The University of Osaka Institutional Knowledge Archive

Title	Le fondement constructif du calcul infinitésimal
Author(s)	Kondô, Motokiti
Citation	Osaka Mathematical Journal. 1960, 12(1), p. 61-96
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/7107
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

Kondô, Motokiti
Osaka Math. J.
12 (1960), 61-96.

Le Fondement Constructif du Calcul Infinitésimal

dédié à Monsieur le Professeur Z. Suetuna à l'Occasion
de sa Soixantième Anniversaire de la Naissance

Par Motokiti KONDÔ

Ce travail appartient complètement au domaine de la théorie des ensembles projectifs et il est développé sur la base donnée dans mon travail [19]. Son but principal est de discuter systématiquement le fondement constructif du calcul infinitésimal.

En le 24 novembre 1858, R. Dedekind avait arrivé pour la première fois l'idée centrale de la théorie des nombres réels et il l'avait exposée dans sa leçon de même année sur l'analyse mathématique, dans l'école polytechnique de Zürich. Or, après presque vingt ans, elle a été publiée dans son petit livre "Stetigkeit und irrationale Zahlen" [4]. Grâce à cette théorie, l'analyse mathématique avait trouvé une réalisation de la pensée de A. Cauchy. Elle est un rationalisme dans les mathématiques et héritée par plusieurs mathématiciens de ce siècle. R. Dedekind est un parmi ceux et G. Cantor, le créateur de la théorie des ensembles, appartient aussi à ce cercle.

Après le succès de la théorie des ensembles, les mathématiques progressent rapidement. Ceux contemporains sont appuyés parfaitement par cette théorie. Comme on sait bien, les mathématiques sont reformées largement par un mouvement "l'abstraction des mathématiques" pendant derniers cinquante ans. Or, son origine a resté encore invariable. La théorie de R. Dedekind sur les nombres réels et celle de G. Cantor des ensembles, ce sont des grandes héritières du 19-ième siècle dans les mathématiques contemporaines. Or, on trouve en fin le jour auquel elles seront reformées fondamentalement. Cette révolution remarquable est basée sur les constructivismes contemporains dans les mathématiques. Comme on le connaît bien, ces pensées sont commencées par les criticismes pour la théorie cantorienne des ensembles et elles appartiennent aux intuitionistes, aux empiristes et encore aux logiciens. D'où, les points de départ sont assez divergents, mais ils ont un terrain commun au profond et elles discutent divers problèmes communs sur celui-ci. La réformation de la théorie dedekindienne sur les nombres réels et celle de la théorie cantorienne des ensembles commencent sous telle circonstance.

En concernant ce mouvement dans les mathématiques, on peut trouver divers problèmes importants qui sont fondamentaux dans les mathématiques. Le développement du fondement constructif du calcul infinitésimal, c'est aussi un problème parmi ceux-ci et nous pouvons trouver déjà divers resultats sur celui-ci (voir les bibliographies posées à la fin de ce travail). Mais, plupart de celles-ci ne sont pas systématiques et leur considération sur les nombres réels n'est pas encore complète. Or, la discussion sur les nombres réels développée dans mon travail [19] est presque achevée et elle est suffisante d'exposer systématiquement le fondement constructif du calcul infinitésimal. C'est la raison que ce travail est consacré à la considération de ce problème.

Pour développer constructivement les analyses mathématiques dans la théorie des ensembles projectifs, j'ai introduit une nouvelle notion sur les analyses mathématiques (M. Kondô [19]). D'après cette idée, une analyse relative est définie par deux domaines relatifs de nombres réels et elle est désignée par $\mathcal{A}(K_0, K)$, si K_0 et K sont ceux-ci. Encore, ils concernent respectivement la nommabilité des êtres mathématiques et les domaines de ces êtres. Pour discuter précisément la structure de $\mathcal{A}(K_0, K)$, il faut poser quelques conditions auxiliaires sur la continuité de K_0 et K. Or, en concernant la continuité des domaines relatifs de nombres réels, on connaît diverses perfections relatives de ceux-ci, mais la perfection relative π est fondamentale et dans ce travail, nous considérons la condition C:

$$\pi(K_0) \subseteqq K.$$

Par exemple, si l'on a $K_0 = R$ et $K = \pi(R)$, l'analyse relative $\mathcal{A}(K_0, K)$ remplit cette condition et $\pi(R)$ est le domaine des nombres réels et définissables arithmétiquement. Telle analyse relative concerne intimement celle de H. Weyl [26] et de M. A. Grzegorczyk [10, 11]. Encore, la considération sur les êtres nommables (S_2^2, K_0, K) ou bien (E_2^2, K_0) dans celle-ci est presque-équivalente à l'analyse récursive (R. L. Goodstein [6, 7, 8, 9], A. Mazur [22], E. Specker [25]). Or, nous pouvons démontrer les théorèmes fondamentaux du calcul infinitésimal dans une analyse relative $A(K_0, K)$ qui remplit la condition C. En effet, le théorème de M. Rolle (le théorème 1 de § 3), celui de la valeur moyenne (le corollaire du théorème 1 de § 3), celui de Br. Taylor (le théorème 3 de § 4), celui de la différentiation terme en terme de séries (le théorème 4 de § 3) et celui de l'intégrabilité (le théorème 3 de § 5) sont démontrés sans changement essentiel dans $\mathcal{A}(K_0, K)$.

Quelques parties de ce travail ont été présentées à la conférence annuaire de la société physico-mathématique du Japon en l'avril, 1935.

§ 1. Les nombres réels

1. Dans mon travail [19], j'ai discuté les nombres réels et nommables (E, K_0). Or, pour développer constructivement le calcul infinitésimal, nous considérons encore quelque propriétés des nombres réels et nommables (E, K_0). Pour une suite $\{a_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ nommable (E_n^n, K_0) de nombres réels, s'il existe une fonction $f(x)$ nommable (E_m^m, K_0), définie sur $U_N(x)$ et telle qu'on ait

1°, $k>f(p)$ entraîne $|a_k-a_{k+j}|<\frac{1}{p}$ $(j=1, 2, \cdots)$,

2°, $f(p)<f(p+1)$ $(p=1, 2, \cdots)$,

on dit que la suite $\{a_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ de nombres réels est *convergente* (E_m^m, K_0). D'après la définition, si une suite de nombres réels est convergente (E_m^m, K_0), elle est aussi convergente. Or, on a le

Théorème 1. *Si une suite* $\{a_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ *nommable* (E_n^n, K_0) *de nombres réels est convergente, elle est aussi convergente* (E_{n+1}^{n+1}, K_0) *et, sa limite* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k$ *est nommable* (E_{n+1}^{n+1}, K_0).

Démonstration. Désignons par A l'ensemble de tous les points $\langle x, y, z\rangle$ de $U_N(x, y, z)$ tels qu'on ait $|a_x-a_{x+z}|>\frac{1}{y}$. D'après la définition, il est nommable (E_n^n, K_0) et donc, $B=CS(U_N(x, y), A)$ est nommable (E_n, K_0). Or, pour chaque nombre naturel y, $B^{\langle y\rangle}$ n'est pas vide. En effet, d'après la supposition, il existe un nombre naturel x tel qu'on ait $|a_x-a_{x+z}|<\frac{1}{y}$ $(z=1, 2, \cdots)$ et on a $\langle x, y, z\rangle \overline{\in} A$ $(z=1, 2, \cdots)$. Donc, on a $\langle x, y\rangle \in B$, c'est-à-dire, $B^{\langle y\rangle} \neq 0$. Comme il est nommable (E_{n+1}^{n+1}, K_0), il existe un uniformisateur U de B par rapport à $U_N(y)$ et qui est nommable (E_{n+1}^{n+1}, K_0) (21, § 3, Chap. II, [19]). Désignons par $f(y)$ la fonction dont l'image géométrique est U. D'après le théorème 11 (16, § 2, Chap. II, [19]), elle est nommable (E_{n+1}^{n+1}, K_0). Encore, on a

$$|a_{f(p)}-a_{f(p)+z}|<\frac{1}{p} \qquad (z=1, 2, \cdots)$$

et donc, si l'on a $k>f(2p)$, on a

$$|a_k-a_{k+j}|\leqq|a_k-a_{f(2p)}|+|a_{f(2p)}-a_{k+j}|<\frac{1}{p}.$$

Posons encore $g(y)=\sum\limits_{k=1}^{y} f(2k)$. D'après le théorème 8 (20, § 3, Chap. II, [19]), elle est nommable (E_{n+1}^{n+1}, K_0) et on a

1°, $k>g(p)$ entraine $|a_k-a_{k+j}|<\frac{1}{p}$ $(j=1, 2, \cdots)$,

$2°,\quad g(p) < g(p+1)\ (p = 1, 2, \cdots)$.

Donc, la suite $\{a_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ est convergente (E^{n+1}_{n+1}, K_0). Encore, d'après la définition, $\lim_{k\to\infty} a_k$ est nommable (E^{n+1}_{n+1}, K_0), c.q.f.d.

Théorème 2. *Si une suite* $\{a_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ *nommable* (E^n_n, K_0) *de nombres réels est convergente* (E^n_n, K_0), *sa limite* $\lim_{k\to\infty} a_k$ *est nommable* (E^n_n, K_0) *ou bien* (E^2_2, K_0), *suivant qu'on a* $n\geqq 2$ *ou bien* $n=1$.

Démonstration. D'après la supposition, il existe une fonction $f(x)$ nommable (E^n_n, K_0) définie sur $U_N(x)$ et telle que $k > f(p)$ entraine $|a_k - a_{k+j}| < \frac{1}{p}$ $(j=1, 2, \cdots)$. Dès lors, on a

$$|a_{f(p)+1} - a| \leqq \frac{1}{p} \qquad (p = 1, 2, \cdots),$$

où $a = \lim_{k\to\infty} a_k$ et donc, on a

$$a_{f(p)+1} - \frac{1}{p} \leqq a \leqq a_{f(p)+1} + \frac{1}{p}.$$

Par suite, on a

$$\underset{<p>}{\text{bor. sup.}} \left(a_{f(p)+1} - \frac{1}{p}\right) = \underset{<p>}{\text{bor. inf.}} \left(a_{f(p)+1} + \frac{1}{p}\right) = a \tag{1}$$

Encore, l'image géométrique G de $f(x)$ est nommable (E^n_n, K_0) et infini. D'où, il existe les fonctions $g_k(z)$ $(k=1, 2)$ nommables (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0), définies sur $U_N(z)$ et telle que la transformation

$$x = g_1(z) \quad \text{et} \quad y = g_2(z)$$

applique $U_N(z)$ en G biunivoquement (Théorème 9, 20, § 3, Chap. II, [19]). Donc, si l'on pose

$$\underline{b}_k = a_{k_1} - \frac{1}{k_2} \quad \text{et} \quad \bar{b}_k = a_{k_1} + \frac{1}{k_2},$$

où $k_1 = g_2(k) + 1$ et $k_2 = g_1(k)$ $(k=1, 2, \cdots)$, les suites $\{\bar{b}_k\}$ et $\{\underline{b}_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ de nombres réels sont nommables (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0) et d'après (1), on a

$$\underset{<k>}{\text{bor. sup.}}\ \underline{b}_k = \underset{<k>}{\text{bor. inf.}}\ \bar{b}_k = a.$$

D'où, $a = \lim_{k\to\infty} a_k$ est nommable (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0), suivant qu'on a $n\geqq 2$ ou bien $n=1$, c.q.f.d.

Remarque. Pour tout nombre naturel n, il existe une suite $\{a_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ nommable (E^n_n, K_0), convergente et telle que $\lim_{k\to\infty} a_k$ soit précisément nommable (E^{n+1}_{n+1}, K_0).

2. Puis, considérons la convergence des séries de nombres réels. Posons d'abord le

Lemme 1. *Pour une fonction $F(z_1, z_2)$ nommable (E^n_n, K_0) et définie sur $U_N(z_1, z_2)$, posons*

$$G(z_1) = \sum_{k=1}^{z_1} F(z_1, k).$$

Alors, elle est aussi nommable (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ on bien $n=1$[1].

Démonstration. Considérons d'abord le cas où $F(z_2, z_2) \geqq 0$ pour chaque point de son domaine. Posons $G(z_1, z_2, z_3) = 2^{z_3}F(z_1, z_2)$. Elle est nommable (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0) (20, § 3, Chap. II, [19]) et donc, l'ensemble A de tous les points $\langle x, y, z_1, z_2, z_3\rangle$ tels qu'on ait

$$\langle x, y\rangle \in R(G(z_1, z_2, z_3)) \quad \text{et} \quad y = 1$$

est aussi nommable (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$. De plus, $A^{\langle z_1, z_2, z_3\rangle}$ contient précisément $[G(z_1, z_2, z_3)]$ points.

Or, l'ensemble B de tous les points $\langle x, 1, z_1, z_2, z_3, z_4\rangle$, tels que $\langle x, 1, z_1, z_2, z_3, z_4\rangle \in A$ et $z_2 \leqq z_4$, est nommable (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0) et $B^{\langle z_1, z_3, z_4\rangle}$ contient précisément $[\sum_{k=1}^{z_4} G(z_1, k, z_3)]$ points. D'où, si l'on pose

$$F(x_0, z_1, z_3) = \chi_B(\varphi_{22}(x_0), z_1, \varphi_{21}(x_0), z_3, z_1),$$

on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(k, z_1, z_3) = \sum_{k=1}^{z_1} [G(z_1, k, z_3)]$$

et $\sum_{k=1}^{\infty} F(k, z_1, z_2)$ est nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0). Or, on a

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} F(k, z_1, z_3)}{2^{z_3}} = \sum_{k=1}^{z_1} \frac{[2^{z_3}F(z_1, k)]}{2^{z_3}},$$

et d'où

$$\underset{\langle z_3\rangle}{\text{bor. sup.}} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} F(k, z_1, z_3)}{2^{z_3}} = \sum_{k=1}^{z_1} F(z_1, k) = G(z_1).$$

---

1) Sur les fonctions nommables (E, K_0), dont les valeurs sont les nombres réels et nommables (E, K_0), voir 26, § 1, Chap. III, [19].

