研究ノート

超流動と対称性の自発的破れ

工学部　一　柳　正　和（吹田 4677）

粒子系の Bose 凝縮には，二つの興味深い問題がある。一つは，「液体ヘリウムにおいて，Bose 凝縮が実現しているか」であり，今一つは Bose 凝縮と超流動性はどのような関係にあるか」である。第一の問については，中性子散乱実験の解析が一つの解答を与えている。理論的取扱いの面で，完全に解決したとはまだ言えないが，実験の結果は，[1] 全粒子数密度の 3 %位が凝縮体であることを示すようである。凝縮体密度が，このように低いのはヘリウム分子間の相互作用が，むしろ強いことによると思われるが，Bose 気体が液体ヘリウムのモデルとしての資格をもつと期待されている。

Bose 凝縮した多粒子系が超流動性を示すかどうかは，自明ではない。例えば，温度を絶対零度に限るとすれば，理想 Bose 気体は１００%の凝縮体をもつが，超流動性は示さない。こう表現するとき，「超流動性とは何か」が大きな問題であり，①「超流動の条件は何か」と　②「ある温度以上で超流動性が消滅する機構は何か」を，明らかにする必要がある。伝統的な立場では，Landau の判定条件をもって，臨界速度を定義することとなる。Landau の判定条件を具体的に利用する為には，液体ヘリウムの可能な素励起の性質を分子論的に解明しなくてはならない。Bogoliubov は適当な弱い（矩距離）相互作用がある Bose 気体には，phonon 型スペクトルの素励起が存在し，超流動性をもつことを示した。彼は，波数＝0 の粒子演算子 a_0^{+} と a_0 を c－数とおく処方を導入した。この処方の根拠は物理的なもの（凝縮体の存在）にあるとはいえ，多くの研究者に奇異な感じをいだかせた。

有限体積の Boson 系では，系のハミルトニアン H は，ゲージ変換

$$T_\alpha ;\ \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x),\ \ \psi^{+}(x) \rightarrow e^{-i\alpha}\psi^{+}(x) \quad \cdots\cdots (1)$$

で不変に保たれ，H の固有状態は T_α の固有状態に限ってよい。ただし，$\psi^{+}(x)$ と $\psi(x)$ は粒子の生成と消滅の演算子であり，通常の Bose 型の交換関係を満足する，無限に大きい体積の系（熱力学的極限操作，体積→∞，粒子数→∞，密度一定）での Bogoliubov の処方は，$\psi = \rho_0^{1/2} + \varphi_F$ とおき，H のゲージ不変性をわざわざ破って後，計算することになっている。H の固有状態は，その結果ゲージ不変なものではなくなり，基底状態は無限に縮退してしまう。この現象は，対称性の自発的破れとよばれるものの一例であるＢＣＳ理論，強磁性理論などは，この群に入るものであり，対称性の自発的破れが巨視的になる例である。

Boson 系でのゲージ対称性の自発的破れは，正準交換関係の表現の非同値性にある。[2] 通常，物性論などでは，場の演算子の交換関係の一つの表現として，粒子数空間（Fock の空間）をとるのが習慣的である。しかし，Fock の空間には，$\sum n_k < \infty$（n_k は，k 状態の粒子数）なる条件が課せられており，無

限大の体積で有限密度の系にとっては，はなはだ不都合な空間である。今，$\psi(x)=\rho_0^{1/2}+\varphi_F$（$\rho_0$ はc－数）において，$\varphi_F(x)$ を Fock 空間での演算子とすると　ρ_0 ＝粒子数密度となり，　もし，粒子数密度が ρ_0 とことなる場合には，もはや，　Fock空間を用いることは許されなくなる。このように有限密度の系では，全粒子の演算子が存在せず，このことが対称性の自発的破れの原因となっている。

あるBoson 系が，対称性を自発的に破り，かつそれを保存することは一つの矛盾である。 Bose 凝縮は，この矛盾を解消しはしないが，この矛盾を解決した一つの可能的な運動形態なのである。このことは，太陽系の惑星の楕円軌道が，その惑星が中心に向って一方的に近づきつづけ，かつ遠ざかりつづけることを解決した一つの運動形態であることとの類推を生き生きと示しているように思われる。

対称性が自発的に破れる系には，破られた対称性を再興する影武者（準粒子）が存在するはずである。この準粒子のエネルギー・スペクトルはギャップをもたない（例えば，Boson 系の phonon，　すなわち Bogolon，強磁性体の magnon など）。このモードは，Goldstone モード [3] とよばれている。Boson 系でのゲージ変換の函数Gは，近似的に

$$G=\int dx\,\rho_0^{1/2}\left[\varphi_F^{+}(x)+\varphi_F(x)\right]+(\text{定数}) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

で与えられる。すなわち，Gはk＝0の成分にだけ関係し，k≒0の成分は少しも変換をうけないことがわかる。今の近似では，$\varphi_F(x)$ がGoldstoneモードである。

