$ でほとんど安定状態となっている。

図 8.2 は、 $\bar{u}_0(x, y) \equiv 0$, $\bar{v}_0(x, y) \equiv 0$, $\bar{w}_0(x, y) \equiv 299.874$ とした場合の $t = 0$ と $t = 6,000$ での数値解 $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ を示している。この場合、 $t = 6,000$ での $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ の空間平均はそれぞれ、 $U(6,000) \approx 0.404897$, $V(6,000) \approx 0.284616$, $W(6,000) \approx 295.259$ となっている。

図 8.3 は、 $\bar{u}_0(x, y) \equiv 0.402071$, $\bar{v}_0(x, y) \equiv 0.271265$, $\bar{w}_0(x, y) \equiv 294.846$ とした場合の $t = 0$ と $t = 6,000$ での数値解 $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ を示している。この場合、 $t = 6,000$ での $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ の空間平均はそれぞれ、 $U(6,000) \approx 0.404750$, $V(6,000) \approx 0.284800$, $W(6,000) \approx 295.268$ である。

図 8.4 は、 $\bar{u}_0(x, y) \equiv 0$, $\bar{v}_0(x, y) \equiv 0.149497$, $\bar{w}_0(x, y) \equiv 305.327$ とした場合の $t = 0$ と $t = 6,000$ での数値解 $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ を示している。この場合、 $t = 6,000$ での $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ の空間平均はそれぞれ、 $U(6,000) \approx 0.404912$, $V(6,000) \approx 0.284604$, $W(6,000) \approx 295.247$ となっている。

図 8.5 は、 $\bar{u}_0(x, y) \equiv 0.347553$, $\bar{v}_0(x, y) \equiv 0$, $\bar{w}_0(x, y) \equiv 285.900$ とした場合の $t = 0$ と $t = 6,000$ での数値解 $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ を示している。この場合、 $t = 6,000$ での $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ の空間平均はそれぞれ、 $U(6,000) \approx 0.404943$, $V(6,000) \approx 0.284597$, $W(6,000) \approx 295.257$ となっている。

図 8.2-8.5 を見ると、いずれも白いデ이지が優勢となって育ち、その中で黒いデ이지が途切れ途切れに生息している。デ이지の空間平均被覆率はいずれも $U(6,000) = 0.4049$, $V(6,000) = 0.2846$ 付近であり、温度の空間平均についても、 $W(6,000) = 295.250$ 付近に保たれている。つまり、それぞれのパターン解は定性的に同じような状態へ行きつき、初期値に依存していないことが分かる。このことは、指数アトラクタの存在により自由度が有限個に絞られていることから示唆されている。

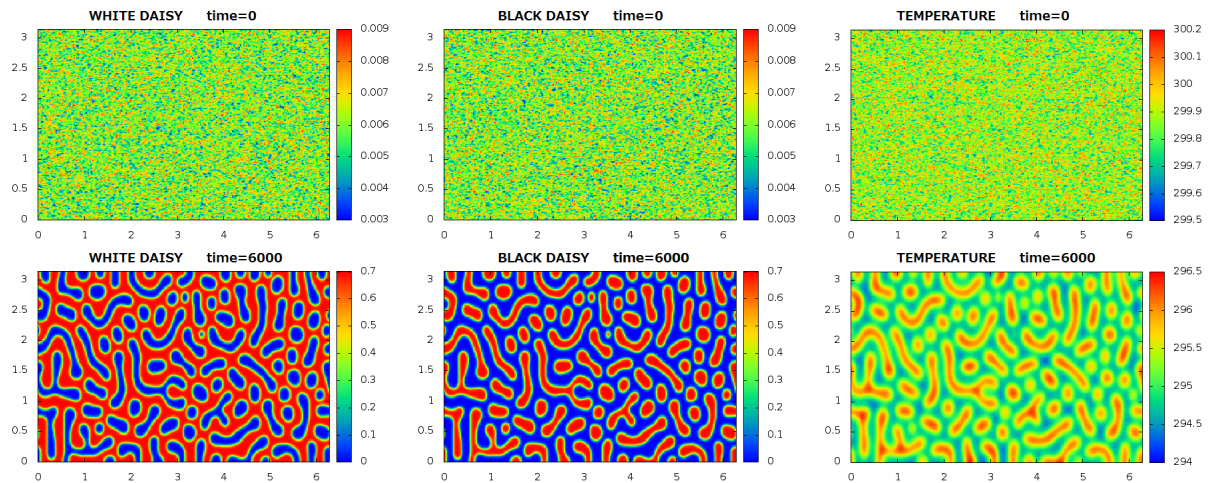


図 8.2: $L = 1.00$. $\bar{u}_0(x, y) \equiv 0$, $\bar{v}_0(x, y) \equiv 0$, $\bar{w}_0(x, y) \equiv 299.874$.

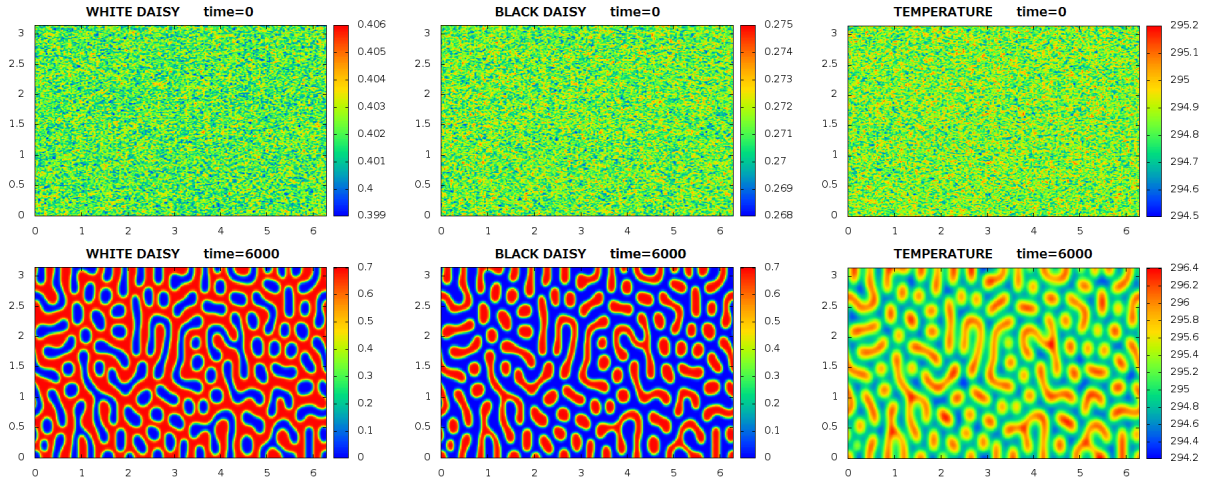


图 8.3: $L = 1.00$. $\bar{u}_0(x, y) \equiv 0.402071$, $\bar{v}_0(x, y) \equiv 0.271265$, $\bar{w}_0(x, y) \equiv 294.846$.

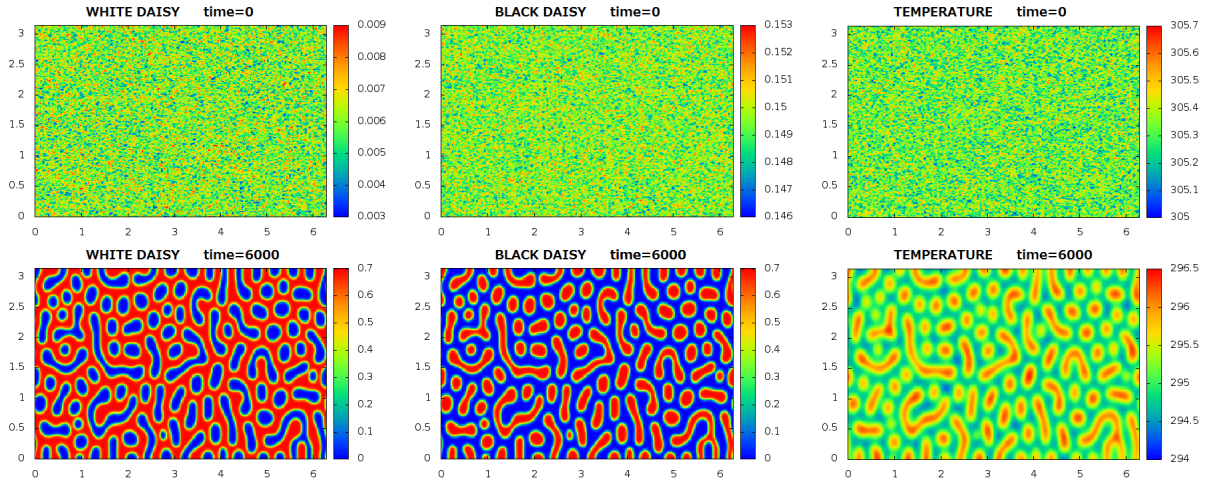


图 8.4: $L = 1.00$. $\bar{u}_0(x, y) \equiv 0$, $\bar{v}_0(x, y) \equiv 0.149497$, $\bar{w}_0(x, y) \equiv 305.327$.

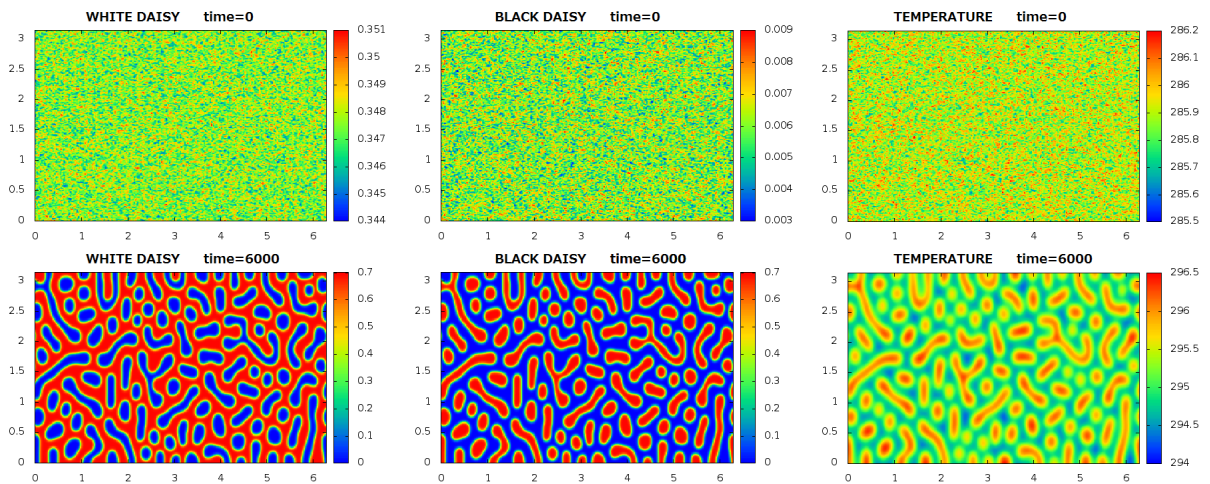


图 8.5: $L = 1.00$. $\bar{u}_0(x, y) \equiv 0.347553$, $\bar{v}_0(x, y) \equiv 0$, $\bar{w}_0(x, y) \equiv 285.900$.

