The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | 格子ゲージ理論におけるエンタングルメント・エントロピー |
| Author(s) | 中川, 義之 |
| Citation | サイバーメディアHPCジャーナル. 2012, 2, p. 33-36 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/70533 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# 格子ゲージ理論におけるエンタングルメント・エントロピー

中川義之
新潟大学大学院自然科学研究科

## 1　はじめに

量子もつれは量子多体系が示す顕著な性質である。量子もつれを示す有名な例はスピン一重項をつくるスピン 1/2 の二粒子からなる量子力学系である。これは Einstein-Podolsky-Rosen による EPR パラドックスの思考実験の説明にもよく用いられる。この系の量子状態は、それぞれの粒子からなる部分系の状態のテンソル積としては表すことができず、エンタングル状態と呼ばれる。この量子もつれの度合いを測る量がエンタングルメント・エントロピーであり、系の基底状態が量子的にどれだけ複雑かを表す。

近年、エンタングルメント・エントロピーは物性物理や量子コンピューティング、量子情報など様々な分野で盛んに研究されている [1]。その中でエンタングルメント・エントロピーが量子系の秩序変数としての役割を果たすことが明らかにされてきた。例えばイジング模型でのエンタングルメント・エントロピーは、臨界点で発散するが非臨界点で飽和するといった振る舞いを示す。近年では古典的な秩序変数で特徴づけることのできないエキゾチックな量子相も発見されており、エンタングルメント・エントロピーの重要性が指摘されている。

強い相互作用の基礎理論である量子色力学（QCD）でのエンタングルメント・エントロピーは特に興味深い。QCD は高エネルギー（近距離）で相互作用が弱くなる漸近自由なゲージ理論であり、高エネルギー現象は摂動論を用いることで QCD の基本的自由度であるクォークとグルーオンの相互作用として良く記述されることが知られている。一方低エネルギー（遠距離）ではクォークやグルーオンは陽子や中性子といったハドロン内部に閉じ込められており、ハドロンを有効自由度として考えることで低エネルギー現象をうまく説明することができる。これは QCD の世界では距離のスケールが変わることで有効自由度がクォーク・グルーオンからハドロンへと変化することを意味している。この有効自由度の変化をエンタングルメント・エントロピーの観点から理解しようとするのがこの研究の動機である。

ゲージ理論でのエンタングルメント・エントロピーの計算は、ゲージ／重力対応を用いた研究で大きな進展があった [2, 3]。ゲージ／重力対応というのは、ゲージ理論と、次元の異なる空間上での重力理論との間にある等価性（双対性）であり、近年活発に研究が進められている。この等価性を用いることで、計算の難しい強結合ゲージ理論における物理量を重力理論の立場から計算することが可能になる。QCD と双対な重力理論はまだ発見されていないが、QCD と良く似た性質をもつ理論において、エンタングルメント・エントロピーが非解析的な振る舞いをすることが示された [4, 5]。これはある臨界距離を境に系の有効自由度が変化することを意味する。では QCD でも同じように臨界距離のようなものが存在して、系の自由度がそこで突然変化するのだろうか。

本稿では大阪大学サイバーメディアセンター及び核物理研究センターのスーパーコンピュータ NEC-SX を用いて得られた格子ゲージ理論におけるエンタングルメント・エントロピーに関する研究を紹介する[1]。

## 2　エンタングルメント・エントロピー

純粋状態 $|\Psi\rangle$ に対するエンタングルメント・エントロピーは以下のように定義される。図 1 のようにまず全系を二つの部分系（領域）$A$ と $B$ に分ける。ここで $l$ を部分系 $A$ の $x$ 方向のサイズとする。全系の密度行列は $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ で与えられる。この密度行列に対して領域 $B$ の自由度に関してトレースをとった縮約密度行列

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho = \mathrm{Tr}_B |\Psi\rangle\langle\Psi| \tag{1}$$

を考える。これは領域 $A$ の自由度しか観測することができない観測者にとっての密度行列になる。ここで注意すべきなのは、$|\Psi\rangle$ は純粋状態であったにも関わらず、$\rho_A$ は混合状態の密度行列になっている点である。エンタングルメント・エントロピーは縮約密度行列の

[1] SU(2) での計算については [6]、Migdal-Kadanoff 近似を用いた SU(N) での計算については [7] を参照。

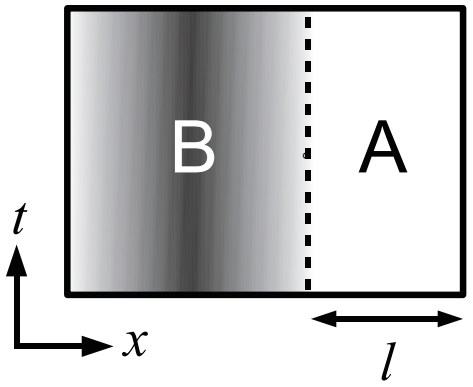


図 1: エンタングルメント・エントロピーは全系を仮想的に部分系に分割したときの量子相関として定義される。$l$ は部分系 $A$ の $x$ 方向の長さであり、$y$、$z$ 軸は紙面と垂直な方向になっている。

