

| | |
|--------------|---|
| Title | 非平衡エネルギースペクトルに基づくLESのSGSモデルの開発 |
| Author(s) | 玉木, 隆宏; 堀内, 潔 |
| Citation | サイバーメディアHPCジャーナル. 2013, 3, p. 17-25 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/70466 |
| rights | |
| Note | |

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

非平衡エネルギースペクトルに基づく LES の SGS モデルの開発

玉木 隆宏、堀内 潔

東京工業大学 大学院理工学研究科 機械宇宙システム専攻

1. 緒言

剥離などの非定常・非平衡乱流場の挙動予測は工学上重要であり、その主な数値シミュレーションには厳密な値が求まるが計算時間が長く非実用的な DNS、時間平均のために非定常乱流場の予測に向かない RANS、局所的空間平均のため非定常乱流場の予測に適していて計算時間の削減が可能な LES がある。

SGS(subgrid-scale)のエネルギースペクトルを用いて GS(grid-scale)から SGS へのエネルギーカスケードの様式を SGS モデルに導入することが可能であるので、エネルギースペクトルの観点から LES の SGS モデリングを行うことは有意義である。

実験データと DNS の解析的アプローチによると、Kolmogorov の平衡の-5/3 乗スペクトル⁽¹⁾からの変動が示されており⁽²⁾⁽³⁾、散逸率の時間微分 $\dot{\epsilon}$ の正負それぞれの場合で条件付き平均を施してエネルギースペクトルを計算すると、非平衡の-7/3 乗スペクトルなどの高次のスペクトルが存在することが示されている。⁽⁴⁾

しかし、LES で現在汎用されている Smagorinsky モデル⁽⁵⁾では Kolmogorov による平衡の-5/3 乗スペクトルのみに基づいて⁽⁶⁾乱流場の計算を行なっており、非平衡のエネルギースペクトルを考慮に入れていないため、非定常・非平衡乱流場の予測精度が低い。

そこで本研究では非平衡エネルギースペクトルに基づく SGS モデルの開発とその検討を行った。なお乱流場としては非圧縮性強制一様等方乱流を用い、DNS データと LES データの比較により検討する。

2. 支配方程式と SGS モデル

本研究で用いる非圧縮性強制一様等方乱流の支配方程式は次の Navier-Stokes 方程式と連続の式である。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

ここで x_i は i 方向の空間座標、 u_i は速度ベクトルの i 方向成分、 ρ は密度、 p は圧力、 ν は動粘性係数、 f_i は外力の i 方向成分である。

LES ではスケールの粗視化として支配方程式に以下のようなフィルター操作を施し、GS 成分と SGS 成分に分離する。ただし、本研究では Cutoff フィルター式(2.5)を用いている。 (Δ) は格子間隔

$$f = \bar{f} + f' \quad (2.3)$$

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') G(x - x') dx' \quad (2.4)$$

$$\hat{G}(k_i) = \begin{cases} 1 & (|k_i| \leq \pi/\Delta_i) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2.5)$$

この操作により LES の支配方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \bar{f}_i \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.7)$$

ここに、格子以下のスケールの変動の粗視化の帰結として、次のような SGS 応力項が得られ、式(2.6)中に現れる。

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (2.8)$$

この応力を GS 成分と関係づける SGS モデルが必要となる。本研究では以下に述べるような SGS 渦粘性係数モデルを用いた検証を行った。

$$\tau_{ii} = \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} - 2\nu_e \bar{S}_{ij}, \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.9)$$

ここで ν_e は SGS 渦粘性係数、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

Smagorinsky モデルでは SGS 成分のエネルギー生成項 P と散逸項 D が等しい(局所平衡仮説)とする。

$$P = -\tau_{ij} \bar{S}_{ij}, \quad D = \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.10)$$

$$D \approx \frac{C_\epsilon K_G^{3/2}}{\Delta} \quad (2.11)$$

そして SGS エネルギー $K_G (\equiv \tau_{ii}/2)$ と ν_e が決定される。ただし C_ν 、 C_ϵ はモデルパラメータである。

$$K_G = \frac{C_\nu}{C_\varepsilon} \Delta^2 (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}) \quad (2.12)$$

$$\nu_e = (C_S \Delta)^2 (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2} \quad (2.13)$$

ここで C_S は Smagorinsky 定数である。

一方 1 方程式モデルでは SGS エネルギー方程式を近似することによって K_G のモデル方程式を導出し ν_e を決定する。(7)(8)

$$\frac{\partial K_G}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial K_G}{\partial x_j} = C_\nu \Delta K_G^{1/2} (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}) - \frac{C_\varepsilon K_G^{3/2}}{\Delta} \quad (2.14)$$

$$\nu_e = C_\nu \Delta (K_G)^{1/2} \quad (2.15)$$

ただし、本研究では流れ場として一様等方乱流を用いているため拡散項を無視している。

3. 非圧縮性強制一様等方乱流の DNS と LES

DNS データと LES データの比較により Smagorinsky モデルと 1 方程式モデルの評価をする。

本研究で対象とする流れ場において計算領域の長さは全方向に 2π 、格子点数は DNS が 512^3 、LES が 64^3 、動粘性係数は $\nu=1.35 \times 10^{-3}$ 、時間刻みは $\Delta t = 0.0005$ とした。また境界条件には周期境界条件、空間の離散化にはスペクトル法を用い、DNS では 3/2 則を用いてエイリアシング誤差を除去し、LES では非線形項に skew-symmetric form を用いエイリアシング誤差を除去した。時間積分には DNS には低容量型 3 次精度 Runge-Kutta 法、LES は Euler 法と Adams-Bashforth 法を用いた。外力項には低波数領域 ($0 \leq k \leq 2.5$) に速度場に依存する外力(3.1)を各時間ステップに注入する linear forcing⁽⁹⁾を用いた。

$$f_i(k) = A u_i(k) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (A = 0.14) \quad (3.1)$$