8.2 R の変動による棲み分けパターン

ここでは $q = 20$ とし, L は $0.75 \leq L \leq 1.35$ ($687.75 \leq R \leq 1237.95$) の区間で動かす. ただし, L の刻み幅を $\Delta L = 0.05$ として各 L について計算した. また, 6.4 節での議論から, この区間の L に対して正の定数定常解 u^* が存在し, 温度の拡散率 $D = 1$ に対してダイジーの拡散率 d を十分小さくすることでその定数定常解は不安定となることが分かっている. 本節では, 一様状態の不安定化が起こることが期待されるパラメータ値として $d = 10^{-5}$ とした場合の結果を述べる.

初期関数 $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_0(x, y)$ は, 各 L に対する正の定数定常解 $\bar{u}_0(x, y)$, $\bar{v}_0(x, y)$, $\bar{w}_0(x, y)$ に微小な擾乱を与えたものとしている. 空間の刻み幅は, $\Delta x = \Delta y = 256$ とする.

以下の図 8.6-8.18 は各 L に対するダイジーの分布を示しており, いずれもほとんど定常状態となったものである.

図 8.6-8.17 で示されているように $0.75 \leq L \leq 1.30$ に対して不安定化が起こり, 白と黒のダイジーの生存競争による棲み分けパターンが形成されている.

図 8.6 ($L = 0.75$) の場合, 黒いダイジーが領域上で生息域を大きく拡げている中で, 白いダイジーが点在するように生息していることが見てとれる. これは, 白の斑点パターンと呼ぶことにする.

図 8.7 ($L = 0.80$) では, 図 8.6 ($L = 0.75$) と同様に黒いダイジーが優勢である白の斑点パターンとなっているが, 白いダイジーによって形成される斑点の数が増加している.

図 8.8 ($L = 0.85$) では, 図 8.7 ($L = 0.80$) と比べて白いダイジーが形成する斑点のひとつひとつがわずかに大きくなっており, さらに斑点のいくつかが連なった連鎖状のパターンが現れている. このような状態を白の連鎖パターンと呼ぶことにする.

さらに, 図 8.9 ($L = 0.90$) の場合になると, 黒いダイジーがわずかに優勢ではあるものの, 白いダイジーによる斑点が減り, 連鎖の形成が進んでいる.

図 8.10 ($L = 0.95$) の場合になると, これまでの $0.75 \leq L \leq 0.90$ の区間で散在していた白いダイジーのほとんどがひとつに繋がり, 白と黒は迷路のようなパターンを形成している. これを迷路パターンと呼ぶことにする. このとき, 白と黒のダイジーはほぼ均衡状態になっているように見え, 実際に図 8.19 からそのことは確認できる. さらに, この場合での温度の空間平均は, $W(6000) \approx 295.463$ となっており, ダイジーの成長に最適な温度 $\bar{w} = 295.5$ に最も近い値となっている. このことから, 惑星の温度調節機構がダイジーのパターンにも視覚的に現れていることが言える. この $L = 0.95$ の場合を中心に, L の増加に伴って白と黒のパターンを反転させたような棲み分けパターンが現れる.

図 8.11 ($L = 1.00$) では, これまでとは逆に白いダイジーが優勢となる中で黒いダイジーが散在して現れるようになり, いくつかの斑点と連鎖を形成し, 図 8.9 ($L = 0.90$) とは白と黒が反転した黒の連鎖パターンとなっている.

図 8.12, 図 8.13 ($L = 1.05, 1.10$) になると黒の連鎖パターンを形成しているが, 黒いダイジーによる連鎖は数を減らしていき, 白いダイジーはさらに生息域を拡げている.

以降, 図 8.14-8.17 ($1.15 \leq L \leq 1.30$) では, 白いダイジーが優勢である中で黒いダイジーが点在して育つ黒の斑点パターンを形成しており, L の増加と共に黒いダイジーの生息域は減少していく.

図 8.18 ($L = 1.35$) では, 白いダイジーが優勢の状態では 2 種類の共存が見られ, どちら

も空間一様に育っている．この結果から， $d = 10^{-5}$ では定数定常解が安定となっていることが数値的にも確認できる．

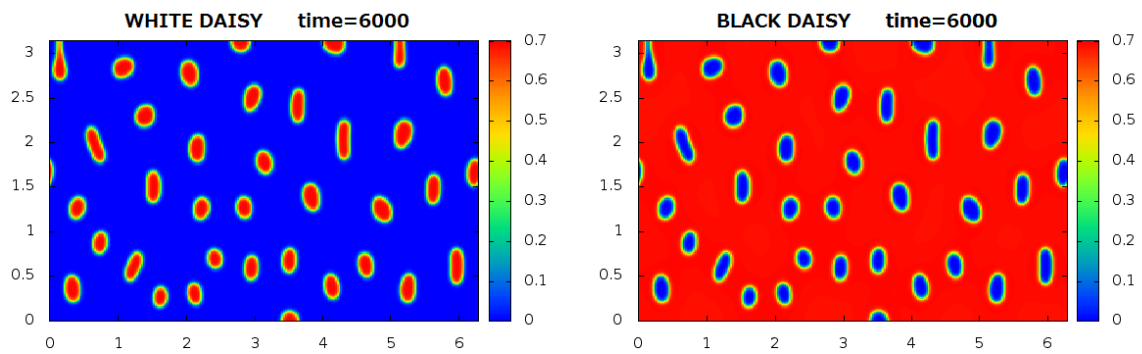


図 8.6: $L = 0.75$.

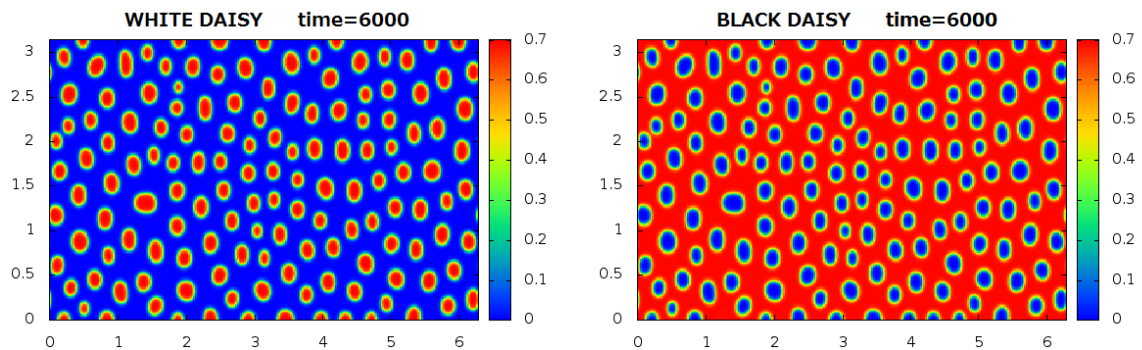


図 8.7: $L = 0.80$.

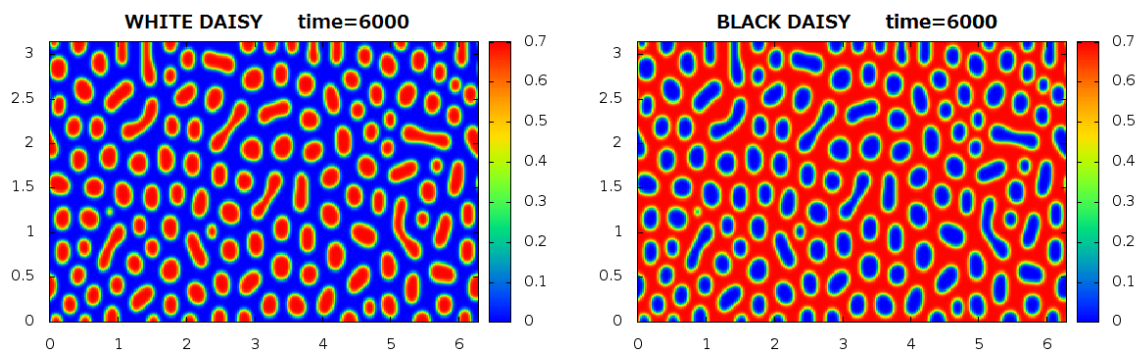


図 8.8: $L = 0.85$.

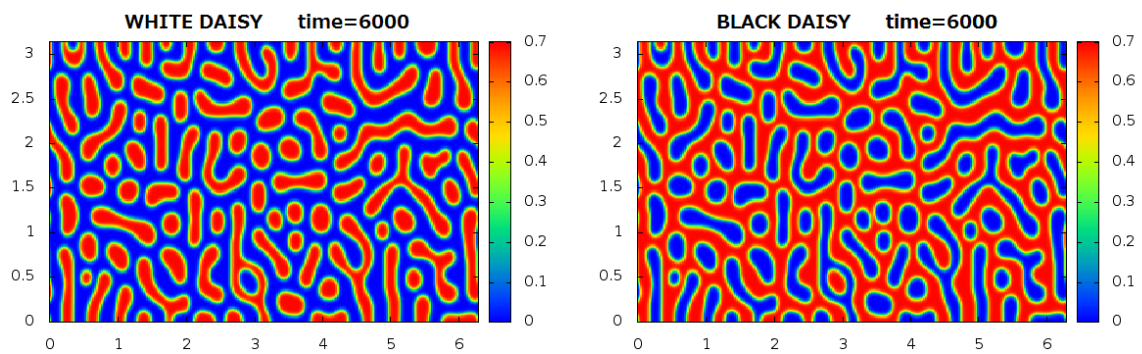


図 8.9: $L = 0.90$.

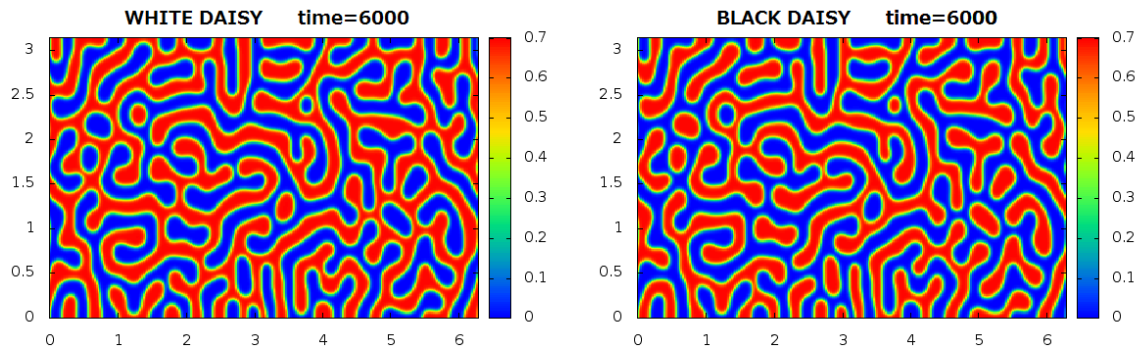


图 8.10: $L = 0.95$.