フォンノイマン・エントロピーとして定義される

$$S_A = -\mathrm{Tr}\rho_A \ln \rho_A. \tag{2}$$

$\rho_A$ にはトレースアウトされた $B$ の量子自由度の情報が入っており、$S_A$ は領域 $A$ しか観測できない場合に生じる曖昧さを測る量となっている。エンタングルメント・エントロピーがもつ特徴的な性質は文献 [8] にまとめられている。

## 3 レプリカトリック

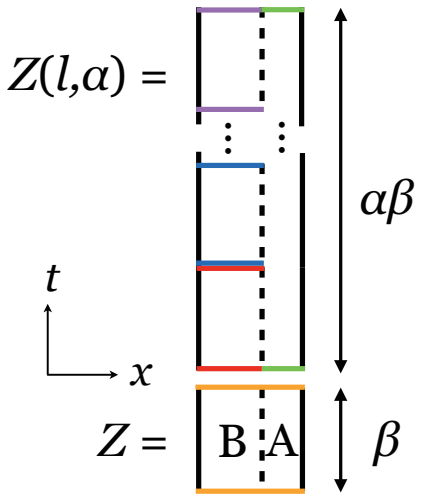


図 2: $\alpha$ カットの入った系の模式図。領域 $A(B)$ では $\alpha\beta(\beta)$ の間隔で周期的境界条件が課される。

エンタングルメント・エントロピーを計算するためにここではレプリカトリックと呼ばれる方法を用いる。導出の詳細は文献 [9] にゆずることとし、ここでは要点を述べる。式 (2) で定義されるエンタングルメント・エントロピーは $S_A = -\lim_{\alpha\to 1}\partial/\partial\alpha \ln \mathrm{Tr}_A \rho_A^\alpha$ という形に表すことができる。ここで系のコピー（レプリカ）を $\alpha$ 個用意し、時間方向にそれらをつなぎ合わせたのような変わった系を考える（図 2）。領域 $A$ にある自由度は $\alpha\beta$ の間隔で時間方向に周期的境界条件が課されるのに対し、$B$ にある自由度は $\beta$ の周期の境界条件が課される。$\beta = aN_t$（$a$ は格子間隔、$N_t$ は時間方向の格子点の数）は時間方向の格子の大きさである。この系の分配関数を $Z(l,\alpha)$ とすると、縮約密度行列の $\alpha$ 乗のトレースは

$$\mathrm{Tr}\rho_A^\alpha = \frac{Z(l,\alpha)}{Z^\alpha} \tag{3}$$

と表すことができる。ここで $Z = Z(\alpha = 1)$ は図 1 のような我々が考えている系の分配関数である。するとエンタングルメント・エントロピーは

$$S_A(l) = -\lim_{\alpha\to 1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\left(\frac{Z(l,\alpha)}{Z^\alpha}\right). \tag{4}$$

で与えられる。一般的にエンタングルメント・エントロピーは紫外カットオフ（格子間隔の逆数）とともに発散する項を含むため、格子状で計算する場合は $l$ で微分をとった量を考える方が都合が良い；

$$\frac{\partial S_A(l)}{dl} = \lim_{\alpha\to 1}\frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial}{\partial\alpha}F[l,\alpha]. \tag{5}$$

ここで $F[l,\alpha] = -\ln Z(l,\alpha)$ は $\alpha$ カットの入った系の自由エネルギーである。このようにレプリカトリックを用いると、図 2 で模式的に描かれるような $\alpha$ 個のカットをもった系の自由エネルギーを計算することで、エンタングルメント・エントロピーを得ることができる。

## 4 格子 QCD でのエンタングルメント・エントロピーの評価

格子 QCD シミュレーションでは、式 (5) に含まれる微分は有限差分に置き換わり、

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 1}\frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial}{\partial\alpha}F[A,\alpha] &\to \frac{\partial}{\partial l}\lim_{\alpha\to 1}\left(F[l,\alpha+1]-F[l,\alpha]\right)\\ &\to \frac{F[l+a,\alpha=2]-F[l,\alpha=2]}{a}\end{aligned} \tag{6}$$

で見積もることになる。$F[l,\alpha=1]$ は $l$ に依存しないために $\partial F[l,\alpha=1]/\partial l$ の項は落ちる。あとは式 (6) の中の自由エネルギーの差を計算すればいい。これは格子 QCD では、二つの自由エネルギー $F[l+a,\alpha=2]$、