LES の SGS モデルとして Smagorinsky モデルと 1 方程式モデルを用い、本研究では $C_S = 0.17$ 、 $C_\nu = 0.05$ 、 $C_\varepsilon = 1.0$ とした。1 方程式モデルの時間積分法としては 1 次精度である Euler 法と 2 次精度である Adams-Bashforth 法を使い、LES の初期条件として DNS データに式(2.5)で示したように Cutoff フィルターを施して高波数成分を除去し格子点数を 64^3 にしたものを用いた。Table.1 に計算時のパラメータを示す。

| | Total | Phase 1 | Phase 2 |
|--------------------------|--------|---------|---------|
| Re_λ | 121.7 | 129.6 | 114.1 |
| K | 0.464 | 0.492 | 0.433 |
| ε | 0.0724 | 0.0724 | 0.0724 |
| L | 1.058 | 1.081 | 1.033 |
| λ | 0.297 | 0.306 | 0.288 |
| $\eta(\times 10^{-2})$ | 1.371 | 1.370 | 1.372 |
| τ_0 | 1.20 | 1.18 | 1.16 |
| $\tau_K(\times 10^{-2})$ | 13.66 | 13.66 | 13.65 |
| τ_L | 1.90 | 1.89 | 1.92 |
| τ_f | 4.65 | 4.63 | 4.60 |
| T | 11.3 | 11.0 | 11.7 |
| $S_{w'}(\times 10^{-2})$ | -1.63 | -1.98 | -1.27 |
| $F_{w'}$ | 2.78 | 2.77 | 2.78 |
| S_{u_x} | -0.5 | -0.519 | -0.517 |
| F_{u_x} | 5.51 | 5.64 | 5.38 |

Table.1 R_λ : Taylor microscale Reynolds number, $K(= u_i^2/2)$: Average kinetic energy, ε : Average dissipation rate, L : Integral length scale, λ : Taylor microscale, η : Kolmogorov length, $\tau_0(= L/u')$: Eddy turnover time according to L , $\tau_K(= (\nu\varepsilon)^{1/2})$: Kolmogorov time scale, $\tau_L(= L/u')$: Eddy turnover time according to L , $\tau_f(= (l_f^2/\varepsilon)^{1/3})$: Characteristic time due to forcing, $T(= l_f/u')$: Eddy turnover time due to forcing, $S_{w'}$: Skewness of velocity fluctuation, $F_{w'}$: Flatness of velocity fluctuation, S_{u_x} : Skewness of velocity derivative($u_x = \partial u_i/\partial x_i$), F_{u_x} : Flatness of velocity fluctuation.

Fig.1 は DNS データ図で、運動エネルギーと散逸率の空間平均の時間変動を示している。散逸率の運動エネルギーに対するタイムラグは約 2.80 となっている。この値は積分長時間スケールにほぼ一致し、エネルギーカスケードの時間スケールを示している。

Fig.2 には DNS データと Smagorinsky モデルと 1 方程式モデルの LES データによる図を示す。Fig.2 より、DNS データと比較すると、Smagorinsky モデルは概して予測精度がよい事が見て取れるが、Time \approx 280 から Time \approx 300 において DNS データより大きな値を取ることが分かる。また 1 方程式モデルの Euler 法による計算では、Smagorinsky モデルに比べて Time \approx 280 の極大値の値は予測精度向上が見られ

るが、Time≈280 以降の値は予測精度向上したとはいえず、特に Time≈260、308 において極値を捉える事が出来ていない。またこの 1 方程式モデルによる予測精度は、時間積分を Euler 法よりも高精度の Adams-Bashforth 法に換えると、悪化することも見てとれる。

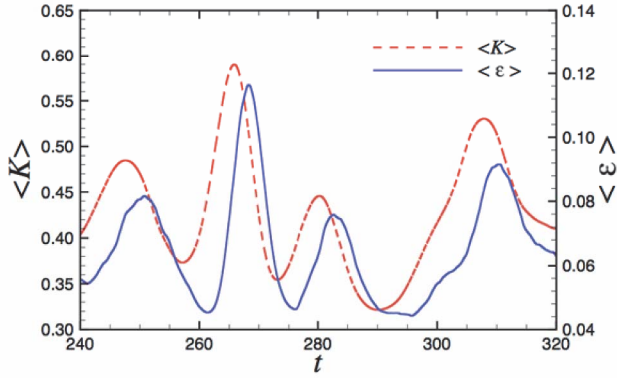


Fig.1 Temporal variations in the turbulent energy ($\langle K \rangle$) and the dissipation rate ($\langle \varepsilon \rangle$) obtained from DNS

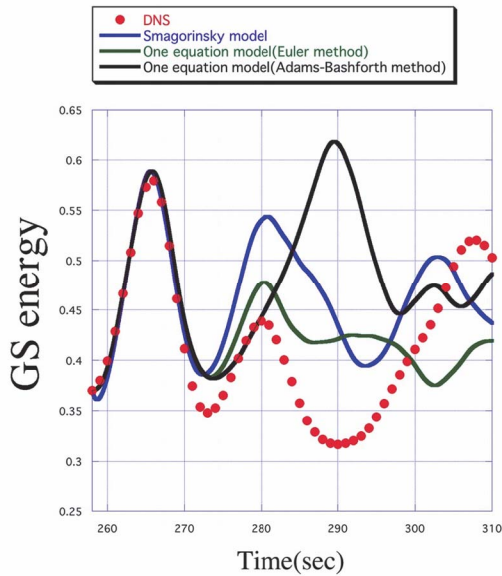


Fig.2 Temporal variations in the GS energy. Filtered DNS data and the results obtained using the Smagorinsky model and One-equation model are shown.