Par suite, $G(z_1)$ est nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0).

Puis, posons $F_0(z_1, z_2)=[F(z_1, z_2)+1]-F(z_1, z_2)$ et $G_0(z_1)=\sum_{k=1}^{z_1} F_0(z_1, k)$. Alors, de même que le cas précédent, $G_0(z_1)$ est nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0). Or, on a

$$G(z_1)+G_0(z_1) = \sum_{k=1}^{z_1}[F(z_1, k)+1]$$

et $\sum_{k=1}^{z_1}[F(z_1, k)+1]$ est nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0). Donc, $G(z_1)$ est aussi nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$.

Puis, considérons le cas général. Posons

$$F^{(+)}(z_1, z_2) = \text{bor. sup.}\,(0, F(z_1, z_2))\,,$$
$$F^{(-)}(z_1, z_2) = \text{bor. sup.}\,(0, -F(z_1, z_2))\,,$$
$$G^{(\pm)}(z_1) = \sum_{k=1}^{z_1} F^{(\pm)}(z_1, k)\,.$$

Alors, $G^{(+)}(z_1)$ et $G^{(-)}(z_1)$ sont nommables (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0) et on a $G(z_1)=G^{(+)}(z_1)-G^{(-)}(z_1)$. Donc, $G(z_1)$ est nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$, c.q.f.d.

Or, étant donnée une suite $\{a_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ nommable (E_n^n, K_0) de nombres réels, on peut définir formellement une *série nommable* (E_n^n, K_0) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *de nombres réels*. Prenons les sommes partielles $s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$ $(k=1, 2, \cdots)$. D'après le lemme 1, la suite $\{s_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ de nombres réels est nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$ et alors, on dit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ est *convergente* (E_m^m, K_0), si la suite $\{s_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ de nombres réels est convergente (E_m^m, K_0). Dès lors, on a les

Lemme 2. *Si une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nommable (E_n^n, K_0) de nombres réels est convergente, elle est convergente (E_{n+1}^{n+1}, K_0).*

Lemme 3. *Si une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nommable (E_n^n, K_0) de nombres réels est convergente (E_n^n, K_0), sa somme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ est nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$.*

Remarque. De même que les séries de nombres réels, on peut discuter le produit $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ de nombres réels.

§ 2. Les fonctions continues

3. Puis, considérons la continuité des fonctions nommables (S, K_0, K).

Soient $F(s)$ une fonction continue nommable (S_n^n, K_0, K), finie et définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E_n^n, K_0). Dès lors, on dit que $F(s)$ est *continue* (E_m^m, K_0) à un point c de son domaine, s'il existe une fonction $f(x)$ nommable $(E_m^m, K_0(c))$ définie sur $U_N(x)$, telle que $|s-c|<\frac{1}{f(p)}$ et $s\in[a, b]_K$ entraînent $|F(s)-F(c)|<\frac{1}{p}$. Encore, on dit que $F(s)$ est *continue* (S_m^m, K_0, K) à son domaine, s'il existe une fonction $f(x, s)$ nommable (S_m^m, K_0, K) définie sur $U_N(x)\oplus U_{[a,b]_K}(s)$, telle que $|s-c|<\frac{1}{f(p, s)}$, $s\in[a, b]_K$ et $c\in[a, b]_K$ entraînent $|F(s)-F(c)|<\frac{1}{p}$.

De même, on dit que $F(s)$ est *continue* (E_m^m, K_0) *uniformément* sur son domaine, s'il existe une fonction $f(x)$ nommable (E_m^m, K_0) définie sur $U_N(x)$ et telle que $|c-d|<\frac{1}{f(p)}$, $c\in[a, b]_K$ et $d\in[a, b]_K$ entraînent $|F(c)-F(d)|<\frac{1}{p}$.

D'après la définition, quand une fonction $F(x)$ nommable (S_n^n, K_0, K) est continue (S_m^m, K_0, K) sur son domaine, elle est continue (E_m^m, K_0) à chaque point de son domaine. Or, on a le

Théorème 1. *Quand une fonction $F(s)$ continue et définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E_n^n, K_0), est nommable (S_n^n, K_0, K), elle est continue (E_{n+1}^{n+1}, K_0) uniformément sur son domaine.*

Démonstration. On peut supposer, sans perdre la généralité, que $a=0$ et $b=1$, puisque $F(as+b(1-s))$ est définie sur l'intervalle fermé $[0, 1]_K$ et remplit la condition donnée. Dès lors, posons

$$A = C\mathcal{L}\left(\frac{1}{z}-\left|F\left(\frac{x}{y}\right)-F\left(\frac{x+1}{y}\right)\right|\right),$$

et

$$B = S(U_N(y, z), A).$$

Comme A est nommable (E_n^n, K_0), B est nommable (E^n, K_0). Encore $B^{<z>}$ est fini pour tout nombre naturel z. En effet, si $B^{<z_0>}$ est infini, on peut trouver une suite $\{\langle x^{(k)}, y^{(k)}, z_0\rangle\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ nommable (E, K_0) de points telle que

1°, $\langle x^{(k)}, y^{(k)}, z_0\rangle\in A$ $(k = 1, 2, \cdots)$,

2°, $y^{(k)}<y^{(k+1)}$ $(k = 1, 2, \cdots)$.

Encore, on peut supposer, sans perdre la généralité, que la suite $\left\{\frac{x^{(k)}}{y^{(k)}}\right\}$

($k=1, 2, \cdots$) de nombres rationnels soit nommable (E, K_0) et convergente. Posons $c=\lim_{k\to\infty}\frac{x^{(k)}}{y^{(k)}}$. D'après la supposition, c est nommable (E, K_0) et on a $0\leqq c\leqq 1$. Encore, $F(s)$ est continue à ce point c et d'où, il existe un nombre naturel N tel que $|c-s|<\frac{1}{N}$ entraîne $|F(c)-F(s)|<\frac{1}{z_0}$. Or, on peut trouver un nombre naturel l tel que $\left|c-\frac{x^{(l)}}{y^{(l)}}\right|<\frac{1}{N}$ et d'où, on a

$$\left|F(c)-F\left(\frac{x^{(l)}}{y^{(l)}}\right)\right|<\frac{1}{z_0}.$$

C'est contradictoire avec la supposition et par suite, $B^{<z_0>}$ est fini. Or, l'ensemble $G=S(U_N(y, z), B_0)$, où B_0 désigne l'ensemble de tous les points $\langle y, z, w\rangle$ de $U_N(y, z, w)$ tels qu'on ait $\langle y+w, z\rangle\in B$, est nommable ($E^n$, K_0) et donc, $B\frown CG$ est nommable (E^{n+1}_{n+1}, K_0). De plus, il est uniforme par rapport à $U_N(z)$, et $S(U_N(z), B\wedge CG)$ est nommable (E^{n+1}_{n+1}, K_0). D'où, si l'on pose

$$\begin{aligned} f(z) &= 1, && \text{si } (B\frown CG)^{<z>} \text{ est vide,} \\ &= y+1, && \text{si } (B\frown CG)^{<z>} \text{ contient le point } y. \end{aligned}$$

Elle est nommable (E^{n+1}_{n+1}, K_0) et $|c-d|<\frac{1}{f(p)}$, $c\in[a, b]_K$, $d\in[a, b]_K$ entraînent $|F(c)-F(d)|<\frac{1}{p}$, c'est-à-dire, $F(s)$ est continue (E^{n+1}_{n+1}, K_0) uniformément sur son domaine, c.q.f.d.

4. Or, les fonctions nommables (S^n_n, K_0, K) et continues (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0) uniformément sur son domaine, suivant qu'on a $n\geqq 2$ ou bien $n=1$, sont très importantes dans notre considération et nous avons le théorème suivant qui est fondamental dans notre considération, c'est-à-dire,

Théorème 2. *Si une fonction $F(s)$ nommable (S^n_n, K_0, K) et définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E^n_n, K_0), est continue (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0) uniformément sur son domaine, suivant qu'on a $n\geqq 2$ ou bien $n=1$, il existe le nombre $\bar{c}$($\underline{c}$) nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0) (nommable (E_n, K_0) ou bien (E_2, K_0)), tel qu'on ait $F(\bar{c})=\operatorname{bor.sup}_{a\leqq s\leqq b} F(s)$ ($F(\underline{c})=\operatorname{bor.inf}_{a\leqq s\leqq b} F(s)$) et que $F(\bar{c})(F(\underline{c}))$ soit nommable (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0), suivant qu'on a $n\geqq 2$ ou bien $n=1$.*

Démonstration. On peut supposer, sans perdre la généralité, qu'on ait $a=0$ et $b=1$.

D'après le théorème 1 de § 2, il existe une fonction $f(x)$ nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$, définie sur $U_N(x)$ et telle que $|c-d| < \frac{1}{f(p)}$, $c \in [a, b]_K$ et $d \in [a, b]_K$ entraînent $|F(c)-F(d)| < \frac{1}{p}$. Alors, l'ensemble A_1 de tous les points $\langle x, y, z_1, z_2 \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in R\left(F\left(\frac{z_1}{f(z_2)}\right) - \frac{1}{z_2}\right) \quad \text{et} \quad 0 \leqq z_1 \leqq f(z_2)\,,$$

est nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$. En effet, l'ensemble A_2 de tous les points $\langle x, y, z_1, z_2, z_3 \rangle$ tels qu'on ait

$$\langle x, y \rangle \in R\left(F\left(\frac{z_1}{z_3}\right) - \frac{1}{z_2}\right) \quad \text{et} \quad 0 \leqq z_1 \leqq z_3$$

est nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$. Or, on a

$$A_1 = S(U_J(x, y) \oplus U_N(z_1, z_2),\ A_2 \frown \mathcal{M}(f(z_2 - z_3) \oplus U_J(x, y) \oplus U_N(z_1))$$

et par suite, A_1 est nommable (E^n, K_0) ou bien (E^n, K_0). D'où, si l'on pose $A_3 = S(U_J(x, y, z_2), A_1)$, on a

$$R(\underset{a \leqq s \leqq b}{\text{bor. sup.}}\, F(s)) = \overset{\infty}{\underset{z_2=1}{U}} A_3^{\langle z_2 \rangle}\,,$$

et donc, $\underset{a \leqq s \leqq b}{\text{bor. sup.}}\, F(s)$ est nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$.

Or, l'ensemble B_1 de tous les points $\langle x, y, z_1, z_2 \rangle$ tels qu'on ait

$$y\left(F\left(\frac{z_1}{f(z_2)}\right) + \frac{1}{z_2}\right) \geqq x \quad \text{et} \quad 0 \leqq z_1 \leqq f(z_2)$$

est nommable (E_n, K_0) ou bien (E_2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$. En effet, l'ensemble B_2 de tous les points $\langle x, y, z_1, z_2, z_3 \rangle$ tels qu'on ait

$$y\left(F\left(\frac{z_1}{z_3}\right) + \frac{1}{z_2}\right) < x \quad \text{et} \quad 0 \leqq z_1 \leqq z_3$$

est nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$. Or, on a

$$B_1 = CS(U_J(x, y) \oplus U_N(z_1, z_2),\ B_2 \frown \mathcal{M}(f(z_2) - z_3) \oplus U_J(x, y) \oplus U_N(z_1))\,,$$

et par suite, B_1 est nommable (E_n, K_0) ou bien (E_2, K_0). D'où, si l'on pose $B_3 = S(U_J(x, y, z_2), B_1)$, il est encore nommable (E_n, K_0) ou bien (E_2, K_0), d'après le lemme 4 (19, § 3, Chap. II, [19]) et si $\underset{a \leqq s \leqq b}{\text{bor. sup.}} F(s)$ n'est pas rationnelle, on a

$$R(\underset{a \leqq s \leqq b}{\text{bor. sup.}} F(s)) = \bigcap_{z_2=1}^{\infty} B^{<z_2>}$$

et donc, $\underset{a \leqq s \leqq b}{\text{bor. sup.}} F(s)$ est nommable (E_n, K_0) ou bien (E_2, K_0). Par conséquence, $\underset{a \leqq s \leqq b}{\text{bor. sup.}} F(s)$ est nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n = 1$. Puis, posons

$$G(s) = (\underset{a \leqq s \leqq b}{\text{bor. sup.}} F(s)) - F(s).$$

Elle est nommable (S_n^n, K_0, K) ou bien (S_2^2, K_0, K), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n = 1$ et non négative sur chaque point de $[a, b]_K$. De plus, on a $\underset{a \leqq s \leqq b}{\text{bor. inf.}} G(s) = 0$. Or, l'ensemble $D = \mathcal{L}(-G(s))$, c'est-à-dire, celui de tous les points s tels que $G(s) = 0$ est non vide. En effet, les ensembles $C\mathcal{L}\left(G(s) - \frac{1}{k}\right)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ sont ouverts et non vides. D'où, on peut définir une suit $\{a_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ nommable (E, K_0) de nombres rationnelles telle qu'on ait $G(a_k) < \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, \cdots)$. Alors, il existe un nombre a_0 d'accumulation de cette suite et qui est nommable (E, K_0). Il appartient au domaine de $G(s)$ et on a $G(a_0) = 0$. D'où, D n'est pas vide. Posons $\bar{c} = \underset{s \in D}{\text{bor. inf.}}\, s$. Il est nommable (P, K_0) et on a $a \leqq \bar{c} \leqq b$ (41, § 3, Chap. IV, [19]). Or, il remplit notre demande. Pour le démontrer, prenons l'ensemble A de tous les points $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ de $U_N(z_1, z_2, z_3)$ tels qu'on ait

$$G\left(\frac{z_1}{f(z_2)}\right) \leqq \frac{2}{z_2} \quad \text{et} \quad 1 \leqq z_1 \leqq z_3.$$