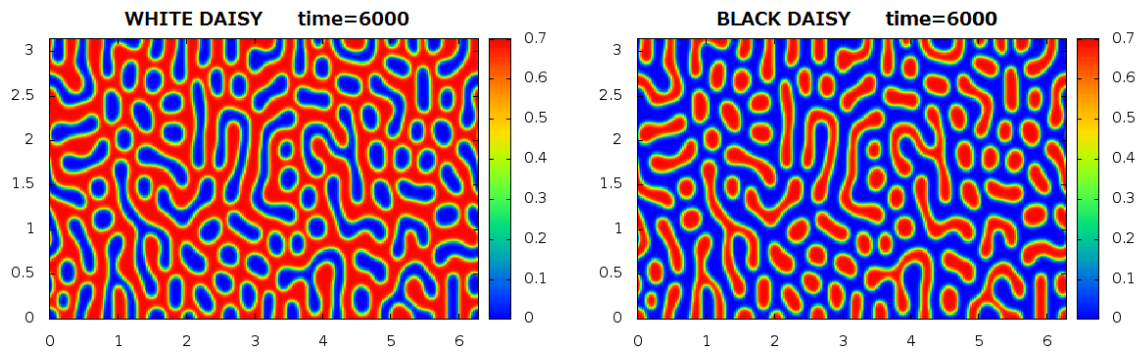


图 8.11: $L = 1.00$.

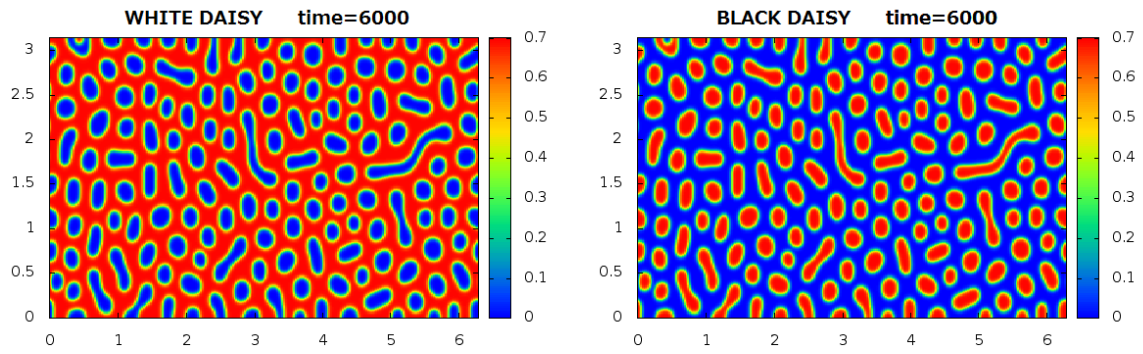


图 8.12: $L = 1.05$.

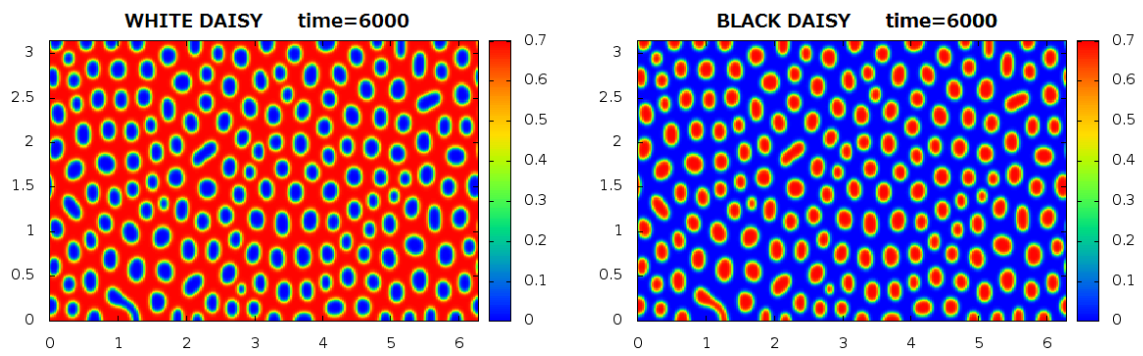


图 8.13: $L = 1.10$.

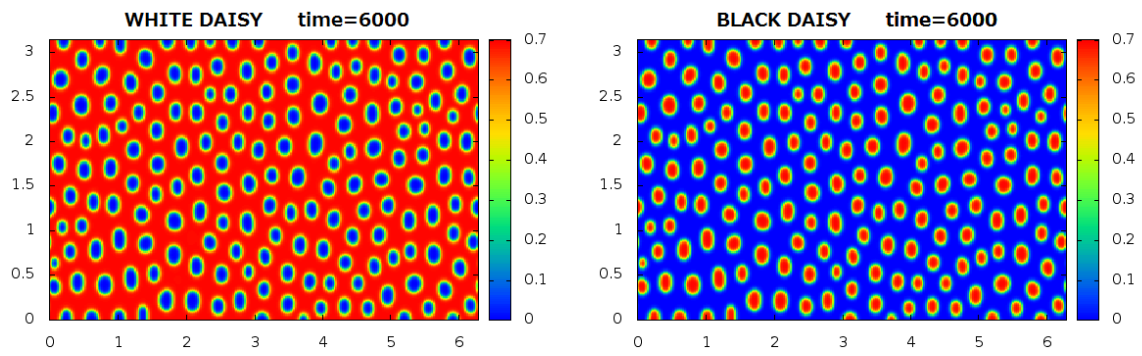


图 8.14: $L = 1.15$.

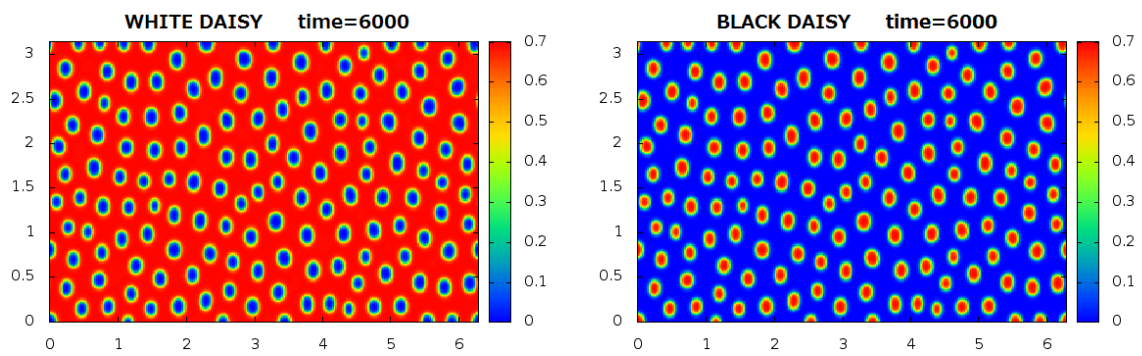


图 8.15: $L = 1.20$.

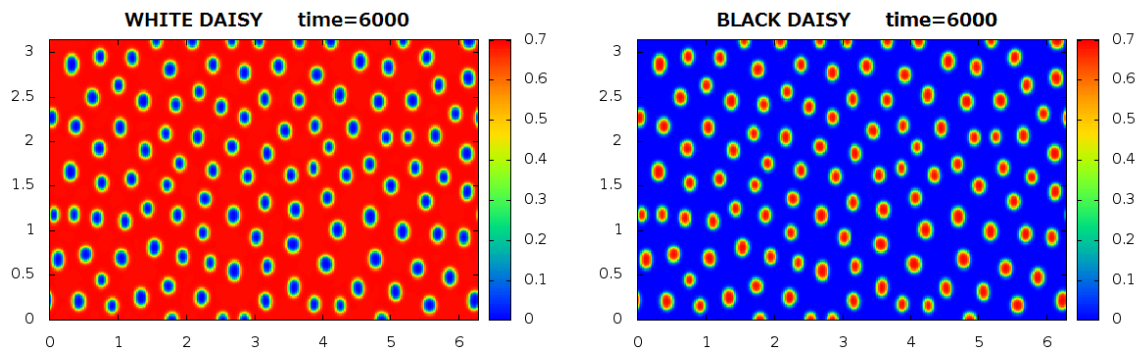


图 8.16: $L = 1.25$.

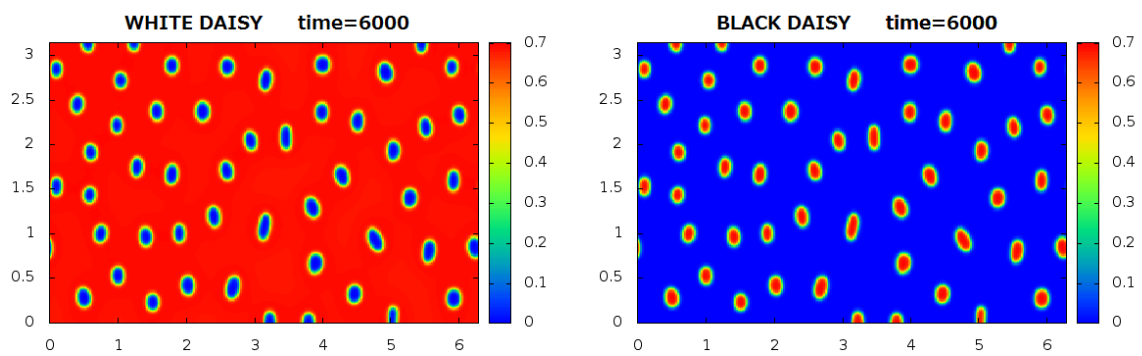


图 8.17: $L = 1.30$.

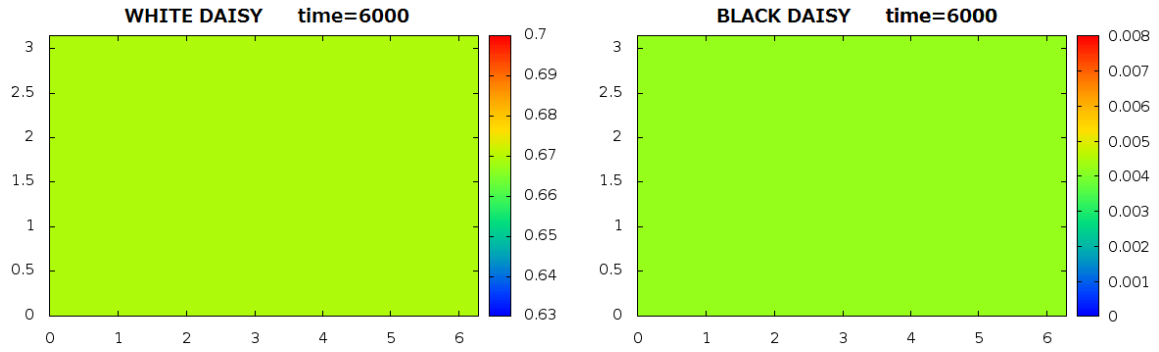


図 8.18: $L = 1.35$.

