

Title	SX-9を用いた乱流場における非平衡エネルギースペク トルの抽出			
Author(s)	高橋, 雄太; 堀内, 潔; 増田, 雄一			
Citation	サイバーメディアHPCジャーナル. 2012, 2, p. 27-32			
Version Type	VoR			
URL	https://doi.org/10.18910/70532			
rights				
Note				

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

SX-9 を用いた乱流場における非平衡エネルギースペクトルの抽出

高橋 雄太、堀内 潔、増田 雄一 東京工業大学 大学院理工学研究科 機械宇宙システム専攻

1. はじめに

流体乱流の特徴は、エネルギーを包含する大きな スケールからエネルギーの粘性による散逸が生じる 小スケールに渡る広範なスケールの成分から構成さ れる点にある。前者は、integral スケール (以下、L)、 後者は Kolmogorov スケール (η) と呼ばれるが、 Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + f_i \quad (1)$$

の直接数値積分(DNS)では、この全てのスケールを 網羅する必要が生じる。そのための格子点数は、3 次元計算では、概ね Re^{9/4}のオーダーと見積もられ る。ここに、Re はレイノルズ数を示す。乱流エネル ギーのスペクトル E(k,t)は、エネルギーを包含する 領域と粘性による散逸の生じる領域、および両者の 中間領域から成るが、Re が大きくなるにつれてこの 2スケールの分離が明確になり、両者の中間領域に は Kolmogorov の-5/3 乗則[1]と呼ばれるべき乗則に 従う波数帯が形成される。エネルギースペクトルの 支配方程式は、

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = -2\nu k^2 E(k,t) + T(k,t) + F(k,t) \quad (2)$$

で与えられ、初項は散逸項、第2項の*T*(*k*,*t*)はエネ ルギー伝達関数、第3項は外力項を表す。*T*(*k*,*t*)は、

$$T(k,t) = -\frac{d}{dk}\Pi(k,t), \Pi(k,t) = \int_{k}^{\infty} T(k',t)dk' \quad (3)$$

と表され、 $\Pi(k,t)$ はフラックス関数である。 Kolmogorov 則は、大スケールの渦の小さなスケール の渦へのカスケード過程を記述し、乱流統計理論の 基礎を成すが、式(2)において、 $\Pi(k,t)$ が定常的に散 逸率 ε に等しい一定値を取るという平衡性を仮定し た場合に得られる。正確な乱流解析には、数オクタ ーブに渡る Kolmogorov 則に従う領域を有するデー タが必須であるが、その計算に必要な格子点数は飛 躍的に増加する。 スペクトルの解析を行うのに有用な流れ場の一つ は、全ての空間方向に一様性を仮定する一様等方乱 流である。その一様性から、全ての変数のフーリエ 級数展開が可能となり、FFTを用いた高速変換が適 用できるため、古くから乱流研究の標準的な流れ場 となり、同時に各時代におけるスーパーコンピユー タのベンチマークテストの対象ともなって来た。過 去幾多の大規模計算が行われて来ており、近年で最 も著名な計算は、地球シミュレータを用いた 4096³ の格子点上の計算である [2]。米国では、現在 8192³ の計算も計画・実行されているようであるが、デー タの詳細は公開されていないようで、上述の計算は 実行後 10 年を経た今日においても最大級の計算と なっている。

2. 一様等方乱流の DNS

乱流解析においては、定常な状態での統計量の解 析が必要となるため、外力の印加により統計的に定 常な状態を実現する場合が多い。本稿で取り上げる 流れ場もそうした場である。DNS データの生成には 2048³の格子点を用い、流れは非圧縮とし、計算領域 の長さを全方向に 2π 、動粘性係数は $\nu=1.38\times10^{-3}$ 、 時間刻みはAt=0.0005とした。空間の離散化にはフー リエ展開による擬スペクトル法を用いたため、計算 負荷の最も大きな要素は、3次元 FFT である。変数 の積において発生するエイリアシング誤差は全て 3/2 則を用いて除去した。このため、実質的には 30723 の格子点数による計算に相当する。時間積分には低 記憶容量型3次精度 Runge-Kutta 法を用いた。DNS の計算は、SX-9の4ノード、計64プロセッサーを 用い、総主記憶容量 2.65 TB で行われた。3 次元 FFT は、2方向に2次元 FFT を施した後に残り1方向に FFT を施す方式としたため、この1方向の全てのデ ータを得るためのデータ通信が発生する。そのため、 FFTそのものは、36 Gflops程度で実行されているが、