De même que le cas précédent, il est nommable (E_n, K_0) ou bien (E_2, K_0) et donc $B = CS(U_N(z_2, z_3), A)$ est nommable (E^n, K_0) ou bien $(E^?, K_0)$, suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n = 1$ (19, § 3, Chap. II, [19]). Or, si l'on a $G(0) > 0$, $0 \leqq s \leqq \frac{z_3}{f(z_2)}$ entraîne $G(s) > 0$ pour chaque point $\langle z_2, z_3 \rangle$ de B. En effet, on a $G\left(\frac{z_1}{f(z_2)}\right) > \frac{2}{z_2}$ pour tout nombre naturel z_1 tel que $1 \leqq z_1 \leqq z_3$ et donc, si l'on a $z_1 - 1 < sf(z_2) \leqq z_2$, on a

$$\left| F(s) - F\left(\frac{z_1}{f(z_2)}\right) \right| < \frac{1}{z_2}.$$

D'où, on a

$$G(s) > G\left(\frac{z_1}{f(z_2)}\right) - \frac{1}{z_2} \geqq \frac{2}{z_2} - \frac{1}{z_2} > 0 .$$

Encore, si l'on a $G(0) > 0$, on a

$$R(\bar{c}) = R\left(\underset{<z_2, z_3> \in B}{\text{bor. sup.}} \frac{z_3}{f(z_2)}\right). \tag{1}$$

En effet, si l'on désigne par E le côté droit de (1), on a $R(\bar{c}) \geqq E$. Puis, soit s_0 un nombre réel de $[a, b]_K$, tel qu'on ait $s_0 < \bar{c}$. Il existe alors un point $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ de A tel qu'on ait $s_0 \leqq \frac{z_1}{f(z_2)}$ et d'où, on a $R(\bar{c}) \leqq E$. Par suite, on a (1). Or, comme B est nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0), $R(\bar{c})$ et par suite $\bar{c}$ est nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0) suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$.

Puis, posons $\hat{F}(s) = -F(1-s)$. Alors, d'après les resultats ainsi obtenus, il existe le nombre $\hat{c}$ nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0) tel qu'on ait $\hat{F}(\hat{c}) = \underset{a \leqq s \leqq b}{\text{bor. sup}}\, \hat{F}(s)$ et que $\hat{F}(\hat{c})$ soit nommable (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$. Dès lors, on a $\underset{a \leqq s \leqq b}{\text{bor. inf.}}\, F(s) = F(1-\hat{c})$ et par suite, si l'on pose $\underline{c} = 1-\hat{c}$, il remplit notre demande, c.q.f.d.

Corollaire. *Soit $F(s)$ une fonction nommable (S^n_n, K_0, K), définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E^n_n, K_0), et continue (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0) uniformément sur son domaine, suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$. Alors, elle est bornée sur son domaine.*

Dès lors, on a le

Théorème 3. *Soit $F(s)$ une fonction nommable (S, K_0, K), définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E^n_n, K_0), et continue (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0) uniformément sur son domaine, suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$. Alors, si l'on a $F(a) > 0$ et $F(b) < 0$, il existe un nombre c nommable (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0) de son domaine tel qu'on ait $F(c)=0$, suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$.*

Démonstration. Posons $\bar{c} = \underset{F(s)>0}{\text{bor. sup.}}\, s$ et $\underline{c} = \underset{F(s)<0}{\text{bor. inf.}}\, s$. De même que la démonstration du théorème 2, ils sont nommables (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0) et (E_n, K_0) ou bien (E_2, K_0) respectivement, suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$. De plus, on a $\bar{c} \leqq \underline{c}$. Encore, d'après la continuité de $F(s)$, on a $F(\bar{c}) = F(\underline{c}) = 0$. D'où, si l'on a $\bar{c} = \underline{c}$, posons $c = \bar{c}$ et si l'on a $\bar{c} < \underline{c}$, on désigne par c un nombre rationnel entre $\bar{c}$ et $\underline{c}$. Il remplit notre demande, c.q.f.d.

Corollaire. *Soit $F(s)$ une fonction nommable (S_n^n, K_0, K), définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E_n^n, K_0), et continue (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^4, K_0) uniformément sur son domaine, suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$. Alors, le contre-domaine de $F(s)$ est l'intervalle fermé $[\underline{c}, \bar{c}]_K$ où $\bar{c} = \text{bor. sup.}_{a \leqq s \leqq b} F(s)$ et $\underline{c} = \text{bor. inf.}_{a \leqq s \leqq b} F(s)$.*

Remarque. Si $F(s)$ remplit les conditions du corollaire du théorème 3, il existe un nombre s_0 nommable (E_l^l, K_0), où $l = \max(m, n)+1$, tel qu'on ait $F(s_0) = t_0$ pour tout nombre réel t_0 nommable (E_m^m, K_0) de $[\underline{c}, \bar{c}]_K$.

5. Puis, nous considérons la convergence des suites nommables (S_n^n, K_0, K) de fonctions. Pour une suite $\{F_k(s)\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ nommable (S_n^n, K_0, K) de fonctions définies sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E_n^n, K_0), s'il existe une fonction $f(x, s)$ nommable (S_m^m, K_0, K), définie sur $U_N(x) \oplus U_{[a,b]_K}(s)$ et telle qu'on ait

$$1°, \quad k > f(p, s) \text{ entraîne } |F_k(s) - F_{k+j}(s)| < \frac{1}{p} \quad (j = 1, 2, \cdots),$$

$$2°, \quad f(p, s) < f(p+1, s) \quad (p = 1, 2, \cdots),$$

on dit que la suite $\{F_k(s)\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ de fonctions est *convergente* (S_m^m, K_0, K) sur son domaine. Dès lors, de même que le théorème 1 de § 1, on a le

Théorème 4. *Si une suite $\{F_k(s)\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ nommables (S_n^n, K_0, K) de fonctions définies sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E_n^n, K_0), est convergente sur son domaine, elle est aussi convergente (S_{n+1}^{n+1}, K_0, K) sur son domaine.*

Démonstration. Désignons par A l'ensemble de tous les points $\langle x, y, z, s \rangle$ de $U_N(x, y, z) \oplus U_{[a,b]_K}(s)$ tels qu'on ait $|F_x(s) - F_{x+z}(s)| > \frac{1}{y}$. D'après la définition et le théorème 9 (38, § 2, Chap. IV, [19]), il est nommable (S^n, K_0, K) et donc $B = C(US_N(x, y) \oplus U_{[a,b]_K}(s), A))$ est nommable (S_n, K_0, K). Or, pour chaque nombre naturel y, $B^{<y>}$ n'est pas vide, de même que la démonstration du théorème 1 de § 1. Encore, comme il est nommable (S_{n+1}^{n+1}, K_0, K), il existe un uniformisateur U de B par rapport à $U_N(y) \oplus U_{[a,b]_K}(s)$ et qui est nommable (S_{n+1}^{n+1}, K_0, K) (39, § 2, Chap. IV, [19]). Désignons par $f(y, s)$ la fonction dont l'image géométrique est U. D'après le corollaire du théorème 11 (38, § 2, Chap. IV, [19]), elle est nommable (S_{n+1}^{n+1}, K_0, K) et définie sur $[a, b]_K$. Posons encore $g(y, s) = \sum_{k=1}^{y} f(2k, s)$. D'après le théorème 5 (35, § 2, Chap. IV, [19]), elle est nommable (S_{n+1}^{n+1}, K_0, K) et on a

1°, $k > g(p, s)$ entraîne $|F_k(s) - F_{k+j}(s)| < \frac{1}{p}$ $(j = 1, 2, \cdots)$,

2°, $g(p, s) < g(p+1, s)$,

de même que le théorème 1 de §1. Donc, la suite $\{F_k(s)\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ est convergente (S_{n+1}^{n+1}, K_0, K) sur son domaine, c.q.f.d.

De même, on a le

Théorème 5. *Si une suite* $\{F_k(s)\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ *nommable* (S_n^n, K_0, K) *de fonctions définies sur l'intervalle fermé* $[a, b]_K$, *où* a *et* b *sont nommables* (E_n^n, K), *est convergente* (S_n^n, K_0, K), *sa limite* $\lim_{k\to\infty} F_k(s)$ *est nommable* (S_n^n, K_0, K) *ou bien* (S_2^2, K_0, K), *suivant qu'on a* $n \geqq 2$ *ou bien* $n=1$.

Encore, pour une suite $\{F_k(s)\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ nommable (S_n^n, K_0, K) de fonctions, s'il existe une fonction $f(x)$ nommable (E_m^m, K_0), définie sur $U_N(x)$ et telle qu'on ait

1°, $k > f(p)$ entraîne $|F_k(s) - F_{k+j}(s)| < \frac{1}{p}$ $(j = 1, 2, \cdots)$ sur son domaine,

2°, $f(p) < f(p+1)$,

on dit que la suite $\{F_k(s)\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ est *convergente* (E_m^m, K_0) *uniformément* sur son domaine. Puis, s'il existe une fonction $g(x, y)$ nommable (E_m^m, K_0), définite sur $U_N(x, y)$ et telle qu'on ait $|F_k(c) - F_k(d)| < \frac{1}{p}$ pour deux nombres c et d de son domaine tels que $|c-d| < \frac{1}{g(k, p)}$, on dit que la suite $\{F_k(s)\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ est *continue* (E_m^m, K_0) *uniformément* sur son domaine. Dès lors, on a le

Théorème 6. *Soit* $\{F_k(s)\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ *une suite nommable* (S_n^n, K_0, K) *de fonctions définies sur l'intervalle fermé* $[a, b]_K$, *où* a *et* b *sont nommables* (E_n^n, K_0). *Quand elle est convergente* (E_n^n, K_0) *uniformément sur son domaine et continue* (E_n^n, K_0) *uniformément sur son domaine, sa limite* $\lim_{k\to\infty} F_k(s)$ *est aussi continue* (E_n^n, K_0) *uniformément sur son domaine.*

Démonstration. D'après les suppositions, il existe les fonctions $f(x)$ et $g(x, y)$ nommables (E_n^n, K_0), définies sur $U_N(x)$ et $U_N(x, y)$ respectivement, et telles que $k > f(p)$ entraîne $|F_k(s) - F_{k+j}(s)| < \frac{1}{p}$ $(j=1, 2, \cdots)$ sur son domaine et que $c \in [a, b]_K$, $d \in [a, b]_K$ et $|c-d| < \frac{1}{g(k, p)}$ entraînent $|F_k(c) - F_k(d)| < \frac{1}{p}$.

Posons $F(s)=\lim_{k\to\infty} F_k(s)$ et $h(x)=g(f(3x)+1, 3x)$. D'après la définition, $k>f(p)$ entraîne $|F_k(s)-F(s)|\leqq\frac{1}{p}$ et $h(x)$ est nommable (E_n^n, K_0). Or, si l'on a $k>h(p)$, $c\in[a, b]_K$, $d\in[a, b]_K$ et $|c-d|<\frac{1}{h(p)}$ entraînent

$$|F_q(c)-F_q(d)|<\frac{1}{3p},$$

où $q=f(3p)+1$, et on a

$$|F_q(c)-F(c)|\leqq\frac{1}{3p} \quad \text{et} \quad |F_q(d)-F(d)|\leqq\frac{1}{3p}.$$

D'où, on a

$$|F(c)-F(d)|\leqq|F(c)-F_q(c)|+F_q(c)-F_q(d)|+|F_q(d)-F(d)|<\frac{1}{p},$$

et par suite, $F(s)$ est continue (E_n^n, K_0) uniformément sur son domaine, c.q.f.d.

Or, étant donnée une suite $\{F_k(s)\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ nommable (S_n^n, K_0, K) de fonctions définies sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E_n^n, K_0), on peut définir formellement une série $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(s)$ *nommable* (S_n^n, K_0, K) de fonctions. Prenons les sommes partielles $G_k(s)=F_1(s)+F_2(s)+\cdots+F_k(s)$ $(k=1, 2, \cdots)$. De même que les séries de nombres, la suite $\{G_k(s)\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ de fonctions est nommables (S_n^n, K_0, K) ou bien (S_2^2, K_0, K), suivant qu'on a $n\geqq 2$ ou bien $n=1$, et on dit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(s)$ est *convergente* (S_m^m, K_0, K) sur son domaine, si la suite $\{G_k(s)\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ de fonctions est convergente (S_m^m, K_0, K) sur son domaine. Alors, on a

$$\lim_{k\to\infty} G_k(s) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(s)$$

sur son domaine, et sa somme $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(s)$ est nommable (S_n^n, K_0, K) ou bien (S_{n+1}^{n+1}, K_0, K), suivant qu'on a $n\geqq m\geqq 2$ ou non.