4. DNS で支配的な非平衡エネルギースペクトル

定常・平衡的なエネルギーカスケードが起きる慣性小領域のエネルギースペクトルをよく近似する Kolmogorov の-5/3 乗則は

$$E(k) = C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (4.1)$$

と表される。なお ε はエネルギー散逸率を示し、 C_K は Kolmogorov 定数である。Lilly は Smagorinsky モデルが Kolmogorov の-5/3 乗則に対応していることを示し、 C_S の理論値を約 0.2 とした。(6)

非定常・非平衡なエネルギーカスケードが起きる慣性小領域のエネルギーカスケードについては-7/3 乗等のエネルギースペクトルが存在することがよって示されていて(4)、そのエネルギースペクトルは次式で示されている。

$$E(k) \approx C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} + C_1 \dot{\varepsilon} \varepsilon^{-2/3} k^{-7/3} + C_2 \left[\ddot{\varepsilon} \varepsilon^{-1} - \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 \right] k^{-9/3} + \dots \quad (4.2)$$

第 1 項は平衡成分、第 2 項と第 3 項は散逸率 ε の時間微分を含んでいることから分かるように非平衡成分で、平衡成分からの変動を示す。また長時間平均をとると定常な-5/3 乗成分のみが抽出されることが分かる。

そこで散逸率の時間微分 $\dot{\varepsilon}$ の符号により条件付き平均を施し式(4.3)のように $\dot{\varepsilon}$ が正値をとる Phase 1 と負値をとる Phase 2 に分類する。

$$\begin{cases} E^+(k) = E_0(k) + E_1^+(k) & (\text{when } \dot{\varepsilon} \geq 0 : \text{Phase 1}) \\ E^-(k) = E_0(k) + E_1^-(k) & (\text{when } \dot{\varepsilon} < 0 : \text{Phase 2}) \end{cases} \quad (4.3)$$

ここに、 $E_1^-(k) \approx -E_1^+(k)$ であることに注意すると

$$\begin{cases} E_0(k) = \frac{1}{2} (E^+(k) + E^-(k)) \\ E_1^+(k) = \frac{1}{2} (E^+(k) - E^-(k)) \end{cases} \quad (4.4)$$

である。

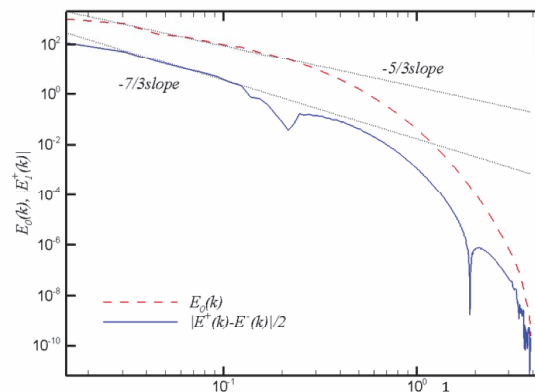


Fig.3 Energy spectra normalized by $(\langle \varepsilon \rangle \nu^5)^{1/4}$ obtained from DNS data are plotted versus $k \bar{\eta}$. Red dash line:-5/3 spectrum, Blue solid line:-7/3 spectrum.

Fig.3はこの条件付き平均を用い、DNS データから抽出されたスペクトルの絶対値を示すが、赤線で示した $E_0(k)$ は-5/3 乗の、青線で示した $E_1^+(k)$ は-7/3 乗の勾配を持つことが見て取れる。なお、Kolmogorov 定数は $C_K \approx 1.58$ となる。

また、Table.1 により Phase1 と Phase2 の統計量を見ると、積分長 L とテイラー長 λ は、Phase2 における値より Phase1 における値のほうが大きく、Phase1 では Phase2 よりも大きな渦が支配的であると言え、GS エネルギー K は Phase2 における値より Phase1 における値のほうが大きいことと整合している。

次にフーリエ空間上でのエネルギー伝達関数 $T(k)$ とエネルギーフラックス関数 $\Pi(k)$ を用いて、非平衡エネルギースペクトルによるエネルギー伝達について述べる。

まずエネルギー伝達関数 $T(k)$ とエネルギーフラックス関数 $\Pi(k)$ はそれぞれ式(4.5)(4.6)のように書ける。

$$T(k) = \frac{1}{2} \text{Im} \left[\sum_{k-1/2 \leq |k'| \leq k+1/2} \tilde{u}_i^*(k') P_{ijk}(k') \sum_p \tilde{u}_j(p) \tilde{u}_k(k' - p) \right] \quad (4.5)$$

$$\Pi(k) = \int_k^\infty T(k') dk' \quad (4.6)$$

ただし、 \tilde{u}_i^* は \tilde{u}_i の共役複素数、 P_{ijk} は orthogonalising operator であり、 \mathbf{k} は波数ベクトルである。⁽¹⁰⁾

-5/3 乗スペクトルによるエネルギー伝達関数とエネルギーフラックス関数は式(4.7)で、-7/3 乗スペクトルによるエネルギー伝達関数とエネルギーフラックス関数は式(4.8)で表される。

$$T(k) = 0, \quad \Pi(k) = \langle \varepsilon \rangle \quad (4.7)$$

$$T_1(k) = \frac{2}{3} C_K \langle [(\varepsilon)] \rangle (\varepsilon)^{-\frac{1}{3}} k^{-\frac{2}{3}}, \quad \Pi_1(k) = C_K \langle [(\varepsilon)] \rangle (\varepsilon)^{-\frac{1}{3}} k^{-\frac{5}{3}} \quad (4.8)$$

DNS データを解析すると Fig.4 と Fig.5 が得られる。Fig.4 は Phase 1 におけるエネルギー伝達関数(青実線)とエネルギー伝達関数(赤実線)で Fig.5 は Phase 2 におけるエネルギー伝達関数(青実線)とエネルギーフラックス関数(赤実線)である。

