格子上の場の理論におけるエネルギー運動量テンソルの測定

伊藤 悦子
高エネルギー加速器研究機構 素粒子原子核研究所 理論センター

1. はじめに

物質を構成する素粒子に働く基本的な力の一つに、「強い力」と呼ばれる相互作用がある。これは、現在物質を構成する最小単位であると考えられている「クォーク」に働く力であり、量子色力学という体系を用いてよく記述される。ここで「強い力」というのは、電磁気力より強い、という意味で名付けられた。

この量子色力学のダイナミクスを理解するための最も強力な手法の一つが格子理論に基づくシミュレーションを行うことである。量子色力学は、非可換ゲージ理論という理論で記述されるが、格子上の場の理論は、量子色力学の特徴であるゲージ不変性を保ったまま非摂動論的に調べることができる、これまでに知られている唯一の方法である。これまでに、クォークから作られるハドロンのスペクトル、有限温度におけるハドロン相とクォーク・グルオン・プラズマ相との相転移などの研究がこの格子ゲージ理論とそれに基づく格子シミュレーションを用いて研究されてきた。

しかしながら、格子理論を用いる事によって困難が生じる事もある。その一つが、場の理論における最も基本的な量である「エネルギー運動量テンソル(EMT)」をうまく定義できないということである。EMT は、エネルギーや運動量、また有限温度系における圧力や熱的なエントロピーなど場の理論の基本的な量と関係する。一方で、EMT は、ローレンツ変換の生成子である。しかしながら、格子上では時空を離散的にするため、その定義から無限小並進不変性や回転不変性が破れており、格子上の EMT の定式化は一般に困難であった。

2. Yang-Mills gradient flow に基づく EMT の新しい定式化

近年、場の理論に「Yang-Mills gradient flow(または Wilson flow)」と呼ばれる新しいアイデアが提案された（文献[1]）。このアイデアは元々連続的な場の理論で定義されるものである。時間と 3 次元空間上の量子場の理論に、仮想的な時間(flow time)を導入し、この flow time に関する一階の微分方程式として与えられる。

格子上の場の理論にもこれに対応する方程式が与えられ、連続極限を取ることでフローさせた後の連続的な場の理論と格子上の場の理論の間の対応関係を与えることができる。

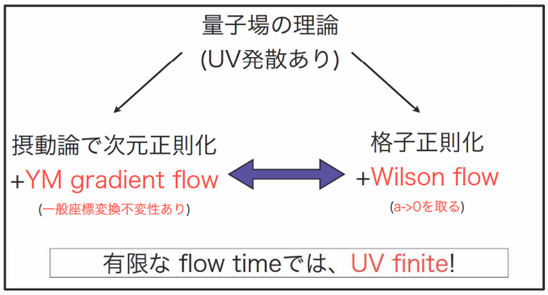

図 1 ：EMT の新しい定式化の基本的なアイデア

この gradient flow の特徴の一つは、有限の flow time における紫外有限性である。普通の場の理論では演算子毎に紫外発散を取り除くためのくりこみの作業をしなければならない。しかしながら、gradient flow を用いると、力学的なクォーク場の存在しない pure Yang-Mills 理論の時にはゲージ結合定数のくりこみを行えば全ての複合演算子がくりこまれた量となる事が示された（文献[2]）。EMT もこのような複合演算子の一種であり、摂動領域において連続理論で次元正則化を行った EMT と、格子上でのこれに対応する次元 4 の複合演算子に対する対応関係が 2013 年九州大学の鈴木氏によって具体的に導出さ

れた（文献[3]）。

著者らは、同じく 2013 年にこの関係式を用いて実際に格子シミュレーションを行い、有限温度 QCD における EMT から熱力学量（トレースアノマリーとエントロピー密度）を導出した（文献[4]）。

