The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	フォン・ノイマン型投入産出の枠組みにおける貨幣と信用についての再考
Author(s)	浦井, 憲; 景山, 悟; 村上, 裕美
Citation	大阪大学経済学. 2019, 69(1), p. 1-10
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/72685
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

フォン・ノイマン型投入産出の枠組みにおける貨幣と信用についての再考*

浦 井　憲[†]・景 山　悟[‡]・村 上 裕 美[‡‡]

要　旨

本稿ではKemeny et al.（1956）の最も一般的な定式化の下でのフォン・ノイマン型投入産出モデル（von Neumann 1937）に貨幣および物価水準を導入する。貨幣的取り引きをすべてプロセスとして記述したモデルにおいて，貨幣の中立性命題が，一定の期待インフレ率あるいはデフレ率をともなう信用と貨幣の本質的役割の具体化された貨幣的均斉成長として適切に拡張されることを示す。ここでは，明示的な決済手段として存在するのが，政府＝中央銀行の発行する銀行貨幣である場合について考え，Morishima（1977, Chapter 13）において提案された，単位期間が貨幣流通速度と等しい場合の基本的定式化を，貨幣と信用のフォン・ノイマン型基本モデルとして提示する。

JEL Classification：C62, C70, D53, E40

キーワード：von Neumann Model, Monetary Balanced Growth, Input Output Analysis, Minimax Game, Eilenberg-Montgomery Fixed Point Theorem

1　Introduction

1.1　貨幣と信用の投入産出モデル

フォン・ノイマンモデルは純粋なプロセスのモデルである。投入産出というプロセスを通じて，生産消費および需要供給が描かれることになるので，交換というものがおよそすべて，正当にもプロセスとして描かれることになる。本稿は，フォン・ノイマン型投入産出モデルに，貨幣および物価水準を導入することで，これをプロセスの経済学モデルとして，貨幣を含めた一般均衡理論を深化させる重要な役割を見出そうとするものである。ここで用いる貨幣は，世代重複構造の一般均衡理論的記述等で標準的に用いられる，政府＝中央銀行の発行する，銀行貨幣（政府の信用によって裏付けられた貨幣）である[1]。よく知られているように，純粋交換での動学的問題において，このような貨幣が与えられた場合を含め，市場均衡はBalasko and Shell（1980）の意味でのWeakly Pareto Optimal

* 本稿の原案は，日本経済学会2016年度春季大会（名古屋大学）において報告された。大会参加者をはじめ，その後の改訂も通じ多くの方々から頂いた貴重なコメントに感謝申し上げる。

† 大阪大学大学院経済学研究科，E-mail: urai@econ.osaka-u.ac.jp

‡ 大阪大学大学院経済学研究科，E-mail: s.kageyama1@gmail.com

‡‡ 関西学院大学商学部，Email: murakami@math.econ.osaka-u.ac.jp

[1] 完全予見の世代重複モデルの場合，個々の主体の予算制約に向けて，政府からの非負の資産移転として実現される貨幣であり，同時に，銀行預金と見分けがつかないものである。Cash in advanceのような設定とは異なる。

な資源配分を実現する。この概念は，動学的な資源配分の望ましさを与える上で，最も広い枠組みの一つである。実際，最適成長やターンパイク問題が捉えるOvertaking Criterionでの最適およびWeakly Maximalといった範疇よりも広い資源配分を取り扱い得るものである。

上記のような銀行貨幣について，我々は貨幣的取引を，投入産出の枠組みの下での，アクティビティ，すなわち工程として取り扱う森嶋のアイデアを用いる[2]。これによって，我々は信用創造の問題をモデル内で取り扱うことが可能となる。貨幣の流通をプロセスとしてモデルの中に入れるというのは，貨幣の役割を明確にプロセス化するということであり，フォン・ノイマンモデルの単位期間を貨幣の流通速度に合わせるという森嶋のアイデアは，貨幣の機能と運動をとらえる上での必然と言えよう。

マクロの動学問題の設定と比較するならば，フォン・ノイマン型の枠組みは，生産の投入と産出の間に，必ず有時間的なずれを必要とした形での，多部門内生成長モデルである。ただし上述した通り，我々は最適成長問題よりも広いWeakly Pareto Optimalな枠組み（Balasko and Shellの意味における）での均衡を扱う。加えて，本稿における貨幣は，場合によっては各プロセスの操業に不可分な形で導入されており，したがってその中立性は必ずしも保証されない。言い換えれば，貨幣の役割と，その中立性の意味が，ここでは必然的に動的なものとなっている。単純に貨幣数量の増加と物価水準の上昇が比例的になるという問題は，貨幣の流通速度をモデルの基本時間として取った生産の一般均衡の下，定率での物価水準の上昇問題（本稿における貨幣的斉一成長経路）として描かれるのであり，後述するようにこの斉一成長の存在は自明ではない。