次のようなハミルトニアンHのBoson 系を考える。

$$H=\Sigma\left(\frac{k^2}{2m}-\mu\right)a_k^{+}\ a_k+\frac{g}{2}\Sigma\, a_{p+q}^{+}\ a_{k-q}^{+}\ a_k\ a_p, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

μは化学ポテンシャル，gは相互作用定数である。系の体積Vは有限であるとすれば，(3)式の演算子は，Fock の場で書けることになる。このハミルトニアンから出発する論文は，おそらく何百編とあろう。対称性の自発的破れという光に照らして，このハミルトニアンを扱う。(3)式は，$a_k=u_k\bar{\alpha}_k+v_k\bar{\alpha}_{-k}^{+}+\rho_0^{1/2}\delta_{k,0}$ を導入し，更に正準変換により体積を無限大にする極限で，次のように対角化される。[5]

$$H=\Sigma\ E_k\,\alpha_k^{+}\,\alpha_k+Q_V+\text{const.} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

$$Q_V\to 0 \qquad \text{as}\quad V\to\infty. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

α_k（及びα_k^{+}）は漸近場（今の場合は，in－field とよばれるものにあたる）の演算子である。はじめにBogoliubov の手法により，ゲージ対称性を破った上で，(3)を対角化したのであるが，見られる如く，(4)は，漸近場に関しては，ゲージ不変な形になっている。すなわち，漸近場は，はじめに考えたゲージ変換(1)により不変なのである。このことから，我々は，次のような大切な結論に達する。Boson の場$\psi(x)$ は

$$\psi(x)=e^{iB(x)}f\{\varphi_r,\dot{B}(x)\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

と書ける。φ_{r}は上にもとめた漸近場であり，B(x)は(1)のゲージ変換を担う新しい場(phason 場という)である。B(x)は$\psi^{+}_{(x)}\psi_{(x)}$と正準共役な量であり，ギャップレスの素励起であることが知れている。[4] このことは，Goldstone モードの機能を別の面から考察したことに他ならない。α_kとα_k^{+}とはFock の空間で表現できるので，系の基底状態（超流動基底状態）はα_kの真空と定義できる。[5]

Bose 凝縮が，このように対称性の破れであるならば，超流動性をやはりこの対称性の論議から抽きだせないであろうか。均質なBoson系のゲージ変換は，パラメーターα＝一定で特徴づけられた。局所的なゲージを理論に導入するとどうなるであろうか；$\psi\to\exp(i\,\alpha(x))\psi$。理論がゲージ不変なものである為には，我々は次の変換を同時に導入しなくてはならない。

$$\nabla\to\nabla-\mathrm{i\,m}\nabla\alpha.\quad(\nabla=\partial/\partial x)\quad\cdots\cdots\quad(7)$$

局所的ゲージが，自発的に破れた場合の基底状態がどのようなものであるかを調べてみると，それは渦線を伴った状態である。TypeⅡの超伝導体と同じである。渦線はもちろん量子化されたものである。そこで，超伝導体の理論にならって，超流動の理論を創ろうとすると，その類似性には明白な一つの問題がうかんでくる。すなわち，超伝導体の場合の局所ゲージは，むしろ外的な磁場にあたるベクトル・ポテンシャルであるのに対して，Boson 系では，秩序度の位相であって，粒子数に正準共役な量であった。超流動性を例えばハミルトニアン(3)から説明しようとする限り，最後の難点はどうしても乗り越えられないように思われる。そこで，もう少し広い自由な立場からBoson 系に接近できるのではないであろうか。

対称性の自発的破れに関連して，超伝導体のMeissner 効果は，ギャップレスのゲージ場が，Goldstoneモードとの結合の結果として，スペクトルにギャップを生ずること（Higgs の機構という[6]）に対応している。[7] このことは，超流動の理論を創る上で，非常に大きな動機をもつと思われる。Boson 系の場合には，凝縮体以外の部分(depletion という)の速度場が，丁度，超伝導理論のベクトル・ポテンシャルに当る。円筒軸対称性をもつ解をさがしてみると，秩序度の位相の空間変化をdepletion の速度場が漸近的に打消す機構があり，これがHiggs機構になっている。Boson 系の渦線は，超伝導体の磁束とことなって励起状態（渦線の振動）があるが，この励起状態のおかげで，ハミルトニアンは，渦線の芯に沿う方向での局所ゲージ対称性を再興し得るようになっている。臨界速度の機構，半整数の渦線の可態性など，多彩な内容をこの理論はひめていることが予想される。今後の研究が楽しみである。

文　献

1) H.A.Mook et al, Phys. Rev. **A6** ('72) 2268.
2) H.Araki et al, J.Math, Phys. **4** ('63) 637.
3) 例えば，高橋　康「物性研究者のための場の量子論Ⅱ」（培風館）第１２章．
4) H.Umezawa, Nuovo Cim. **49**B ('67) 1.
5) M.Ichiyanagi, J.Phys. Soc. Japan **41** ('76) 1870.
6) 西島；物理学会誌　**29** ('74) 29.（１月号）.
7) N.B.Nielsen, Nucl. Phys. B**61** ('73) 45,