The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Classifications and Constructions of Lattice Polytopes
Author(s)	土谷, 昭善
Citation	大阪大学, 2018, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/70783
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

様式3

論 文 内 容 の 要 旨

氏 名 (土谷 昭善)	
論文題名	Classifications and Constructions of Lattice Polytopes (格子凸多面体の分類と構成)

論文内容の要旨

オイラーの公式，ピックの公式などにその源流を持つ凸多面体論は，組合せ論の伝統的な分野の一つである．全ての頂点が整数点（格子点）となっている格子凸多面体に焦点を当てると，組合せ論，可換環論， トーリック幾何，整数論，最適化問題，統計，そしてミラー対称性といった純粋数学や応用数学の様々な 分野との間に美しい関係性が現れる．本学位論文では，格子凸多面体の「分類」と「構成」を主軸に研究を展開している．

現在最も関心を集めている研究の一つに「格子凸多面体の分類」が挙げられる．計算機の発達に伴い，低次元での格子凸多面体の分類が盛んに行われている一方，一般次元の格子凸多面体の分類理論の確立が課題であった．本学位論文の前半ではまず，格子凸多面体の重要な不変量である，δ多項式の特徴付けに着目し，一般次元での格子凸多面体を分類している．実際，正規化体積が4以下のδ多項式の特徴付けが完全に与えられていることを用いて，正規化体積が4以下の格子凸多面体を完全に分類した．さらに，未解決であった正規化体積が5のδ多項式の特徴付けを与えることに成功しており，今後，さらなる格子凸多面体の分類が期待できる．次に，有限アーベル群の理論を道具とし、対称な多項式をδ多項式に持つ，Gorenstein凸多面体の分類を遂行した．まず，単体がGorensteinとなる特徴付けを有限アーベル群の言葉で与えることによって，正規化体積が素数と２つの素数の積の場合のGorenstein単体の分類に成功した．一方で，δ多項式の形に着目し，対称三項δ多項式を持つGorenstein凸多面体を完全に分類した．これはBatyrev-Junyによる二次対称δ多項式を持つGorenstein凸多面体の分類の一般化となっている．

数学の研究において，多様で有用な例を作ることは非常に重要である．そのような例は永年の未解決問題へ挑戦する基盤となるとともに，新しい問題の発見に繋がる．本学位論文の後半は，可換環論，代数幾何などの他分野において重宝される反射的凸多面体の豊富な類の構成を行っている．反射的凸多面体は各次元に，同値なものをのぞいて有限個しかなく，低次元での分類が行われている一方，高次元の反射的凸多面体は未知のことが多く，多種多様な反射的凸多面体の例の構成が求められていた．まず正規と呼ばれる性質に注目し、有限半順序集合から正規反射的凸多面体の豊富な類の構成に成功した．さらに，構成した多面体の体積の公式を，付随する有限半順序集合の言葉で与えた．次に，反射的凸多面体の面に注目した．任意の格子凸多面体はある反射的凸多面体の面となっていることが知られている．しかし，どれほど次元を上げれば，そのような反射的凸多面体が存在するか，というのが一つの問題であった．そこで，この問題を(0,1)凸多面体の場合に注目して取り組み，その結果，半順序集合に付随する順序凸多面体，鎖凸多面体，理想グラフに付随する安定集合凸多面体，有限単純グラフに付随する辺凸多面体といった著名な(0,1)凸多面体は，ある反射的凸多面体の極大面となっていることを示した．特にその結果の中で、理想グラフの必要十分条件を格子凸多面体の言葉で与えることに成功しており，古典的なグラフ理論への波及効果も期待できる．さらに，これまで発掘が絶望的であった自己双対な反射的凸多面体の構成方法を提唱し，多くの貴重な例を構成した．

様式7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名　（　土谷　昭善　）		
論文審査担当者	（職）	氏　名
	主 査　教授	日比 孝之
	副 査　教授	和田 昌昭
	副 査　准教授	安井 弘一
	副 査　京都産業大学准教授	東谷 章弘

論文審査の結果の要旨

土谷昭善の学位論文では、格子凸多面体の「分類」と「構成」を主軸とし、研究が展開されている。

学位論文の前半は、格子凸多面体の重要な不変量である、δ多項式の特徴付けに着目し、格子凸多面体の「分類」を遂行している。第１に、東谷らによる、正規化体積が4以下の格子凸多面体のδ多項式の特徴付けを駆使し、正規化体積が4以下の格子凸多面体を完全に分類することに成功した。更に、正規化体積が5の格子凸多面体のδ多項式の特徴付けを与え、今後、正規化体積が5の格子凸多面体の分類に挑戦する礎を作った。第２に、有限アーベル群の理論を道具とし、Gorenstein 多面体の分類を探究した。特に、格子単体が Gorenstein となる特徴付けを有限アーベル群の言葉で与え、正規化体積が素数、あるいは、2個の素数の積となる Gorenstein 単体を分類した。更に、V. Batyrev らによる、対称二次δ多項式を持つ Gorenstein 多面体の分類を一般化し、対称三項δ多項式を持つ Gorenstein 多面体を完全に分類することに成功した。

学位論文の後半は、可換環論、代数幾何などの諸分野に現れる、反射的凸多面体の豊富な類を「構成」している。第１に、正規と呼ばれる性質に着目し、有限半順序集合から正規反射的凸多面体の自然な類を構成し、更に、構成した凸多面体の体積を、有限半順序集合の言葉で表示した。第２に、任意の格子凸多面体は、或る反射的凸多面体の面と unimodular 同値であるという C. Haase らの補題を踏まえ、反射的凸多面体のファセットと同値であるような格子凸多面体はどのようなものがあるか、という問題を探究した。その結果、有限半順序集合に付随する順序凸多面体と鎖凸多面体、理想グラフに付随する安定集合凸多面体、及び、有限単純グラフに付随する辺凸多面体などの著名な(0,1)凸多面体は、或る反射的凸多面体のファセットとなっていることを示した。特に、安定集合凸多面体を巡る結果は、有限グラフが理想グラフとなるための必要十分条件を格子凸多面体の範疇で捕らえており、古典的なグラフ理論への波及効果も期待される。第３に、従来、発掘が困難であった、自己双対型反射的凸多面体を構成する独創的な方法を提唱し、幾多の興味深い自己双対型反射的凸多面体を構成した。

よって、当該論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。