OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Lower bound estimates for the lifespan of small solutions to nonlinear Schrödinger equations
Author(s)	佐川, 侑司
Citation	大阪大学, 2019, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/72636
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

様式3

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名　（　佐川　侑司　）	
論文題名	Lower bound estimates for the lifespan of small solutions to nonlinear Schrödinger equations (非線形シュレディンガー方程式の小さな解のライフスパンの下界評価)

論文内容の要旨

本論文は非線形Schrödinger方程式の初期値問題に対する解の長時間挙動について考察したものである．Barab(1984)，Tsutsumi-Yajima(1984)，Ozawa(1991)，Hayashi-Naumkin(1998)などにより解の長時間挙動を摂動によって取り扱う際に，非線形項の次数$p=1+2/d$を境にして状況が異なることが指摘されている．ここでdは空間次元を表す．$p>1+2/d$のとき，線形Schrödinger方程式の摂動とみなすことができると期待される．しかし$p¥le 1+2/d$のとき，摂動によって取り扱うことができず，非線形項が解の長時間挙動に本質的な影響を与えることが期待される．このように境目となる非線形項の次数$p=1+2/d$を臨界冪といい，$1<p<1+2/d$を劣臨界冪という．

本論文は臨界冪または劣臨界冪の非線形項を伴うSchrödinger方程式の解の長時間挙動について，lifespanの評価という観点から考察したものである．

以下，本論文の構成および各章の概要について述べる．

本論文は四章からなる．第一章では，問題の背景・動機と本論文の構成について述べる．

第二章では，空間1次元で斉3次の微分型非線形項を伴うSchrödinger方程式について考察する．学位申請者は砂川秀明氏との共同研究により，初期値および非線形項から定まる顕わな量でlifespanの下限を評価することができた．この結果はSunagawa(2006)による先行研究の改良および拡張となっている．これにより，解の長時間挙動に関連するこれまでの多くの先行研究にある程度の統一的な見通しを与えることができた．証明は，Hayashi-Naumkin(1998)で用いられた変換によって問題を本質的に非線形常微分方程式に帰着させるという方法を採用している．

第三章では，空間1，2，3次元で劣臨界冪の非線形項を伴うSchrödinger方程式について考察する．学位申請者は砂川秀明氏および保田舜介氏との共同研究により，非線形項の係数と初期値から定まる顕わな量でlifespanの下限を評価することができた．この結果はSasaki(2009)による先行研究の改良・拡張および空間2，3次元への一般化となっている．また第三章の後半では，空間1，2，3次元で臨界冪の場合の結果も述べている．

第四章では，空間1次元で斉3次の非線形項を伴う2成分のSchrödinger方程式系について考察する．学位申請者は非線形項の係数，初期値および各成分の質量から定まる顕わな量でlifespanの下限を評価することができた．これは第二章で得られたlifespanの評価式とは異なるタイプの評価式である．これにより，単独の非線形Schrödinger方程式とは異なる，2成分の非線形Schrödinger方程式系特有の解の長時間挙動を見出すことができると期待される．証明は，Hayashi-Naumkin(1998)で用いられた変換によって問題を本質的に2成分の非線形常微分方程式系に帰着させるという方法を採用している．

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名	（　佐川　侑司　）	
	（職）	氏　名
論文審査担当者	主 査　教 授	片山　聡一郎
	副 査　教 授	林　仲夫
	副 査　教 授	土居　伸一
	副 査　准教授	砂川　秀明

論文審査の結果の要旨

本論文は、ライフスパン(解の最大存在時間)の漸近評価という視点から非線形シュレディンガー方程式の初期値問題に対する小振幅解の大域的挙動を研究したものである。特に、標準的な非線形摂動が破綻する臨界および劣臨界的な状況において非線形項が解の長時間挙動に及ぼす影響を、ライフスパンの下限の評価に現れる量を用いて特徴づけることを試み、従来知られていた諸結果を大幅に改良し発展させることに成功した。本論文の主結果は 3 つに分けられる。まず最初の結果では 1 次元 Euclid 空間において斉 3 次の微分型非線形項を伴う場合が考察され、解のライフスパンの下限についてのほぼ最適と思われる評価式が導かれている。非線形項がゲージ不変な項のみからなる場合には Sunagawa (2006) により同様の結果が得られていたが、本論文で得られた結果はその拡張であるとともに、初期値および解の属する関数空間の観点からも改良がなされている。またこの結果は、準線形双曲型方程式のライフスパンに対して知られている John (1987) と Hörmander (1987) による有名な結果のシュレディンガー方程式における自然な類似物と見なすことができる。John と Hörmander の結果は Christodoulou と Klainerman の意味の零条件と密接な関係を持つことが知られていることから、本論文で得られた結果は「零条件の、非線形シュレディンガー方程式における自然な類似物は何か?」という問題に対する一つの答えを与えたものと解釈することもでき、興味深い。第 2 の結果では上記の結果の高次元版および劣臨界の場合への拡張が考察され、空間次元 d が 3 以下で非線形項の次数 p が $1<p\leq 1+2/d$ を満たす場合について、非線形項の係数と初期値の形状から定まる顕わな量を用いた解のライフスパンの下限の評価式が得られている。これは Sasaki (2009) による先行研究の拡張を含んでいる。第 3 の結果は連立系の場合への拡張を試みたものである。ここでの考察は 2 成分系で特別な場合のみに限られているものの、単独の場合とは異なる現象が連立系では起こりうることを示唆する評価式が得られている。非線形シュレディンガー方程式の連立系に対してはライフスパンの評価という観点からの研究はこれまでほぼ皆無であったことを考慮すると、本論文における考察はこの分野に新たな視点をもたらす重要なものである。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。