Encore, si la suite $\{G_k(s)\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ de fonctions est convergente (E_m^m, K_0) uniformément sur son domaine, on dit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(s)$ est *convergente* (E_m^m, K_0) *uniformément* sur son domaine. Dès lors, on a le

Théorème 7. *Soient* $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(s)$ *une série nommable* (S_n^n, K_0, K) *de fonctions définies sur l'intervalle fermé* $[a, b]_K$, *où* a *et* b *sont nommables* (E_n^n, K_0), *et* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *une série nommable* (E_m^m, K_0) *de nombres positifs, qui est convergente* bien (S_2^2, K_0, K) sur son domaine, suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$, c'est-à-dire,

Lemme 1. *Soit $F(s)$ une fonction nommable (S_n^n, K_0, K) et définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E_n^n, K_0). Si elle est différentiable (E_n^n, K) sur son domaine, elle est continue (S_n^n, K_0, K) ou bien (S_2^2, K_0, K) sur son domaine, suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$, et sa dérivée $F'(s)$ est nommable (S_n^n, K_0, K).*

Or, on a le

Théorème 1. (de M. Rolle). *Soit $F(s)$ une fonction nommable (S_n^n, K_0, K), définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E_n^n, K_0), et telle qu'on ait $F(a)=F(b)=0$. Alors, si elle est continue (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0) uniformément sur son domaine, suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$, et différentiable (E_n^n, K_0) à chaque point de $\pi(K_0)$ qui appartient à $[a, b]_K$, il existe un nombre c nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0) de $[a, b]_K$ tel qu'on ait*

1°, *elle est différentiable (E_n^n, K_0) à c,*

2°, $F'(c) = 0$ et $a < c < b$,

suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$.

Démonstration. D'après la supposition, s'il existe un point c' de $[a, b]_K$ tel qu'on ait $F(c') \neq 0$, on a $\underset{a \leqq s \leqq b}{\text{bor. sup.}} F(s) \neq 0$, ou bien $\underset{a \leqq s \leqq b}{\text{bor. inf.}} F(s) \neq 0$. Or, si l'on a $\underset{a \leqq s \leqq b}{\text{bor. sup.}} F(s) \neq 0$, il existe un nombre c nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0) de $[a, b]_K$ tel qu'on ait $F(c) = \underset{a \leqq s \leqq b}{\text{bor. sup.}} F(s)$, d'après le théorème 2 de § 2. Dès lors, on a

$$\frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leqq 0 \text{ ou bien } \geqq 0,$$

suivant qu'on a $h>0$ ou bien $h<0$ et donc, on a $F'(c)=0$.

De même, si l'on a $\underset{a \leqq s \leqq b}{\text{bor. inf.}} F(s) \neq 0$, on a $\underset{a \leqq s \leqq b}{\text{bor. sup.}} (-F(s)) \neq 0$ et donc, il existe un nombre c nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0) de $[a, b]_K$ tel qu'on ait $F'(c)=0$ et $a<c<b$, c.q.f.d.

Corollaire (*Théorème de la valeur moyenne*). *Si une fonction $F(s)$ nommable (S_n^n, K_0, K) définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E_n^n, K_0), est continue (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0) uniformément sur son domaine et différentiable (E_n^n, K_0) à chaque point de $\pi(K_0)$ qui appartient à $[a, b]_K$, il existe un nombre θ nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0) tel qu'on ait $0<\theta<1$ et*

$$F(b) = F(a)+F'(a+\theta(b-a))(b-a), \tag{1}$$

(E^m_m, K_0). *Alors, si l'on a* $|F_k(s)| < c_k$ $(k=1, 2, \cdots)$ *sur son domaine, la série* $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(s)$ *est convergente* (E^m_m, K_0) *uniformément sur son domaine.*

§ 3. La differentiation

6. Soient $F(s)$ une fonction nommable (S^n_n, K_0, K), finie et définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, oú a et b sont nommable (E^n_n, K_0) et c un nombre réel de son domaine. Dès lors, on dit que $F(s)$ est *différentiable* (E^m_m, K_0) à ce point c, s'il existe une fonction $f(x)$ nommable $(E^m_m, K_0(c))$, définie sur $U_N(x)$ et telle que $|s_k - c| < \frac{1}{f(p)}$ et $s_k \in [a, b]_K$ $(k=1, 2)$ entraînent

$$\left| \frac{E(s_1)-F(c)}{s_1-c} - \frac{F(s_2)-F(c)}{s_2-c} \right| < \frac{1}{p}$$

et que $F(s)$ est *différentiable* (S^m_m, K_0, K) sur son domaine, s'il existe une fonction $f(x, s)$ nommable (S^m_m, K_0, K), définie sur $U_N(x) \oplus U_{[a,b]_K}(s)$ et telle que $s_k \in [a, b]_K$ et $0 < |s_k - s| < \frac{1}{f(p, s)}$ $(k=1, 2)$ entraînent

$$\left| \frac{F(s_1)-F(s)}{s_1-s} - \frac{F(s_2)-F(s)}{s_2-s} \right| < \frac{1}{p}. \tag{1}$$

D'après la définition, si $F(s)$ est différentiable (E^n_n, K_0) à ce point c, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = F'(c),$$

et $F'(c)$ est nommable $(E^n_n, K_0(c))$. De même, si elle est différentiable (S^n_n, K_0, K) sur son domaine, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(s+h)-F(s)}{h} = F'(s)$$

sur son domaine et $F'(s)$ est nommable (S^n_n, K_0, K). Encore, il existe une fonction $f(x, s)$ nommable (S^n_n, K_0, K), définie sur $U_N(x) \oplus U_{[a,b]}(s)$ et telle qu'on ait (1). D'où, $0 < |b| < \frac{1}{f(p, s)}$ entraîne

$$\left| \frac{F(s+h)-F(s)}{h} - F'(s) \right| < \frac{1}{p},$$

et donc on a $|F(s+h)-F(s)| < \frac{1}{p}$, si l'on a $|h| < \frac{1}{g(p, s)}$ et $g(p, s) = f(p, s) + p[|F'(s)|] + p + 1$. Par suite, $F(s)$ est continue (S^n_n, K_0, K) ou *sur l'intervalle fermé* $[a, b]_K$, *où* a *et* b *sont nommables* (E_n^n, K_0), *continue* (E_n^n, K_0) *ou bien* (E_2^2, K_0) *uniformément sur son domaine, suivant qu'on a* $n \geqq 2$ *ou bien* $n=1$, *et différentiable* (E_n^n, K_0) *à chaque point de* $\pi(k_0)$ *qui appartient à* $[a, b]_K$. *Alors, si l'on a* $F'(s)>0$ *pour chaque point de* $\pi(K_0)$ *qui appartient à* $[a, b]_K$, $F(s)$ *est monotone croissante au sens strict, c'est-à-dire, pour deux points* c *et* d *de* $[a, b]_K$, *tel que* $c<d$, *on a* $F(c)<F(d)$.

7. Or, pour discuter la différentiabilité des séries nommables (S, K_0, K) de fonctions, posons les définitions. Soit $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(s)$ une série nommable (S_n^n, K_0, K) de fonctions définies sur un même domaine. Dès lors, on dit que $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(s)$ est différentiable (E_m^m, K_0) *terme en terme* à un point c de son domaine, s'il existe une fonction $f(x, y)$ nommable $(E_m^m, K_0(c))$, définie sur $U_N(x, y)$ et telle que $|s_k-c|<\dfrac{1}{f(p, q)}$ et $s_k \in [a, b]_K$ $(k=1, 2)$ entraînent

$$\left|\frac{F_p(s_1)-F_p(c)}{s_1-c}-\frac{F_p(s_2)-F_p(c)}{s_2-c}\right|<\frac{1}{q}$$

et que $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(s)$ est différentiable (S_m^m, K_0, K) *terme en terme* sur son domaine, s'il existe une fonction $f(x, y, s)$ nommable (S_m^m, K_0, K), définie sur $U_N(x, y) \oplus U_{[a,b]_K}(s)$ et telle que $0<|s_k-s|<\dfrac{1}{f(p, q, s)}$ et $s_k \in [a, b]_K$ $(k=1, 2)$ entraînent

$$\left|\frac{F_p(s_1)-F_p(s)}{s_1-s}-\frac{F_p(s_2)-F_p(s)}{s_2-s}\right|<\frac{1}{q}.$$

Dès lors, on a le

Théorème 4. *Soit* $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(s)$ *une série nommable* (S_n^n, K_0, K) *de fonctions définies sur l'intervalle fermé* $[a, b]_K$, *où* a *et* b *sont nommables* (E_n^n, K_0) *et telle qu'on ait*

1°, $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(s)$ *est différentiable* (E_n^n, K_0) *terme en terme sur son domaine*,

2°, $\sum_{k=1}^{\infty} F'_k(s)$ *est convergente* (E_n^n, K_0) *uniformément sur* $[a, b]_K$,

3°, $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(a)$ *est convergente* (E_n^n, K_0).

Alors, la série $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(s)$ *est convergente* (E_n^n, K_0) *uniformément sur son domaine et différentiable* (E_n^n, K_0) *ou bien* (E_2^2, K_0) *sur son domaine, suivant qu'on a* $n \geqq 2$ *ou bien* $n=1$. *De plus, on a* *suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$.*

En effet, prenons la fonction $G(s)=ps+q$ telle qu'on ait

$$p = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} \quad \text{et} \quad q = \frac{bF(a)-aF(b)}{b-a},$$

et posons $H(s)=F(s)-G(s)$. Elle est nommable (S_n^n, K_0, K) et on a $H(b) = H(a)=0$. De plus, elle est continue (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0) uniformément sur son domaine et différentiable (E_n^n, K_0) à chaque point de $\pi(K_0)$ qui appartient à $[a, b]_K$. Donc, d'après le théorème 1, il existe un nombre c nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0) de $[a, b]_K$ tel qu'on ait

1°, elle est différentiable (E_n^n, K_0) à c,

2°, $H'(c) = 0$ et $a < c < b$.

Or, on a $H'(s)=F'(s)-p$ et par suite, on a $p=F'(c)$. D'où, si l'on pose $\theta = \dfrac{c-a}{b-a}$, il remplit notre demande, c.q.f.d.

Encore, en se servant du théorème 1, on peut démontrer le

Théorème 2. *Soit $F(s)$ une fonction nommable (S_n^n, K_0, K), définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E_n^n, K_0), continue (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0) uniformément sur son domaine, suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$ et différentiable (E_n^n, K_0) à chaque point de $\pi(K_0)$ qui appartient à $[a, b]_K$. Alors, pour qu'elle est constante sur son domaine, il faut et il suffit qu'on ait $F'(s)=0$ sur chaque point de $\pi(K_0)$ qui appartient à $[a, b]_K$.*

En effet, il est évident que la condition donnée est nécessaire. Puis, supposons que $F(s)$ remplit la condition donnée. Alors, pour un nombre h positif et nommable (E_n^n, K_0) tel qu'on ait $h < b-a$, on a

$$F(a+h) = F(a)+F'(c)h = F(a) \quad \text{et} \quad a < c < a+h$$

pour un nombre c nommable (E, K_0). Or, d'après la supposition, $F(s)$ est continue sur son domaine. D'où, on a $F(s)=F(a)$ sur son domaine, c'est-à-dire, la condition donnée est suffisante, c.q.f.d.

Corollaire. *Soient $F(s)$ et $G(s)$ deux fonctions nommables (S_n^n, K_0, K), définies sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$ où a et b sont nommables (E_n^n, K_0), continues (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0) uniformément sur son domaine, suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$ et différentiable (E_n^n, K_0) à chaque point de $\pi(k_0)$ qui appartient à $[a, b]_K$. Dès lors, si l'on a $F(s)=G(s)$ sur chaque point de $\pi(K_0)$ qui appartient à $[a, b]_K$, on a $F(s)=G(s)$ sur son domaine.*

Théorème 3. *Soit $F(s)$ une fonction nommable (S_n^n, K_0, K), définie*

$$(\sum_{k=1}^{\infty} F_k(s))' = \sum_{k=1}^{\infty} F'_k(s)\,.$$

Démonstration. Posons $S_k(s) = \sum_{j=1}^{k} F_j(s)$ et $\hat{S}_k(s) = \sum_{j=1}^{k} F'_i(s)$ $(k=1, 2, \cdots)$. D'après la supposition, il existe deux fonctions $f_k(x)$ $(k=1, 2)$ nommables (E_n^n, K_0) définies sur $U_N(x)$ et telles qu'on ait

$$|\hat{S}_{p+k}(s) - \hat{S}_p(s)| < \frac{1}{q} \quad (k = 1, 2, \cdots)\,, \text{ si } p > f_1(q)\,,$$

$$|S_{p+k}(a) - S_p(a)| < \frac{1}{q} \quad (k = 1, 2, \cdots)\,, \text{ si } p > f_2(q)\,.$$

Alors, si un point s de $[a, b]_K$ est nommable (E, K_0), on a

$$\begin{aligned} |S_{p+k}(s) - S_p(s)| &\leq |S_{p+k}(a) - S_p(a)| \\ &\quad + |s-a|\,|\hat{S}_{p+k}(a+\theta(s-a)) - \hat{S}_p(a+\theta(s-a))| \\ &< \frac{1}{q} + (b-a)\frac{1}{q} = \frac{1}{q}(1+b-a) \quad (k = 1, 2, \cdots)\,, \end{aligned}$$

oú $p > f_1(q) + f_2(q)$ et θ est un nombre réel et nommable (E, K_0) tel que $0 < \theta < 1$. Or, d'après la condition 1°, $F_k(s)$ $(k=1, 2, \cdots)$ sont continues sur $[a, b]_K$ et donc, $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(s)$ est convergente (E_n^n, K_0) uniformément sur son domaine.

