



Title	非定常確率的環境とオートマトンとの相互作用に関する研究
Author(s)	辻, 秀一
Citation	大阪大学, 1974, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/727
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

非定常確率的環境とオートマトン との相互作用に関する研究

1974年2月

辻 秀 一

非定常確率的環境とオートマトン との相互作用に関する研究

辻 秀 一

内 容 梗 概

本論文は，筆者が大阪大学大学院基礎工学研究科博士課程在学中に行なった非定常確率的環境とオートマトンとの相互作用に関する研究をまとめたものである。

第1章は序論であり，本論文の意義，背景，問題の現状について概説した。

第2章では本論文全般にわたる問題について述べ，さらに，非定常確率的環境すなわち非定常ランダム媒体の定義を行ない，あわせてこのランダム媒体に対して動作するオートマトンの動作評価の基準を与える「最適性」「 ϵ -最適性」「当を得ている」の三つを定義した。

第3章では非定常ランダム媒体を確率オートマトンとして定式化し，これと有限決定性オートマトンとの相互作用を調べ，有限決定性オートマトンが当を得た動作をするための確率オートマトンの満たすべき条件を導出した。

第4章では有限決定性オートマトン，確率オートマトンと非定常ランダム媒体との相互作用を一様乱数列を用いて解析し，これらオートマトンは非定常ランダム媒体に対して ϵ -最適になることが証明された。

第5章では学習機能を持つ可変構造 fuzzy オートマトンとして，二種の fuzzy オートマトン $FA1$ ， $FA2$ を構成し，これらのオートマトンと非定常ランダム媒体との相互作用について考察した。その結果，fuzzy オートマトン $FA1$ は非定常ランダム媒体に対して最適になり，しかも有限時間で最適状態に落ち着くことが示された。また， $FA2$ は非定常ランダム媒体に対して ϵ -最適になることが示された。

第6章は結論であり，本論文で得られた諸結果について考察を加え，今後

の問題点をあげている。

関 連 発 表 論 文

I 学会誌関係

- 1) 田中, 豊田, 水本, 辻: “あいまいオートマトン理論とその制御への応用”, 制御工学, Vol. 14, No. 9, p. 541 (1970).
- 2) 辻, 水本, 豊田, 田中: “非定常ランダム媒体におけるオートマトン” 信学論 (D), Vol. 55-D, No. 1, p. 23 (1972).
- 3) 辻, 水本, 豊田, 田中: “ランダム媒体と可変構造fuzzyオートマトンとの相互作用”, 信学論 (D), Vol. 55-D, No. 2, p. 143 (1972).
- 4) H. Tsuji, M. Mizumoto, J. Toyoda, K. Tanaka: “An Automaton in the Nonstationary Random Environment”, Information Sciences. 6, p. 123 (1973).
- 5) 辻, 水本, 豊田, 田中: “線形Fuzzyオートマトン”, 信学論 (A), Vol. 55-A, No. 4, p. 256 (1973).
- 6) 辻, 水本, 豊田, 田中: “非定常ランダム媒体におけるオートマトンの漸近的最適動作について”, 信学論 (D) Vol. 57-D, No. 1, p. 31 (1974).
- 7) 辻, 水本, 豊田, 田中: “非定常ランダム媒体におけるfuzzyオートマトンの最適動作について”, 信学論, (投稿中).

II 研究会関係

- 1) 辻, 水本, 豊田, 田中: “非定常ランダム媒体と有限オートマトンとの相互作用”, 信学会オートマトン研資, A 71-28, (1971-06).
- 2) 辻, 水本, 豊田, 田中: “非定常ランダム媒体と可変構造fuzzyオー

トマトンとの相互作用”，信学会オートマトンと言語研資，AL72-36
(1972-07)。

3) 辻，水本，豊田，田中：“オートマトン間の n 人ゲームに関する一考察”，信学会オートマトンと言語研資，AL73-20,(1973-06)。

Ⅲ 学会講演会関係

1) 辻，水本，豊田，田中：“Fuzzyオートマトンによる学習制御”，
昭和45信学会全国大会。

2) 辻，水本，豊田，田中：“Fuzzyオートマトンによる確率的対象の学習制御”，昭和46信学会全国大会。

3) 辻，水本，豊田，田中：“ランダム媒体とfuzzyオートマトンとの相互作用について”，昭和46電気関係関西連合大会。

4) 辻，水本，豊田，田中：“線形fuzzyシステム”，昭和48信学会全国大会。

目 次

第 1 章	序 論	1
第 2 章	問題の設定と諸定義	3
2.1	緒 言	3
2.2	Tsetlin によるモデル	4
2.3	諸 定 義	6
2.4	結 言	9
第 3 章	確率オートマトンとしてのランダム媒体と 有限オートマトンとの相互作用	10
3.1	緒 言	10
3.2	ランダム媒体の確率オートマトンとしての定式化	10
3.3	有限オートマトンの極限状態分布	14
3.4	有限オートマトンの当を得た動作	29
3.5	結 言	37
第 4 章	有限オートマトンの ε -最適な動作	38
4.1	緒 言	38
4.2	有限オートマトン $L_{r,k}$ の ε -最適性	38
4.3	有限オートマトン $A_{r,k}$, 確率オートマトン $K_{r,k}$ の ε -最適性	54
4.4	結 言	62

第 5 章	可変構造 fuzzy オートマトンの最適動作と ε -	
	最適動作	63
5.1	緒言	63
5.2	Fuzzy オートマトン FA1 の構成とその動作	65
5.3	Fuzzy オートマトン FA2 の構成とその動作	72
5.4	Fuzzy オートマトンの種々のシステムに対する動作とそのシミュレーション	77
5.5	結言	85
第 6 章	結論	88
謝辞		90
文献		91

第 1 章 序 論

人間を含め生物一般は、過去の環境によって今までと異なる存在に変化する学習能力を持っているので、環境に順応して生存してゆくことができる。ところで、オートマトンは電子計算機のモデルとしてや生物器官の機能的あるいは生理的モデルと考えられるので、ある種の環境において、この環境と相互作用を持ちつつ自己の行動を有利に保つように自己を制御するオートマトンは、社会あるいは自然環境に順応して行動する人間あるいは生物の数学的モデルと見なすことができる。もちろん、外部環境を未知の制御対象と考えるならば、オートマトンは制御器あるいは電子計算機と見なされ、環境とオートマトンの系は適応制御系、学習制御系のモデルとも考えられる。