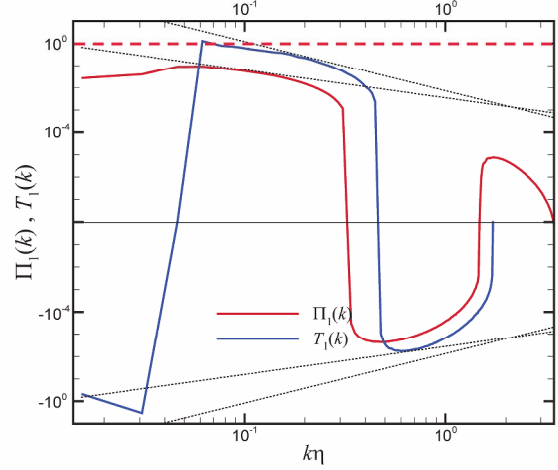


Fig.4 Phase1 ($\varepsilon \geq 0$) Energy transfer function($T(k)$) and Energy flux function($\Pi(k)$)

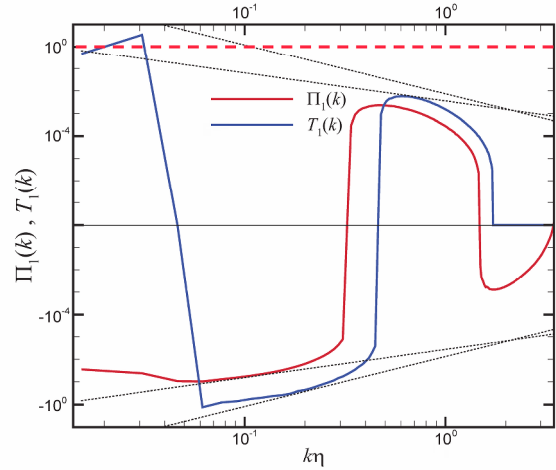


Fig.5 Phase2 ($\varepsilon < 0$) Energy transfer function($T(k)$) and Energy flux function($\Pi(k)$)

Fig.4 の Phase1 における図によると、 $k\eta \leq 0.06$ の低波数帯においてエネルギー伝達関数がほとんど一定の正値をとり、エネルギーフラックス関数が負から正に変化しており、大きなスケール GS から小さなスケール SGS への forward なエネルギーカスケードが起きている。

Fig.5 の Phase2 における図によると、 $k\eta \leq 0.06$ の低波数帯においてエネルギー伝達関数がほとんど一定の負値をとり、エネルギーフラックス関数が正から負に変化しており、小さなスケール SGS から大きなスケール GS への backward なエネルギーカスケードが起きている。

式(4.7)と式(4.8)により Fig.4 と Fig.5 に-5/3 乗の平

平衡スペクトルに対応する赤破線、-7/3 乗の非平衡スペクトルに対応する黒破線を引くことができ、-5/3 乗の平衡スペクトルからの変動成分は-7/3 乗の非平衡スペクトルが支配的であることが分かる。

5. 非平衡エネルギースペクトルと SGS モデルの関係

平衡状態 $P \approx D$ を仮定した Smagorinsky モデルについて述べる。GS 成分から SGS 成分へのエネルギーカスケードを示す SGS 散逸項 D は、小スケールにおける全エネルギーの散逸率 ε にほとんど等しいとみなせて、

$$D = \frac{C_\varepsilon K_G^{3/2}}{\Delta} \approx \varepsilon \quad (5.1)$$

式(5.1)より $K_G \approx \varepsilon^{2/3}$ であるので対応するエネルギースペクトルを $E(k) = C_K \varepsilon^{2/3} k^{-\alpha}$ と仮定すると、 K_G と $E(k)$ は

$$\begin{aligned} K_G &= \int_{\pi/\Delta}^{\infty} E(k) dk = \int_{\pi/\Delta}^{\infty} C_K \varepsilon^{2/3} k^{-\alpha} dk \\ &= \frac{3}{2} C_K \left(\frac{\Delta}{\pi} \right)^{2/3} \varepsilon^{2/3} \end{aligned} \quad (5.2)$$

と関連付けることができ、

$$\alpha = \frac{5}{3}, \quad C_K = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{C_\varepsilon} \right)^{2/3} \quad (5.3)$$

と決定される。そして、

$$E(k) = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{C_\varepsilon} \right)^{2/3} \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (5.4)$$

を次元解析的に得る。得られた式(5.4)より

$$2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij} = 2 \int_0^{\pi/\Delta} k^2 E(k) dk = C_\varepsilon^{-2/3} \pi^2 \Delta^{-4/3} \varepsilon^{2/3} \quad (5.5)$$

これにより、

$$C_\nu = C_\varepsilon / \Delta \quad (5.6)$$

を得る。

前述のように Lilly により Smagorinsky モデルでは -5/3 乗の平衡スペクトルに対応していること⁽⁸⁾が明らかにされている。

次に 1 方程式モデルとスペクトルの対応について述べる。

SGS エネルギーの支配方程式

$$\dot{K}_G = C_\nu \Delta K_G^{1/2} (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}) - \frac{C_\varepsilon K_G^{3/2}}{\Delta} \quad (5.7)$$

であるが、ここで $\tau = \delta t (\delta \ll 1)$ とおき、 $K_G(\tau)$ を摂動展開する。

$$K_G(\tau) = K_0 + \delta K_1(\tau) + \delta^2 K_2(\tau) + \dots \quad (5.8)$$

ここで展開の 0 次解は SGS 生成項(P)と散逸項(D)が等しいと仮定した定常状態の解であり、Smagorinsky モデルに整合する。

$$K_0 = \frac{C_\nu}{C_\varepsilon} \Delta^2 (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}) \quad (5.9)$$

式(5.9)を用いて式(5.7)を書き換えると、

$$\dot{K}_G = \frac{C_\varepsilon}{\Delta} K_0 K_G^{1/2} - \frac{C_\varepsilon K_G^{3/2}}{\Delta} \quad (5.10)$$