次の図 8.19 は、太陽光度 $0.40 \leq L \leq 1.80$ ($366.8 \leq R \leq 1650.6$) に対するデージーの空間平均被覆率 $U(6,000)$, $V(6,000)$ を示している．ここで、 $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ の空間平均値はそれぞれ、

$$U(t) = \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} u(x, y, t) dx dy, \quad 0 \leq t < \infty,$$

$$V(t) = \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} v(x, y, t) dx dy, \quad 0 \leq t < \infty,$$

によって計算される．

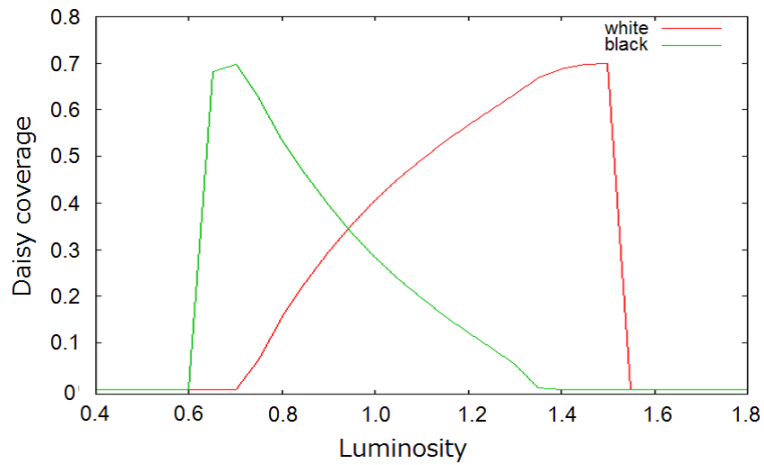


図 8.19: 太陽光度 L に対する $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ の空間平均値． $\Delta L = 0.05$.

このグラフは Watson-Lovelock モデルにおける解 $u(t)$, $v(t)$ のグラフ（図 2.2(d)）と対応しており、それと近い結果になっている．また、図 8.10 の迷路パターンが現れた $L = 0.95$ では、2 種類のデージーはほぼ均衡な状態となっており、そこを中心に白と黒の勢力が入れ替わっていることがグラフから明らかである．

8.3 温度の恒常性

ここでは、8.2 節と同様に $q = 20$, $d = 10^{-5}$ とする。

図 8.20-8.32 は、 $0.75 \leq L \leq 1.35$ ($687.75 \leq R \leq 1237.95$) に対する $t = 6,000$ での温度の分布 $w(x, y, t)$ を示している。図 8.6-8.18 との比較から分かるように、温度はダイジーの分布に強く影響を受けており、白いダイジーが分布する領域は温度が低く、反対に黒いダイジーが分布する領域は温度が高くなっている。このように各点で温度の差があるにもかかわらず、図 8.20-8.32 で示したすべての L に対して空間平均温度を計算すると、ダイジーの成長に適した温度 $\bar{w}$ に近い値となっている（図 8.33 を参照）。

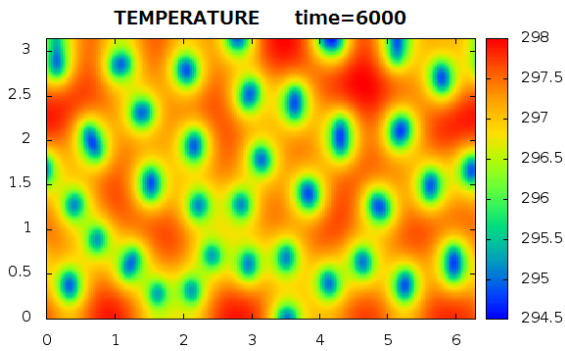


図 8.20: $L = 0.75$.

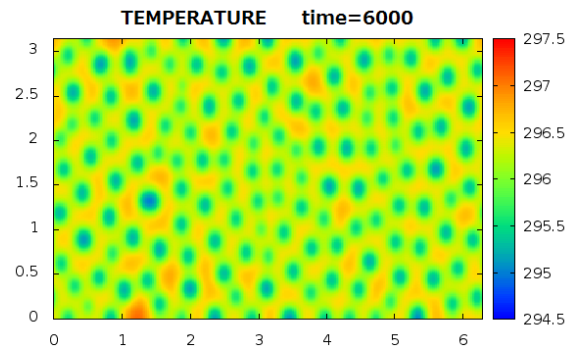


図 8.21: $L = 0.80$.

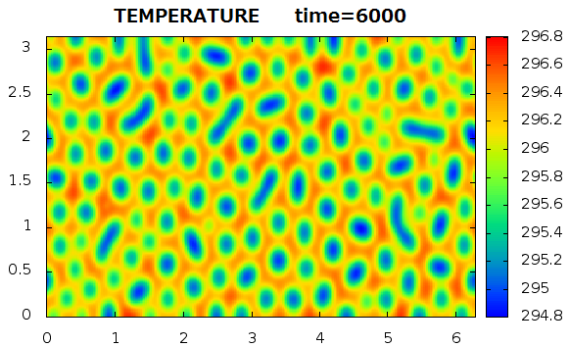


図 8.22: $L = 0.85$.

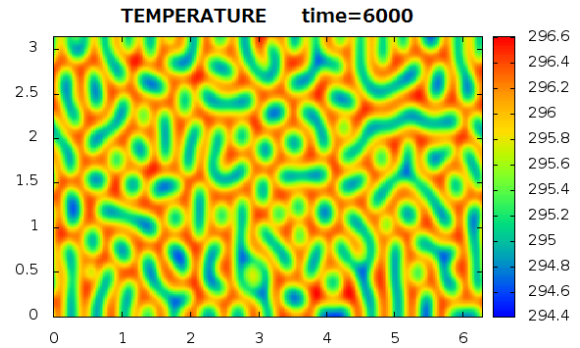


図 8.23: $L = 0.90$.

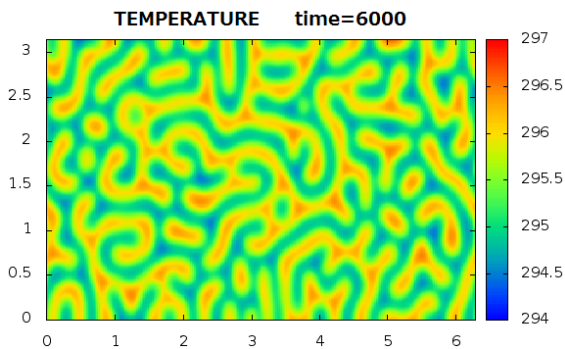


図 8.24: $L = 0.95$.

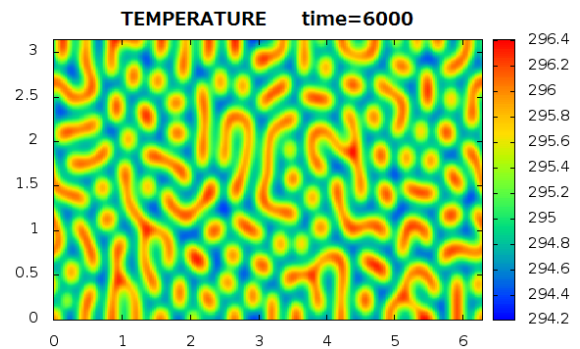


図 8.25: $L = 1.00$.

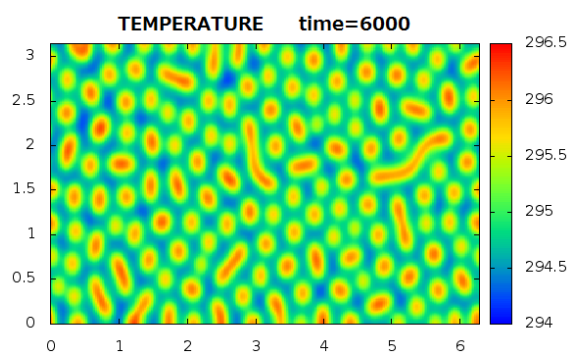


图 8.26: $L = 1.05$.

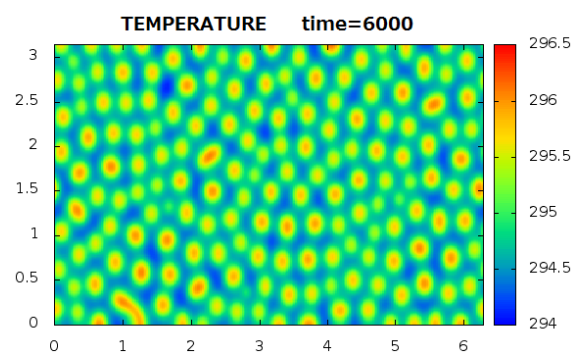


图 8.27: $L = 1.10$.

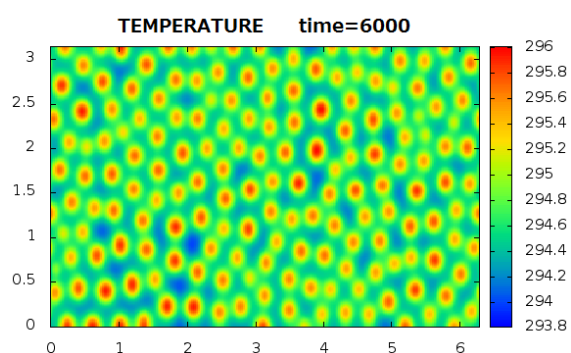


图 8.28: $L = 1.15$.

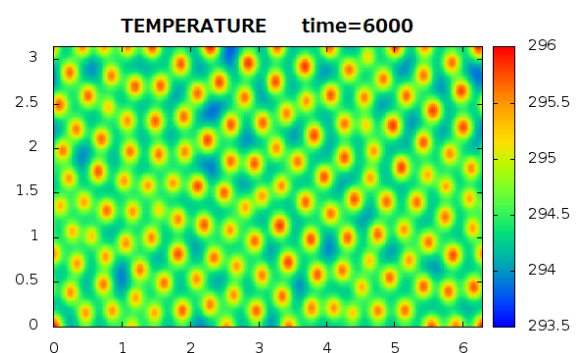


图 8.29: $L = 1.20$.

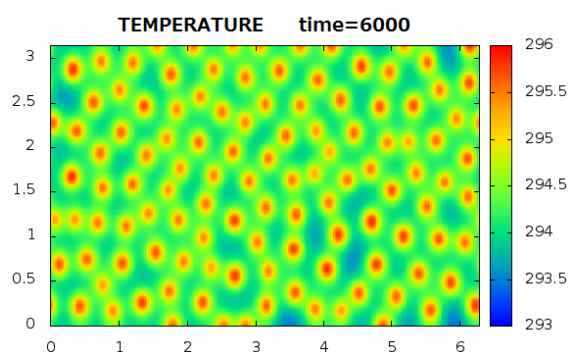


图 8.30: $L = 1.25$.