$F[l, \alpha = 2]$ に対応するような作用 $S_l[U]$ と $S_{l+a}[U]$ を考えることで求めることができる [10, 11]。二つの作用を補完する作用 $S_{\rm int} = (1-\gamma)S_l[U] + \gamma S_{l+a}[U]$ でゲージ配位をアップデートすると、

$$\begin{aligned} & F[l+a, \alpha=2] - F[l, \alpha=2] \\ = & -\int_0^1 d\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln Z(l, \gamma) \\ = & \int_0^1 d\gamma \, \langle S_{l+a}[U] - S_l[U] \rangle_\gamma \, . \end{aligned} \tag{7}$$

というように、作用の差の期待値を補完変数で積分することで求めることができる。ここで $\langle \cdot \rangle_\gamma$ は $S_{\rm int}$ を作用として計算したときのモンテカルロ平均である。

ここでは式 (7) の作用の差を $\gamma = 0$ から 1 まで 0.1 刻みで評価し、拡張シンプソン法を用いて積分を評価した。

## 5 シミュレーションの詳細と結果

本シミュレーションではウィルソンプラケット作用を採用し、擬熱浴法を用いてゲージ配位を生成した。そして 5000 スウィープを熱化のために捨て、100 スウィープごとに式 (7) を計算した。

この計算では $\gamma$ のステップ数に加え、格子結合定数、$l$ を変えながらシミュレーションする必要がある。本シミュレーションでは $\gamma$ のステップ数が 11 点、格子結合定数を $\beta = 5.70$ から 6.00 まで 5 点とさらにそれぞれの $\beta$ で $l = 1$ から $l = 5-6$ まで動かしている[2]。また格子体積も $12^4$ と $16^4$ で計算している。このように多くのパラメータを動かして計算する必要があるため、SX では $\gamma$ のステップ数に対してパラメータ並列計算を行い、さらに $\beta$ と $l$ を変えた計算を異なるジョブとして走らせた。

図 3 は格子 QCD シミュレーションで得られたゼロ温度でのエンタングルメントエントロピー $S_A(l)$ の $l$ 微分を表している。領域 $A$ と $B$ の境界面の面積 $|\partial A|$ で規格化されている。まず異なる体積（$12^4$ と $16^4$）の結果が統計誤差の範囲内で一致しているのがわかる。これはエンタングルメント・エントロピーが二つの領域の境界面の面積に比例すること、つまり面積則にしたがうことを示している。熱的エントロピーが一般的に体積則に従うのと対照的である。

図からわかるように、エンタングルメント・エントロピーの $l$ 微分は $l$ とともに小さくなっている。ゲージ／重力対応を用いることで、いくつかの強結合ゲージ理論ではこの減少がある臨界距離 $l^*$ まで続き、$l^*$ で不連続になって $l > l^*$ でゼロになることが示された [4, 5]。しかし我々のシミュレーションではこのような非解析的な変化は見られなかった。$\partial S_A/\partial l$ は $l$ の増加とともに急激に減少するために、$l$ が大きいところではシグナル・ノイズ比が小さくなる。そのためゲージ／重力対応で見られたような臨界距離が存在する可能性を完全に排除することはできないが、少なくとも $0.4-0.5$[fm] 以下にそのような臨界距離が存在しないことは結果から見て取れる。これは距離スケールの変化に伴うクォーク・グルーオンからハドロンへの有効自由度の変化が、相転移的に変化するのではなく緩やかに一方から他方へと変わっていくことを示唆している。

$l$ が小さい領域ではエンタングルメント・エントロピーが $1/l^2$ でスケールすること、つまり $\partial S_A/\partial l$ は $1/l^3$ で小さくなることが次元解析から期待される。こ