次に SGS エネルギー K_G の一次展開

$$K_G(\tau) = K_0 + \delta K_1(\tau) \quad (5.11)$$

の解を求める。式(5.10)より

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial K_G}{\partial \tau} &= \delta \frac{\partial (K_0 + \delta K_1)}{\partial \tau} \\ &= \frac{C_\varepsilon}{\Delta} K_0 (K_0 + \delta K_1)^{1/2} - \frac{C_\varepsilon K_0^{3/2}}{\Delta} \end{aligned} \quad (5.12)$$

式(5.12)において

$$\frac{C_\varepsilon}{\Delta} K_0 (K_0 + \delta K_1)^{1/2} \approx \frac{C_\varepsilon}{\Delta} K_0^{3/2} \left(1 + \frac{\delta K_1}{2 K_0} \right) \quad (5.13)$$

と近似し両辺の $O(\delta)$ の項を比較すると

$$K_1 = \frac{2}{\delta} \frac{\Delta}{C_\varepsilon} \left(\frac{\dot{K}_0}{K_0} \right) K_0^{1/2} \quad (5.14)$$

を得る。-5/3 乗則を用いて K_0 を導出すると式(5.15)

になる。

$$K_0 = \int_{\pi/\Delta}^{\infty} E_0(k) dk = \frac{3}{2} C_K \varepsilon^{2/3} \left(\frac{\Delta}{\pi} \right)^{2/3} \quad (5.15)$$

式(5.14)に式(5.15)を代入する。

$$K_1 = \frac{1}{\delta} \left[2 \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \left(\frac{\Delta}{\pi} \right)^{4/3} \pi \frac{C_K^{1/2}}{C_\varepsilon} \right] \dot{\varepsilon} \varepsilon^{-2/3} \quad (5.16)$$

そして δK_1 に対応するエネルギースペクトル $E_1(k)$ を

$E_1(k) \propto k^{-\beta}$ と仮定して求めると、

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_{\pi/\Delta}^{\infty} E_1(k) dk = \int_{\pi/\Delta}^{\infty} C_1 (\dot{\varepsilon} \varepsilon^{-2/3}) k^{-\beta} dk \\ &= \frac{C_1}{\alpha - 1} \left(\frac{\pi}{\Delta} \right)^{1-\beta} \dot{\varepsilon} \varepsilon^{-2/3} \end{aligned} \quad (5.17)$$

式(5.16)と式(5.17)を等しいとすると式(5.18)となる。

$$\beta = \frac{7}{3}, \quad C_1 = 4 \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} \pi \frac{C_K^{1/2}}{C_\varepsilon} \quad (5.18)$$

となり、

$$E_1(k) = 4 \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} \pi \frac{C_K^{1/2}}{C_\varepsilon} (\dot{\varepsilon} \varepsilon^{-2/3}) k^{-7/3} \quad (5.19)$$

を得る。したがって、 K_1 は -7/3 乗スペクトルに対応していることになる。

さらに SGS エネルギー K_G の二次展開

$$K_G(\tau) = K_0 + \delta K_1(\tau) + \delta^2 K_2(\tau) \quad (5.20)$$

の解を求める。式(5.10)より

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial (K_0 + \delta K_1 + \delta^2 K_2)}{\partial \tau} &= \frac{C_\varepsilon}{\Delta} K_0 (K_0 + \delta K_1 + \delta^2 K_2)^{1/2} \\ &\quad - \frac{C_\varepsilon K_0^{3/2}}{\Delta} \end{aligned} \quad (5.21)$$

式(5.21)において

$$\frac{C_\varepsilon}{\Delta} K_0 (K_0 + \delta K_1 + \delta^2 K_2)^{1/2} \approx \frac{C_\varepsilon}{\Delta} K_0^{3/2} \left(1 + \frac{\delta K_1}{2 K_0} + \frac{\delta^2 K_2}{2 K_0} \right) \quad (5.22)$$

と近似し、両辺の $O(\delta^2)$ の項を比較すると、

$$K_2(t) = \frac{2}{\delta^2} \frac{\Delta}{C_\varepsilon} \dot{K}_1 K_0^{-1/2} \quad (5.23)$$

を得る。これに式(5.14)を用いると、

$$K_2(t) = \frac{1}{\delta^2} 4 \left(\frac{\Delta}{C_\varepsilon} \right)^2 \left[\frac{\dot{K}_0}{K_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{K}_0}{K_0} \right)^2 \right] \quad (5.24)$$

となり、さらに式(5.15)を代入すると

$$K_2(t) = \frac{1}{\delta^2} \frac{8}{3} \left(\frac{\Delta}{C_\varepsilon} \right)^2 \left[\ddot{\varepsilon} \varepsilon^{-1} - \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 \right] \quad (5.25)$$

を得る。 $\delta^2 K_2$ に対応するエネルギースペクトル $E_2(k)$ を同様に求めると、

$$\begin{aligned} K_2 &= \int_{\pi/\Delta}^{\infty} E_2(k) dk = \int_{\pi/\Delta}^{\infty} C_2 \left[\ddot{\varepsilon} \varepsilon^{-1} - \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 \right] k^{-\gamma} dk \\ &= \frac{C_2}{\gamma-1} \left(\frac{\pi}{\Delta} \right)^{1-\gamma} \left[\ddot{\varepsilon} \varepsilon^{-1} - \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.26)$$

となり、

$$\gamma = 3, \quad C_2 = \frac{16}{3} \frac{\pi^2}{C_\varepsilon^2} \quad (5.27)$$

を得る。したがって、

$$E_2(k) = \frac{16}{3} \frac{\pi^2}{C_\varepsilon^2} \left[\ddot{\varepsilon} \varepsilon^{-1} - \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 \right] k^{-9/3} \quad (5.28)$$