ここで得られる貨幣の中立性は，本来の意味での「通貨」あるいは「プロセス」としての貨幣の中立性であって，通常の静学で全体が展望されたストックとして見られたような単純なものではなく，受け渡しの時間，その間の利子，等々を含めた「流れ」の中で記述されたものである。いわば本稿における貨幣の記述を出発点としても，従来型の様々な静学的議論と整合性が取れるという証左として，この中立性を最初に確認することは重要である。

本論文の主定理は，名目利子率を非負とする制限の下で，インフレもしくはデフレ的な定常均衡の一般的な存在を示したものである。名目利子率と実質利子率を区別しない場合に，負の利子率に基づく縮小経済での定常均衡の存在は容易に示されるが，もし名目利子率として負の値を許さない場合には，貨幣価値の下落，すなわち物価水準の上昇（インフレーション）によって，これに代えることが考えられる。しかし，そのような定常均衡のフォン・ノイマン型モデルにおける存在は，これまで扱われてはこなかった。このような，デフレもしくはインフレ均斉成長の存在を示すには，二階堂の補題（Morishima 1960）を拡張し，Eilenberg-Montgomeryの不動点定理を用いなければならない。

1.2　フォン・ノイマンモデルについて

本稿で取り扱うフォン・ノイマンモデルの今日に至る意義と，またそこに貨幣を導入する手法について，以下追記的に述べておきたい。

フォン・ノイマンの成長モデル（von Neumann 1937）は，投入産出分析をはじめ，角谷の不動点定理，ゼロサム行列ゲームにおけるミニマックス鞍点問題，資本蓄積の理論，均斉成長の基本的な概念と定式化等に代表される，経済理論の豊富な進展をもたらした。しかしながら，一般均衡理論の動学的展開において，当モデルの

[2] この考え方は，Morishima（1977）で提起された，貨幣流通速度を投入産出の単位期間と一致させるものである。しかしながら，Morishima（1977）における貨幣の導入は，提案段階に留まっており，残された重要課題として，厳密な定式化を行う必要がある。

重要性と可能性は今日未だ十分に検討されているとは言えない。森嶋が強調したように（例えばMorishima 1964, Morishima 1969を見よ），フォン・ノイマンモデルは多部門における経済成長と資本蓄積の設定における資本財や耐久財の記述において，ストックとフローの概念を統合する一般的な見通しを与えている。様々な減耗の段階の資本財を異なる財として取り扱うことで，我々は資本財が同一の状態を保つ期間の長さがその使用強度に依存するような経済状況を記述することができる。森嶋はこれをフォン・ノイマン革命と呼んだ。資本財の減耗を定数的に考えるような新古典派の取り扱いはG. Debreuの*Theory of Value*において議論された「トラックの人生」のような概念を記述し損ねている。

> “The life of a truck is described by a succession of time-intervals during each of which it stays in the same condition. The lengths of those intervals depend on the intensity of use. (Debreu 1959, p.31)”

それゆえフォン・ノイマン革命は，資本財の新古典派的取り扱いよりも一般均衡理論的な動学性の観点からは望ましい。もちろん，今日の多部門内生的成長モデル等では，研究開発投資や人的資本の問題を通じて，上述したような新古典派の問題点を部分的には克服しており，場合によっては，フォン・ノイマンモデルにおいて記述し得る資本状態の有限性の方が制限的となるような可能性もある。しかし，総合的に考えて，ストックとフローに統一的視野を与える立場の方が，Debreu的な一般均衡理論との整合性が高いことは言うまでもない。

一時的均衡モデルであれば，例えばGrandmont and Laroque（1976）のように中央銀行とfiat moneyを考慮したモデルに生産を導入し，そこでの決済可能性を，例えば一部企業に先物取引を許しつつ，一部には許さないといった形で，それらの操業のsurvival問題まで含めた均衡存在問題とするならば，本稿と同様に単位期間を貨幣の流通速度とする問題設定を得ることはできるかもしれない。しかし，通常の一般均衡問題設定では，操業のsurvival問題が均衡の存在問題として解決されていない。フォン・ノイマンモデルでは各工程の決済が必ずしも閉じていない工程や，最終的に操業されない工程などが含まれることになり，各工程のファイナンスおよび操業判断に関する自由度が存在している。逆に全工程を独立として，全工程に収支バランスのようなものを考慮するならば，フォン・ノイマンモデルの方から一般均衡モデルに接近することはできるので，その意味ではフォン・ノイマン設定の方が一般的とも考えられる[3]。（もちろん，当然のこととして技術の一次同次性という制約がある以上，一般均衡設定の方がより広い状況を許容しているということは言うまでもなく，両者はモデルの前提が異なる，補完的な枠組みとして捉える方が正当であろう。）