一般に環境と言っても種々のものが考えられるが、Tsetlin⁽¹⁾は環境を次のような確率的なものに特性化した。すなわち、環境の入出力が離散的で、ある入力に対する反応（出力）が2種類しかなくて、その出力は入力に関係したある確率で決定される。Tsetlinはこのように特性化された環境に対して合目的的に動作するオートマトンとして、ある状態遷移関数、出力関数を持つ有限決定性オートマトンを構成した。ところで、このオートマトンは実質的につぎの二つの動作を行なっていると考えられる。まず第一に、何回も試行をくり返すうちに環境の確率的パラメーターを推定し、第二に、その推定された確率的パラメーターにもとずいてオートマトン出力を決定している。この推定と決定についての問題は、ある複数の確率的パラメーターの大小についての仮説の検定問題として、すでにある程度研究されている^{(2),(3)}。

その後、確率的環境に対して合目的的に動作するオートマトンとして、

Tsetlin のものとは状態遷移が異なった有限決定性オートマトンやこれらの有限決定性オートマトンをもとにした確率オートマトン等が種々構成された^{(5), (6)}。ところが，これらのオートマトンは記憶容量（状態数）は大きい，自己の構造を変化させることができないものである。すなわち，これらのオートマトンは，学習能力を持たない，初めからその目的に合うように作られたオートマトンである。学習能力を持つオートマトンとして，可変構造確率オートマトンが，初めて Varshavskii と Vorentsova⁽⁴⁾ によって構成され，確率的環境に対する動作が調べられている。その後，学習確率オートマトンについては，種々研究が行なわれている。⁽⁹⁾ところが，学習オートマトンとしての fuzzy オートマトンの確率的環境に対する動作についての研究はほとんど行なわれていない。Wee と Fu⁽²²⁾ によって fuzzy オートマトンが定式化されて以来，学習 fuzzy オートマトンの研究は，浅居と北嶋^{(25), (26)} による学習制御における最適点探索を行なわせているものだけである。

また，有限決定性オートマトン，学習機能を持つ可変構造オートマトンの確率的環境に対する動作は，環境の確率的性質が時間によって一定である場合のみ解析されていて，時間的に変動する場合にはあまり調べられていない。わずかに周期的に変動する確率的性質を持つ環境に対するオートマトンの動作が調べられているにすぎない。

本論文では上述したようなことより，確率的な性質が時間によって変化する，より一般的な非定常確率的環境と有限決定性オートマトン，可変構造 fuzzy オートマトンとの相互作用について考察し，これらのオートマトンは非定常確率的環境に対して最適性あるいは ϵ - 最適性が成立することが示された。

第2章 問題の設定と諸定義

2.1 緒言

確率的環境，本論文ではこれをランダム媒体とよぶが，このランダム媒体に対して知能的に振まうオートマトンを最初に定式化したのは Tsetlin⁽¹⁾ である。かれはランダム媒体の下にある有限決定性オートマトンの働きを考え，オートマトンに線形戦略をとらせると，漸近的最適な動作を示した。

この Tsetlin のモデルをもとにして，その後多くの研究がなされている。たとえば，Varshavskii と Vorentsova⁽⁴⁾ は Tsetlin のモデルを拡張して，有限決定性オートマトンの代わりに，可変構造確率オートマトンを用いた。さらに，Krylov⁽⁵⁾ は有限決定性オートマトンの線形戦略に確率を導入し，また，Fu と Li⁽⁶⁾ は Tsetlin のオートマトンとは異なった状態遷移を行なう有限決定性オートマトンを定式化し，いずれの場合にもそれらのオートマトンは漸近的最適な動作を行ない，かつ Tsetlin のオートマトンよりも良い動作を行なうことが示された。

一方，ランダム媒体の性質が時間によって変化する非定常ランダム媒体についても，すでに二・三の研究が行なわれている。たとえば，Chandrasekaran と Shen⁽⁷⁾，Narendra と Viswanthan⁽⁸⁾ は，周期的に性質が変化するランダム媒体におけるオートマトンの漸近的最適動作について論じている。ところが，このように性質が時間によって変化するランダム媒体については，その変化が周期的である場合にしか調べられていない。そこで，本論文では，そのような変化の仕方がわかっていない，より一般の非定

常ランダム媒体に対するオートマトンの動作を調べる。

まず，そのために本章では，Tsetlin⁽¹⁾によって定式化されたランダム媒体とオートマトンとの関係と，このオートマトンの行なう動作についての諸性質を述べる。つぎに，本論文全般にわたって考察しようとしている非定常ランダム媒体の定義を行ない，さらに，この非定常ランダム媒体に対するオートマトンの動作の良さの程度について，「最適性」，「 ϵ -最適性」と「当を得ている」の三つの評価基準を与える。

2.2 Tsetlin によるモデル

まず，準備として Tsetlin⁽¹⁾によって定義されたランダム媒体と有限決定性オートマトンとの相互作用について，簡単に説明しておく。

かれは媒体とオートマトンの関係を図 2.1 のように設定した。ランダム媒体 C は $C(p_1, p_2, \dots, p_k)$ によって特性づけられている。ここで， $0 \leq p_i \leq 1, i=1, 2, \dots, k$ 。オートマトン A の入力としては， $x=1$ （失敗）， $x=0$ （成功）の二つの値をとるものとし， A の出力 u は A による反応である。もし，オートマトン A が反応 $u_i (i=1, 2, \dots, k)$ を起こすと， A へのつぎの入力 x は，媒体 C によりつぎのように確率的に規定される。

$$x = \begin{cases} 1 \cdots \text{確率 } p_i \\ 0 \cdots \text{確率 } 1 - p_i \end{cases} \quad (2.1)$$

オートマトン A の目標としては，極限における平均失敗率

$$M(A, C) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{初めの } t \text{ 回試行のうちの失敗の回数}}{t} \quad (2.2)$$