となり、 K_2 に対応するスペクトルは-9/3乗となる。

以上のことから1方程式モデルにおいてエネルギースペクトルは式(5.29)のようになる。

$$\begin{aligned} E(k) &= E_0(k) + E_1(k) + E_2(k) + \dots \\ &\approx C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} + C_1 \dot{\varepsilon} \varepsilon^{-2/3} k^{-7/3} \\ &\quad + C_2 \left[\ddot{\varepsilon} \varepsilon^{-1} - \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 \right] k^{-9/3} + \dots \end{aligned} \quad (5.29)$$

摂動展開は-5/3乗スペクトルを示す初項、-7/3乗スペクトルを示す第2項、-9/3乗スペクトルを示す第3項のみで終わらず、無限に項は続く。

以上のようにSmagorinskyモデルではSGSエネルギー K_G に-5/3乗スペクトルのみが加えられ、1方程式モデルではSGSエネルギー K_G に-5/3乗スペクトルに加えて非平衡スペクトルによる変動成分の効果が加えられる。

さて、SmagorinskyモデルではSGSエネルギー K_G に平衡の-5/3乗スペクトル項のみを加えていて、非平衡スペクトルによる変動成分を加えることができない。1方程式モデルでは K_G に非平衡スペクトルによる変動成分を加えているが無限に項を加えた場合、級数の収束性は保証されない。さらに先ほどのDNSデータによるエネルギースペクトル図 Fig.4 と Fig.5 で示したように非定常・非平衡の乱流場においては-5/3乗の平衡スペクトルからの変動成分は-7/3乗の非平衡スペクトルが支配的である。

そこで式(5.8)の摂動展開の第2項で展開を打ち切ることができると考え、次のモデル(Non-equilibrium Smagorinsky モデル)を提案する。

$$K_G = K_0 + K_1 = K_0 + 2 \frac{\Delta}{C_\varepsilon} \dot{K}_0 K_0^{-1/2} \quad (5.30)$$

6. Non-equilibrium Smagorinsky モデルの評価

Non-equilibrium Smagorinsky モデルを評価するため、実際にLESの計算を行った。式(5.30)の初項は式(5.9)により、第2項の計算は式(5.14)より得て次式のように計算した。

$$\begin{aligned} K_1^{(n)} &= 4 \frac{\Delta}{C_\varepsilon} (K_0^{(n)})^{1/2} \\ &\approx 4 \frac{\Delta}{C_\varepsilon} \frac{\sqrt{K_0^{(n)}} - \sqrt{K_0^{(n-1)}}}{\delta t} + 4 \frac{\Delta}{C_\varepsilon} \bar{u}_j \frac{\partial \sqrt{K_0^{(n)}}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (6.1)$$

ただし、 (n) の添字は n ステップにおける値を示す。また計算の安定化をするために K_G の値が負になった場合は、その格子点における K_G を0に置き換えるclipping操作を行った。

Smagorinskyモデル、1方程式モデル、Non-equilibrium Smagorinskyモデル計算の結果を述べる。

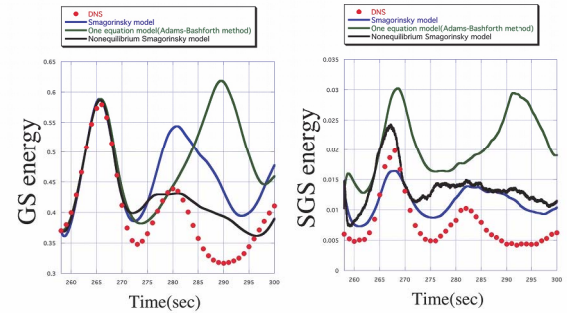


Fig.6 Temporal variations in the GS and SGS energy.

Filtered DNS data and the results obtained using the Smagorinsky model, One equation model and Non-equilibrium Smagorinsky model are shown.

Fig.6にDNS、Smagorinskyモデル、1方程式モデル、Non-equilibrium SmagorinskyモデルのLESによって得られたGSエネルギーとSGSエネルギーの比較図を示す。Fig.6よりGSエネルギーにおいてNon-equilibrium SmagorinskyモデルはSmagorinskyモデルと1方程式モデルに比べて概して予測精度の改善が見られる。特にTime \approx 280の極大値において顕著に予測精度改善が見られ、Smagorinskyモデル、1

方程式モデルのような過大予測が見られない。また Non-equilibrium Smagorinsky モデルはその後の Time \approx 280 から Time \approx 300 においても Smagorinsky モデルと 1 方程式モデルの値より小さく予測されている。

SGS エネルギーにおいては、Non-equilibrium Smagorinsky モデルは Smagorinsky モデルに比べて概して大きな値をとっており、また Time \approx 275 の極小値を Smagorinsky モデルよりも精度よく捉えておらず、これらの点では予測精度が上がったとはいえない。しかし Non-equilibrium Smagorinsky モデルは 1 方程式モデルに比べると概して小さい値をとっており、また Time \approx 295 の極小値を捉えているので予測精度が上がったといえる。

ここで LES の初期速度場として与えられている DNS による速度場は必ずしも実際の LES による値ではないことを留意されたい。LES データが与えられた初期速度に適合するにはわずかに時間が掛かるが、Fig.6 を見ると Non-equilibrium Smagorinsky モデルは Smagorinsky モデル、1 方程式モデルに比べてかなり速く適合する事が分かる。このことから Smagorinsky モデル、1 方程式モデルとは異なり、Non-equilibrium Smagorinsky モデルは時間履歴の効果を導入できているために、この点においては予測精度が改善したと考えることができる。

Fig.7 に DNS と Smagorinsky モデル、1 方程式モデル、Non-equilibrium Smagorinsky モデルの LES による GS エネルギーの自己相関関数($\langle K(t)K(t+\tau) \rangle$)を示す。時間 t に関するアンサンブル平均が自己相関関数の計算には使われている。