Puis, considérons la différentiabilité de séries $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(s)$, Posons $S(s) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(s)$ et $\hat{S}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} F'_k(s)$. Pour un nombre c nommable (E, K_0) de $[a, b]_K$, on peut définir une fonction $f(x, y)$, nommable (E_n^n, K_0) définie sur $U_N(x, y)$, et telle que $0 < |s-c| < \dfrac{1}{f(p, q)}$ et $s \in [a, b]_K$ entrainent

$$\left| \frac{F_p(s) - F_p(s)}{s-c} - F'_p(c) \right| < \frac{1}{q}$$

et donc, si l'on pose $g(x, y) = \sum_{k=1}^{x} f(k, xy)$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{S_p(s) - S_p(c)}{s-c} - \hat{S}_p(c) \right| &\leq \sum_{k=1}^{p} \left| \frac{F_k(s) - F_k(c)}{s-c} - F'_k(c) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{pq} = \frac{1}{q}\,, \quad \text{si} \quad |s-c| < \frac{1}{g(p, q)}\,. \end{aligned}$$

Encore, $g(x, y)$ est nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), suivant que $n \geq 2$ ou bien $n=1$.

Puis, $p > f_1(q)$ entraîne

$$|(S_{p+k}(c+h)-S_p(c+h))-(S_{p+k}(c)-S_p(c))|$$
$$=|\hat{S}_{p+k}(c+\theta h)-\hat{S}_p(c+\theta h)|\,|h| < \frac{1}{q}|h| \quad (k=1, 2, \cdots),$$

où h et θ sont nommables (E, K_0) et donc

$$\left|\frac{S(c+h)-S(c)}{h}-\frac{S_p(c+h)-S_p(c)}{h}\right| < \frac{1}{q}.$$

Encore, on a

$$|\hat{S}_p(c)-\hat{S}(c)| \leqq \frac{1}{q} \quad \text{si} \quad p > f_1(q).$$

Par suite, si l'on a $p > f_1(q)+f_2(q)$ et $|h| < \dfrac{1}{g(p, q)}$, on a

$$\left|\frac{S(c+h)-S(c)}{h}-\hat{S}(c)\right|$$
$$\leqq \left|\frac{S(c+h)-S(c)}{h}-\frac{S_p(c+h)-S_p(c)}{h}\right|$$
$$+\left|\frac{S_p(c+h)-S_p(c)}{h}-\hat{S}_p(c)\right|+|\hat{S}_p(c)-\hat{S}(c)|$$
$$< \frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\frac{1}{q}=\frac{3}{q}$$

et d'où, $S(s)$ est différentiable (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0) à c et on a $S'(c)=\hat{S}(c)$, c.q.f.d.

8. Maintenant, nous considérons la différentiation d'ordre supérieur de fonctions. Soit $F(s)$ une fonction nommable (S^n_n, K_0, K) et définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E^n_n, K_0). Si $F(s)$ est différentiable (S^m_m, K_0, K) sur son domaine, sa première dérivée $F'(s)$ est nommable (S^{m+1}_{m+1}, K_0, K). Puis, supposons que sa k-ième dérivée $F^{(k)}(s)$ soit existante et qu'elle soit nommable (S^{m+k}_{m+k}, K_0, K). Alors, si $F^{(k)}(s)$ est différentiable (E^{m+k}_{m+k}, K_0) sur son domaine, $F^{(k+1)}(s)$ est nommable $(S^{m+k+1}_{m+k+1}, K_0, K)$. Donc, d'après l'induction mathématique, on a le

Théorème 5. *Soit $F(s)$ une fonction nommable (S^n_n, K_0, K) et définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E^m_m, K_0). Quand il existe sa k-ième dérivée $F^{(k)}(s)$, elle est nommable (S^{n+k}_{n+k}, K_0, K).*

§ 4. Les séries de Taylor

9. Pour discuter les séries de Taylor, nous considérons d'abord les series de puissances. Elles sont très importantes dans le calcul infinitésimal et définies en se servant des fonctions nommables (E, K_0). En effet, étant donnée une fonction $F(x)$ nommable (E_n^n, K_0), définie sur $U_{N_0}(x)$ et dont les valeurs sont nommables (E, K_0), on peut définir une série $\sum_{k=0}^{\infty} F(k)s^k$ de fonctions, où s est une variable sur K. Elle est désignée par $P(F, s)$ et appelée une *série nommable* (S_n^n, K_0, K) *de puissance.* Encore, $F(k)$ est appelé le *coefficient* de s^k, et designé souvent par a_k, b_k, etc..

Or, d'après la définition, la suite $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$ $(k=1, 2, \cdots)$, où $a_k=F(k)$, de nombres non négatifs est nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), suivant qu'on a $n\geqq 2$ ou bien $n=1$, et donc son *rayon de convergence*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

est infini ou bien fini et nommable (E^{n+1}, K_0) ou bien (E^3, K_0), suivant qu'on a $n\geqq 2$ ou bien $n=1$. Maintenant, nous supposons que R soit positif. Prenons un nombre r rationnel, positif et tel que $r<R$. Dès lors, on a $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}<r^{-1}$ et par suite, pour un nombre r' rationnel, positif et tel que $r<r'<R$, il existe un nombre naturel N tel qu'on ait $\sqrt[k]{|a_k|}<\frac{1}{r'}$, c'est-à-dire, $|a_k|r'^k<1$ $(k\leqq N)$. D'où, si l'on a $|a|\leqq r$, on a

$$|a_k s^k|\leqq |a_k|r'^k\left(\frac{|s|}{r'}\right)^k \leqq \left(\frac{r}{r'}\right)^k \quad (k\geqq N),$$

et, pour une fonction

$$f(x) = \left[\frac{\log x+\log r'-\log (r'-r)}{\log r'-\log r}\right]+N,$$

$k>f(p)$ entraîne

$$|S(F, k, s)-S(F, k+j, s)|<\frac{1}{p} \quad (j = 1, 2, \cdots),$$

où $S(F, x, s)= \sum_{k=0}^{x} a_k s^k$. D'où, on a le

Lemme 1. *Supposons qu'on ait* $R\neq 0$. *Alors, pour un nombre rationnel* r *tel que* $0<r<R$, *la série de puissances* $P(F, s)$ *converge uniformément* (E_2^2, R) *sur l'intervalle* $[-r, +r]_K$.

D'où, on a le

Théorème 1. *Si le rayon de convergence* R *d'une série de puissances* $P(F, s)$ *nommable* (S_n^n, K_0, K) *est aussi nommable* (E_n^n, K_0), *elle représente une fonction nommable* (S_n^n, K_0, K) *ou bien* (S_2^2, K_0, K) *sur l'intervalle* *ouvert* $(-R, R)_K$, *suivant qu'on a* $n \geqq 2$ *ou bien* $n=1$.

Maintenant, nous considérons les opérations élémentaires sur les séries de puissances. Pour deux fonctions $F_k(x)$ $(k=1, 2)$ nommables (E_n^n, K_0), définies sur $U_N(x)$ et dont les valeurs sont nommables (E_n^n, K_0), considérons les séries de puissances $P(F_k, s)$ $(k=1, 2)$ dont le rayon de convergence est R_k. D'après la définition, on a

$$P(F_1, s) \pm P(F_2, s) = P(F_1 \pm F_2, s),$$

$$cP(F_1, s) = F(cF_1, s), \quad \frac{d}{ds} P(F_1, s) = P(G_1, s),$$

où c est un nombre de $\pi(K_0)$ et $G_1(x)=(x+1)F_1(x+1)$. D'où, on a le

Lemme 2. *Si les séries de puissances* $P(F_k, s)$ $(k=1, 2)$ *sont nommables* (S_n^n, K_0, K), *la somme, la différence, le produit par un nombre réel et nommable* (E_n^n, K_0) *et la différentiation de ces séries sont aussi nommables* (S_n^n, K_0, K).

Encore, on a le

Théorème 2. *Si les séries de puissances* $P(F_k, s)$ $(k=1, 2)$ *sont nommables* (S_n^n, K_0, K), *le produit* $P(F_1, s)P(F_2, s)$ *est aussi nommable* (S_n^n, K_0, K) *ou bien* (S_2^2, K_0, K), *suivant qu'on a* $n \geqq 2$ *ou bien* $n=1$.

En effet, si l'on pose

$$G(k) = \sum_{j=0}^{k} F_1(j) F_2(k-j),$$

$G(x)$ est nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0) suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$, d'après le lemme 1 de § 1. Donc, $P(G, s)$ est nommable (S_n^n, K_0, K) ou bien (S_2^2, K_0, K) suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$, et on a $P(G, s)=P(F_1, s)P(F_2, s)$, c.q.f.d.

Maintenant, nous considérons les séries de Taylor.

Théorème 3. *Soit* $F(s)$ *une fonction nommable* (S_n^n, K_0, K) *définie sur l'intervalle fermé* $[a, b]_K$, *où* a *et* b *sont nommables* (E_n^n, K_0) *et telle que sa* k-*ième dérivée* $F^{(k)}(s)$ $(k=0, 1, 2, \cdots, p-1)$ *soient différentiables* (S_n^n, K_0, K) *sur son domaine. Si sa* p-*ième dérivée* $F^{(p)}(s)$ *est continue* (E_n^n, K_0) *ou bien* (E_2^2, K_0) *uniformément sur son domaine et différentiable* (E_n^n, K_0) *à chaque point de* $\pi(K_0)$ *qui appartient à* $[a, b]_K$, *il existe un nombre* θ *nommable* (E^n, K_0) *ou bien* (E^2, K_0) *suivant qu'on a* $n \geqq 2$ *ou bien* $n=1$ *et tel que* $0 < \theta < 1$ *et*

$$F(b)=\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}F^{(k)}(a)(b-a)^k+R_p\,,$$
$$R_p=\frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(a+\theta(b-a))(b-a)^{p+1}\,. \tag{1}$$

Démonstration. Posons

$$G(s)=F(b)-\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}F^{(k)}(s)(b-s)^k\,.$$

Elle est nommable $(S_n^n,\ K_0,\ K)$ et différentiable $(E_n^n,\ K_0)$ à chaque point de $\pi(K_0)$ qui appartient à $[a,\ b]_K$. Or, on a

$$G'(s)=\frac{-1}{p!}F^{(p+1)}(s)(b-s)^p\,,$$

et donc, si l'on pose

$$H(s)=G(s)-\frac{(b-s)^{p+1}}{(b-a)^{p+1}}G(a)\,,$$

on a $H(a)=H(b)=0$. De plus, elle est continue $(E_n^n,\ K_0)$ ou bien $(E_2^2,\ K_0)$ uniformément sur son domaine et différentiable $(E_n^n,\ K_0)$ à chaque point de $\pi(K_0)$ qui appartient à $[a,\ b]_K$. D'où, d'après le corollaire du théorème 1 de § 3, il existe un nombre θ nommable $(E^n,\ K_0)$ ou bien $(E^2,\ K_0)$ tel que $0<\theta<1$ et $H'(s+\theta(b-a))=0$. Dès lors, on a (1), c.q.f.d.

Corollaire 1. *Soit $F(s)$ une fonction nommable $(S_n^n,\ K_0,\ K)$, définie sur l'intervalle fermé $[-a,\ a]_K$, où a est positif et nommable $(E_n^n,\ K_0)$ et telle que sa k-ième dérivée $F^{(k)}(s)$ $(k=0,1,2,\cdots,p-1)$ soient différentiables $(S_n^n,\ K_0,\ K)$ sur son domaine. Si sa p-ième dérivée $F^{(p)}(s)$ est continue $(E_n^n,\ K_0)$ ou bien $(E_2^2,\ K_0)$ uniformément sur son domaine et diférentiable $(E_n^n,\ K_0)$ à chaque point de $\pi(K_0)$ qui appartient à $[-a,\ a]_K$, il existe un nombre θ nommable $(E^n,\ K_0)$ ou bien $(E^2,\ K_0)$ suivant qu'on a $n\geqq 2$ ou bien $n=1$, tel que $0<\theta<1$ et que*

$$F(s)=\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}F^{(k)}(0)\,s^k+R_p\,,\quad R_p=\frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(\theta s)\,s^{p+1}\,.$$

Corollaire 2. *Soit $F(s)$ une fonction nommable $(S_n^n,\ K_0,\ K)$, définie sur l'intervalle fermé $[-a,\ a]_K$, où a est positif et nommable $(E_n^n,\ K_0)$. Alors, s'il existe une fonction $G(x,\ s)$ nommable $(S_n^n,\ K_0,\ K)$ définie sur $U_{N_0}(x)\oplus U_{[a,b]K}(s)$ et un nombre naturel M, tels qu'on ait*

1°, $G(0,\ s)=F(s)$, *et* $G(x,\ s)$ *est différentiable sur son domaine*,

2°, $G(k+1,\ s)=G'(k,\ s)\quad (k=0,1,2,\cdots)$,

3°, $|G(x,\ s)|<M$ *sur son domaine*,

la série de puissances $F(G_1(x, 0),s)$, *où* $G_1(x, s)=\frac{1}{x!}G(x, s)$, *est convergente* (E^n_n, K_0) *ou bien* (E^2_2, K_0) *uniformément sur son domaine, suivant qu'on a* $n\geqq 2$ *ou bien* $n=1$ *et on a* $F(s)=F(G_1(x, 0),s)$ *sur son domaine.*

§ 5. L'intégrale de Riemann.

10. Maintenant, nous considérons l'intégrale de Riemann des fonctions nommables (S, K_0, K). Soit $[a, b]_K$ l'intervalle fermé où a et b sont nommables (E^n_n, K_0). Alors, une suite finie $\langle c_0, c_1, \cdots, c_p\rangle$ de points de $[a, b]_K$ telle que $c_0=a, c_p=b$ et $c_{k-1}<c_k$ $(k=1, 2, \cdots, p)$, est appelée une *division* de $[a, b]_K$, c_k son *point de divison* et p son *ordre*. Encore, si c_k $(k=0, 1, \cdots, p)$ sont nommables (E^m_m, K_0), on dit qu'elle est *nommable* (E^m_m, K_0).