を最小にすることである。かれはこのために，オートマトン A の状態遷移に

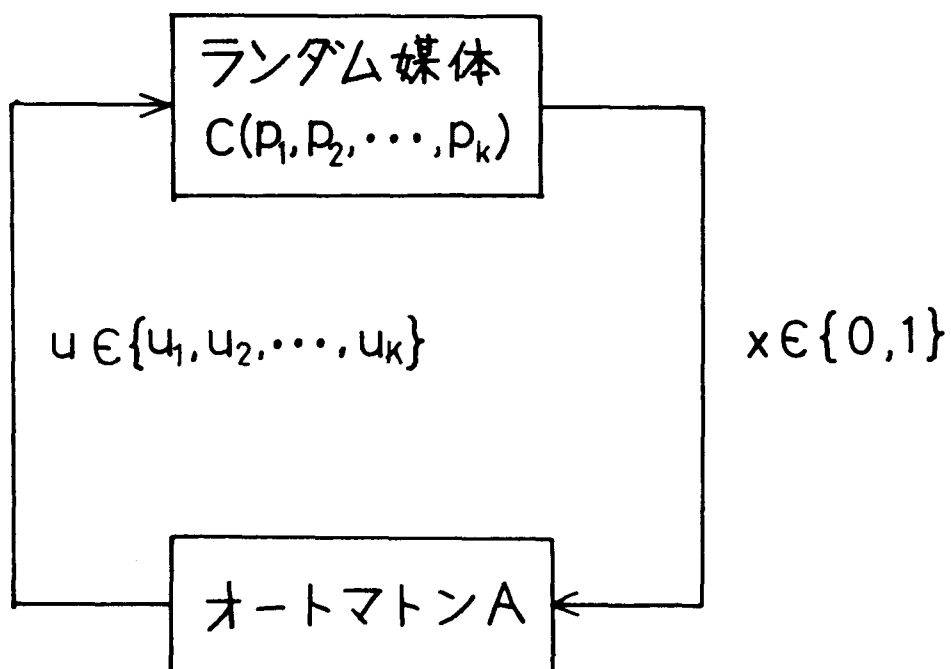


図 2.1 Tsetlin のモデル

線形戦略を導入し，ランダム媒体が定常である，すなわち各 p_i は未知であるが固定されている場合には，オートマトン A は当を得た動作を行ない，さらに， $\min(p_1, p_2, \dots, p_k) \leq 1/2$ の条件があれば漸近的最適な動作を示した。ここで，当を得た動作というのは，オートマトンの出力 $u_1, u_2, \dots, u_k$ のおのおのを等確率 $1/k$ でランダムに媒体に入れたときの極限平均失敗率よりも，オートマトン A の極限平均失敗率のほうが小さい。すなわち

$$M(A, C) < \frac{1}{k} (p_1 + p_2 + \dots + p_k) \quad (2.3)$$

となる場合である。また漸近的最適な動作というのは

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(A, C) = \min(p_1, p_2, \dots, p_k) \quad (2.4)$$

となる場合である。ここで， r はオートマトン A の状態数である。すなわち，

$$\min(p_1, p_2, \dots, p_k) = p_i$$

とすると， u_i がオートマトンの最適出力となり，オートマトン A は，十分大きい状態数をもっているならば，十分時間が経過すると，最適出力 u_i のみを出し続けることになる。

2.3 諸定義

Tsetlin⁽¹⁾におけるランダム媒体と有限オートマトンとの相互作用の場合と同様にして，非定常ランダム媒体とオートマトンとの関係を図 2.2 のように設定する。

つぎに，非定常ランダム媒体をつぎのように定義する。

〔定義 2.1〕 非定常ランダム媒体 $C_k(p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t))$ をつぎのようなシステムとする。すなわち，

入力集合 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ ，出力集合 $X = \{0, 1\}$

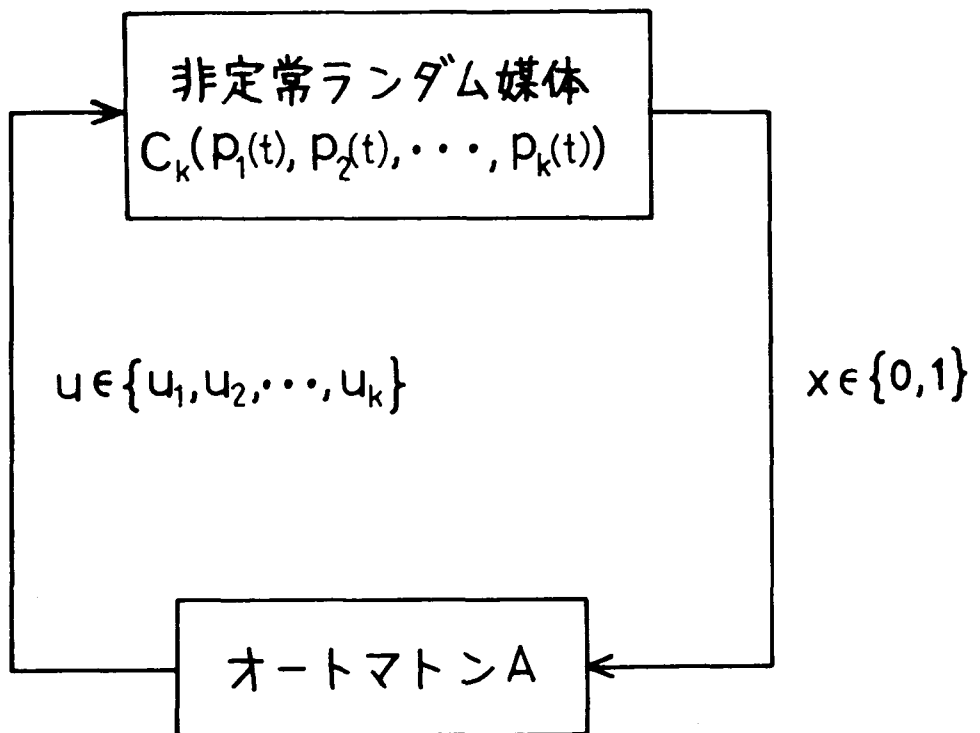


図 2.2 非定常ランダム媒体とオートマトンとの相互作用

をもち、時刻 t における入力 $u(t)$ が u_i であるとき、出力 $x(t)$ は確率的につぎのように決定される。

$$x(t) = \begin{cases} 1 \cdots \text{確率 } p_i(t) \\ 0 \cdots \text{確率 } 1 - p_i(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