全体の実効値は、7 Gflops 程度に低下している。

外力は、時間に関して相関を持たず統計的に等方 性が保持されるものとして、独立なガウス乱数ベク トルα(k), β(k)を用いてフーリエ空間において、

$$f(\mathbf{k},t) = \sqrt{\frac{E_f(k)}{16\pi k^4 \Delta t}} \{ \mathbf{k} \times (\alpha(\mathbf{k}) + i\beta(\mathbf{k})) \}$$
(4)
$$E_f(k) = \begin{cases} c_f, & (0 \le k \le 1) \\ 0, & (otherwise) \end{cases}$$



図1 乱流エネルギーと散逸率の時間発展

この乱流場の特性を紹介するために、図1に乱流 エネルギーとその散逸率の時間発展を示す。図1に は、全計算領域における平均値の時間発展を示した が、以下の特長が見て取れる。それは、両統計量が 長時間平均値からの概周期的な変動を示す点、なら びに、散逸率の変動が乱流エネルギーのそれに比べ て時間的な遅れを示す点である。この概周期的な変 動の存在が本稿で着目する点であるが、これは、実 際の乱流場における強い非平衡性の存在を示唆す る。以下、全時間帯を、散逸率が増加する時間帯 Phase 1 と減少する時間帯 Phase 2 に分類した解析を行う。

表1に、DNS データの概要と各 Phase における統 計量の平均値を示すが、各 Phase は互いに異なる特 性を有しており、例えば乱流エネルギーは Phase 1 の方が Phase 2 よりも大きいのに対し、散逸率は Phase 2 の方が大きい事が見て取れる。また、Phase 1 における *L* あるいは Taylor microscale といった長さ

 $k_{\max}\overline{\eta}$: grid resolution, R_{λ} : Taylor microscale Reynolds number, \overline{K} : average kinetic energy, $\overline{\varepsilon}$: average dissipation rate, *L*: integral length scale λ : Taylor microscale, $\overline{\eta}$: average Kolmogorov length, $\overline{u_i f_i}$: average rate of energy addition

	Total	Phase 1	Phase 2
		$(\dot{\varepsilon} > 0)$	$(\dot{\varepsilon} < 0)$
$k_{ m max}\overline{\eta}$	2.443	2.448	2.337
R_{λ}	399.8	404.1	393.4
\overline{K}	1.540	1.549	1.526
$\overline{\mathcal{E}}$	0.4158	0.4119	0.4216
L	1.384	1.397	1.378
λ	0.1627	0.1639	0.1609
$\overline{\eta}$ ($ imes$ 10 ⁻³)	2.388	2.393	2.379
$\overline{u_i f_i}$	0.410		