Puis, pour deux divisions $\Delta_k=\langle c^{(k)}_0, c^{(k)}_1, \cdots, c^{(k)}_{p_k}\rangle$ $(k=1, 2)$ de $[a, b]_K$, si chaque point de Δ_1 appartient à Δ_2, on dit que Δ_2 est une *sous-division* de Δ_1 et on désigne ce fait par $\Delta_2\subseteqq\Delta_1$, ou bien $\Delta_1\supseteqq\Delta_2$. Encore, si l'on a $\Delta_2\subseteqq\Delta_1$ et $\Delta_1\subseteqq\Delta_2$ en même temps, on pose $\Delta_1=\Delta_2$ et on dit que ces divisions sont *égales* l'une à l'autre. Encore, pour une division $\Delta=\langle c_0, c_1, \cdots, c_p\rangle$ de $[a, b]_K$, on pose

$$|\Delta| = \text{bor. sup. } (c_1-c_0,\ c_2-c_1, \cdots, c_p-c_{p-1})\,,$$

et on l'appèle le *norme* de Δ. D'après la définition, $\Delta_1\supseteqq\Delta_2$ entraîne $|\Delta_1|\geqq|\Delta_2|$.

Or, soit $F(s)$ une fonction nommable (S^n_n, K_0, K) et définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E^n_n, K_0). Alors, pour une division $\Delta=\langle c_0, c_1, \cdots, c_p\rangle$ de $[a, b]_K$, posons

$$\Sigma_\Delta = \sum_{k=1}^{p} M_k(c_k-c_{k-1}) \quad \text{et} \quad \sigma_\Delta = \sum_{k=1}^{p} m_k(c_k-c_{k-1})\,,$$

où M_k et m_k désignent respectivement la bornée supérieure et celle inférieure de $F(s)$ sur $[c_{k-1}, c_k]_K$. Dès lors, on a

$$0\leqq \Sigma_\Delta-\sigma_\Delta\leqq M(b-a)\,,$$

où $M=\underset{\langle k\rangle}{\text{bor. sup.}}\,(M_k-m_k)$. Encore, pour une suite $\langle F(d_1), F(d_2), \cdots, F(d_p)\rangle$ de nombres réels telle qu'on ait $d_k\in[c_{k-1}, c_k]$ $(k=1, 2, \cdots, p)$, on pose

$$I_\Delta = \sum_{k=1}^{p} F(d_k)(c_k-c_{k-1})$$

et appelons-la la *somme moyenne* de $F(s)$ sur $[a, b]_K$. Dès lors, on a $\sigma_\Delta\leqq I_\Delta\leqq\Sigma_\Delta$.

Or, s'il existe une fonction $f(x)$ nommable (E_m^m, K_0), définie sur $U_N(x)$ et telle que $|\Delta_k| \leqq \dfrac{1}{f(q)}$ $(k=1, 2)$ entraîne

$$|I_{\Delta_1} - I_{\Delta_2}| < \frac{1}{q},$$

on dit que $F(s)$ est *intégrable* (E_m^m, K_0) sur $[a, b]_K$, et dans ce cas, il existe un nombre réel I tel que $|\Delta| < \dfrac{1}{f(q)}$ entraîne $|I - I_\Delta| \leqq \dfrac{1}{q}$. C'est *l'intégrale définie de Riemann* de $F(s)$ sur $[a, b]_K$, c'est-à-dire,

$$I = \int_a^b F(s)\, ds.$$

Or, on a le

Théorème 1. *Quand une fonction $F(s)$ nommable (S_n^n, K_0, K) et définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E_n^n, K_0), est intégrable (E_n^n, K_0) sur $[a, b]_K$, son l'intégrale définie $\int_a^b F(s)\, ds$ est nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$.*

Démonstration. Prenons une fonction $\varphi(x, y)$ nommable (E_n^n, K_0) définie sur $D = \mathcal{L}(x-y) \frown U_{N_0}(x, y)$ et telle qu'on ait

$1°$, $\varphi(x, 0) = a, \varphi(x, x) = b$,

$2°$, $\varphi(x, y-1) < \varphi(x, y)$,

et posons $\Delta_k = \langle \varphi(k, 0), \varphi(k, 1), \cdots, \varphi(k, k) \rangle$ $(k=1, 2, \cdots)$. Alors, nous avons une suite $\{\Delta_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ *nommable* (E_n^n, K_0) de divisions de $[a, b]_K$. Encore, quand elle remplit les conditions

$3°$, $\Delta_k \supseteqq \Delta_{k+1}$ $(k=1, 2, \cdots)$,

$4°$, $\lim\limits_{k \to \infty} |\Delta_k| = 0$,

on dit que la suite $\{\Delta_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ est *régulière*.

Maintenant, supposons qu'elle est nommable (E_n^n, K_0) et régulière. Alors, on voit sans peine que la suite $\{|\Delta_k|\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ de normes est nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$, et donc, il existe une fonction $f(x)$ nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), définie sur $U_N(x)$ et telle que $k > f(p)$ entraîne $|\Delta_k| < \dfrac{1}{p}$.

Puis, posons

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2}((\varphi(x, y-1) + \varphi(x, y)) \quad (y = 1, 2, \cdots, x)$$

et

$$I_{\Delta_k} = \sum_{j=1}^{k} F(\psi(k, j))(\varphi(k, j) - \varphi(k, j-1)) .$$

Alors, la suite $\{I_{\Delta_k}\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ de nombres réels est nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), d'après le lemme 1 de §1.

Or, comme $F(s)$ est intégrable (E_n^n, K_0) sur $[a, b]_K$, il existe une fonction $g(x)$ nommable (E_n^n, K_0), définie sur $U_N(x)$ et telle que $|\Delta^{(k)}| < \frac{1}{g(p)}$ $(k=1, 2)$ entraîne $|I_{\Delta'} - I_{\Delta''}| < \frac{1}{p}$, et d'où, si l'on pose $h(x) = \sum_{k=1}^{k} f(g(k))$, elle est nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$. Encore, on a

1°, $k > h(p)$ entraîne $|I_\Delta - I_{\Delta k+j}| < \frac{1}{p}$ $(j = 1, 2, \cdots)$.

En effet, $k+j > k \geqq h(p) \geqq f(g(p))$ entraîne $|\Delta_k| < \frac{1}{g(p)}$ et $|\Delta_{k+j}| < \frac{1}{g(p)}$. Donc, on a $|I_{\Delta_k} - I_{\Delta k+j}| < \frac{1}{p}$ $(j=1, 2, \cdots)$.

2°, $h(p) < h(p+1)$ $(p = 1, 2, \cdots)$.

D'où, la suite $\{I_{\Delta_k}\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ de nombres réels est convergente (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), et par suite, la limite $\lim_{k\to\infty} I_{\Delta_k}$ est nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), Or, on a $\int_a^b F(s)\, ds = \lim_{k\to\infty} I_{\Delta_k}$ et donc, l'intégrale définie de Riemann de $F(s)$ sur $[a, b]_K$ est nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$, c.q.f.d.

Théorème 2. *Quand une fonction $F(s)$ nommable (S_n^n, K_0, K) et définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E_n^n, K_0), est intégrable (E_m^m, K) sur $[a, b]_K$, son intégrale définie $\int_a^b F(s) ds$ est nommable (E_{n+1}^{n+1}, K_0).*

Démonstration. De même que la démonstration du théorème 1, prenons une suite $\{\Delta_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ nommable (E_n^n, K_0) et régulière de divisions de $[a, b]_k$. Il existe alors une fonction nommable $(E_m^m, K_0) f(x)$ définie sur $U_N(x)$ et telle que $k > f(p)$ entraîne $|\Delta_k| < \frac{1}{p}$.

Puis, prenons la suite $\{I_{\Delta_k}\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ des sommes moyennes. Comme $F(s)$ est intégrable (E_m^m, K_0), il existe une fonction $g(x)$ nommable (E_m^m, K_0), définie sur $U_N(x)$ et telle que $|\Delta^{(k)}| < \frac{1}{g(p)}$ $(k=1, 2)$ entraînent

$|I_{\Delta'}-I_{\Delta''}|<\frac{1}{p}$, et $f(g(x))$ est au plus nommable (E^{m+n}_{m+n}, K_0). Donc, la suite $\{I_{\Delta_k}\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ est convergente et sa limite $\int_a^b F(s)ds$ est nommable (E^{n+1}_{n+1}, K_0), c.q.f.d.

Théorème 3. *Soit $F(s)$ une fonction nommable (S^n_n, K_0, K) et définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E^n_n, K_0). Alors, quand elle est continue (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0) uniformément sur son domaine, elle est aussi intégrable (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0) sur son domaine, suivant qu'on a $n\geqq 2$ ou bien $n=1$.*

Démonstration. D'après la supposition, il existe une fonction $f(x)$ nommable (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0), définie sur $U_N(x)$, et telle que $c\in[a, b]_K$, $d\in[a, b]_K$ et $|c-d|<\frac{1}{f(p)}$ entraîne $|F(c)-F(d)|<\frac{1}{p}$.

Par suite, pour une division Δ de $[a, b]_K$ telle qu'on ait $|\Delta|<\frac{1}{f(p)}$, on a

$$\Sigma_\Delta-\sigma_\Delta\leqq\frac{1}{p}(b-a)\quad\text{et}\quad\sigma_\Delta\leqq I_\Delta\leqq\Sigma_\Delta,$$

où Σ_Δ, σ_Δ et I_Δ sont définies pour la fonction $F(s)$.

Puis, pour deux divisions Δ_k $(k=1, 2)$ de $[a, b]_K$ telles qu'on ait $|\Delta_k|<\frac{1}{f(p)}$ $(k=1, 2)$, prenons une sous-division Δ_3 telle que $\Delta_k\supseteqq\Delta_3$ $(k=1, 2)$. Alors, on a

$$\begin{aligned}|I_{\Delta_1}-I_{\Delta_2}|&\leqq|\Sigma_{\Delta_1}-\sigma_{\Delta_2}|+|\Sigma_{\Delta_2}-\sigma_{\Delta_1}|\\&\leqq|\Sigma_{\Delta_1}-\sigma_{\Delta_1}|+|\sigma_{\Delta_1}-\sigma_{\Delta_3}|+|\sigma_{\Delta_3}-\sigma_{\Delta_2}|\\&\quad+|\Sigma_{\Delta_2}-\sigma_{\Delta_2}|+|\sigma_{\Delta_2}-\sigma_{\Delta_3}|+|\sigma_{\Delta_3}-\sigma_{\Delta_1}|\\&\leqq 3|\Sigma_{\Delta_1}-\sigma_1|+3|\Sigma_{\Delta_2}-\sigma_{\Delta_2}|\leqq\frac{6}{p}(b-a),\end{aligned}$$

et par suite, $|\Delta_k|<\frac{1}{f(Np)}$ $(k=1, 2)$, où $N=[6(b-a)]+1$, entraîne $|I_{\Delta_1}-I_{\Delta_2}|<\frac{1}{p}$. Donc, $F(s)$ est intégrable (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0) sur son domaine, suivant qu'on a $n\geqq 2$ ou bien $n=1$, c.q.f.d.

11. Puis, nous discutons l'intégrale indéfinie de Riemann des fonction nommables (S, K_0, K). Si une fonction $F(s)$ nommable (S^n_n, K_0, K), définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E^n_n, K_0), est intégrable (E^m_m, K_0) sur son domaine, elle est intégrable $(E^m_m, K_0(c))$

sur $[a, c]_K$, où c est un point arbitraire de $[a, b]_K$. Dès lors, on a l'intégrale indéfinie de Riemann de $F(s)$, c'est-à-dire, $\int_a^s F(s)ds$. Désignons-la par $G(s)$. Elle est définie sur $[a, b]_K$. D'après la supposition, il existe une fonction $f(x)$ nommable (E_m^m, K_0), définie sur $U_N(x)$ et telle que $|\Delta_k| < \dfrac{1}{f(p)}$ $(k=1, 2)$ entraînent

$$|I_{\Delta_1} - I_{\Delta_2}| < \frac{1}{p},$$

où I_{Δ_k} désignent les sommes moyennes de $F(s)$ sur $[a, b]_K$. D'où, si l'on pose

$$\Delta(k, s) = \langle c_{k_0}(s), c_{k_1}(s), \cdots, c_{k_k}(s) \rangle \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

où $c_{k_j}(s) = a + \dfrac{j}{k}(s-a)$ $(j=0, 1, \cdots, k)$, et

$$I(k, s) = \sum_{j=1}^{k} F\left(a + \frac{2j-1}{2k}(s-a)\right)\frac{s-a}{k} \quad (k=1, 2, \cdots),$$

la suite $\{I(k, s)\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ des sommes moyennes est nommable (S_m^m, K_0, K) ou bien (S_2^2, K_0, K), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$. De plus, on a

$$|I(k, s) - I(j, s)| < \frac{1}{p},$$

si $|\Delta(k, s)| < \dfrac{1}{f(p)}$ et $|\Delta(j, s)| < \dfrac{1}{f(p)}$, c'est-à-dire, $k > f(p)(s-a)$ et $j > f(p)(s-a)$. D'où, si $f(x)$ est nommable (E_n^n, K_0), la suite $\{I(k, s)\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ est convergente (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0) uniformément sur $[a, b]_K$, et donc, d'après le théorème 5 de §2, $G(s)$ est nommable (S_n^n, K_0, K) ou bien (S_2^2, K_0, K), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$. D'où, on a le

Théorème 4. *Si une fonction $F(s)$ nommable (S_n^n, K_0, K) et définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$ où a et b sont nommables (E_n^n, K_0), est intégrable (E_n^n, K_0) sur son domaine, son intégrale indéfinie de Riemann $\int_a^s F(s)\,ds$ est définie sur $[a, b]_K$ et nommable (S_n^n, K_0, K) ou bien (S_2^2, K_0, K), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$.*

Corollaire. *Si une fonction nommable (S_n^n, K_0, K) et définie sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$, où a et b sont nommables (E_n^n, K_0), est intégrable* *sur son domaine, son intégrale indéfinie de Riemann* $\int_a^s F(s)\,ds$ *est définie sur* $[a, b]_K$ *et nommable* (S_{n+1}^{n+1}, K_0, K).