ここで、ある i^*, α_0, β_0 が存在して

$$0 < p_{i^*}^*(t) < \alpha_0 < \beta_0 < p_i(t) < 1, \quad i \neq i^* \quad (2.6)$$

をみたすものとする。

ここで、図 2.2 における非定常ランダム媒体 C_k と結合されているオートマトン A の目標は、入力 x としてできるだけ多く「0」（成功）をとり、「1」（失敗）を少なくすることである。すなわち、オートマトン A は最小の失敗出力確率 $p_i^*(t)$ に対応する最適出力 u_i^* のみを出し続ければよいことがわかる。よって、オートマトン A の動作の最適性、 ϵ -最適性をつぎのように定義する。

〔定義 2.2〕 非定常ランダム媒体 C_k に対して動作するオートマトン A の出力集合を $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ とし、時刻 t において A が出力 u_i を出す確率 $p_i(t)$ とするとき、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i^*(t) = 1 \quad (2.7)$$

が成立するならば、オートマトン A は非定常ランダム媒体 C_k に対して最適であるという。なお、 i^* は式 (2.6) をみたすものとする。

〔定義 2.3〕 オートマトン A が非定常ランダム媒体 C_k に対して動作しているとき、 A がパラメータ M を持っているものとする、

$$\lim_{M \rightarrow \alpha} \lim_{t \rightarrow \infty} p_i^*(t) = 1 \quad (2.8)$$

が成立するならば、オートマトン A は非定常ランダム媒体 C_k に対して ϵ -最適であるという。ただし、 α はある実数または ∞ のうちいずれかであ

り， $\rho_i^*(t)$ は定義 2.2 におけるものと同じである。

(注) Tsetlin によって定義された漸近的最適⁽¹⁾および Narendra に

よる ϵ -最適⁽⁹⁾は，いずれも定義 2 の ϵ -最適に含まれる。

つぎに，Tsetlin の場合と同様に，ランダム媒体出力の平均失敗率を基準にして，オートマトンの当を得た動作を定義する。

〔定義 2.4〕 非定常ランダム媒体 C_k に対して動作するオートマトン A の出力集合 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ とする。また， $R(C)$ を， $u_1, u_2, \dots, u_k$ を等確率 $1/k$ でランダムに C_k に入れたときの C_k からの出力の極限平均失敗率とし， $M(A, C)$ を，オートマトン A が動作しているときの極限平均失敗率とする。このとき，

$$M(A, C) < R(C)$$

が成立するならば，オートマトン A は非定常ランダム媒体 C_k に対して当を得た動作をしているという。

2.4 結 言

本章では，ランダム媒体とそれに対するオートマトンの動作に関するこれまでの研究の経過を述べ，本論文における非定常ランダム媒体に対するオートマトンの動作の研究にいたった背景を述べた。また，以後各章において扱われる非定常ランダム媒体の定義を行ない，さらにこの媒体に対するオートマトンの動作評価を行なうための基準として，「最適」，「 ϵ -最適」，「当を得ている」の三つの定義を行なった。

第3章 確率オートマトンとしてのランダム媒体と有限オートマトンとの相互作用

3.1 緒言

本章においては，非定常ランダム媒体を確率オートマトンとみなし，この非定常ランダム媒体と有限決定性オートマトンとの相互作用について考察するものである。ここで，非定常ランダム媒体としては2入力のものだけを対象とし，有限オートマトンとしては，2状態2出力のものを対象とする。

ところで，非定常ランダム媒体が前章の定義2.1によるものであるので，これはYasuiとYajima⁽¹⁰⁾による零次近似で完全に孤立した確率オートマトンになっている。まず，この確率オートマトン（非定常ランダム媒体）と結びついた有限オートマトンの極限状態分布を導き出す。さらに，確率オートマトンが二・三の条件をみたすならば，有限オートマトンは確率オートマトンに対して当を得た動作を行なうことを示す。^{(11), (12), (13)}

3.2 ランダム媒体の確率オートマトンとしての定式化

Tsetlinのランダム媒体においては，出力の確率分布がその時間の入力だけによって決定されている。しかし一般に，媒体の動作，すなわち出力は，その時間の入力だけでなく，それ以前の入力によっても規定されているものと思われる。すなわち，一般に媒体は，過去の動作を記憶する内部状態を持っているものと考えることができる。このために本章では，非定常ランダム媒体として確率オートマトンを採用する。この場合，簡単のため確率オートマトン（すなわち非定常ランダム媒体）は，つぎに定義するように，2入力2出力2状態であるものと仮定し，これをCと表わす。

〔定義 3.1〕 非定常ランダム媒体 C は

$$C = (U, S, X, \bar{\pi}_0, \{P(u) | u \in U\}, g)$$

で表わされる確率オートマトンとする。ここで

(1) $U = \{u_1, u_2\}$; 入力集合

(2) $S = \{s_1, s_2\}$; 状態集合

(3) $X = \{0, 1\}$; 出力集合

(4) $\bar{\pi}_0 = (1, 0)$; 二次元確率行ベクトル (初期状態分布)

(5)

$$P(u_1) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, P(u_2) = \begin{pmatrix} 1-c & c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

: 遷移確率行列, ただし $0 \leq a, b, c, d \leq 1$

(6) $g: s_1 \rightarrow 0, s_2 \rightarrow 1$; 出力関数

〔定義 3.2〕 確率オートマトンの入力系列 $u^* = u^{(1)} u^{(2)} \cdots u^{(m)}$ に対する遷移確率行列は

$$P(u^*) = P(u^{(1)}) P(u^{(2)}) \cdots P(u^{(m)})$$

と定義する。また, 時刻 $m+1$ における状態確率行ベクトル (状態確率分布) は

$$\bar{\pi}(m+1) = \bar{\pi}_0 P(u^*)$$

で与えられる。

(注) 定義 3.1 で定義した媒体 C は, 特別な場合として

$$a + b = 1, c + d = 1$$

とすると, Tsetlin のモデルにおけるランダム媒体になっている。

つぎに, 定義 3.1 で定義した媒体 C (すなわち確率オートマトン) と 2 状態有限決定性オートマトンとの相互作用について述べるのであるが, この非

定常ランダム媒体 C は定義 2.1 の式 (2.6) をみたすので，これは零次近似で完全に孤立した確率オートマトン⁽¹⁰⁾ になる。そこで，まず Yasui と Yajima⁽⁵⁾ の意味において零次近似で完全に孤立している確率オートマトンについて説明しよう。確率オートマトン C の状態 s_i は出力 1 (失敗) に対応し，初期状態は s_1 と仮定しているので，入力系列が入ったときの失敗確率は，その入力系列に対応する遷移確率行列の (1, 2) 要素となる。時刻 t において，入力 $u_i \in U$ ($i = 1, 2$) が入ったときの失敗出力確率値を $p_i(t)$ とする。

