

Title	Integrality of Drinfeld modular forms of arbitrary rank
Author(s)	杉山, 祐介
Citation	大阪大学, 2019, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/72637">https://doi.org/10.18910/72637</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

## 論文内容の要旨

氏 名 ( 杉 山 祐 介 )	
論文題名	Integrality of Drinfeld modular forms of arbitrary rank (任意階数のドリinfeld保型形式の整性について)
論文内容の要旨	
<p>保型形式と呼ばれる関数は整数論において重要な役割を果たす。実際、保型形式のFourier係数の数論的性質は、楕円曲線との関りを通して、Fermatの大定理に代表されるような、重要な整数論の問題と密接に関係しており、様々な側面から研究がなされている。例えば、<math>SL_2(\mathbb{Z})</math>に関する正則保型形式である、重さ<math>k</math>の正規化されたEisenstein級数 <math>G_k</math> は、素数 <math>p &gt; 3</math> に対し、Fourier 係数ごとに合同を考えることで合同式 <math>G_{(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}</math> を満たす事が知られている。さらに、1979年 Swinnerton-Dyer はこの関係式が「<math>(\text{mod } p)</math>-還元写像」の核を生成する事を示すことで、<math>(\text{mod } p)</math>-保型形式の成す環の構造定理を証明した。上記の事実は、Serre によって導入された <math>p</math>-進保型形式の理論において、保型形式の<math>p</math>-進族の構成にあたり基本的な役割を果たすことが知られている。さらに、この事実の多変数数化が、Boecherer-NagaokaによりSiegel 保型形式に対して得られており、<math>p</math>-進Siegel保型形式の理論に応用がなされている。</p> <p>一方で、1980年代には有理整数環<math>\mathbb{Z}</math>と有限体<math>F_q</math>上の多項式環 <math>F_q[t]</math>との類似に基づき、関数体上の保型形式であるDrinfeld保型形式の理論が導入・整備された。特に近年、次数 <math>d &gt; 0</math>の<math>F_q[t]</math>の零でない素イデアル<math>P</math> について、Drinfeld保型形式の<math>P</math>-進族の理論が、服部やNicole-Rossoなどにより整備された。その先駆けとして、Gekelerは1988年に上記の主張の関数体類似、即ち以下の主張を証明した： 重さ<math>q^k-1</math> の1変数Drinfeld-Eisenstein 級数<math>E_{(q^k-1)}</math> の<math>u</math>-係数は<math>F_q[t]</math> の元であり、また次数<math>d &gt; 0</math>の<math>F_q[t]</math>の零でない素イデアル<math>P</math> について、<math>u</math>-係数ごとに合同を考えることで合同式 <math>E_{(q^d-1)} \equiv 1 \pmod{P}</math> を満たす。ただし、ここで<math>u</math>-係数とは、古典的な楕円的保型形式の<math>q</math>-展開の類似である、<math>u</math>-展開から定まる定数である。さらに、この関係式が「<math>(\text{mod } P)</math>-還元写像」の核を生成することをGekelerは証明した。上記の主張は、Drinfeld保型形式の<math>P</math>-進族の構成に用いられており、やはり基本的である。本論文は、上記のGekelerの主張の多変数化、即ち多変数Drinfeld保型形式の<math>u</math>-係数の整性とそれらの合同関係について、定式化からその証明までを述べたものであり、Boecherer-NagaokaによるSiegel 保型形式に関する結果の関数体類似とみなすことができる。より具体的には、多変数の整Drinfeld保型形式の成す環の構造を決定し、「<math>(\text{mod } P)</math>-還元写像」を多変数Drinfeld保型形式に対しても定義し、その核の生成元を与えた。以上より、この結果は、多変数Drinfeld保型形式の<math>P</math>-進族の構成に応用が強く期待される。</p>	