Fig.7 により Non-equilibrium Smagorinsky モデルが Smagorinsky モデル、1 方程式モデルの両者に比べて $\tau \approx 15, 30, 41$ の極値においてより正確な予測が出来ていて、GS エネルギーの位相について精度向上が見られる。

SGS のモデリングにおいて最も肝要な点の一つは、GS から SGS へのエネルギー伝達の予測精度にある。Fig.6 より SGS エネルギーの時間発展は GS エネルギーの時間発展に対してタイムラグが存在する事が見て取れる。

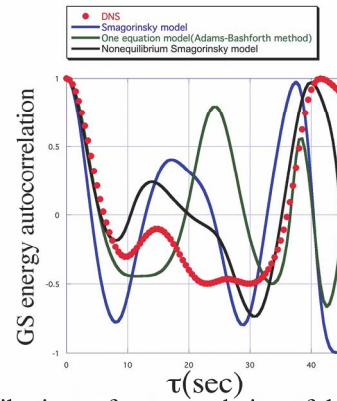


Fig.7 Distributions of autocorrelation of the GS energy.

Filtered DNS data and the results obtained using the Smagorinsky model, One equation model and Non-equilibrium Smagorinsky model are shown.

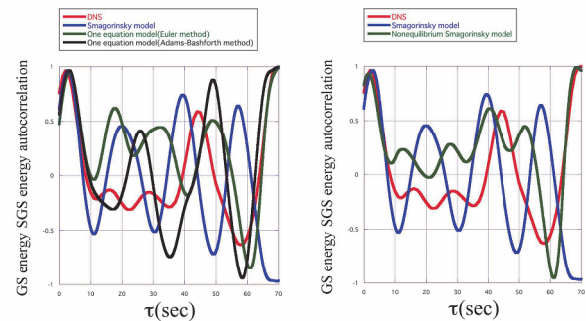


Fig.8 Distributions of the temporal correlation between the GS energy and the SGS energy. Filtered DNS data and the results obtained using the Smagorinsky model, One equation model, and Non-equilibrium Smagorinsky model are shown.

そこで、Fig.8 に DNS と Smagorinsky モデル、1 方程式モデル、Non-equilibrium Smagorinsky モデルの LES による GS エネルギーと SGS エネルギーの相関関数 ($\langle K(t)K_G(t+\tau) \rangle$) を示す。Fig.8 によると Smagorinsky モデル、1 方程式モデル、Non-equilibrium Smagorinsky モデルのそれぞれが $\tau \approx 2.5$ で極大値をとり、よく予測できている。(τ はタイムラグに対応していて Table.1 で示した τ_L に近い値をとっている) それ以降の値では Smagorinsky モデルと 1 方程式モデルは $\tau \approx 16.0, 28.0, 43.0, 70.0$ の極値を捉えることが出来ていないのにたいして、Non-equilibrium Smagorinsky モデルでは、DNS データが極値をとる時刻 ($\tau \approx 15.0, 22.0, 28.0, 35.0$) が良く予測されている。

これらことから、Non-equilibrium Smagorinsky モデ

ルは SGS へのエネルギーカスケードと SGS のエネルギー生成を Smagorinsky モデル、1 方程式モデルよりも高精度で予測できていると言える。

7. SGS モデルの考察

本章では、第 6 章で示された Non-equilibrium Smagorinsky モデルの高精度性の検証を行う。

Smagorinsky モデルと Non-equilibrium Smagorinsky モデルを計算(chapter6 参照)し、GS エネルギースペクトルを計算すると Fig.9、Fig.10 のようになった。

Fig.9 には Smagorinsky モデルによる GS のエネルギースペクトル図を描いた。Fig.9 では-5/3 乗スペクトル、-7/3乗スペクトル、-9/3 乗スペクトルのそれぞれが-5/3、-7/3、-9/3 の slope に沿っていることが見て取れる。

また Fig.10 に Non-equilibrium Smagorinsky モデルによる GS のエネルギースペクトル図を描いた。Fig.10 においても同様に-5/3 乗スペクトル、-7/3乗スペクトル、-9/3 乗スペクトルのそれぞれが-5/3、-7/3、-9/3 の slope に沿っていることが見て取れる。

以上のことから Smagorinsky モデルは GS においては-5/3 乗スペクトル、-7/3 乗スペクトル、-9/3 乗スペクトルを捉えているものの、それに対応する SGS 成分への接続がなされていないのに対して、Non-equilibrium Smagorinsky モデルでは 5/3 乗スペクトル、-7/3 乗スペクトル、-9/3 乗スペクトルを捉えていて、-5/3 乗スペクトル-7/3 乗スペクトルについては、SGS 成分への接続が成されている事になる。-9/3 乗スペクトルについてであるが、LES の計算において-9/3 乗スペクトル成分を式(5.30)に負荷すると、計算が不安定化する傾向がある。式(5.9)において $E(k) \propto k^{-9/3}$ とおくと

$$\begin{aligned} 2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij} &\approx 2 \int_0^{\pi/\Delta} k^2 E(K) dk \\ &= \frac{32}{3} \frac{\pi^2}{C_\varepsilon^2} \left[\ddot{\varepsilon} \varepsilon^{-1} - \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 \right] \int_0^{\pi/\Delta} k^{-1} dk \quad (7.1) \end{aligned}$$

となり、積分が発散する。このため、-9/3 乗スペクトルを GS と SGS に接続するのは不適切と考えられる。ここで Fig.9 と Fig.10 に見られるように非平衡成分として-9/3 乗スペクトルは抽出されるが、無視できない大きさの-9/3 乗の line からの逸脱を伴う。