フォン・ノイマン的な枠組みについて，不動点問題，ミニマックス問題，鞍点問題など数学的な拡張についての文献は極めて豊富に存在している。我々の依拠するKemeny et al.（1956）の定式化に基づくフォン・ノイマンモデルの拡張は，経済学的意義づけを与える枠組みとしては最も一般的なものである。Kemeny et al.（1956）の均衡存在定理は，有限次元行列の概

[3] 本稿のモデルでは，労働の雇用量は内生化（受身型に工程として捉えられ，いつその工程の操業をゼロにされても良い形で考慮）されているので，人口成長を外生的に取り扱う場合には別途，Morishima（1960）におけるような工夫（森嶋論文の条件（ii’）$L > 0$），例えばすべての工程で労働を用いるといった条件を用い，労働の価格が正となるように保証する必要が生ずる。より望ましくは，人口成長を外生的に所与としつつ，同時に効率労働の量を教育投資等で内生化することも可能である。産業としての視点から述べれば，生産関数の形状に変化を与える研究開発投資R&Dのようなものも考慮できた方が望ましいが，これもそれを代表しうるような財を導入し，非線型投入産出モデルの場合のように，投入関数を「価格の関数」として与えることで上のような内生化が可能となるであろう。

念，ならびにcentral solutionと有限次元双対線形系（例えばTucker 1955を見よ）といった道具だてに大きく依存する[4]。

1.3　特記すべき本稿モデルの設定

本稿ではKemeny et al.（1956）によるフォン・ノイマンモデルの拡張をベースに，貨幣と物価水準をその投入・産出体系に導入する。名目利子率と実質利子率の違いを区別しながら，均斉成長の概念が一定の期待インフレ率あるいはデフレ率をともなう状況を記述するために適切に拡張され得ることを示す。この目的のためには，フォン・ノイマンモデルのそれぞれの工程の所得-支出フローを，それら工程が名目および実質価格変数と期待とにどれほど依存するかを特定できるように，一層正確に記述する必要がある。

フォン・ノイマンモデルにおけるすべての工程は，投入と産出の間に必要な時間間隔の最小単位を持っている。したがってある工程の投入$(a_1, \cdots, a_n)$と産出$(b_1, \cdots, b_n)$は，異なる時期における異なる価値基準財（貨幣）によって評価される。それゆえ，均衡において操業されるある工程について，フォン・ノイマンモデルの拡張として，実質利子率ではなく名目利子率に関する以下の条件を満たすことを実物財（貨幣以外）の投入$(a_1, \cdots, a_n)$と産出$(b_1, \cdots, b_n)$に対して要求することは自然である。

$$(1+\iota)(a_1, \cdots, a_n) \cdot q(t) = (b_1, \cdots, b_n) \cdot q(t+1) \quad (1)$$

ここでιは期間tから$t+1$までの名目利子率であり$q(t)$は期間tの名目価格ベクトル（価値基準財の価値で各実物財の価値を割ったもの）である。

式(1)は直観的には，期間tにおける投入への支払いが利子率ιをもつ次の期間へと延期され得ることを意味する。この式のみを制約と見るならば，これは自動的に，すべての工程においてその所有者が必要な取引の決済手段を得ることができる情況である。例えば，少なくとも来期の期首における全資産の価値の量に見合う範囲での投入への支払いなどである。

しかしながら，フォン・ノイマンの枠組みに貨幣と信用を組み入れる限りは，少なくとも各工程においてそれが依存する金融構造を明示的に記述せねばならない。

本稿では簡単のため，明示的な決済手段として存在するのが銀行貨幣のみである場合について考える。ただし一工程内での銀行貨幣を媒介としない暗黙的な取引がもし可能であるとすれば，それを必ずしも排除しているわけではない。単位期間については，生産と消費における場合と同様に，単純な売買取引をも含む全工程において，時間間隔の最小単位を必要とするものと想定する。全工程に共通するそうした最小単位を，とくにMorishima（1977, Chapter 13）が提案したように，貨幣流通速度と等しいようにとることができる。このとき，フォン・ノイマン型投入産出の各工程は，その工程に必要な取引のための各期間の期首における決済手段，すなわち以下に見る第0座標に関する投入と産出の係数要素をもつものと考える。以下では，決済手段を表す財（銀行貨幣）のための座標としての投入産出ベクトルのための0番目の要素を加えて，決済取引がどのように記述されるかを見る。

貨幣の関わる取引工程は，以下に示す三種類のものが存在する。まず，一つ目は，ある財を購入する工程であり，それが独立で操業可能なものであるなら，投入としての各期の期首におけるある貨幣量と，産出としての次期の財の量を考慮することによって以下のように記述される。もし$q_k(t+1)$が次期における財kの貨幣的価値でありιが名目利子率であるなら，