表1 2048³ DNS データの諸統計量

スケールが Phase 2 における値よりも大きく、Phase 1 の方が Phase 2 に比べて大きなスケールの渦が存在 する事が判る。

上述の時間遅れは、ほぼ $T_{L}(=L/u')$ の値と一致 し、乱流の integral スケールから小スケールへのカ スケードの特性時間を与える。また、この概周期的 な変動の周期は T_I の数倍となる。ここに、u'は速 度変動の rms 値である。本研究では、非定常性の正 確な捕捉のため、統計量、伝達関数、フラックス関 数等を細かな時間ステップ(ここでは、1 ステップ 置き)で計算している。この計算には多大な時間を 要するため、1 ステップ当たり約 380 秒の CPU 時間 が必要となる。更に信頼できる統計量を得るには 100 T₁程度の時間に渡る平均を施す必要があるが、 現在までの総計算時間は約3,800時間(150日)に及 ぶものの、7.4 T,程度の平均を施したにすぎない現 状である。なお、乱流場の格子解像度の指標として 用いられている $k_{\max} \overline{\eta}$ 値であるが、通常の目安と されている $k_{max} \overline{\eta} \approx 1.0$ に較べて、本計算では約 2.5 と大きめな値に設定しているが、これは乱流の散逸 場の十分な解像には k_{max} $\overline{\eta} \approx 3.0 \sim 4.0$ が必要という報 告に基づいている [4]。このため、レイノルズ数 R_λ は過去の計算 [2,3] に比べて低い値となっている。

上述の無視できない強度を持つ概周期的変動の存 在は、エネルギースペクトルにも反映されていると 考えられる。すなわち、全時間スケールでの平均を 施した場合は Kolmogorov 則に従うスペクトルが抽 出されるものの、Phase 1 と Phase 2 に分離した抽出 を施した場合は、Kolmogorov 則に従わない可能性も 考えられ、特に-5/3 乗と異なる特性的なべき乗則を 示すか否かという一つの疑問が生じる。

3. 非平衡エネルギースペクトルの抽出

上述の疑問に対する解答は、統計理論によって与 えられる。Yoshizawa [11]は変動スペクトルが示す挙 動の解析を目指して、direct-interaction approximation を用いて Kolmogorov の-5/3 乗スペクトルを基本解 としたエネルギースペクトルの摂動展開を行い、展 開の次項が-7/3 の勾配を持つ冪乗成分から成る事を 示した。Woodruff and Rubinstein [12] は multi-scale 摂動法を一様等方乱流におけるスペクトル理論で用 いられる Heisenburg model に適用した。このモデル は、エネルギー伝達関数のスペクトルをスペクトル の汎関数として近似し、様々な運動スケール間の非 線形相互作用の適切な完結を与えるが、同じ-7/3 乗 の成分が得られる事を示した。この摂動展開を2次 項まで継続すると、次式が得られる。

$$E(k) \approx C_{\kappa} \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} + C_{1} \dot{\varepsilon} \varepsilon^{-2/3} k^{-7/3} + C_{2} (\ddot{\varepsilon} \overline{\varepsilon}^{-1} - \dot{\overline{\varepsilon}}^{2} \overline{\varepsilon}^{-2}) k^{-9/3} + \cdots$$
(5)

ここに、 $\dot{\epsilon}$ は散逸率 ϵ の時間に関する微分であり、 この展開のパラメータは $\dot{\epsilon}/\epsilon$ となっている。上式 は階層的なスケール指数を含んだスペクトルから成 り、第 2・3 項は散逸率 ϵ の変動によって誘起され る。そのため、この式の長時間平均を取ると、第 2・ 3 項は消去される。したがって、通常の長時間平均 では平衡性を仮定した-5/3 乗のスペクトルのみが抽 出されるのに対し、 $\dot{\epsilon}$ の符号に対する条件付き平均 を施し、スペクトルを $\dot{\epsilon}$ が正値をとる Phase 1 と負値 をとる Phase 2 に分類した場合には非平衡成分が得 られる可能性が示唆される。そこで、上述の DNS データを用いて非平衡成分の抽出を試みる。

図2に、この条件付き抽出の結果を示す。赤線は 全時間帯での平均 $E_0(k)$ を、青線は $\dot{\epsilon}$ >0 での時間帯の 平均スペクトルと $E_0(k)$ との差 $E_1^+(k)$ の絶対値を示し