以下では、その詳細を説明する。

3. 格子シミュレーションの手順

格子シミュレーションを用いた EMT の導出手順は以下の 4 つの手順にまとめる事ができる。

Step 1

flow time ゼロでのゲージ場の配位を生成する。

Step 2

gradient flow の方程式を解いて、flow time (t)でのゲージ場の配位を生成する。

Step 3

flow させたゲージ場の配位を使って、2 種類の次元 4 の複合演算子を測定する。

Step 4

連続極限をとり、さらに flow time (t)がゼロの極限を取る。

特に、Step 1 と Step 2 では、スーパーコンピュータによる数値計算を行う。以下その 2 つについてのさらに詳細を述べる。

3.1 (Step 1)配位生成

今回、我々は、クエンチ QCD というダイナミカルナフェルミオンが存在しない系におけるシミュレーションを行った。この場合、最も有効な配位生成のアルゴリズムの一つが「(擬) 熱浴法」と呼ばれるものである。熱浴法では 0 から 1 までの一様乱数を生成し、それを解に持つような SU(2)の配位を生成し、それを 3 回繰り返し組み合わせることで SU(3)のゲージ場の配位を生成する。

さらに、overrelaxation と呼ばれる SU(3)回転の変換手法を組み合わせ、なるべく早く SU(3)の配位空間全体を覆えるような配位を生成する。

実際の我々のシミュレーションでは、1 回熱浴法でアップデートして 5 回 overrelaxation をする組み合わせを 1sweep として、200 から 500sweep 離した配位を 100 から 300 個生成した。

3.2 (Step 2)Yang-Mills gradient flow のシミュレーション

我々の研究における特徴的なシミュレーションは Step2 で行う gradient flow 方程式を数値的に解く事である。gradient flow 方程式は、先に述べたようにゲージ場（またはリンク変数）に対する仮想的な flow time の 1 階の微分方程式で与えられる。この方程式を数値的にとくため、ルンゲクッタアルゴリズムを用いた。

4. 結果

flow time t=0 からルンゲクッタを用いて flow させたゲージ配位を生成し、各 flow time で Step 3 である複合演算子を測定した。ある温度(T=1.7Tc,Tc は閉じこめ転移の温度)におけるトレースアノマリーとエントロピー密度の測定結果が図 2 である。

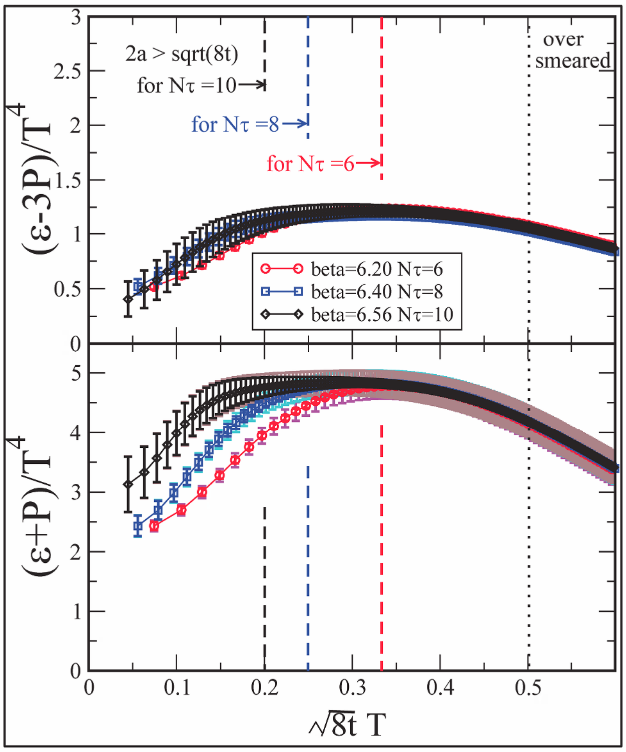

図 2 : (上)トレースアノマリー (下)エントロピー密度の flow time (t)依存性

黒が最も格子間隔の細かい格子のデータ(N τ =10)、中間の格子間隔が青の N τ =8、赤が格子間隔

の粗い N τ =6 の時である。データの誤差は濃い色が統計誤差のみを、薄い色は結合定数のくりこみに関する系統誤差も含めた誤差を表す。

連続極限での EMT を求めるためには、さらに Step 4 の極限操作を取る必要がある。この時、この新しい定式化が「有効な flow time の領域」がある。具体的には、格子間隔が見えない程度に十分に長い flow time を取らなければいけないという flow time の下限 (2a<<sqrt(8t))と、格子のサイズより flow time が短くないといけない（sqrt(8t)<< 1/2T）という上限がある。全ての格子間隔のデータに対して、この両者が満たされる flow time は、図の赤い破線(横軸が 0.33 程度)から、黒い点線(横軸が 0.5 まで)である。この領域では、データの値が誤差の範囲でほぼ定数であることがわかった。そこで、我々は固定した flow time(sqrt(8t)T=0.4)をとり、連続極限を取ることで、最終的に EMT からトレースアノマリーとエントロピー密度を得た（図 3）。

