

Title	L^2 vanishing theorems on Hessian manifolds and geometry of regular convex cones
Author(s)	赤川, 晋哉
Citation	大阪大学, 2019, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/72635
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

論文内容の要旨

氏名 (赤川 晋哉)

論文題名

L² vanishing theorems on Hessian manifolds and geometry of regular convex cones
(ヘッセ多様体上のL²消滅定理と正則凸錐の幾何)

論文内容の要旨

ヘッセ多様体とは、平坦接続が与えられたリーマン多様体であって、リーマン計量が局所的にある関数の平坦接続に関するヘッセ形式で表されるものである。ヘッセ多様体は、ケーラー多様体の実アナロジーに相当し、ケーラー多様体と類似の性質を様々に持つ。本論文は、ヘッセ多様体について研究して得られた結果をまとめたもので、主に2つの内容に分かれる。

1つ目は、完備ヘッセ多様体上のL²コホモロジー群の消滅定理である。これは、完備ケーラー多様体上のL²コホモロジー群に関する小平-中野の消滅定理に対応するものである。また、すでに知られていた、多様体がコンパクトな場合の小平-中野型の消滅定理の拡張となっている。この定理の証明のキーポイントとなるのは、新たな微分作用素の導入である。これによって、ケーラー幾何における小平-中野の恒等式に相当する関係式を得ることができた。この関係式を用いることで、ケーラー多様体の場合とパラレルな議論を展開することが可能になり、ケーラーの場合と同等な定理を導出することができた。

2つ目は、正則凸錐の特殊性についてである。ここで、直線を含まない凸領域を正則凸領域といい、正則凸錐とは、正則凸領域で錐となっているもの、すなわち、任意の正数 t と領域内の任意の点 x に対し、 tx もまたその領域に属するようなものである。正則凸領域には、Cheng-Yau 計量と呼ばれる、ケーラーアインシュタイン計量に対応するようなヘッセ計量が入ることが知られている。特に正則凸錐にのみ焦点を当てると、Cheng-Yau 計量は、ケーラーの言葉では説明できないような特殊な性質をもつということが分かった。導出した特殊性は大きく分けて2つある。1つ目は、前述の小平-中野型のL²消滅定理が適用される一方で、その定理の仮定「 $p + q > n$ 」を「 $p > q$ 」に変えても同様の主張が成立するということである。2つ目は、Cheng-Yau 計量を、正則凸錐から正定値実対称行列全体の空間への写像とみなすと、この写像は調和なはめ込みになり、特に、正則凸錐が等質かつ自己双対である場合には、全測地的な写像になるということである。どちらの証明も、正則凸錐上のCheng-Yau 計量を定める関数 ϕ が、正則凸錐の任意の点 x と任意の線型自己同型 A に対して、

$$\phi(Ax) = \phi(x) - \log |\det A|$$

という関係式をみたすという事実が本質的となっている。

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 (赤 川 晋 哉)			
	(職)	氏 名	
論文審査担当者	主 査	教授	後藤 竜司
	副 査	教授	石田 政司
	副 査	教授	山ノ井 克俊
	副 査	教授	太田 慎一
	副 査	准教授	糟谷 久矢
論文審査の結果の要旨			
<p>平坦多様体とは曲率が零となる捻れのない接続をもつ多様体であり、平坦接続は局所的に平坦な座標を与える。平坦多様体上のリーマン計量はその局所的平坦な座標により、ヘシアン形で与えられるとき、ヘッセ計量といい、ヘッセ計量を持つ多様体をヘッセ多様体という。ヘッセ多様体はケーラー多様体の実の幾何学的対応物と考えることが出来る。実際、ヘッセ多様体の接束はケーラー多様体となることが知られている。</p> <p>赤川氏はヘッセ多様体の幾何学に関して、顕著な業績をあげた。最初の結果は完備なヘッセ多様体の L^2 コホモロジー群の消滅定理である。これはケーラー多様体の小平-中野型消滅定理を完備なヘッセ多様体に拡張したものであり、この結果は論文にて出版され高い評価を得ている。</p> <p>S. Akagawa, Vanishing theorems of L^2-cohomology groups on Hessian manifolds, J. Math. Soc. Japan 71 (2019), no. 1, 65-89.</p> <p>ヘッセ多様体の重要な例として、n 次元ユークリッド空間の正則凸錐がある。正則凸錐には Cheng-Yau 計量といわれるヘッセ・アインシュタイン計量が存在することが知られている。また正値対称行列全体のなす空間も正則凸錐であり、自然な計量が存在する。</p> <p>赤川氏は正則凸錐上のヘッセ・アインシュタイン計量が正則凸錐から正値対称行列全体のなす空間への調和写像を与えることを示した。また更に、正則凸錐が等質かつ自己双対であるときには、更にこの写像が totally geodesic になることも示している。これらの結果はヘッセ多様体の幾何学に新たな知見を与えるものとして審査委員会でも高く評価された。</p> <p>よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値のあるものと認める。</p>			