〔定義 3.3〕 つぎの条件をみたすとき，確率オートマトン C は零次近似で完全に孤立しているという。

$$\begin{aligned} |p_1(t) - \alpha_0| < \epsilon, |p_2(t) - \beta_0| < \epsilon \\ |\alpha_0 - \beta_0| = 2\epsilon \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで，

$$\alpha_0 = \frac{a}{a+b}, \beta_0 = \frac{c}{c+d}$$

これを図示すると，図 3.1 のようになる。

〔定理 3.1〕 (Yasui & Yajima⁽¹⁰⁾) 確率オートマトン C が零次近似で完全に孤立しているための必要十分条件は，

$$(1) \|H\| \neq 0$$

$$(2) \quad h = \frac{\delta}{1-\delta} \cdot \frac{\max\{\|H\|, \|A_2\|, \|B_2\|\}}{\|H\|} \leq 1$$

ただし，

$$\|H\| = \frac{|bc - ad|}{(a+b)(c+d)},$$

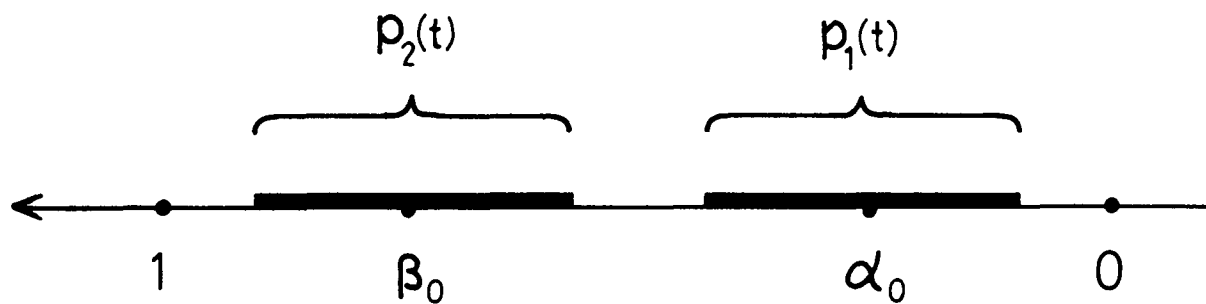


図 3.1 零次近似で完全に孤立した確率オートマトンの失敗出力確率

$$\|A_2\| = \frac{a}{a+b}, \|B_2\| = \frac{c}{c+d},$$

$$\delta = \max\{|1-a-b|, |1-c-d|\}$$

確率オートマトン C は零次近似で完全に孤立しているので、確率オートマトンと有限決定性オートマトンとの関係は、図 3.2 に示すように、有限オートマトン A と式 (3.1), (3.2) をみたす非定常ランダム媒体 $C_k(p_1(t), p_2(t))$ との関係になる。また、有限オートマトン A は、Tsetlin の線形戦略を図 3.3 のように取るものとする。すると、Tsetlin⁽¹⁾ の場合と同様に、有限オートマトン A の状態遷移が、つぎの確率行列 $P(t)$ によって決定される。

$$P(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) & p_1(t) \\ p_2(t) & q_2(t) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} p_i(t) + q_i(t) = 1 \\ i = 1, 2 \end{matrix}$$

このように、媒体が零次近似で完全に孤立した確率オートマトンの場合には、オートマトン A の動作は、非定常遷移確率行列 $P(t)$ を持つ 1 入力非定常確率オートマトンによって表現することができる。

3.3 有限オートマトンの極限状態分布

前節の結果にもとづいて、あらたに 1 入力非定常確率オートマトンを定義し、この極限状態分布について考察する。

〔定義 3.4〕 1 入力非定常確率オートマトン A を

$$A = (S, P, \pi)$$

とする。ここで、

(1) $S = \{s_1, s_2\}$; 状態集合

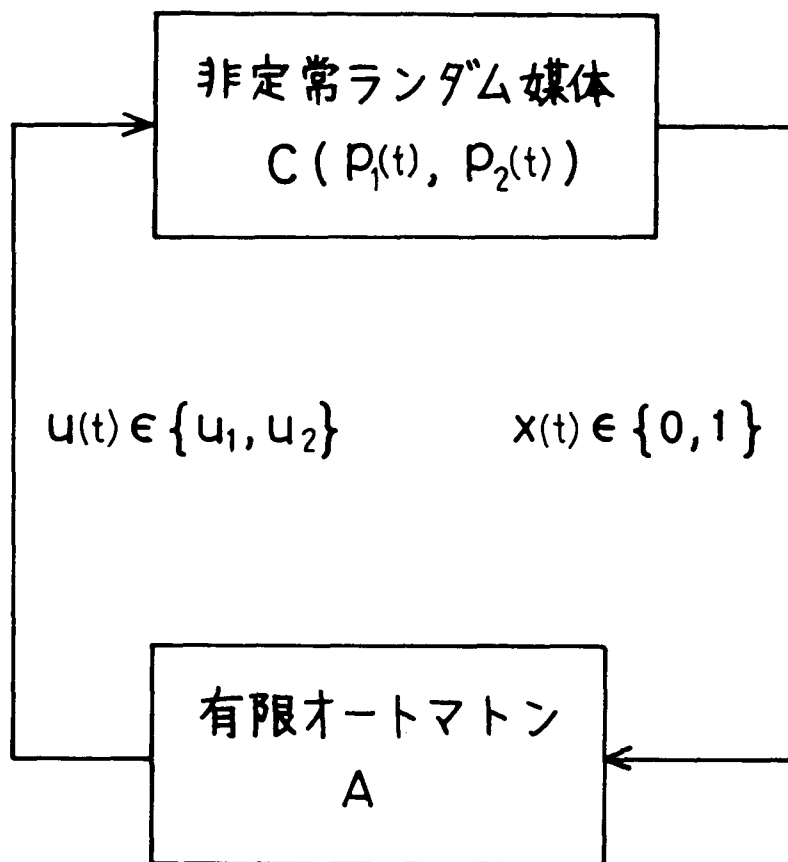
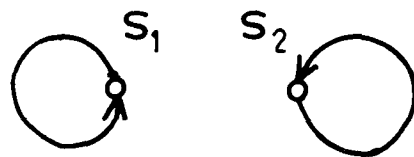