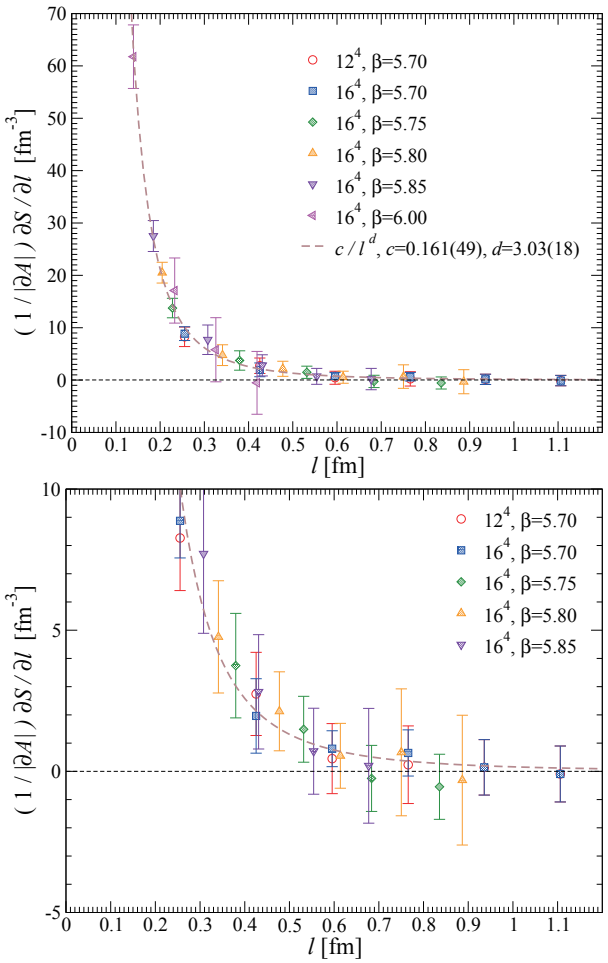


図 3: （上図）ゼロ温度でのエンタングルメント・エントロピーの $l$ 微分。領域 $A$ と $B$ の境界面の面積 $|\partial A|$ で規格化されている。破線はベキ関数 $c/l^d$ でフィットして得られた結果である。フィット値はそれぞれ $c = 0.149(48)$、$d = 3.06(20)$ である。（下図）上図のゼロ付近をズームアップしたもの。

[2] ここの $\beta$ は格子結合定数であり、レプリカ法の説明のときに用いた $\beta = aN_t$ とは異なる。図 3 での $\beta$ も格子結合定数である。

の振る舞いを確かめるために、ベキ関数$\partial S_A/\partial l = c/l^d$でシミュレーション結果をフィットし、$c = 0.149(48)$、$d = 3.06(20)$ ($\chi^2/\mathrm{NDF} = 0.192$) というフィット値を得た。これは次元解析から期待される$d = 3$と良く一致している。

## 6 まとめ

本稿では大阪大学サイバーメディアセンターのスーパーコンピュータ NEC-SX を用いて得られた格子ゲージ理論におけるエンタングルメント・エントロピーに関する研究を紹介した。

サイバーメディアセンター、および核物理研究センターにおけるスーパーコンピュータ NEC-SX は比較的自由に利用することが可能であり、数値計算を行う研究者にとって極めて有用である。サイバーメディアセンターの大規模計算機システムのホームページ（http://www.hpc.cmc.osaka-u.ac.jp/j/service/sx.html）にはログイン方法からバッチリクエスト用のスクリプトの作成法、リアルタイムでのバッチジョブの情報など、計算機の利用に必要な情報が充実している。さらにベクトル演算機である NEC-SX でプログラムを高速化させるためのベクトル化・並列化に関する資料も、サイバーメディアセンター大規模計算機システム・ポータルサイト（http://www.hpc.cmc.osaka-u.ac.jp/j/service/portal.html）に集められている。スーパーコンピュータの利用に関する講習会も定期的に開かれているため、これらは新規ユーザーにとってもフレンドリーだと思われる。ただ一方でそうしたところで得られるはずの情報が見つけられないという話も聞くため、スーパーコンピュータの利用に際して必要な情報がどこで得られるかということについて周知を強化することで、新規を含めたユーザーの利用環境がより向上されるのではないかと考えている。

最後に、スーパーコンピュータの管理、運営、メンテナンスに関わられている多くの方々に感謝する。

## 参考文献

[1] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, and V. Vedral, *Rev.Mod.Phys.* **80** (2008) 517, `quant-ph/0703044`.

[2] S. Ryu and T. Takayanagi, *Phys.Rev.Lett.* **96** (2006) 181602, `hep-th/0603001`.

[3] T. Nishioka, S. Ryu, and T. Takayanagi, *J. Phys.* **A42** (2009) 504008, `arXiv:0905.0932`.

[4] T. Nishioka and T. Takayanagi, *JHEP* **0701** (2007) 090, `hep-th/0611035`.

[5] I. R. Klebanov, D. Kutasov, and A. Murugan, *Nucl.Phys.* **B796** (2008) 274, `arXiv:0709.2140`.

[6] P. V. Buividovich and M. I. Polikarpov, *Nucl. Phys.* **B802** (2008) 458, `arXiv:0802.4247`.

[7] A. Velytsky, *Phys. Rev.* **D77** (2008) 085021, `arXiv:0801.4111`.

[8] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information.* Cambridge University Press, 2000.

[9] P. Calabrese and J. L. Cardy, *J. Stat. Mech.* **0406** (2004) P002, `hep-th/0405152`.

[10] G. Endrodi, Z. Fodor, S. Katz, and K. Szabo, *PoS* **LAT2007** (2007) 228, `arXiv:0710.4197`.

[11] Z. Fodor, *PoS* **LAT2007** (2007) 011, `arXiv:0711.0336`.