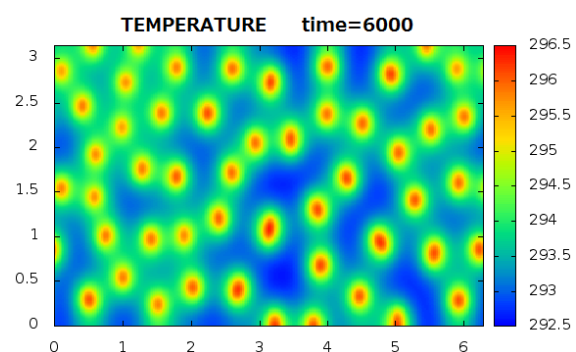


图 8.31: $L = 1.30$.

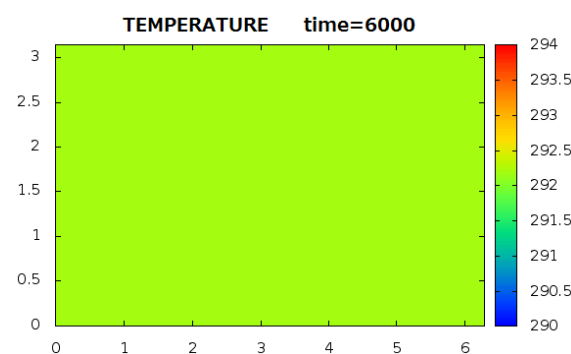


图 8.32: $L = 1.35$.

次の図 8.33 は, $0.40 \leq L \leq 1.80$ ($366.8 \leq R \leq 1650.6$) に対する空間平均温度を示している. 温度 $w(x, y, t)$ の空間平均値は,

$$W(t) = \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} w(x, y, t) dx dy, \quad 0 \leq t < \infty,$$

によって計算される. ただし, 図 8.33 では $W(t)$ を華氏から摂氏に変換している. また, 図 8.34 は Watson-Lovelock モデルにおける太陽光度 L に対する大域温度をプロットしたものである. 図 8.34 における赤線は各 L に対してデイジーの温度調節が最大となった場合の温度であり, 青点はそれ以外の解を示している.

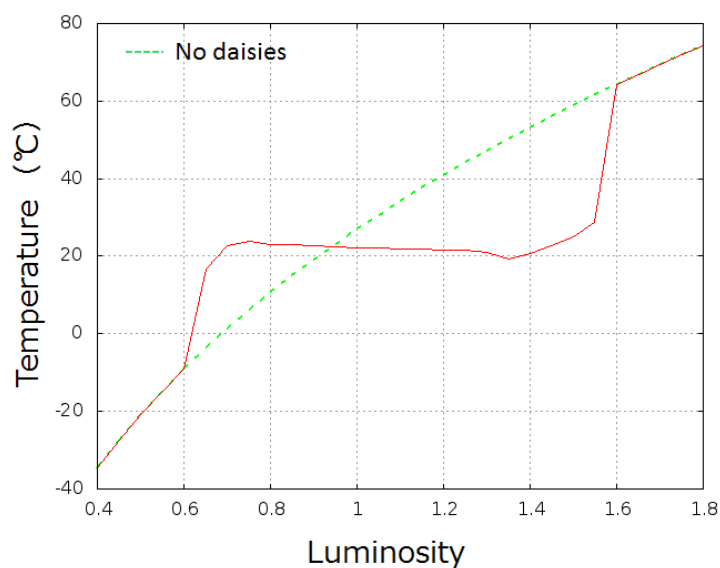


図 8.33: 太陽光度 L に対する空間平均温度 $W(6,000)$. $\Delta L = 0.05$.

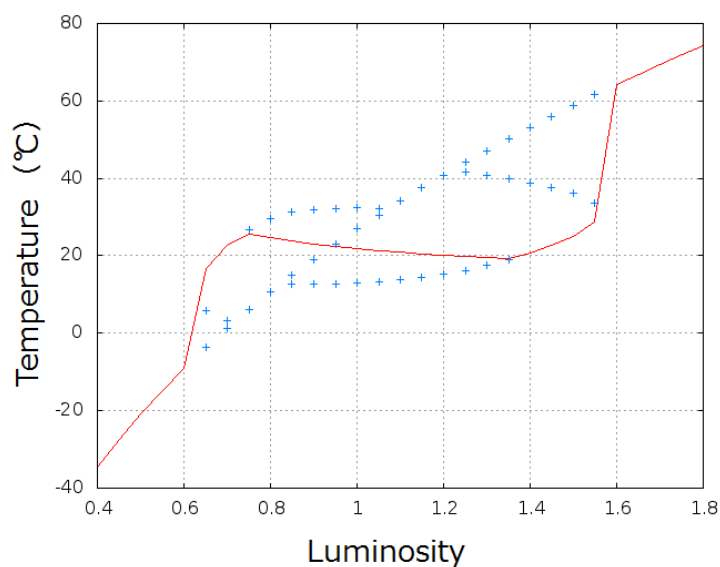


図 8.34: Watson-Lovelock モデルの大域温度. $\Delta L = 0.05$.

図8.33を見ると、 $0.40 \leq L \leq 0.60$ の区間では温度が低すぎるためデイジーは育つことができず、温度の調節も行われていない。惑星上に初めてデイジーが現われるのは $L = 0.65$ のときで、低温で優位に育つ黒いデイジーのみが空間一様に広がる。このときに温度の急激な上昇が起こり、これ以降、デイジーが生育可能な L の区間では、温度はデイジーの成長に適した値 ($\bar{w} = 22.5^\circ\text{C}$) の周辺に保たれている。 $0.75 \leq L \leq 1.35$ では、2種類のデイジーの共存が見られる。この区間内での $W(t)$ は、 $L = 0.75$ で最大となり、 $L = 0.95$ で最適温度 22.5°C に最も近づき、 $L = 1.35$ で最小の値をとる。したがって、グラフから分かるように、太陽光度の上昇に対して緩やかな温度の低下が見られ、ヒステリシスのような効果が観測できる。このような傾向は Watson-Lovelock モデルに対しても顕著に現れる (図8.34を参照)。これは、 $0.75 \leq L \leq 0.90$ の区間では黒が領域上で優勢であるため、その温暖効果により成長最適温度 $\bar{w}$ よりもわずかに高い温度となり、逆に、 $1.00 \leq L \leq 1.35$ の区間では白が優勢であるため、その冷却効果によって $\bar{w}$ よりも低い温度となっているためである。 $L = 1.40$ になると黒いデイジーは惑星上で育つことができなくなり、高温で優位に育つ白いデイジーのみが領域上に広がる。白いデイジーのみが存在する区間 $1.40 \leq L \leq 1.55$ で温度の緩やかな上昇が見られる。さらに太陽光度が強まり $L = 1.60$ になると、白いデイジーも惑星上から消え、温度は再び急激に上昇する。

8.4 q を制御パラメータとした場合

デイズワールドを考える上で非常に重要であるのが、大域温度と局所温度の存在である。その存在によって、惑星上のすべてのデイズと個々のデイズという構造レベルの違いが考慮されていることが、デイズの競争とそれに伴う温度の恒常性に大きな影響を与えている。 q はこの局所温度と大域温度の熱交換の度合いを表すパラメータであり（2.1節を参照）、デイズワールドの挙動に強く働きかけていることは間違いないだろう。

ここでは、 q を制御パラメータとした場合のいくつかの結果を紹介する。その他のパラメータについては (8.1) を用い、 $L = 0.90$ ($R = 825.3$), $d = 10^{-4}$ としている。また、空間の刻み幅は、 $\Delta x = \Delta y = 512$ とする。

図 8.35-8.43 は、それぞれ $q = 0, 10, 20, 40, 60, 100, 300, 600, 1200$ とした場合の結果である。また、各図の左が白いデイズ、中央が黒いデイズ、右が温度の分布を表している。

図 8.35 は $q = 0$ の場合で、惑星の大域温度と局所温度との間で完全な熱交換が行われている状態である。このとき、黒と白のデイズはどちらも空間一様に育っており、互いの勢力はほぼ均衡な状態にある ($U(t) \approx 0.344035$, $V(t) \approx 0.343958$, $W(t) \approx 292.067$)。これは、大域温度と局所温度の差が全く無いため、デイズの 2 種間の競争が弱まったためと考えられる。

図 8.36 は $q = 10$ とした場合で、2 種類のデイズは互いに空間一様に分布しているが、わずかに黒いデイズが優勢となっている ($U(t) \approx 0.295408$, $V(t) \approx 0.398343$, $W(t) \approx 295.737$)。

図 8.37 は $q = 20$ の場合で、図 8.35, 8.36 の場合よりもデイズの種間競争が強まり、2 種類のデイズは領域上で分かれて育っている ($U(t) \approx 0.286675$, $V(t) \approx 0.393233$, $W(t) \approx 295.886$)。ただし、完全な棲み分けパターンにはなっておらず、各場所で劣勢となっている種がわずかに生き残っている。

図 8.38 は $q = 40$ の場合で、2 種類のデイズによる棲み分けパターンが現れ、黒優勢の連鎖パターンとなっている ($U(t) \approx 0.271400$, $V(t) \approx 0.378948$, $W(t) \approx 295.917$)。

図 8.39 は $q = 60$ の場合で、図 8.38 と同じく黒優勢の連鎖パターンが現れ、白によって形成される連鎖のひとつひとつが長くなっている ($U(t) \approx 0.249012$, $V(t) \approx 0.345104$, $W(t) \approx 295.826$)。

図 8.40 は $q = 100$ の場合で、図 8.38, 8.39 と同じく黒優勢の連鎖パターンとなっているが、白によって形成される各生息域が大きくなっている ($U(t) \approx 0.254704$, $V(t) \approx 0.368572$, $W(t) \approx 296.138$)。

図 8.41 は $q = 300$ の場合で、白いデイズの生息域がひとつに繋がり、図 8.38-8.40 と比べて黒いデイズの勢力が強まっている ($U(t) \approx 0.264107$, $V(t) \approx 0.385315$, $W(t) \approx 296.363$)。

図 8.42 の $q = 600$ とした場合、黒いデイズの勢力はさらに強まっている ($U(t) \approx 0.246914$, $V(t) \approx 0.401093$, $W(t) \approx 297.443$)。

図 8.43 で $q = 1200$ まで大きくした場合、白いデイズは領域上で育つことができず、黒いデイズのみが空間一様に広がっている ($U(t) = 0$, $V(t) \approx 0.663059$, $W(t) \approx 313.743$)。これは、 q が大きいと白（黒）が少し増えた場合でも温度の急激な低下（上昇）が起こる

ため、白と黒のデイジーの競争が激化していることによるものだと考えられる。したがって、 $L = 0.90$ のわずかに黒が優勢の状態では、図 8.43 のように黒が領域全体に拡がり、白は育つことができなくなっている。

これらの結果から、 q を大きくとることがデイジーの種間競争を強めることが分かる。

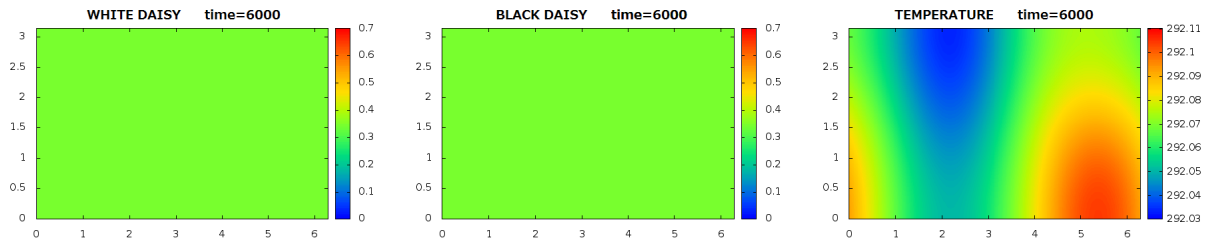


図 8.35: $q = 0$. $t = 6000$.