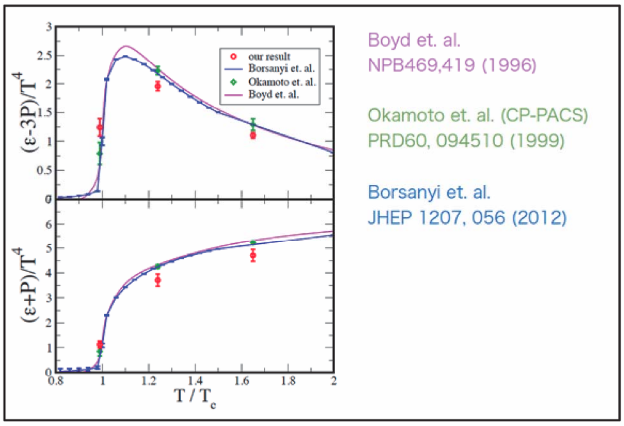

図 3 : 連続極限を取った後の(上)トレースアノマリー (下)エントロピー密度の他の手法との比較

これを、これまで知られている積分法による格子シミュレーションの結果（文献[5,6,7]）と比較したところ、2 シグマ程度のずれはあるものの、よく一致していることがわかった。

5. おわりに

我々は、これまで格子上に定義するのが難しいとされてきた EMT を gradient flow を用いることで格子シミュレーションから非摂動論的に導出することに成功した。

今回の研究では有限温度系における EMT の一点関数を測定することで熱力学量を導出し、他の手法とよく一致していることを確認した。我々の手法は、これまでの積分法と比べて、調べたい温度におけるシミュレーションを行うだけで良く、さらに gradient flow を行うことで物理量の統計精度も飛躍的に良くなることが分かった。何より EMT という、連続的場の理論における基本量から導出できた点が新しい。今後は、これまで格子シミュレーションで測定するのが非常に困難で未だ結論の出ていない、粘性等を EMT の２点関数から導出することが期待される。

最後に、本研究を遂行するにあたって、gradinet flow のコード開発、また本格ランの配位生成を大阪大学のスーパーコンピュータ（特に SX-8 と SX-9）を用いて行ってきた。この研究はアイデアから論文が出るまで２ヶ月にも満たない期間で遂行することが出来たのだが、これは新規的なアイデアをすぐに試すことのできるシステムとなっているこれら共用計算機のおかげである。日頃からシステムの運営を支えてくださっている方々（特に外川さん、堀田さん、鎌野さん）に深く感謝致します。

参考文献

(1) M. Luescher, JHEP 1008, 071 (2010) [arXiv:1006.4518 [hep-lat]]

(2) M. Luescher and P. Weisz, JHEP 1102, 051 (2011) [arXiv:1101.0963 [hep-th]]

(3) H. Suzuki, PTEP 2013, no. 8, 083B03 (2013) [arXiv:1304.0533 [hep-lat]].

(4) Masayuki Asakawa, Tetsuo Hatsuda, Etsuko Itou, Masakiyo Kitazawa, Hiroshi Suzuki (FlowQCD Collaboration) Phys.Rev. D90 (2014) 1, 011501

(5) G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lutgemeier and B. Petersson, Nucl. Phys. B 469, 419 (1996) [hep-lat/9602007].

(6) M. Okamoto et al. [CP-PACS Collaboration], Phys. Rev. D 60, 094510 (1999) [hep-lat/9905005]; Y. Namekawa et al. [CP-PACS Collaboration], Phys. Rev. D 64, 074507 (2001).

(7) S. Borsanyi, S. Duerr, Z. Fodor, C. Hoelbling, S. D. Katz, S. Krieg, T. Kurth and L. Lellouch et al., JHEP 1209, 010 (2012) [arXiv:1203.4469 [hep-lat]].