図 2 2048³の DNS データより得られたエネルギ

ースペクトルの分布



図3 512³の DNS データより得られたエネルギー スペクトルの分布



図 4 1024³の DNS データより得られたエネルギ ースペクトルの分布

ており、中間領域において $E_0(k)$ は-5/3 乗則に、 $E_1^+(k)$ の絶対値が-7/3 乗則に従うことが確認でき、理論の 予測通り、実際に-7/3 乗スペクトルが存在する事が わかる。格子点数に対する依存性を見るために、図 3 には 512³の DNS データ、また、図 4 には 1024³の DNS データを用いた同様な抽出結果を示す。これら の図に見るように、格子点数とレイノルズ数が上が る (512³では R_{λ} =158.8、1024³では R_{λ} =243.3) につ れて、Kolmogorov の-5/3 乗則ならびに非平衡成分の -7/3 乗則に従って分布する波数領域が拡大する。な お、512³および 1024³の場合では、約 50 T_L に渡る 統計平均を施しているため、その分布は滑らかなも のになっているのに対して、2048³の場合-7/3 乗から の若干の乖離が見て取れ、統計平均が不十分な事が 示唆される。

図1に見られる概周期的な変動では、乱流エネル ギーの小スケールへのカスケードに伴ってエネルギ ーが減少して散逸が増加するが、その後、再びエネ ルギーの増加が起きる。このような再生が可能にな るためには、integral スケールのような大きなスケー ルへのエネルギーの注入が必要であるが、この再生 機構を、ここで抽出された非平衡スペクトルによる 伝達関数を用いて検証してみる。



図5 2048³の DNS データより得られた Phase 1 におけるエネルギー伝達関数とフラック スの分布

図 5 に Phase 1 におけるエネルギー伝達関数

T(k,t)とフラックス $\Pi(k,t)$ の分布を示す。T(k,t)の正 値は、その波数におけるエネルギーのgainを示し、 負値はその loss を示す。 $k \bar{\eta} \le 0.01$ の低波数帯では T(k,t)は負値から正値に転じ、 $\Pi(k,t)$ は $k \bar{\eta} \le 0.3$ の 波数帯でほぼ一定の正値を取っている事から、低波 数帯では高波数帯へのカスケード (forward scatter) が生じている事が見て取れる。しかしながら、 $k \bar{\eta} \le 0.5$ の領域にはT(k,t)、 $\Pi(k,t)$ 共に負値の領域 が存在し、この領域ではエネルギーの小スケールか ら大スケールへの逆向きのカスケード (backward cascade) が生じている。なお、図中の破線は理論に よるT(k,t)と $\Pi(k,t)$ の分布の予測値を示すが、DNS データと一致している。



図 6 2048³の DNS データより得られた Phase 2 におけるエネルギー伝達関数とフラック スの分布

図 6 に Phase 2 における T(k,t) と $\Pi(k,t)$ の分布を 示す。図 5 に見られた backward cascade の領域は低 波数帯に拡大し、 $0.03 \le k \overline{\eta} \le 0.3$ の領域ではT(k,t)、 $\Pi(k,t)$ 共に負値で、 $k \overline{\eta} \le 0.03$ では T(k,t)は正値に 転じている事から、backward cascade による低波数帯 でのエネルギーの蓄積が起きている事が判る。蓄積 されたエネルギーは、引き続く Phase 1 において高 波数帯へ伝達され、この過程が準周期的に反復され る。

式(5)は、-7/3 乗成分の高次項として -9/3 乗の項 が存在する事を示唆する。この項の係数は *E* の 2 階微分を含むため、 *€* が極大もしくは極小値を取る 時間帯での条件付抽出を行なった。その結果を、図 2 の緑色の線と図 4 の黒点で示したが、実際、概ね -9/3 乗の勾配に沿って分布している。この抽出を行 なった時間帯は Phase 1 から Phase 2 への遷移期 (Phase T) であり、Phase T においては-9/3 乗項がエ ネルギー伝達を司る。

4. 非平衡スペクトルと乱流構造の相関



図 7 多重モード spiral vortex の渦層と渦管上にお ける渦度ベクトルの分布 (a) Mode 1, (b) Mode 2, (c) Mode 3。