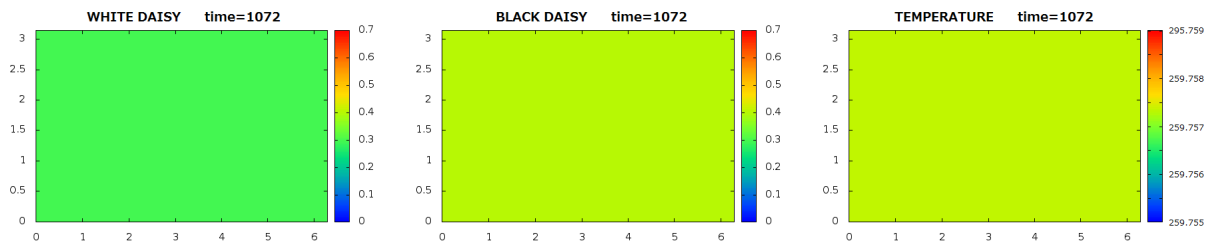


図 8.36: $q = 10$. $t = 1072$.

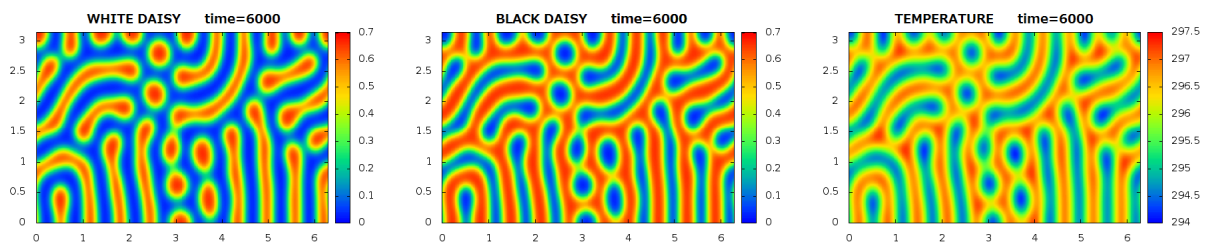


図 8.37: $q = 20$. $t = 6000$.

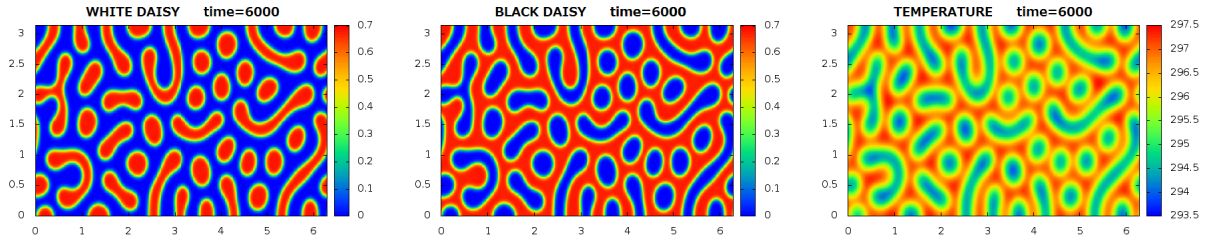


图 8.38: $q = 40$. $t = 6000$.

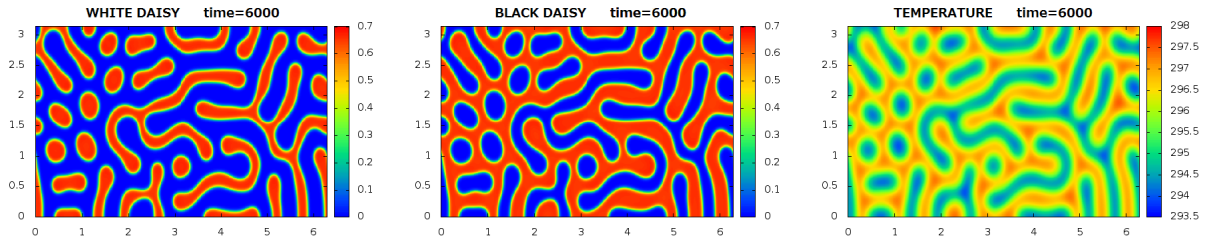


图 8.39: $q = 60$. $t = 6000$.

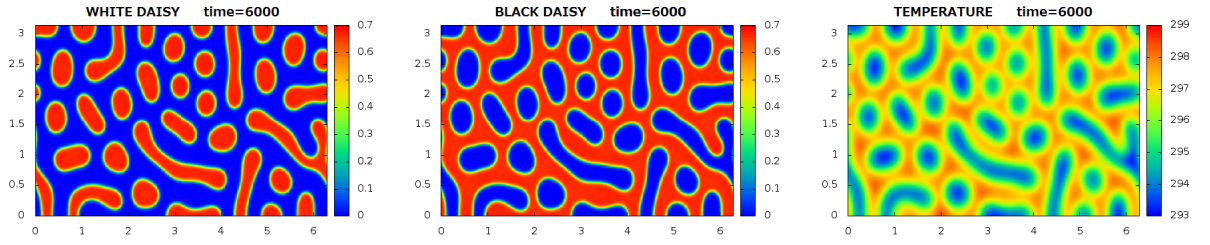


图 8.40: $q = 100$. $t = 6000$.

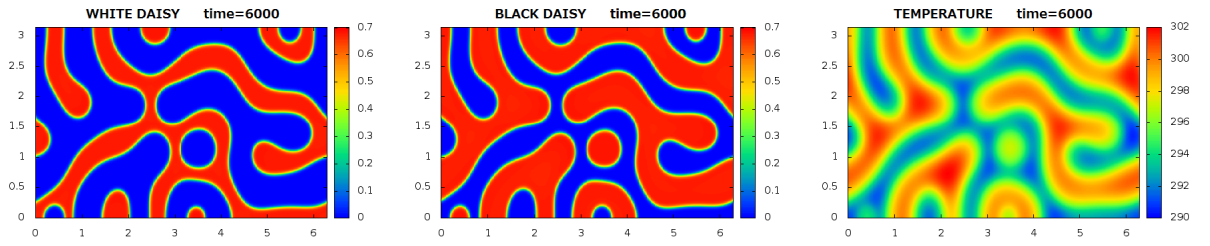


图 8.41: $q = 300$. $t = 6000$.

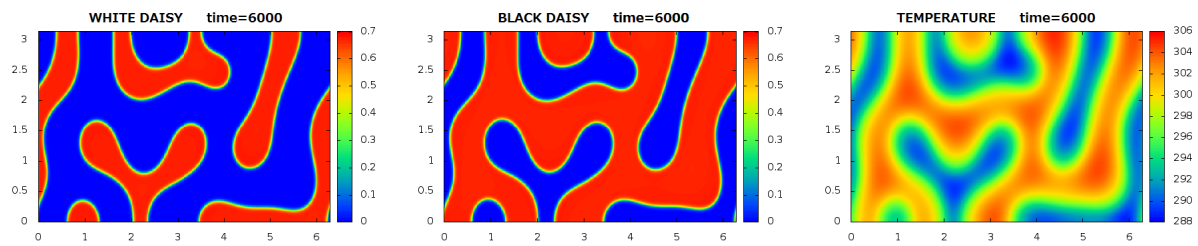


图 8.42: $q = 600$. $t = 6000$.

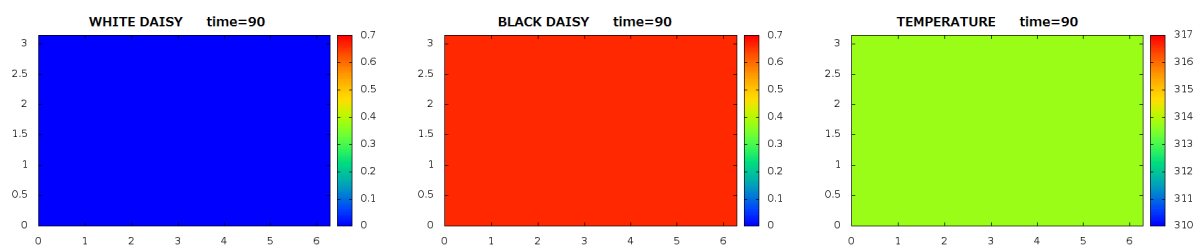


图 8.43: $q = 1200$. $t = 90$.