[4] Nikaido（1968）において二階堂はKemeny et al.（1956）の存在定理を*central solution*，あるいは，いかなるゲーム論的概念を使用することもなく，有限次元空間における双対線形系の設定のもとで証明した。

$$\begin{array}{ccc} a=(\dfrac{q_k(t+1)}{1+\iota},0,0,\cdots,0) & \mapsto & b=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{0-th entry} & & k\text{-th entry} \end{array} \tag{2}$$

が財 k（k 番目の要素）を購入する工程である。本稿では投入あるいは産出ベクトルの成分がモデルの均衡として決定される変数（例えば上の $\frac{q_k(t+1)}{1+\iota}$ のように）となり得ることに注意しておく。二つ目は，財 k を販売する工程であり，

$$\begin{array}{ccc} a=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0) & \mapsto & b=((1+\iota)q_k(t),0,\cdots,0) \\ \uparrow & & \uparrow \\ k\text{-th entry} & & \text{0-th entry} \end{array} \tag{3}$$

のように記述される。ここで $q_k(t)$ は今期の財 k の貨幣的（名目）価値であり ι は名目利子率である。

三つ目は，単純にとある期の銀行貨幣を次の期のものへと持ち越す銀行預金工程である。すなわち，

$$\begin{array}{ccc} a=(1,0,0,\cdots,0) & \mapsto & b=(1+\iota,0,\cdots,0) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{0-th entry} & & \text{0-th entry} \end{array} \tag{4}$$

である。ここで ι は前述のとおり，名目利子率である。

2　Model

正の整数の集合を N で，実数の集合を R で表す。各 $n \in N$ について，n 次元ユークリッド空間を R^n で表す。R^n における各 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ と $y=(y_1,\ldots,y_n)$ において，$(x \leqq y) \iff (\forall i=1,2,\ldots,n,\ x_i \leqq y_i)$, $(x<y) \iff (x \leqq y \text{ and } x \neq y)$, $(x \ll y) \iff (\forall i=1,2,\ldots,n,\ x_i<y_i)$ となるように R^n 上で三種類の順序関係 $\leqq, <, \ll$ を考える。さらに R^n_+ と R^n_{++} で，それぞれ $\{x \in R^n | 0 \leqq x\}$ と $\{x \in R^n | 0 \ll x\}$ を表す。$m \times n$ 行列 $C=(c_{ij})$，ベクトル $x=(x_1,\cdots,x_m) \in R^m$，ベクトル $y=(y_1,\cdots,y_n) \in R^n$ について，$x \cdot C = (\sum_{i=1}^m x_i c_{i1},\cdots,\sum_{i=1}^m x_i c_{in}) \in R^n$，ならびに $C \cdot y = (\sum_{j=1}^n c_{1j}y_j,\cdots,\sum_{j=1}^n c_{mj}y_j) \in R^m$ のように，ベクトルと行列の間の自然な積の記述を用いる[5]。

$I=\{i \mid i=0,1,2,\cdots,m\}$ を**生産工程**の添字集合とし $J=\{j \mid j=0,1,2,\cdots,n\}$ を**財**の添字集合とする。ここで 0 番目の工程は，政府の工程を表し，0 番目の財はその政府の発行する**銀行貨幣**を表す。$A=A(i,j)$ は**投入**を表し $B=B(i,j)$ は**産出**を表す。いずれも $I \times J$ 上で非負行列である。我々の議論において 0 番目の財は特別な役割を担うため，二つの行列を $A=[A^0,\bar{A}]$ と $B=[B^0,\bar{B}]$ のように分ける。ここで A^0 と B^0 はそれぞれ A と B の第 0 列である。また一般に，A^j, B^j によって，行列 A, B のそれぞれ第 j 列を表すものとし，さらに，A_i, B_i によって，それぞれ各行列の第 i 行を表すものとする。

期間を示す添字を $t=0,1,\cdots$ で表す。各 t について，$x(t)=(x_0(t),x_1(t),\cdots,x_m(t)) \in R^{m+1}_+$ は期間 t における操業水準を表す。$p(t)=(p_0(t),p_1(t),p_2(t),\cdots,p_n(t)) \in R^{n+1}_+$ は期間 t における（例えばある期の基軸通貨のようななんらかの体系外の基準に基づいて評価された，通時的にも意味のある）価格水準である。ベクトル $p(t)$ も行列 A,B と同様に，$p(t)=(p_0(t),\bar{p}(t))$ のように表す。$p(t)$ をその期の第 0 要素で割って得られる $p(t)/p_0(t)$ は，t 期の価格体系に相当する。また $\alpha(t)=(1+$「期間 t から $t+1$ までの成長率」）であり $\beta(t)=(1+$「期間 t から $t+1$ までの実質利子率」$)=(1+\iota(t))\tau(t)$ であるとする。ここで $\iota(t)$ は期間 t から $t+1$ までの名目利子率であり $\tau(t)$ は期間 t から $t+1$ までの deflation factor である。すなわち $p_0(t) \neq 0$ とすると，$\tau(t)=\frac{p_0(t+1)}{p_0(t)}(1+$「期間 t から $t+1$ までのデフレ率」）である。