Dès lors, on a le

Théorème 5. *Quand une fonction* $F(s)$ *qui remplit les conditions données dans le théorème 4, est bornée sur* $[a, b]_K$, *son intégrale indéfinie* $\int_a^s F(s)\,ds$ *est continue* (E_n^n, K_0) *uniformément sur son domaine et différentiable* (E_n^n, K_0) *à chaque point dont* $F(s)$ *est continue* (E_n^n, K_0).

§ 6. Les fonctions de plusieurs variables.

12. Déjà, nous avons discuté les fonctions nommables (S, K_0, K) d'une variable et obtenu divers resultats fondamentaux, mais nous pouvons les prolonger sur celles nommables (S, K_0, K) de plusieurs variables et telles considérations sont aussi importantes dans le calcul infinitésimal. D'où, nous les envisageons dans la suite. En correspondant aux intervalles qui sont les domaines des fonctions d'une variable, les rectangulaires fermés sont ceux des fonctions de plusieurs variables. Ils sont déterminés complètement par ses points extrémités, c'est-à-dire, pour les nombres réels a_k et b_k $(k=1, 2, \cdots, p)$ tels qu'on ait $a_k < b_k$ $(k=1, 2, \cdots, p)$, le domaine des points $\langle s_1, s_2, \cdots, s_p \rangle$, où s_k $(k=1, 2, \cdots, p)$ sont les variables sur K, tels qu'on ait $a_k \leqq s_k \leqq b_k$ $(k=1, 2, \cdots, p)$, est un *rectangulaire fermé* et il est désigné par $\bar{Q}(a_1, a_2, \cdots, a_p;\ b_1, b_2, \cdots, b_p)$. Alors on peut généraliser les théorèmes 1–3 de § 2 pour les fonctions de plusieurs variables. Par exemples, on a les

Théorème 1. *Soit* $F(s_1, s_2, \cdots, s_p)$ *une fonction nommable* (S_n^n, K_0, K), *définie sur le rectangulaire fermé* $\bar{Q}(a_1, a_2, \cdots, a_p;\ b_1, b_2, \cdots, b_p)$, *où* a_k *et* b_k $(k=1, 2, \cdots, p)$ *sont nommables* (E_n^n, K_0). *Alors, quand elle est continue* (E_n^n, K_0) *ou bien* (E_2^2, K_0) *uniformément sur son domaine, suivant qu'on a* $n \geqq 2$ *ou bien* $n=1$, *il existe les nombres* $\bar{c}_k(\underline{c}_k)$ $(k=1, 2, \cdots, p)$ *nommables* (E^n, K_0) *ou bien* (E^2, K_0) *(nommables* (E_n, K_0) *ou bien* (E_2, K_0)*), tels qu'on ait* $F(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_p) = \text{bor. sup. } F(s_1, s_2, \cdots, s_p)$ $(F(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \cdots, \underline{c}_p) = \text{bor. inf. } F(s_1, s_2, \cdots s_p))$ *et que* $F(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_p)(F(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \cdots, \underline{c}_p))$ *soit nommable* (E_n^n, K_0) *ou bien* (E_2^2, K_0), *suivant qu'on a* $n \geqq 2$ *ou bien* $n=1$.

Théorème 2. *Soit* $F(s_1, s_2, \cdots, s_p)$ *une fonction nommable* (S_n^n, K_0, K), *définie sur le rectangulaire fermé* $\bar{Q}(a_1, a_2, \cdots, a_p;\ b_1, b_2, \cdots, b_p)$, *où* a_k *et* b_k $(k=1, 2, \cdots, p)$ *sont nommables* (E_n^n, K_0) *et continue* (E_n^n, K_0) *ou bien* (E_2^2, K_0) *uniformément sur son domaine, suivant qu'on a* $n \geqq 2$ *ou bien* $n=1$. *Alors, s'il existe les nombres* c_k *et* d_k $(k=1, 2, \cdots, p)$ *nommable* (E_n^n, K_0)

tels que $\langle c_1, c_2, \cdots, c_p\rangle$ *et* $\langle d_1, d_2, \cdots, d_p\rangle$ *appartiennent à son domaine et qu'on ait* $F(c_1, c_2, \cdots, c_p)>0$ *et* $0>F(d_1, d_2, \cdots, d_p)$, *il existe les nombres* e_k $(k=1, 2, \cdots, p)$ *nommables* (E_n^n, K_0) *ou bien* (E_2^2, K_0) *tels qu'on ait* $F(e_1, e_2, \cdots, e_p)=0$, *suivant qu'on a* $n\geqq 2$ *ou bien* $n=1$.

Or, sur la nommabilité des fonctions implicites, on a le

Théorème 3. *Soit* $F(s_1, s_2, \cdots, s_p, t)$ *une fonction nommable* (S_n^n, K_0, K), *définie sur le rectangulaire fermé* $\bar{Q}(a_1, a_2, \cdots, a_p, a_{p+1}; b_1, b_2, \cdots, b_p, b_{p+1})$, *où* a_k *et* b_k $(k=1, 2, \cdots, p, p+1)$ *sont nommables* (E_n^n, K_0). *Quand elle est continue* (E_n^n, K_0) *ou bien* (E_2^2, K_0) *uniformément sur son domaine, suivant qu'on a* $n\geqq 2$ *ou bien* $n=1$, *et* $F(s_1, s_2, \cdots, s_p, t)=0$ *définit une fonction* $G(s_1, s_2, \cdots, s_p)$ *dont le domaine est le rectangulaire fermé* $\bar{Q}(a_1, a_2, \cdots, a_p; b_1, b_2, \cdots, b_p)$, *elle est aussi nommable* (S_n^n, K_0, K) *ou bien* (S_2^2, K_0, K) *suivant qu'on a* $n\geqq 2$ *ou bien* $n=1$.

Démonstration. Pour la simplicité, considérons le cas où $p=1$. Alors, on peut supposer, sans perdre la généralité, qu'on ait $a_k=0$ et $b_k=1$ $(k=1, 2)$.

Dès lors, considérons d'abord le cas où $F(s, t)\geqq 0$, $F(s, 0)\neq 0$ et $F(s, 1)\neq 0$ pour chaques points s et t de $[0, 1]_K$. D'après la supposition, il existe une fonction $f(x)$ nommable (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), définie sur $U_N(x)$ et telle que $a_k\in[0, 1]_K$, $b_k\in[0, 1]_K$ $(k=1, 2)$, $|a_1-a_2|<\dfrac{1}{f(p)}$ et $|b_1-b_2|<\dfrac{1}{f(p)}$ entraînent

$$|F(a_1, b_1)-F(a_2, b_2)|<\frac{1}{p}.$$

Encore, il existe un nombre naturel N tel que bor. inf. $F(s, 0)>\dfrac{1}{N}$.

Puis, désignons par A l'ensemble de tous les points $\langle x, y, z_1, z_2\rangle$ de $U_N(x, y, z_1, z_2)$ tels qu'on ait $z_2=1$ ou bien $z_2=2$, $x\leqq z_1$ et $y\leqq z_1$. Il est élémentaire (R) et donc

$$G(x, y, z_1, z_2) = p_u^{z_2}, \tag{1}$$

où $u=\varphi_3(x, y, z_1)$ et p_u est le u-ième nombre prime, est nommable (E_2^2, R). En effet, p_x est une fonction nommable (E_2^2, R) de la variable x et d'où, p_u, où $u=\varphi_3(x, y, z_1)$, est aussi nommable (E_2^2, R). Par suite, $G(x, y, z_1, z_2)$ est nommable (E_2^2, R). Puis, étant donné un ensemble E de points $\langle x, y\rangle$ de $U_N(x, y)$ tels qu'on ait $x\leqq z_1$ et $y\leqq z_1$, posons

$$G(E, z_1) = \prod_{x=1}^{z_1}\prod_{y=1}^{z_1} G(x, y, z_1, \chi_E(x, y)+1).$$

Dès lors, $E_1\supseteqq E_2$ entraîne $G(E_1, z_1)\leqq G(E_2, z_1)$. Or, l'ensemble B_1 de tous les points $\langle z_1, z_3\rangle$ tels qu'il existe un sous-ensemble E de $U_N(x, y)$ ayant $G(E, z_1)=z_3$, est nommable (E_2^2, R).

Puis, quand un sous-ensemble E de $U_N(x, y)$ remplit pour un nombre naturel z_1 les conditions suivantes :

1°, $\langle x, y\rangle \in E$ entraîne $x \leqq z_1$ et $y \leqq z_1$,

2°, $\langle x, y\rangle \in E$ et $y > 1$ entraîne $\langle x, y-1\rangle \in E$,

3°, $\langle x, 1\rangle \in E$ $(x = 1, 2, \cdots, z_1)$,

nous dirons que E est *normal* par rapport à z_1. Alors, d'après la définition, l'ensemble B_2 de tous les points $\langle z_1, z_3\rangle$ de B_1 tels que, si l'on a $z_2=G(E, z_1)$, E soit normal par rapport à z_1, est aussi nommable (E_2^2, R). Puis, pour un point $\langle x, y\rangle$ de $U_N(x, y)$ tel qu'on ait $x \leqq z_1$ et $y \leqq z_1$, posons

$$\begin{aligned} G(x, y, z_1, s) &= \frac{y}{z_1}, \quad \text{si} \quad x-1 \leqq z_1 s \leqq x, \\ &= 0, \quad \text{si} \quad z_1 s < x-1 \text{ ou bien } x < z_1 s, \\ F(E, z_1, s) &= \underset{\langle x, y\rangle \in E}{\text{bor. sup.}}\, G(x, y, z_1, s), \end{aligned}$$

pour un ensemble normal E par rapport à z_1. Pour un ensemble E donné, elle est définie sur $[0, 1]_K$ et nommable (S_2^2, R, K).

Encore, pour un ensemble E normal par rapport à z_1, si l'on a

1°, $f(p) < z_1$,

2°, $\langle x, y\rangle \in E$ entraîne $F\left(\frac{x}{z_1}, \frac{y}{z_1}\right) > \frac{1}{p}$,

nous dirons que $F(E, z_1, s)$ est *positive* par rapport à p. Alors, pour chaque point $\langle x, y\rangle$ de E, si l'on a $x-1 \leqq z_1 s \leqq x$ et $y-1 \leqq z_1 t \leqq y$, on a $\left|s-\frac{x}{z_1}\right| < \frac{1}{z_1} < \frac{1}{f(p)}$ et $\left|t-\frac{y}{z_1}\right| < \frac{1}{z_1} < \frac{1}{f(p)}$, et donc, $\left|F(s, t)-F\left(\frac{x}{z_1}, \frac{y}{z_1}\right)\right| < \frac{1}{p}$. Par suite, on a

$$F(s, t) > F\left(\frac{x}{z_1}, \frac{y}{z_1}\right) - \frac{1}{p} > 0.$$

Dès lors, on a $F(E, z_1, s) < G(s)$ pour chaque point s de $[0, 1]_K$.

Or, l'ensembls B_3 de tous les points $\langle z_1, z_3, z_4\rangle$ de $U_N(z_1, z_3, z_4)$ tels qu'on ait

1°, $\langle z_1, z_3\rangle \in B_2$,

2°, si l'on a $z_3=G(E, z_1)$, $F(E, z_1, s)$ est positive par rapport à z_3, est nommable (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$. En effet, l'ensemble C de tous les points $\langle x, y, z_1, z_3, z_4\rangle$ de $U_N(x, y, z_1, z_3, z_4)$ tels qu'on ait

1°, $\langle z_1, z_3\rangle \in B_2$,

2°, $F\left(\dfrac{x}{z_1}, \dfrac{y}{z_1}\right) \leqq \dfrac{1}{z_4}$ et $f(z_4) < z_1$,

3°, si l'on a $z_3 = G(E, z_1)$, p_u, où $u = \varphi_3(x, y, z_1)$, est un facteur de z_3,

est nommable (E_n, K_0) ou bien (E_2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$. Or, $\langle x, y, z_1, z_3, z_4\rangle \in C$ entraîne $x \leqq z_1$ et $y \leqq z_1$. D'où, $S(U_N(z_1, z_3, z_4), C)$ est nommable (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0), (19, § 3, Chap II, [19]), et on a $B_3 = B_2 \oplus U_N(z_4) \frown CS(U_N(z_1, z_3, z_4), C)$. D'où, B_3 est nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0). Encore, il est un ensemble infini. Puis, posons $F(z_1, z_3, z_4, s) = \underset{\langle x,y\rangle \in E}{\text{bor. sup.}}\, G(x, y, z_1, s)$, où $z_3 = G(E, z_1)$. Elle est définie sur $B_3 \oplus [0, 1]_K$ et nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0). Or, on a $G(s) = \underset{\langle z_1,z_3,z_4\rangle \in B_3}{\text{bor. sup.}}\, F(z_1, z_3, z_4, s)$ et donc, $G(s)$ est aussi nommable (E^n, K_0) ou bien (E^2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$.