第9章

結論

Watson-Lovelock によって導入されたデイズワールドモデルは、最も単純な地球システムモデルとして多くの分野で研究されている。本論文では、このデイズワールドモデルに空間の拡張とデイズの拡散効果を取り入れた恒常性自己調節モデルについて、数学解析と数値シミュレーションの研究手法を用いて議論した。ここで、各章の内容について簡単にまとめておく。

第1章では、本研究の背景として、地球に見られる恒常性自己調節システムについて説明した。また、そのシステムを再現する非常に単純な数理モデルとしてデイズワールドとその挙動を述べ、モデルの関連・拡張研究について簡単に紹介した。

第2章では、デイズワールドの関連研究、特に空間次元の拡張を扱っている研究についてより詳しく紹介した。さらに、章の最後で恒常性自己調節モデルの導入を行った。

第3章では、球面上で恒常性自己調節モデルの定式化を行うために、球面上でラプラス作用素を定義した。それを受けて、放物型発展方程式の理論を用いて、球面上の恒常性自己調節モデルに対する解の構成を行い、力学系を定め、さらに指数アトラクタの存在を示した。この指数アトラクタの存在によって、モデルに対して何らかのパターン解が現れることを示唆した。

第4章では、球面上での偏微分方程式の離散化手法として、緯度経度格子系を用いて比較的簡単に実装できる Half-Step-Shifted 格子スキームと L' Hôpital の定理を用いるスキームを導入した。これによって、球面上での微分方程式の数値シミュレーションにおいて障害となる座標特異点の問題を取り除いた。

第5章では、第3章での結果を受けて数値シミュレーションを行い、実際にパターン解が得られることを示した。また、白いデイズと黒いデイズが同じ領域上で共存することのない棲み分けパターンが現れており、さらに2種類のデイズの生育域の境界線に緯度方向の非対称性が見られた。

第6章では、2次元長方形領域上での恒常性自己調節モデルに対して解の構成を行い、力学系を定め、指数アトラクタを構成した。さらに、定数定常解の存在とその安定・不安定性について調べ、不安定化が起こる条件について考察した。

第7章では、2次元長方形領域上の恒常性自己調節モデルに対して、ADI法により離散化方程式の実装を行った。

第8章では、いくつかの制御パラメータを動かして得られるパターン解を調べた。先ず、太陽光度を表すパラメータ L を制御パラメータとし、その数値シミュレーション結果を示した。これによって、デイズの共存が現れる領域で、白と黒のデイズの生存競争

による棲み分けパターンが現れることが分かった。また、その棲み分けパターンは L の値によって、「斑点パターン」、「連銭パターン」、「迷路パターン」の3種類に変化することが分かった。さらに、そのデイジーの棲み分けパターンと温度調節機構の関係性について確認した。また、デイジーワールドの挙動に大きな役割を果たしていると考えられるパラメータ q について、それを制御パラメータとした場合の数値シミュレーション結果についても紹介した。

次に、球表面と2次元長方形の2つの領域上でのパターン解について考察する。

球面上では白と黒のデイジーが赤道と極付近に生息域を分けたストライプ状の棲み分けパターンが現れた。これは緯度毎の太陽から届く入射光の違いという球面の特性が、デイジーの生存競争に強く影響していることが関係していると考えられる。このようなデイジーの棲み分けパターンについては、Adams-Carr による円周拡散モデルにも見られており、Watson-Lovelock モデルにおいて白と黒のデイジーが共存する太陽光度 L の区間で現れることが分かっている。棲み分けパターンについてより詳細なことを知るために、モデルを2次元長方形領域上で定式化し直し、そのパターン解を調べた。長方形領域上では、デイジーの共存が見られる L の区間で、2種類は一方の種が優占種として領域全体に拡がり、もう一方の種は斑点状もしくは連銭状に分布しているパターンが現れた。このことは、デイジーの棲み分けパターンが、白と黒のデイジー間の生存競争が強まり、温度の拡散率が十分大きいことを条件に現れるという第6章での議論とも矛盾の無い結果である。また、惑星の平均温度がデイジーの成長に最適なものとなったときには、2種類のデイジーの勢力は均衡状態となっていることがパターン解から視覚的に読み取ることができた。この2種類がほぼ均衡な状態となっている迷路パターンが現れたのは $L = 0.95$ のときであり、これは実際の地球の太陽光度と近い値になっている。

このように、球面上と長方形上の両方のモデルに対してデイジーの棲み分けパターンが観測されたが、それぞれのパターンは大きく異なる結果となった。しかし、これは上でも述べたように、球面上のモデルについては赤道付近と極付近で太陽からの入射エネルギー量が大きく異なっていることが、それぞれのデイジーの生息可能領域を制限したためと考えられる。また、球面上での結果で見られた境界線の揺らぎは、パラメータの選び方（例えば、デイジーの拡散率 d を小さくとるなど）によっては赤道上に何らかのパターンが現れることを仄めかしているのかもしれない。これについてはさらに詳細に調べる必要がある。

最後に今後の課題について述べる。

まず、球面領域での数値シミュレーション結果について、これは各パラメータを一通りに固定したもののみを紹介した。その理由のひとつに、計算にかかる時間の長さがある。球面の効果を取り入れたことによるデイジーのパターン形成について詳しく見るために、十分な数のパラメータについて調べることができたとは言い難い。したがって、さらなる数値計算と、計算コストの効率化や精度の向上に目を向けた離散化スキームの改良に取り組みたいと考えている。

2次元長方形領域での数値シミュレーション結果についても、さらなる研究の余地がある。まず、本稿では一部の定数定常解に対する安定性解析しかできていないので、それについては早急に調べる必要がある。それと併せて、さらに細かい刻み幅 ΔL で、各 L に対する数値シミュレーションを行うことで、デイジーによる棲み分けパターンの構造を明確

にしたい．さらに，第 8 章の最後にパラメータ q を動かした場合の結果について紹介したが，こちらについては十分な数値シミュレーションができていない．第 8 章で述べた考察を裏付ける意味でも，更なる数値シミュレーション結果が必要となるだろう．これについても今後の研究で明らかにしていきたい．

第10章

将来の展望

本章では、将来の研究展望について述べる。

今回の結果は、惑星の温度恒常性システムを、温度の定点観測といった従来の方法ではなく、植生の分布パターンから俯瞰的に捉えることの可能性を示唆している。これを地球温暖化問題に関する研究に応用することを考えている。

現在、様々な環境問題が取り上げられ、その進行防止、もしくは完全な解決を目指した様々な研究が進められている。そのような環境問題の中でも、とりわけよく耳にするのが地球温暖化問題だろう。地球温暖化に影響を与えているものとして、人為起源（例えば、森林伐採によるアルベドの変化や温室効果ガスの増大など）、さらに自然起源（例えば、太陽活動の影響、火山噴火に伴うエアロゾルの変化など）によるものまで、いくつかの要因が考えられている。その中で最も影響が大きいと考えられているのが温室効果ガスの増大である。我々の生活のあらゆる面で電気やガソリンといったエネルギーを消費しており、そのほとんどは石炭や石油などの化石燃料から供給されている。この化石燃料を大量に消費することにより二酸化炭素などの温室効果ガスが大気中に放出される。

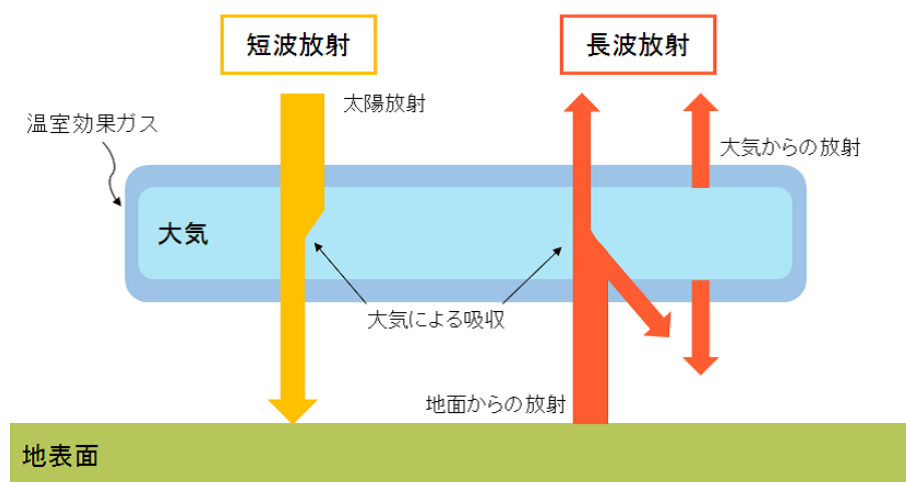


図 10.1: 地表面の熱収支。

温室効果ガスは太陽からの日射（短波放射）に対して透明で、地表面や大気中の水蒸気が出す赤外放射（長波放射）に対して不透明という性質を持っている。したがって、地球に届いた太陽光は地表での反射や輻射熱として宇宙へ放出されるが、そのいくらかは温

室効果ガスによって吸収され、地表へ再放出される（図 10.1 を参照）。つまり、温室効果ガスの量が増大することで、長波放射に対する大気の射出率が増えて温室効果が強まり、これによって地球の表面温度が上昇する。これが地球温暖化である。

恒常性自己調節モデルでこのような温暖化問題を考えるために、温室効果の度合いを表すパラメータを制御パラメータとして扱うことを考えている。

短波放射に対する大気の吸収率を a とし、長波放射に対する大気の射出率を ε とすると恒常性自己調節モデルにおける温度の方程式は以下のように書き換えられる（例えば [47] を参照）。

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D\Delta w + [1 - g(u, v)]R - \sigma \left(\frac{2 - a}{2 - \varepsilon} \right) w^4.$$

これらのパラメータ a, ε に対して、数学解析と数値シミュレーションの両方面から調べることで、温度の恒常性が保たれたデイズワールドで、温室効果ガスの増加がデイズの生息領域にどのような影響を与えるのかを研究したい。ここで注意したいのは、パラメータ a, ε を動かして得られる結果は、本稿での結果と定性的に大きく変わることはないかもしれないということである。したがって、定量的な変化を見ていくことになるのではないかと予想している。また、上記の方程式以外にも、惑星での温暖化問題を考えるにあたって恒常性自己調節モデルにはまだまだ改良・拡張の余地があるため、さらなる発展研究についても構想していきたい。

地球温暖化を考える上では、地球をひとつのシステムとして捉え、様々な現象を総体的に把握していかなければならない。しかしそれは、地球の環境がいくつもの要素が複雑に関係しあいながら成り立っていることから、簡単なことではない。恒常性自己調節モデルは、地球の表層環境を構成している要素から必要なものだけを取り出し単純化しているということから、システムの根底にある基礎的な部分を理解するための概念モデルとしての側面が強い。これは、実際の地球温暖化問題に直接的な解決策をもたらすようなものではないが、惑星の温暖化メカニズムの解明に対して、新たな知見を得ることに大いに役立つと考えている。

謝辞

本論文は大阪大学大学院情報科学研究科情報数理学専攻博士後期課程において、同大学の八木厚志名誉教授のご指導の下に行った研究をまとめたものです。八木名誉教授は本研究に携わる契機を与えて下さるとともに、研究分野の内容はもちろんのこと、多くの点で常に懇切丁寧にご指導して下さいました。研究の楽しさと難しさを知ることができたのは、ひとえに八木名誉教授のご指導のおかげであり、謹んで感謝の意を表するとともに、厚く御礼申し上げます。

本学大学院情報科学研究科情報数理学専攻非線形数理講座の先生方には多くのご協力およびご支援を頂きました。鈴木秀幸教授には、日頃から研究生活を温かく見守って頂き、さらに主査として博士論文執筆に対する多くのご助言を頂きました。山本吉孝准教授には、研究に関する貴重なご意見を頂戴し、学生生活全般に対しても細部に亘る丁寧なご指導で支えて頂きました。畠中利治助教には、研究室ゼミでは多くの的確なご助言を頂き、また日頃から様々な興味深いお話を聞かせて頂きました。ここに深く感謝申し上げます。

本学大学院情報科学研究科情報数理学専攻の藤崎泰正教授ならびに森田浩教授には、副査として本論文の作成にあたり大変有益なご意見を頂きました。心より御礼申し上げます。

大学学部生時代に私が博士課程への進学を決める契機を与えて下さりました、関西学院大学理工学部数理科学科の大崎浩一教授は、私の本学進学後も様々なご助言を下さり、些細な質問にも丁寧に答えて下さりました。深く感謝いたします。