[5] 混乱のおそれのないかぎり，ベクトル間の内積を表すためにも“・”を用いる。

本モデルの均衡は変数列 $x(0), x(1), \cdots$, $p(0), p(1), \cdots$, $\alpha(0), \alpha(1), \cdots$, $\beta(0), \beta(1), \cdots$, $\iota(0), \iota(1), \cdots$, $\tau(0), \tau(1), \cdots$ で，以下の式を満たすものである。ここで $t = 0, 1, \cdots$ であり，各 t について $p_0(t) \neq 0$ とする。

$$x(t+1) \cdot A^0 - \tau(t)x(t) \cdot B^0 \leqq 0, \tag{5}$$

$$x(t+1) \cdot \bar{A} - x(t) \cdot \bar{B} \leqq 0, \tag{6}$$

$$(1+\iota(t))A \cdot \frac{p(t)}{p_0(t)} - B \cdot \frac{p(t+1)}{p_0(t+1)} \geqq 0, \tag{7}$$

$$(x(t+1) \cdot A^0)p_0(t+1) - \tau(t)(x(t) \cdot B^0)p_0(t+1) = 0, \tag{8}$$

$$(x(t+1) \cdot \bar{A}) \cdot \bar{p}(t+1) - (x(t) \cdot \bar{B}) \cdot \bar{p}(t+1) = 0, \tag{9}$$

$$(1+\iota(t))\tau(t)x(t) \cdot A \cdot \frac{p(t)}{p_0(t)} - x(t) \cdot B \cdot \frac{p(t+1)}{p_0(t+1)} = 0. \tag{10}$$

式(5)と(6)は，どの期間においても前期間中に準備され生産された量を越える貨幣および財を用いることはできないことを意味する。貨幣についての(5)式は，そのデフレ率を考慮して，その準備がなされておれば良いことを表す。式(7)は残余利益が存在しないことを示す。言い換えれば，当該モデルは投入物の資金を一期先に向けた借入でまかなうことが排除されてはいないが，その場合の利息支払いに丁度等しい割合を越えて，利益を得られるということはない。式(8)と(9)は過剰に準備もしくは供給された貨幣，あるいは財の価格が 0 であることを述べており，均衡の定義と合わせると，インフレ・デフレの状況に応じて，期首の準備金が調整されるといったことが要求されている。式(10)は赤字工程の操業水準が 0 でなければならないことを示している。式(7)について，1+ デフレ率を表す $\tau(t)$ が，$\tau(t) = p_0(t+1)/p_0(t)$ であることを考慮すると

$$(1+\iota(t))\tau(t)A \cdot p(t) - B \cdot p(t+1) \geqq 0 \tag{11}$$

とも表すことができる。

一般には A と B についてのさらなる仮定がなければこれらの条件を満たす解，とりわけ我々が後に定義する斉一成長解は存在しない。von Neumann（1937）においてノイマンは以下の追加の仮定を設けた。

$$A + B \gg 0. \tag{12}$$

直観的には，これはすべての生産工程がすべての財について正の量の消費あるいは生産をせねばならないことを意味する[6]。Kemeny et al.（1956）において指摘されたように，この仮定は非常に制約的である。そこで我々はKemeny et al.（1956）が用いた，より一般的かつ経済学的にも望ましい，次の仮定を置く。

(i) A のすべての行は少なくとも一つ正の要素をもつ。

(ii) B のすべての列は少なくとも一つ正の要素をもつ。

仮定(i)はすべての工程がいくらかの投入を用いることを示唆し，仮定(ii)はすべての財が少なくとも一つの工程において生産され得ることを述べている。またこれに加えて以下の仮定を置く。

(iii) 任意の財 $j \in \{1, \cdots, n\}$ について，少なくとも一つの工程 i_j が存在し，$a_{i_j 0} > 0$ および $b_{i_j j} > 0$ であることを除いて，残るすべての $k \in J$ について $a_{i_j k} = b_{i_j k} = 0$ を満たす。