図 3.2 非定常ランダム媒体と有限オートマトンとの相互作用



$X = 1$



$X = 0$

図 3.3 有限オートマトン A の状態遷移

$$(2) \quad P = P(t) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

；非定常遷移確率行列

ここで，

$$\alpha = \alpha(t), \beta = \beta(t), 0 \leq \alpha, \beta \leq 1$$

$$|\alpha - \alpha_0| < \epsilon, |\beta - \beta_0| < \epsilon$$

$$\epsilon = |\alpha_0 - \beta_0| / 2 \quad (3.4)$$

(3) $\pi = \pi(t)$ は時刻 t における状態確率行ベクトル (状態確率分布) であり，

$$\pi = \pi(t) = (r, 1 - r) \quad (3.5)$$

とする。ここで， $r = r(t)$ ， $0 \leq r \leq 1$

$$\pi(t+1) = \pi(t)P(t) \quad (3.6)$$

非定常確率オートマトンの定義を終り，つぎに，このオートマトンの動作を解析するために，まず初めに， α ， β が時間的に変化しない場合について考えてみよう。

時間無限大において，すなわち， $n \rightarrow \infty$ ならば，状態ベクトルは

$$\pi(n) = \pi(1)P^{n-1} \rightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}, \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) \quad (3.7)$$

となることがわかっている⁽¹⁴⁾。ここで，

$$f(\alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad (3.8)$$

とし， α ， β が式 (3.4) をみたすものとする，

$$\max_{\alpha, \beta} f(\alpha, \beta) = f(\alpha_0 - \epsilon, \beta_0 + \epsilon) = \frac{\beta_0 + \epsilon}{\alpha_0 + \beta_0} \quad (3.9)$$

$$\min_{\alpha, \beta} f(\alpha, \beta) = f(\alpha_0 + \epsilon, \beta_0 - \epsilon) = \frac{\beta_0 - \epsilon}{\alpha_0 + \beta_0} \quad (3.10)$$

となることは明らかである。

状態 s_1 の状態確率の極限值が式 (3.9), (3.10) になるときの遷移確率行列 P をそれぞれ $P_{\epsilon}, P_{-\epsilon}$ とすると,

$$P_{\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_0 + \epsilon & \alpha_0 - \epsilon \\ \beta_0 + \epsilon & 1 - \beta_0 - \epsilon \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$P_{-\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_0 - \epsilon & \alpha_0 + \epsilon \\ \beta_0 - \epsilon & 1 - \beta_0 + \epsilon \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

となる。

つぎに, α, β が時間的に変化する場合, すなわち非定常確率オートマトンの状態確率について解析を行なうが, その前に, つぎの二つの補題を与えておこう。

〔補題 3.1〕 任意の時刻 k における遷移行列 $P(k)$ と状態ベクトル $\pi(k)$ について次式が成立する。

$$|\pi(k)P_{-\epsilon}| \leq |\pi(k)| \leq |\pi(k)P_{\epsilon}| \quad (3.13)$$

ここで, 記法 $|\pi|$ はベクトル π の第 1 要素を表わす。

(証明)

$$\begin{aligned} |\pi(k)P(k)| &= \left| (r, 1-r) \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \right| \\ &= r(1-\alpha) + (1-r)\beta \end{aligned} \quad (3.14)$$

ここで, α, β は式 (3.4) をみたすので, 式 (3.14) が α, β について最大値をとるのは

$$\alpha(k) = \alpha_0 - \epsilon, \quad \beta(k) = \beta_0 + \epsilon$$

のときである。すなわち $P(k)=P_{\infty}$ のときである。同様にして最小値をとるのは $P(k)=P_{\infty}$ のときである。(証明終)

〔補題 3.2〕 任意の時刻 k における状態ベクトルが π_1, π_2 の二つの場合を考え、遷移行列を $P(k)$ とする。ここで、

$$\pi_1 = (r_1, 1-r_1), \pi_2 = (r_2, 1-r_2), r_1 > r_2$$

とすると、つぎの (1), (2) が成立する。

(1) $1-\alpha(k)-\beta(k) \geq 0$ のとき

$$0 \leq |\pi_1 P(k)| - |\pi_2 P(k)| < |\pi_1| - |\pi_2| \quad (3.15)$$

(2) $1-\alpha(k)-\beta(k) < 0$ のとき

$$0 \leq |\pi_2 P(k)| - |\pi_1 P(k)| < |\pi_1| - |\pi_2| \quad (3.16)$$

(証明)

$$\begin{aligned} & |\pi_1 P(k)| - |\pi_2 P(k)| \\ &= \left| (r_1, 1-r_1) \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| (r_2, 1-r_2) \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \right| \\ &= (r_1 - r_2)(1-\alpha-\beta) \\ &= (|\pi_1| - |\pi_2|)(1-\alpha-\beta) \end{aligned}$$

ここで、

$$r_1 > r_2, |1-\alpha-\beta| < 1$$

であるので、明らかに成立する。(証明終)