事務員の堀田有里子さんには、事務手続きのみならず快適な研究生活を送るための沢山のご助力を賜りました。そして、鈴木研究室卒業生の太田家健佑さんならびに学生の皆様には多くの場面で手助けして頂きました。皆様とは、研究を進めるにあたりヒントとなったものから、ときには研究に全く関係のないものまで、多くの有益な議論を交わすことができ、それらはすべて私にとって大きな糧となっています。心より感謝申し上げます。

最後に、今日に至るまでの学生生活を様々な面から支え、終始励ましてくれた両親と姉妹に心から感謝の意を表します。

参考文献

- [1] G. J. Ackland, *Maximization principles and daisyworld*, J. Theor. Biol. **227** (2004), 121–128. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2003.10.007>.
- [2] G. J. Ackland, M. A. Clark and T. M. Lenton, *Catastrophic desert formation in Daisyworld*, J. Theor. Biol. **223** (2003), 39–44. [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5193\(03\)00069-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5193(03)00069-9).
- [3] G. J. Ackland and A. J. Wood, *Emergent patterns in space and time from daisyworld: a simple evolving coupled biosphere-climate model*, Phil. Trans. R. Soc. A **368** (2010), 161–179. <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2009.0203>.
- [4] B. Adams and J. Carr, *Spatial pattern formation in a model of vegetation-climate feedback*, Nonlinearity **16** (2003), 1339–1357. <http://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/16/4/309>.
- [5] B. Adams, J. Carr, T. M. Lenton and A. White, *One-dimensional daisyworld: spatial interactions and pattern formation*, J. Theor. Biol. **223** (2003), 505–513. [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5193\(03\)00139-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5193(03)00139-5).
- [6] A. V. Babin and M. I. Vishik, *Attractors of Evolution Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [7] O. Calin and D. C. Chang, *Geometric Mechanics on Riemannian Manifolds*, Birkhäuser, Boston, 2004.
- [8] G. S. Campbell and J. M. Norman, *An Introduction to Environmental Biophysics*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1998. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-1626-1>.
- [9] R. N. Carter and S. D. Prince, *Epidemic models used to explain biogeographical distribution limits*, Nature **293** (1981), 644–645. <http://dx.doi.org/10.1038/293644a0>.
- [10] R. Dautray and J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1988. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-61566-5>.
- [11] S. De Gregorio, R. A. Pielke and G. A. Dalu, *Feedback Between a Simple Biosystem and the Temperature of the Earth*, J. Nonlinear Sci. **2** (1992), 263–292. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01208926>.

- [12] J. Dyke and I. Harvey, *Hysteresis and the Limits of Homeostasis: From Daisyworld to Phototaxis*, in Proceeding of the VIIIth European Conference on Artificial Life, ECAL 2005, Springer-Verlag, Berlin, 2005, 241–251. http://dx.doi.org/10.1007/11553090_25.
- [13] B. Fornberg and D. Merrill, *Comparison of finite difference- and pseudospectral methods for convective flow over a sphere*, Geophys. Res. Lett. **24** (1997), 3245–3248. <http://dx.doi.org/10.1029/97GL03272>.
- [14] R. K. S. Hankin and N. Mitchell, *Resolving the anomaly of bare habitable ground in Daisyworld*, Tellus **63B** (2011), 140–143. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1600-0889.2010.00511.x>.
- [15] S. P. Harding and J. E. Lovelock, *Exploiter-mediated Coexistence and Frequency-Dependent Selection in a Numerical Model of Biodiversity*, J. Theor. Biol. **182** (1996), 109–116. <http://dx.doi.org/10.1006/jtbi.1996.0146>.
- [16] A. Kageyama and T. Sato, “Yin-Yang grid”: *An overset grid in spherical geometry*, Geochem. Geophys. Geosyst. **5** (2004), Q09005. <http://dx.doi.org/10.1029/2004GC000734>.
- [17] A. Kageyama, T. Sato and the Complexity Simulation Group, *Computer simulation of a magnetohydrodynamic dynamo. II*, Phys. Plasmas **2** (1995), 1421–1431. <http://dx.doi.org/10.1063/1.871485>.
- [18] S. G. Krein, *Linear differential equations in Banach space*, AMS, 1971.
- [19] T. M. Lenton, *Gaia and natural selection*, Nature **394** (1998), 439–447. <http://dx.doi.org/10.1038/28792>.
- [20] T. M. Lenton and J. E. Lovelock, *Daisyworld is Darwinian: Constraints on Adaptation are Important for Planetary Self-Regulation*, J. Theor. Biol. **206** (2000), 109–114. <http://dx.doi.org/10.1006/jtbi.2000.2105>.
- [21] T. M. Lenton and J. E. Lovelock, *Daisyworld revisited: quantifying biological effects on planetary self-regulation*, Tellus **53B** (2001), 288–305. <http://dx.doi.org/10.3402/tellusb.v53i3.16597>.
- [22] T. M. Lenton and M. van Oijen, *Gaia as a complex adaptive system*, Phil. Trans. Roy. Soc. B. Biol. Sci. **357** (2002), 683–695. <http://dx.doi.org/10.1098/rstb.2001.1014>.
- [23] J. E. Lovelock, *Gaia as seen through the atmosphere*, in Biomineralization and Biological Metal Accumulation, edited by P. Westbroek and E. W. deJong, D. Reidel, Dordrecht, Netherlands, 1983, 15–25. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-009-7944-4_2.

- [24] J. E. Lovelock, *The Ages of Gaia. A Biography of our Living Earth*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1988.
- [25] J. E. Lovelock and L. Margulis, *Atmospheric homeostasis by and for the biosphere: the gaia hypothesis*, *Tellus* **26** (1974), 1–10. <http://dx.doi.org/10.3402/tellusa.v26i1-2.9731>.
- [26] K. McGuffie and A. Henderson-Sellers, *The climate modelling primer*, 4th ed., John Wiley & Sons, Chichester, 2014.
- [27] D. W. Peaceman and H. H. Rachford, jr., *The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations*, *J. Soc. Ind. Appl. Math.* **3** (1955), 28–41. <https://doi.org/10.1137/0103003>.
- [28] D. Punithan and R. I. B. McKay, *Self-Organizing Spatio-temporal Pattern Formation in Two-Dimensional Daisyworld*, *Self-Organizing Systems* (2012), 72–83. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-28583-7_7.
- [29] D. Punithan and R. I. B. McKay, *Phase transitions in two-dimensional daisyworld with small-world effects — A study of local and long-range couplings*, *Future Gen. Comput. Syst.* **33** (2014), 64–80. <http://dx.doi.org/10.1016/j.future.2012.12.022>.
- [30] C. Ronchi, R. Iacono and P. S. Paolucci, *The “Cubed Sphere”: A New Method for the Solution of Partial Differential Equations in Spherical Geometry*, *J. Comput. Phys.* **124** (1996), 93–114. <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1996.0047>.
- [31] P. T. Saunders, *Evolution without natural selection: Further implications of the Daisyworld parable*, *J. Theor. Biol.* **166** (1994), 365–373. <http://dx.doi.org/10.1006/jtbi.1994.1033>.
- [32] M. Seto and T. Akagi, *Daisyworld inhabited with daisies incorporating a seed size/number trade-off: the mechanism of negative feedback on selection from a standpoint of the competition theory*, *J. Theor. Biol.* **234** (2005), 167–172. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jtbi.2004.11.029>.
- [33] F. D. Stacey and P. M. Davis, *Physics of the Earth*, 4th ed., Cambridge Univ. Press, 2008.
- [34] T. Sugimoto, *Darwinian Evolution Does Not Rule Out the Gaia Hypothesis*, *J. Theor. Biol.* **218** (2002), 447–455. <http://dx.doi.org/10.1006/jtbi.2002.3091>.
- [35] H. Tanabe, *Equations of Evolution*, Iwanami Shoten, 1975 (in Japanese); English translation: Pitman, 1979.

- [36] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1997. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0645-3>.
- [37] A. M. Turing, *The chemical basis of morphogenesis*, Phil. Trans. Royal Soc. **237(B)** (1952), 37–72. <http://dx.doi.org/10.1098/rstb.1952.0012>.
- [38] W. von Bloh, A. Block, M. Parade and H. J. Schellnhuber, *Tutorial Modelling of geosphere–biosphere interactions: the effect of percolation-type habitat fragmentation*, Physica A **266** (1999), 186–196. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(98\)00590-1](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(98)00590-1).
- [39] W. von Bloh, A. Block and H. J. Schellnhuber, *Self-stabilization of the biosphere under global change: a tutorial geophysiological approach*, Tellus **49(B)** (1997), 249–262. <http://dx.doi.org/10.3402/tellusb.v49i3.15965>.
- [40] A. J. Watson and J. E. Lovelock, *Biological homeostasis of the global environment: the parable of Daisyworld*, Tellus **35(B)** (1983), 284–289. <http://dx.doi.org/10.3402/tellusb.v35i4.14616>.
- [41] I. S. Weaver and J. G. Dyke, *The importance of timescales for the emergence of environmental self-regulation*, J. Theor. Biol. **313** (2012), 172–180. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jtbi.2012.07.034>.
- [42] D. L. Williamson, *The Evolution of Dynamical Cores for Global Atmospheric Models*, J. Meteor. Soc. Japan **85(B)** (2007), 241–269. <http://dx.doi.org/10.2151/jmsj.85B.241>.
- [43] A. J. Wood, G. J. Ackland, J. G. Dyke, H. T. P. Williams and T. M. Lenton, *Daisyworld: a review*, Rev. Geophys. **46** (2008), RG1001. <http://dx.doi.org/10.1029/2006RG000217>.
- [44] A. J. Wood, G. J. Ackland and T. M. Lenton, *Mutation of albedo and growth response produces oscillations in a spatial Daisyworld*, J. Theor. Biol. **242** (2006), 188–198. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jtbi.2006.02.013>.
- [45] A. Yagi, *Abstract Parabolic Evolution Equations and their Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 2010. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-04631-5>.
- [46] X. Zeng, R. A. Pielke and R. Eykholt, *Chaos in daisyworld*, Tellus **42(B)** (1990), 309–318. <https://doi.org/10.3402/tellusb.v42i4.15224>.
- [47] 浅野 正二, 大気放射学の基礎, 朝倉書店, 2010.
- [48] 近藤 純正, 水環境の気象学—地表面の水収支・熱収支—, 朝倉書店, 1994.

- [49] 近藤 純正, 地表面に近い大気の科学—理解と応用—, 東京大学出版会, 2010.
- [50] 島津 康男, 地球内部物理学, 物理科学選書 1, 裳華房, 1966.
- [51] 高見 穎郎, 河村 哲也, 偏微分方程式の差分解法, 東京大学基礎工学双書, 東京大学出版会, 1999.