仮定(iii)は，すべての財が貨幣で購入可能であることを示している。この条件は，貨幣の価格を正に保証する（$p_0(t) \neq 0$）役割を果たす[7]。

6　例えばTakayama（1985）を見よ。

7　仮定(iii)に代えて，第 0 行を政府工程と見なしてそこに向けて以下のような仮定を置くならば，同様の役割

最後に我々は次の条件を要請する。

$$x(t)\cdot B\cdot p(t)>0. \tag{13}$$

条件(13)はその経済において生産されるすべての財の総価値が正でなければならないことを意味する。

我々は以下の意味での均斉成長に着目する。すべての $t=0,1,2,\cdots$ について $\alpha(t)=\alpha$, $\beta(t)=\beta$, $\iota(t)=\iota$, $\tau(t)=\tau$, $x(t)=x$ および $x=\alpha^t x(0)$ となることを条件として加える。さらに，$p(t)$ の代わりにベクトル $q(t)=(q_0(t), q_1(t),\cdots,q_n(t))=\frac{p(t)}{p_0(t)}=(1,\frac{p_1(t)}{p_0(t)},\cdots,\frac{p_n(t)}{p_0(t)})$を考え，$(q_1(t),\cdots,q_n(t))$ の $\frac{1}{\tau}$ 倍が $(q_1(t+1),\cdots,q_n(t+1))$, $t=0,1,2,\cdots$, となるようなケースを考える。このとき，ベクトル $y(t)=(\frac{1}{\tau^t}p_0(t), p_1(t),\cdots,p_n(t))$ を用いると，すべての $t=0,1,2\cdots$ について，$y(t)=y(t+1)=y$ であり，$y=p(0)$となっている。ここで，簡単のため，$x=\{(x_0,x_1,\cdots,x_m)\in R_+^{m+1}\mid\sum_{i=0}^m x_i=1\}$, $y=\{(y_0,y_1,\cdots,y_n)\in R_+^{n+1}\mid\sum_{j=0}^n y_j=1\}$ としておく。なお，$q(t)$ と $y(t)$ について，$y(t)=I(1/\tau^t)p(t)=I(1/\tau^t)p_0(t)q(t)$である。このような価格は，斉一成長をサポートする期待デフレ（インフレ）率を一定とするようなものである。$I(\tau)$ を，下の(19)のような行列とすると，$y(t)=I(\frac{1}{\tau^t})p(t)$, $p(t)=I(\tau^t)y(t)$，$t=0,1,2,\cdots$, などの表し方ができる。$I(\tau)$ を B に右からかけると, $BI(\tau)=[\tau B_0,\bar{B}]$ を得る。すると(5)-(13)は以下の五つの式となる[8]。

$$\alpha x\cdot A-x\cdot BI(\tau)\leqq 0, \tag{14}$$

$$(1+\iota)\tau A\cdot y-BI(\tau)\cdot y\geqq 0, \tag{15}$$

$$\alpha(x\cdot A)\cdot y-(x\cdot BI(\tau))\cdot y=0, \tag{16}$$

$$(1+\iota)\tau x\cdot A\cdot y-x\cdot BI(\tau)\cdot y=0, \tag{17}$$

$$x\cdot BI(\tau)\cdot y>0. \tag{18}$$

$\tau\in R_+$ についての $(n+1)\times(n+1)$ 行列 $I(\tau)$ は次のように定義される。

$$I(\tau)=\begin{bmatrix}\tau & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}. \tag{19}$$

B^* を $B^*=BI(\tau)$ と定義する。我々の問題設定においては(16)，(17)，(18)式より $\alpha=\beta=(1+\iota)\tau$ を得ることに注意せよ。

3　Main Theorem

貨幣の価格は，均斉成長を表現する先の(14)-(18)の体系において，変数 y の最初の座標 $y_0=\frac{1}{\tau^t}p_0(t)$ $(t=0,1,2,\ldots)$ となる。これが $y_0>0$ を満たすような x および y を導出する。式(16)，(17)，(18)の下で $\alpha=\beta=(1+\iota)\tau$ であることに再度注意しておく。したがって，不等式(14)-(18)は次のように書き換えられる。

$$\alpha x\cdot(BI(\tau)-A)\geqq 0, \tag{20}$$

$$\alpha(BI(\tau)-A)\cdot y\leqq 0, \tag{21}$$

$$x\cdot BI(\tau)\cdot y>0. \tag{22}$$

が期待できる。$A_0=(\max\{\frac{\Sigma_{i=1}^m x_i(t+1)b_{i0}-(1+\iota(t))\Sigma_{i=1}^m\tau(t)x_i(t)a_{i0}}{x_0},0\},\bar{A}_0)$, $B_0=(\max\{\frac{(1+\iota(t))\Sigma_{i=1}^m\tau(t)x_i(t)a_{i0}-\Sigma_{i=1}^m x_i(t+1)b_{i0}}{x_0},0\},\bar{B}_0)$ および “任意の $i=1,\cdots,m$ について，$\exists\, k\in J$, $b_{0k}>0$, $a_{ik}>0$ かつ $b_{ik}=0$”。ここで，a_{i0}，b_{i0} は, 行列 A, B の第 i 行 0 列要素（通常, $p(t)$, $p(t+1)$, $\iota(t)$ の関数）であり，政府の第 0 行は貨幣の超過需要および超過供給を自動的に引き受けるということを意味する。$\bar{A}_0$ が，少なくとも一つの正の要素を含む n 次元の行ベクトルであるということは，政府の工程が少なくとも何らかの投入物をもつ（例えば，少なくとも一人の公務員を雇用する）ことを意味する。最後の二つの条件は，すべての工程にとって政府の活動が必要であることを意味する。