補題 3.1, 3.2 はそれぞれ図 3.4, 3.5, 3.6 に説明されている。

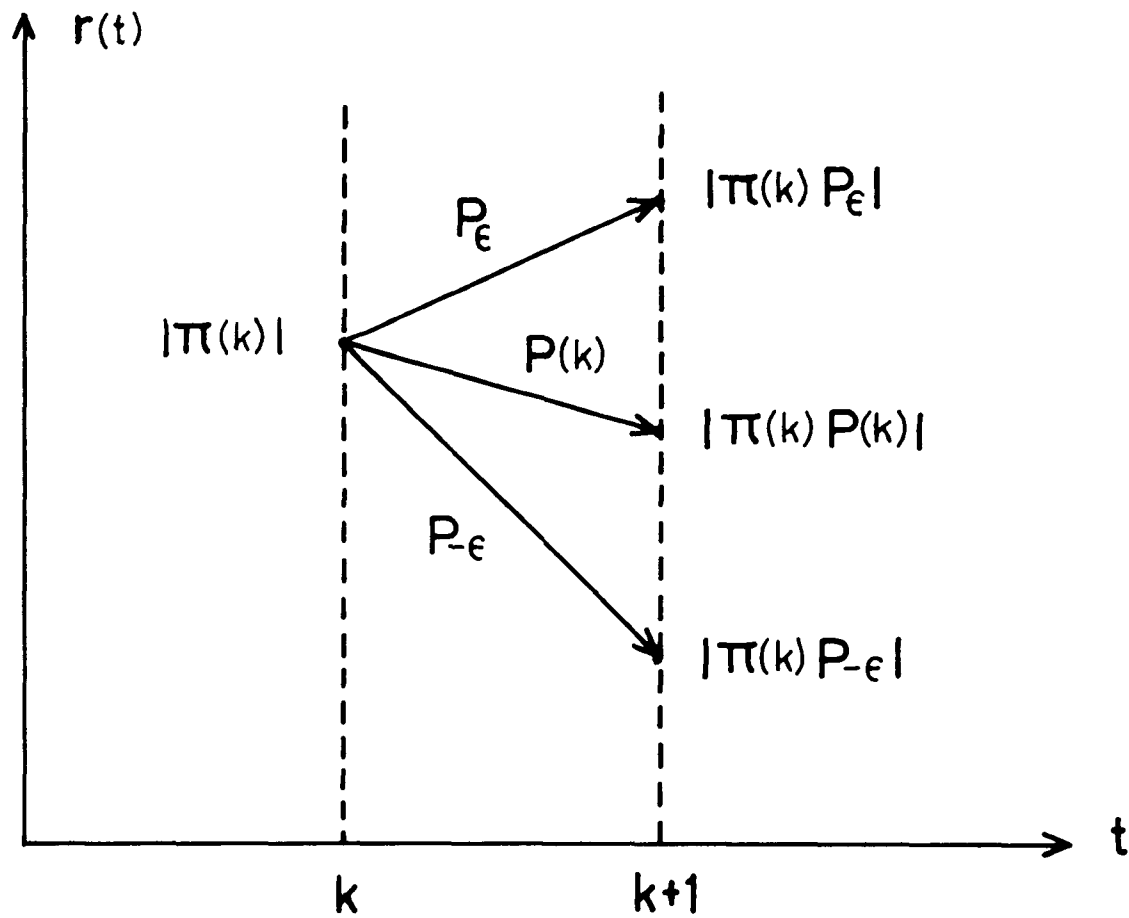


図 3.4 補題 3.1 の説明

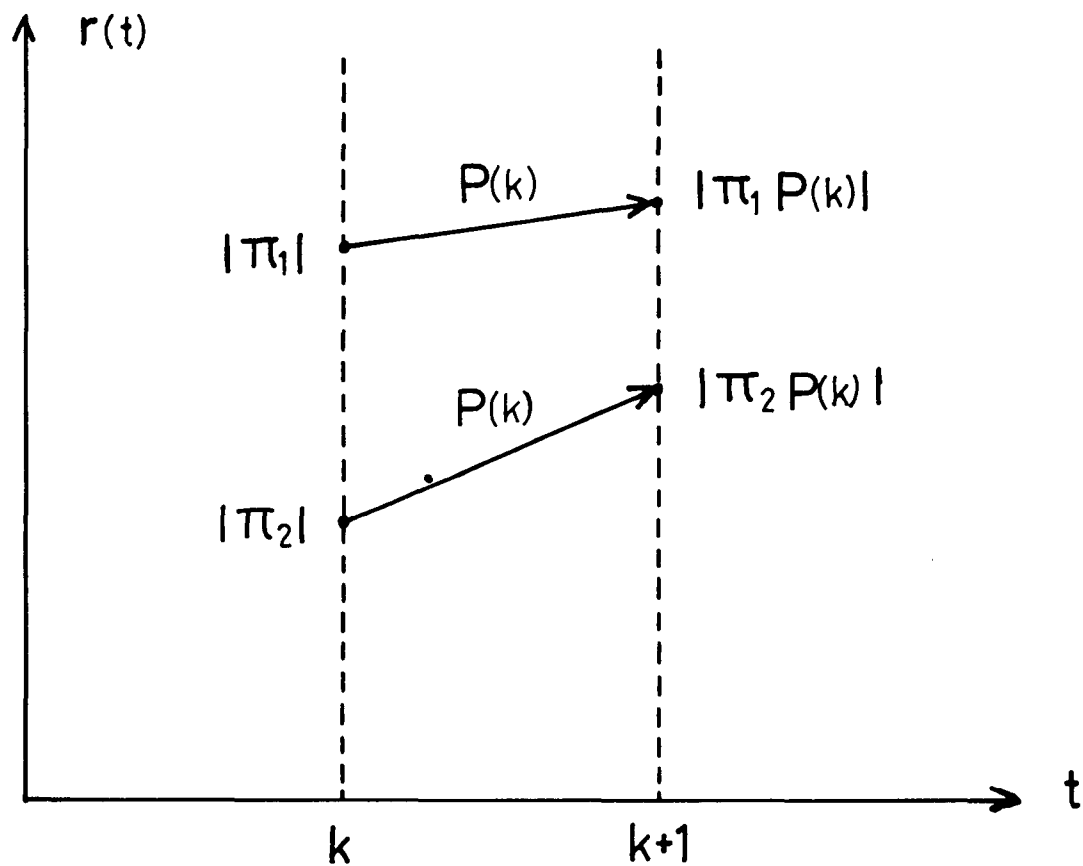


図 3.5 補題 3.2 - (1) の説明

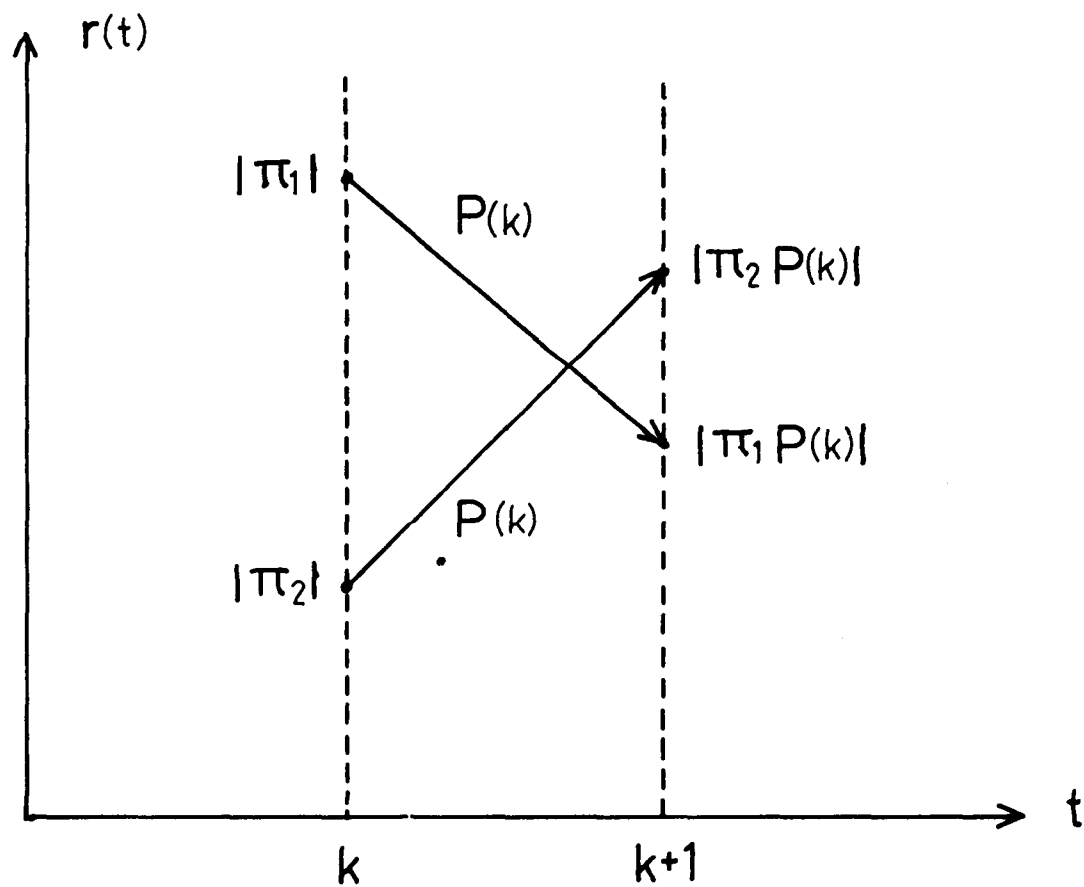


図 3.6 補題 3.2 - (2) の説明

つぎに，状態 s_1 の状態確率値 $r(n)$ の極限值が，ある範囲に入ることを示す。

〔定理 3.2〕 $1 - \alpha_0 - \beta_0 \geq 0$ ならば， $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{\beta_0 - \epsilon}{\alpha_0 + \beta_0} \leq r(n) \leq \frac{\beta_0 + \epsilon}{\alpha_0 + \beta_0} \quad (3.17)$$

となる。

(証明) (i) まず，つぎの式 (3.18) が，ある正整数 k ，任意の正整数 n について，成立することを数学的帰納法により示す。

$$\begin{aligned} |\pi(k) P_{-\epsilon}^n| &\leq |\pi(k) P(k) P(k+1) \\ &\quad \cdots P(k+n-1)| \leq |\pi(k) P_{-\epsilon}^n| \end{aligned} \quad (3.18)$$

補題 3.1 により， $n = 1$ の場合式 (3.18) は成立していることがわかる。

つぎに， $n = n_0$ のとき成立していると仮定すると，

$$\begin{aligned} |\pi(k) P_{-\epsilon}^{n_0}| &\leq |\pi(k) P(k) \cdots P(k+n_0-1)| \\ &\leq |\pi(k) P_{-\epsilon}^{n_0}| \end{aligned} \quad (3.19)$$

式 (3.19) を式 (3.20) に書きかえる。