De même, on peut démontrer que $G(s)$ est nommable (E_n, K_0) ou bien (E_2, K_0) et d'où, elle est nommable (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$.

Puis, considérons le cas général où $F(s, t)$ est définie sur $\bar{Q}(0, 1; 0, 1)$. Posons

$$\begin{aligned} F_0(s, t) &= F(s, 1)^2 + (t-1)\,, && \text{si} \quad 1 \leqq t \leqq 2\,, \\ &= F(s, t)^2\,, && \text{si} \quad 0 \leqq t \leqq 1\,, \\ &= F(s, 0)^2 - t\,, && \text{si} \quad -1 \leqq t \leqq 0\,, \end{aligned}$$

sur $\bar{Q}(0, 1; -1, 2)$. Elle est aussi nommable (S^n_n, K_0, K) et continue (E^n_n, K_0) ou bien (E^2_2, K_0) sur son domaine. Or, $F_0(s, -1) \neq 0$ et $F_0(s, 2) \neq 0$ sont vrais sur chaque point de $[0, 1]_K$ et $F_0(s, t)=0$ détermine la fonction $G(s)$. Donc, $G(s)$ est aussi nommable (S^n_n, K_0, K) ou bien (S^2_2, K_0, K), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$, c.q.f.d.

13. De même qu'on connaît bien, nous pouvons définir la différentiation partielle et l'intégrale de Riemann des fonctions de plusieurs variables en modifiant les recherches de § 3–5. Par exemple, pour une fonction $F(s_1, s_2, \cdots, s_p, t)$ nommable (S^n_n, K_0, K) et définie sur un rectangulaire fermé $\bar{Q}$, on dit qu'elle est *différentiable* (S^m_m, K_0, K) *partiellement* sur son domaine par rapport à t, s'il existe une fonction $f(x, s_1, s_2, \cdots, p_p, t)$ nommable (S^m_m, K_0, K) définie sur $U_N(x) \oplus \bar{Q}$ et telle que $0<|t-t_k|<(f(q, s_1, s_2, \cdots, s_p, t))^{-1}$ $(k=1, 2)$ entraînent

$$\left|\frac{F(s_1, s_2, \cdots, s_p, t)-F(s_1, s_2, \cdots, s_p, t_1)}{t-t_1} - \frac{F(s_1, s_2, \cdots, s_p, t)-F(s_1, s_2, \cdots, s_p, t_2)}{t-t_2}\right| < \frac{1}{q},$$

où $\langle s_1, s_2, \cdots, s_p, t_k\rangle \in Q$ $(k=1, 2)$. Encore, on peut définir l'intégrale de Riemann

$$\int_a^b F(s_1, s_2, \cdots, s_p, t)\, dt$$

pour une fonction $F(s_1, s_2, \cdots, s_p, t)$ nommable (S, K_0, K) et définie sur un rectangulaire fermé $\bar{Q}$ dont la variable t parcourt sur l'intervalle fermé $[a, b]_K$. Or, on a le

Théorème 4. *Soit* $F(s_1, s_2, \cdots, s_p, t)$ *une fonction nommable* (S_n^n, K_0, K) *définie sur le rectangulaire fermé* $\bar{Q}(a_1, a_2, \cdots, a_p, a_{p+1}; b_1, b_2, \cdots, b_p, b_{p+1})$, *où* a_k *et* b_k $(k=1, 2, \cdots, p, p+1)$ *sont nommables* (E_m^m, K_0). *Quand elle est continue* (E_n^n, K_0) *ou bien* (E_2^2, K_0) *uniformément sur son domaine, suivant qu'on a* $n\geqq 2$ *ou bien* $n=1$, *la fonction*

$$G(s_1, s_2, \cdots, s_p) = \int_{a_{p+1}}^{b_{p+1}} F(s_1, s_2, \cdots, s_p, t)\, dt$$

est définie sur le rectangulaire fermé $\bar{Q}(a_1, a_2, \cdots, a_p; b_1, b_2, \cdots, b_p)$, *nommable* (S_n^n, K_0, K) *ou bien* (S_2^2, K_0, K), *et continue* (E_n^n, K_0) *ou bien* (E_2^2, K_0) *uniformément sur son domaine, suivant qu'on a* $n\geqq 2$ *ou bien* $n=1$.

Démonstration. De même que le cas du théorème 3 de § 5, on peut démontrer que $G(s_1, s_2, \cdots, s_p)$ est nommable (S_n^n, K_0, K) ou bien (S_2^2, K_0, K).

Puis, considérons la continuité de $G(s_1, s_2, \cdots, s_p)$. D'après la supposition, il existe une fonction $f(x)$ nommable (E_n^n, K_0) définie sur $U_N(x)$ et telle que, pour deux points $\langle c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, \cdots, c_p^{(j)}, c_{p+1}^{(j)}\rangle$ $(j=1, 2)$ de son domaine, $|c_k'-c_k''|<\dfrac{1}{f(q)}$ $(k=1, 2, \cdots, p, p+1)$ entraînent

$$|F(c_1', c_2', \cdots, c_1', c_{p+1}')-F(c_1'', c_2'', \cdots, c_p'', c_{p+1}'')|<\frac{1}{q}.$$

D'où, pour deux points $\langle c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, \cdots, c_p^{(j)}\rangle$ $(j=1, 2)$ du domaine de $G(s_1, s_2, \cdots, s_p)$ tels qu'on ait $|c_k'-c_k''|<\dfrac{1}{f(q)}$, on a

$$|F(c_1', c_2', \cdots, c_p', t)-F(c_1'', c_2'', \cdots, c_p'', t)|<\frac{1}{q}$$

et donc, on a

$$|G(c_1', c_2', \cdots, c_p') - G(c_1'', c_2'', \cdots, c_p'')|$$
$$\leqq \int_{a_{p+1}}^{b_{p+1}} |F(c_1', c_2', \cdots, c_p', t) - F(c_1'', c_2'', \cdots, c_p'', t)| dt$$
$$\leqq \frac{1}{q} |a_{p+1} - b_{p+1}|.$$

D'où, $G(s_1, s_2, \cdots, s_p)$ est continue (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0) uniformément sur son domaine, suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$, c.q.f.d.

Or, en se servant de ces théorèmes, on peut démontrer l'existence de diverses fonctions. En effet, le domaine $\mathcal{F}_0(K_0, K)$ de fonctions déterminés par les conditions :

1°, une fonction $F(s_1, s_2, \cdots, s_p)$ définie sur un rectangulaire fermé $\bar{Q}(a_1, a_2, \cdots, a_p; b_1, b_2, \cdots, b_p)$, où a_k et b_k $(k=1, 2, \cdots, p)$ sont rationnels, et donnée en effectuant l'addition $+$ et la multiplication, sur les variables s_k $(k=1, 2, \cdots, p)$ et les nombres de K_0, appartient à $\mathcal{F}_0(K_0, K)$,

2°, si F et G appartiennent à $\mathcal{F}_0(K_0, K)$ et sont définies sur un même rectangulaire fermé $\bar{Q}$, la somme $F+G$ et le produit FG appartient aussi à $\mathcal{F}_0(K_0, K)$,

3°, quand une fonction $F(s_1, s_2, \cdots, s_p, t)$ de $\mathcal{F}_0(K_0, K)$ définit une fonction $G(s_1, s_2, \cdots, s_p)$ implicitement, c'est-à-dire, $F(s_1, s_2, \cdots, s_p, t)=0$ détermine précisément une fonction $G(s_1, s_2, \cdots, s_p)$, elle appartient aussi à $\mathcal{F}_0(K_0, K)$, (voir la théorème 3 de § 6),

4°, quand une fonction $F(s_1, s_2, \cdots, s_p, t)$ de $\mathcal{F}_0(K_0, K)$ est différentiable partiellement par rapport à t et sa dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial t}$ est continue sur son domaine, $\frac{\partial F}{\partial t}$ appartient à $\mathcal{F}_0(K_0, K)$ (voir 13, § 3),

5°, quand une fonction $F(s_1, s_2, \cdots, s_p, t)$ de $\mathcal{F}_0(K_0, K)$ est bornée sur son domaine, l'intégrale définie de Riemann $\int_a^b F(s_1, s_2, \cdots, s_p, t)\, dt$, où a et b sont rationnels, appartient à $\mathcal{F}_0(K_0, K)$ (voir le théorème 4 de § 6),

consiste de celui important dans $\mathcal{A}(K_0, K)$ et comme on sait bien, il contient diverses fonctions particulières de l'analyse moderne. D'où, il existe diverses fonctions dans $\mathcal{A}(K_0, K)$, (voir § 2, Chap. IV. [19]).

(Reçu le 18 février, 1960)

Bibliographie

[1] P. Bernays: A system of axiomatic set theory, VII, Jour. Sym. Log. **19**, (1954).

[2] P. Bernays: Axiomatic set theory, Amsterdam 1958.

[3] E. Borel: Leçons sur la théorie des fonctions. 3-ième édition, Paris, 1928.

[4] R. Dedekind: Stetigkeit und irrationale Zahlen. 5-ième édition, Braunscheweig, 1924.

[5] A. Denjoy: Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique, Paris, 1941.

[6] R. L. Goodstein: Function theory in an axiom-free equation calculus. Proc. London Math. Soc. ser 2. **48**, (1945).

[7] R. L. Goodstein: Mean value theorems in recursive function theory. Part I. Differential mean value theorems. Proc. London Math. Soc. ser. 2, **52**, (1951).

[8] R. L. Goodstein: The relatively exponential logarithmic and circular function in recursive function theory. Acta Math. **92**, (1954).

[9] R. L. Goodstein: The recursive irrationality of π. J. Sym. Log. **19**, (1954).

[10] A. Grzegorczyk: Elementarily definable analysis. Fund. Math. **41**, (1954-55).

[11] A. Grzegorczyk: Computable functionals. Fund. Math. **42**, (1955).

[12] G. H. Hardy: A course of pure mathematics. Cambridge, 1925.

[13] D. Hilbert et P. Bernays: Grundlagen der Mathematik, Bd. II, Berlin, 1939.

[14] D. Klaua: Berechenbare Analysis. Zeits. Math. Log. u. Grund. Math. **2**, (1956).

[15] M. Kondô: Sur la nommabilité d'ensembles. C. R. **242**, (1956).

[16] M. Kondô: Sur les nombres réels et nommables, c. R. **242**, (1956).

[17] M. Kondô: Sur les analyses relatives. C. R. **242**, (1956).

[18] M. Kondô: Sur un point de vue de l'analyse mathématique, Kagaku-Kisoron Kenkyû, Nr. **13**, (1958).

[19] M. Kondô: Sur les ensembles nommables et le fondement de l'analyse mathématique, I, Jap. Jour, Math. **28**, (1958).

[20] E. Landau: Grundlagen der Analysis. Leipzig, 1930.

[21] E. Landau: Einfuhrung in die Differentialrechnung und Integrelrechnung. Groningen, 1934.

[22] A. Mazur: Computable analysis. Rozprawy Matematyczne.

[23] I. P. Natanson: Konstrucktive Funktionentheorie (Deutsche Übersetzung von K. Bögel). Berlin, 1955.

[24] J. Pierpont: Lectures on the theory of functions of real variables, I et II, Boston, 1905, 1912.

[25] E. Specker: Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis. Jour. Sym. Log. **14**, (1949).

[26] H. Weyl: Das Kontinuum, Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. Leipzig, 1918.

Notations

K_0, K : les domaines relatifs de nombres reels tels qu'on ait $\pi(K_0) \leqq K$.
N, N_0 : le domaine des nombres naturels et celui des nombres entiers et non negatifs.
R : le domaine de nombres rationnels.
$x, y, \cdots$: les variables sur N ou bien N_0.
$s, t, \cdots$: les variables sur K.
$U_A(x_1, x_2, \cdots, x_p)$, $U_B(s_1, s_2, \cdots, s_p)$: le domaine des points $\langle x_1, x_2, \cdots, x_p \rangle$ (ou bien $\langle s_1, s_2, \cdots, s_p \rangle$) tels qu'on ait $x_k \in A$ (ou bien $s_k \in B$) $(k=1, 2, \cdots, p)$.
$[a, b]_K$, $(a, b)_K$: l'intervalle qui consiste des nombres s de K tels qu'on ait $a \leqq s \leqq b$ (ou bien $a < s < b$).
$\mathcal{L}(F)$, $m(G)$: l'ensemble de tous les points tels que $F \geqq 0$ et celui de tous les points qui remplit $G=0$.
$R(a)$: la représentation régulière d'un nombre reel a.
$\pi(K)$: la perfection relative de K (voir M. Kondô [19]).
$f, g, \cdots$: les foctions dont les valeurs sont naturels.
χ_E : la fonction caractéristique d'un ensemble E.
φ_k, φ_{kj} : voir M. Kondô [19].

Remarque. J'ai lu récemment une Note[1] de M. E. Specker sur les fonctions continues récursivement. D'après ses resultats, il me paraît que les nombres $\bar{c}$ et $\underline{c}$ réels donnés dans le théorème 2 de §2.4 ne sont pas en général nommables (E_n^n, K_0) ou bien (E_2^2, K_0), suivant qu'on a $n \geqq 2$ ou bien $n=1$.

1) E. Specker: Der Satz vom Maximum in der rekursiven Analysis. Constructivity in mathematics, Proceedings of the colloquim held at Amsterdam, 1957.