[8] これら A, B と書かれた行列は，その要素が $(1+\iota)$, τ, x, y の変数であり得ることに，注意しておく。

まず，仮定(iii)の下で解 x^*, y^* が存在するならば，$y_0^* > 0$ となることを確認する。もし $y_0^* = 0$ であるとすると，$y^* > 0$ であることから，ある財 $j' \in J$，$j' \neq 0$ が存在して，$y_{j'}^* > 0$ である。しかし，$y_0^* = 0$，$y_{j'}^* > 0$ ならびに仮定(iii)が同時に成立するとき，条件(15)が工程 $i_{j'}$ によって不成立となる。したがって，$y_0^* > 0$ でなければならない。

Theorem 1：仮定(i), (ii), (iii)の下で，$y_0 > 0$ を満たす不等式系(14)-(18)の解が存在する。

Proof：$\lambda = \alpha/(1+\alpha)$ と定義する[9]。不等式(14)-(18)は $\alpha = \beta = (1+\iota)\tau = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ であることを考慮すると，行列 A，B^* の中には，x, y, λ 以外の変数が入らないものとして，下記の関係に書くことができる。ここで，$B^*(\lambda)$ とは，$BI(\tau)$ と先に書いたもののことであるが，例えば，$\iota \geqq 0$ に固定すると，$\tau = \frac{\beta}{1+\iota}$ という式から τ は $\beta = \alpha$ の関数と見なせるので，これを $B^*(\lambda)$ と表しておく[10]。

$$\lambda x \cdot A - (1-\lambda) x \cdot B^*(\lambda) \leqq 0, \tag{23}$$

$$\lambda A \cdot y - (1-\lambda) B^*(\lambda) \cdot y \geqq 0, \tag{24}$$

$$x \cdot B^*(\lambda) \cdot y > 0. \tag{25}$$

我々の状況がMorishima（1960, p.357）における三つの式 $(1'''), (3'''), (5''')$ の主張と同値であることは容易に示される。Morishima（1960）の補助定理2（証明は二階堂副包による）を我々の設定に応用する。

まず，森嶋における写像 T に代えて，二つの写像 S と T を考える。$S = \{x \mid x$ は式(26)と(28)を満たす$\}$，$T = \{(y, \lambda) \mid (y, \lambda)$ は式(27)と(28)を満たす$\}$。

$$\lambda x \cdot A(x^*, y^*, \lambda^*) - (1-\lambda) x \cdot B^*(x^*, y^*, \lambda^*) \leqq 0, \tag{26}$$

$$\lambda A(x^*, y^*, \lambda^*) \cdot y - (1-\lambda) B^*(x^*, y^*, \lambda^*) \cdot y \leqq 0, \tag{27}$$

$$v[\lambda A(x^*, y^*, \lambda^*) - (1-\lambda) B^*(x^*, y^*, \lambda^*)] = 0. \tag{28}$$

したがって，Eilenberg and Montgomery（1946）の不動点定理を用いることによって，写像 $(x^*, y^*, \lambda^*) \mapsto S \times T(x^*, y^*, \lambda^*)$ が不動点をもつことを確認できる。この写像の閉写像性ならびに値の可縮性を満たすことについては，上述したMorishima（1960）の補助定理2の証明とほぼ同様の手続きで確認できる。最後に，仮定(iii)によって $y_0^* > 0$，すなわち $p_0 > 0$ が保証されることは，前述の通りである[11]。 ■

4 Conclusion

当該の貨幣の入った投入産出設定については，本稿で確認された均斉成長経路的定常均衡の存在とはまた別に，一般均衡の存在問題としてHaga and Otsuki（1965）のような考察も今後の課題として残される。同様に，当該の設定におけるBalasko and Shell（1980），Balasko and Shell（1981）の意味でのWeak Pareto Optimalityとの関係において，ターンパイク的な問題を論ずるということも望まれる。Weakly Maximal Programmesの一種のターンパイク性についてはBrock（1970）が証明しており，消費概念を例えば世代重複的経済で自然に導入した場