## 論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 ( 杉 山 祐 介 )			
	(職)	氏 名	
論文審査担当者	主 査	教授	渡部 隆夫
	副 査	教授	中村 博昭
	副 査	准教授	落合 理
	副 査	准教授	森山 知則
	副 査	准教授	安田 正大

## 論文審査の結果の要旨

本論文は、基礎環が有限体上の多項式環である場合に、一般線形群に関するフルレベルの Drinfeld モジュラー形式のなす環の整構造および Drinfeld モジュラー形式の合同を研究したものである。

Drinfeld モジュラー形式はモジュラー群に関する正則保型形式の関数体類似として 1980 年に Goss により導入された。有限体上の 1 変数多項式環を  $A$  と表し、2 以上の自然数  $r$  を固定して、 $A$  に成分をもつ  $r$  次正方行列全体からなる非可換環の単数群を  $\Gamma$  とする。また、 $A$  の商体の無限素点における完備化 (有限体上の Laurent 巾級数体) の代数閉包の完備化を  $C$  と表す。このとき、重さ  $k$  の Drinfeld モジュラー形式は、群  $\Gamma$  の作用に関して整数  $k$  に依存する保型性の条件およびカスプでの正則性の条件をみたすような Drinfeld 上半空間上のリジッド解析関数として定義される。整数の範囲で  $k$  を動かして、重さ  $k$  の Drinfeld モジュラー形式全体が成すベクトル空間の直和をとることにより、次数付き  $C$  代数  $M$  が定義される。1980 年出版の論文で、Goss は  $r = 2$  の場合に  $M$  の  $C$  代数としての構造および  $M$  の整構造  $M(A)$  を明らかにし、それをもとに Gekeler は Drinfeld モジュラー形式の合同に関する論文を 1988 年に出版した。近年、 $r$  が一般の場合に、Basson、Breuer、Pink は、 $M$  が Drinfeld 係数形式とよばれる  $r$  個の Drinfeld モジュラー形式で  $C$  上生成されることを示し、かつこれらの Drinfeld 係数形式は  $C$  上代数的独立であることを証明した。また Basson は、2014 年の学位論文で一般の  $r$  について  $M$  の整構造  $M(A)$  の定義を与えた。しかし、 $M(A)$  の  $A$  代数としての構造は未解明であった。

本論文において杉山氏は、一般の  $r$  の場合に  $M(A)$  の  $A$  代数としての構造を解明すると共に、Drinfeld モジュラー形式の合同に関する Goss と Gekeler による結果を  $r \geq 2$  の場合に一般化することに成功した。本論文の主結果は、 $r$  個の Drinfeld 係数形式はすべて  $M(A)$  に属し、さらにそれらが  $A$  代数として  $M(A)$  を生成するという定理であり、Drinfeld モジュラー形式の  $u$  展開と  $r$  に関する帰納法を用いて証明されている。この整構造の解明をもとに、杉山氏は、 $M(A)$  に属する Drinfeld モジュラー形式の法  $p$  還元概念を、 $A$  の各極大イデアル  $p$  に対して導入し、とくに剰余体  $A/p$  の位数を  $q$  とするとき、重さ  $q-1$  の正規化された Eisenstein 級数  $\beta$  が  $p$  を法とする合同関係式  $\beta \equiv 1$  を満たすことを示した。本論文のもう一つの主結果は、 $M(A)$  に属する Drinfeld モジュラー形式の間の法  $p$  合同関係式はすべて合同関係式  $\beta \equiv 1$  から導かれるという定理で、Drinfeld 係数形式と Eisenstein 級数との関係を巧みに用いることにより証明されている。

以上のように、杉山氏は本論文において Drinfeld モジュラー形式の成す  $C$  代数の整構造およびその還元について、既存の手法を大きく発展させた独自の理論を構築することにより精緻に研究し、さらに整構造と合同関係式を一般の階数で完全に決定するという大きな結果を示しており、本論文は博士 (理学) の学位論文として十分な価値があるものと認める。