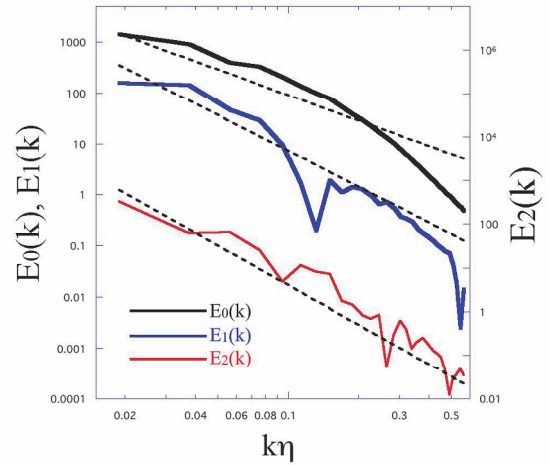


Fig.9 GS energy spectra of Smagorinsky model. Black solid line:-5/3 spectrum、Blue solid line:-7/3 spectrum、Red solid line:-9/3 spectrum、Black broken line: slope lines of each spectrum

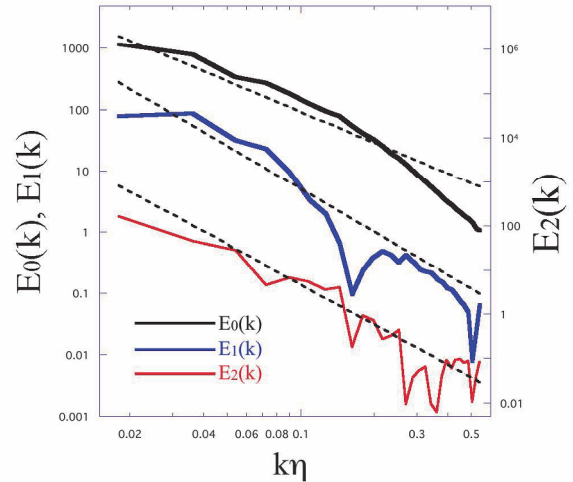


Fig.10 GS energy spectra of Non-equilibrium Smagorinsky model. Black solid line:-5/3 spectrum、Blue solid line:-7/3 spectrum、Red solid line:-9/3 spectrum、Black broken line: slope lines of each spectrum

この原因の一つとしてデータ数が充分でないことがあげられる。これはこの成分が散逸率の極大および極小値の時間帯のみで検出されるためであるが、Phase1 と Phase2 の間の遷移期におけるカスケードの生成に寄与している。しかしながら、摂動展開を用いた理論的導出では-9/3 乗成分には対数補正が負荷されることが示されている。⁽¹¹⁾したがって、厳密な-9/3 乗スペクトルが存在するかは明らかにされておらず、実効的な冪が-9/3 より小さくなり、上述の発散が除去される可能性がある。

8. 結論

本研究では DNS データにおいてその存在が示されていた非平衡エネルギースペクトルを LES の SGS モデルに反映させることを試みた。

- Linear forcing による非圧縮性強制一様等方乱流の DNS データにおいても、過去の検証と同様な非平衡エネルギーが検出される事を示した。
- Smagorinsky モデルを基本解として、1 方程式モデルの摂動展開による近似解を求め、展開の第 2 項と第 3 項に対応するスペクトルが、各々 $-7/3$ 乗と $-9/3$ 乗の勾配を有する事を示した。
- DNS データの解析により、非圧縮性強制一様等方乱流場で $-5/3$ 乗スペクトルからの変動成分は $-7/3$ 乗スペクトルが支配的であることを示し、 $-5/3$ 乗スペクトルに対応する Smagorinsky モデルに $-7/3$ 乗スペクトル成分に対応する項を付加した Non-equilibrium Smagorinsky モデルを提案した。
- 実際の LES 計算においてモデルの検証を行い、Non-equilibrium Smagorinsky モデルが Smagorinsky モデルおよび 1 方程式モデルに比べて、予測精度が高い事を示した。この高精度性が、non-equilibrium Smagorinsky モデルでは、GS のエネルギースペクトルが有する非平衡スペクトルの SGS への接続が行われている事に起因する事を明らかにした。

謝辞

本研究における DNS と LES 計算の実行ならびに、データのポストプロセッシングは大阪大学サイバーメディアセンターの NEC SX-8R および SX-9 を利用して行われた。この場を借りて、同センターのご協力に感謝したい。

参考文献

- (1) Kolmogorov A.N., The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. C.R.Acad.Sci. USSR 30(1941), 301-305.
- (2) Kaneda Y., Ishihara T., Yokokawa M., Itakura K.,

and Uno A., Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box, Phys. Fluids 15(2003), L21-L24.

- (3) Tsuji Y., Intermittence effect on energy spectrum in high-Reynolds number turbulence, Phys. Fluids 16(2004), L43-L46.
- (4) Horiuti K., Ozawa T., Multi-mode stretched spiral vortex and non-equilibrium energy spectrum in homogeneous shear flow turbulence., Phys. Fluids, 23(2011), 035107.
- (5) Smagorinsky J., General circulation experiments with the primitive equation, Monthly Weather Rev. 91(1963), 99-164.
- (6) Lilly D.K., On the application of the eddy viscosity concept in the inertial subrange of turbulence, NCAR Manuscript 123(1966).
- (7) Yoshizawa A., Horiuti K., A Statistically-Derived SGS Kinematic Energy Model for the Large-eddy simulation of Turbulent Flows, J Phys. Soc. Japan 54(1985), 2834-2839.
- (8) Horiuti K., Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flow by One-equation Modeling, J Phys. Soc. Japan 54(1985), 2855-2865.
- (9) Rosales C., Meneveau C., Linear forcing in numerical simulations of isotropic turbulence: Physical space implementations and convergence properties, Phys. Fluids 17(2005), 095106.
- (10) Domaradzki J.A., Analysis of energy transfer in direct numerical simulations of isotropic turbulence, Phys. Fluids 31(1988), 2747- 2749.
- (11) Horiuti K., Saito K., Energy flux in non-equilibrium energy spectra in steady turbulence., 62nd Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics, Bulletin of the American Physical Society 54 (2009), No.18, p.143.