[9] $0 < \lambda < 1$ であることに注意しておく。

[10] B^* の第0列には，τ が変数として入り込んでいる。

[11] 先の脚注7において述べた，政府工程への仮定を用い，同様のことを保証できることを確認する方法について付記する。Morishima（1960）における（ii）$L > 0$ の仮定のかわりに，先の政府工程に関する仮定は，均衡において，必ず政府工程が操業されていることを保証するので，同時に，政府工程による貨幣需給バランスも成立していることが保証される。貨幣の需給均等が保証されれば，Thompson（1956）のcentral solutionに関する議論（Tucker 1955, Theorem 6あるいはNikaido 1968, Corollary 3, p.39を見よ）と同様にして，$p_0 > 0$ となる解を得る。

合，Weakly Maximalという特性をWeakly Pareto Optimalという緩やかな最適性特性に関連づけることは困難ではない。本稿において確認された貨幣的斉一成長経路の存在と緩やかな意味での最適性は，現状の経済動学の理論を一歩進める重要な手掛かりとなることが期待される。

References

Balasko, Y. and Shell, K. (1980): "The overlapping-generations model. I. The case of pure exchange without money," *Journal of Economic Theory 23*, 281-306.

Balasko, Y. and Shell, K. (1981): "The overlapping-generations model. II. The case of pure exchange with money," *Journal of Economic Theory 24*, 112-142.

Brock, W. A. (1970): "On Existence of Weakly Maximal Programmes in a Multi-Sector Economy," *The Review of Economic Studies 37(2)*, 275-280.

Debreu, G. (1959): *Theory of Value*. Yale University Press, New Haven, CT.

Eilenberg, S. and Montgomery, D. (1946): "Fixed point theorems for multi-valued transformations," *American Journal of Mathematics 68*, 214-222.

Grandmont, J.-M. and Laroque, G. (1976): "The Liquidity Trap," *Econometrica 44*(1), 129-135.

Haga, H. and Otsuki, M. (1965): "On a Generalized von Neumann Model," *International Economics Review 6*(1), 115-123.

Kemeny, J. G., Morgenstern, O., and Thompson, G. L. (1956): "A Generalization of the von Neumann model of an Expanding Economy," *Econometrica 24*, 115-135.

Morishima, M. (1960): "Economic Expansion and the Interest Rate in Generalized von Neumann Models," *Econometrica 28*(2), 352-363.

Morishima, M. (1964): *Equilibrium, Stability and Growth*. Clarendon Press, Oxford. 日本語訳：森嶋通夫著作集2『均衡・安定・成長』2003，久我清／入谷純／永谷裕昭／浦井憲，岩波書店, Tokyo.

Morishima, M. (1969): *Theory of Economic Growth*. Clarendon Press, Oxford. 日本語訳：森嶋通夫著作集3『経済成長の理論』2005，安冨歩／西部忠／武藤功／遠藤正寛, 岩波書店，Tokyo.

Morishima, M. (1977): *Walras' Economics: A Pure Theory of Capital and Money*. Cambridge University Press, Cambridge. 日本語訳：森嶋通夫著作集9『ワルラスの経済学 ―資本と貨幣の純粋理論』2004, 西村和雄, 岩波書店，Tokyo.

Nikaido, H. (1968): *Convex Structures and Economic Theory*. Academic Press, New York.

Takayama, A. (1985): *Mathematical economics: 2nd Edition*. Cambridge University Press.

Thompson, G. L. (1956): "On the Solution of a Game-theoritic Problem," in *Linear Inequalities and Related Systems*, (Khun, H. and A.W.Tucker, ed). pp. 275-284, Princeton University Press.

Tucker, A. W. (1955): *Game Theory and Programming*. Department of Mathematics, The Oklahoma Agricultural and Mechanical College. Multilized Notes.

von Neumann, J. (1937): "Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brower'schen Fixpunktsatzes," *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums viii*. English translation: "A Model of General Economic Equilibrium", *Review of Economic Studies*, xiii, (1945-6), pp. 1-9.

Reconsideration of von Neumann-Morishima Multi-Sectoral Growth Model for Monetary Steady State Existence Problem

Ken Urai, Satoru Kageyama and Hiromi Murakami

Abstract

In this paper, we introduce money and price level into the von Neumann input-output model (von Neumann 1937) under the most general setting of Kemeny et al. (1956). We distinguish the difference between *nominal* and *real interest rates* and show that the concept of *balanced growth* is appropriately extended as the *monetary balanced growth* that incorporates the essential role of credit and money with a constant expected *inflation* or *deflation rate*. We consider a bank-money that is used to settle all transactions and assume that an elementary time-interval is equal to the *money circulation velocity* as the idea suggested by Morishima (1977, Chapter 13).

JEL Classification: C62, C70, D53, E40

Keywords: von Neumann Model, Monetary Balanced Growth, Input Output Analysis, Minimax Game, Eilenberg-Montgomery Fixed Point Theorem