前節までは、-5/3、-7/3、-9/3 乗成分のフーリエ空 間での解析を進めて来たが、これらのスペクトルと 実空間との相関に関心が持たれる。そこで、本節で は、非平衡スペクトルと乱流場中に存在する渦構造 との相関に触れる。乱流中の渦構造は旋回運動を伴 う管状の渦管と層状の構造を持つ渦層に大別される が、両者は完全に分離されるものではなく混在した 構造がしばしば見出される。Lundgren は、中心部の 渦管とその周囲に存在する二葉の螺旋状の渦層とか らなる spiral vortex のモデルを提案した[7]。この spiral vortex は、渦管と渦層上の渦度ベクトルの配向 によって3つのモードに分類されるが[8]、渦層上の 渦度ベクトルが渦管上の渦度ベクトルと同一方向に 配向するモード 1 (図 7 (a)) は-5/3 乗のスペクト ルを誘起し、渦層上の渦度ベクトルが渦管の周方向 に配向するモード3(図7(c))は-7/3乗のスペクト ルを誘起する [9]。また、渦管の動径方向に分布す る渦度の伸長は -9/3 乗のスペクトルを誘起する。 DNS データを用いた解析から、3 モードの spiral vortex が観察される時間帯において、対応するスペ クトルが検出される事が示されている。詳細は、文 献 [10] を参照されたい。

5. まとめ

本研究では一様等強制方乱流の DNS データを用 い、散逸率の条件付き平均を用いることで、長時間 平均によって抽出される従来の Kolmogorov の-5/3 乗則に従うエネルギースペクトルに加え、非定常・ 非平衡性を表わす-7/3 乗および-9/3 乗のスペクトル が存在することを明らかにした。さらに、スペクト ルの時間発展は3 つの Phase から構成され, Phase 1 と Phase 2 では-7/3 乗成分, Phase T では-9/3 乗成分 がエネルギー伝達を担うことを示した。

本稿で紹介した非平衡スペクトルに伴うエネルギ ー伝達機構の解明は、新たな乱流制御手法の提案や large-eddy simulation に用いられる非平衡性を考慮 した subgrid-scale モデル開発等のために必須であり、 現在、この方向の研究も進められている事を付記す る。

謝辞

本研究における DNS 計算の実行と DNS データの ポストプロセッシングは、大阪大学サイバーメディ アセンターの NEC SX-8R および SX-9 を利用して行 われた。この場を借りて、同センターのご協力に感 謝したい。

参考文献

- Kolmogorov, A.N. 1941 The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. C. R. Acad. Sci. USSR 30, 301-305.
- Kaneda, Y., Ishihara, T., Yokokawa, M. Itakura, K. and Uno, K. 2003 Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box. *Phys. Fluids* 15,L21-L34
- Gotoh, T., Fukayama, D. and Nakano, T. 2002 Velocity field statistics in homegeneous steady

turbulence obtained using a high-resolution direct numerical simulation.,*Phys. Fluids*, **14**, 1065-1081.

- Horiuti, K. & Fujisawa, T. 2008 The multi mode stretched spiral vortex in homogeneous isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **595**,341-366
- Yoshizawa, A. 1994 Nonequilibrium effect of the turbulent – energy -production process on the inertial-range energy spectrum. *Phys. Rev.* E 49,4065-4071.
- Woodruff, S. L. & Rubinstein, R. 2006
 Multiple-scale perturbation analysis of slowly evolving turbulence. *J. Fluid Mech.* 565, 95-103.
- Lundgren, T. S. 1993 A small-scale turbulence model. *Phys. Fluids A* 5,1472-1483.
- Lundgren, T. S. 1982 Strained spiral vortex model for turbulent fine structure., *Phys. Fluids*, 25,2193-2203.
- Pullin, D. I. & Lundgren, T. S. 2001 Axial motion and scalar transport in stretched spiral vorticies., *Phys. Fluids*,13,2553-2563.
- Horiuti, K. & Ozawa T. 2011 Multi-mode stretched spiral vortex and nonequilibrium energy spectrum in homogeneous shear flow turbulence. *Phys.Fluids*, 23, 035107.