$$|\pi_{-\epsilon}| \leq |\pi(k+n_0)| \leq |\pi_{-\epsilon}| \quad (3.20)$$

ここで， $\pi_{-\epsilon} = \pi(k) P_{-\epsilon}^{n_0}$ ， $\pi_{\epsilon} = \pi(k) P_{\epsilon}^{n_0}$

$1 - \alpha_0 - \beta_0 > 0$ なので，補題 3.2 の (1) より，

$$|\pi(k+n_0) P_{\epsilon}| \leq |\pi_{\epsilon}| \quad (3.21)$$

$$|\pi_{-\epsilon} P_{-\epsilon}| \leq |\pi(k+n_0) P_{-\epsilon}| \quad (3.22)$$

さらに，補題 3.1 より，

$$\begin{aligned} |\pi(k+n_0) P_{-\epsilon}| &\leq |\pi(k+n_0) P(k+n_0)| \\ &\leq |\pi(k+n_0) P_{\epsilon}| \end{aligned} \quad (3.23)$$

となる。式 (3.2 1) , (3.2 2) , (3.2 3) より ,

$$|\pi_{- \infty} P_{- \infty}| \leq |\pi(k+n_0) P(k+n_0)| \leq |\pi_{\infty} P_{\infty}| \quad (3.2 4)$$

すなわち ,

$$\begin{aligned} |\pi(k) P_{- \infty}^{n_0+1}| &\leq |\pi(k) P(k) P(k+1) \cdots P(k+n_0)| \\ &\leq |\pi(k) P_{\infty}^{n_0+1}| \end{aligned} \quad (3.2 5)$$

となり , $n=n_0+1$ のときに式 (3.1 8) が成立していることがわかる。

よって , 数学的帰納法により , 任意の n について , 式 (3.1 8) が成立することが示された。

これを図示すると , 図 3.7 のようになる。

(Ⅱ) 式 (3.9) ~ (3.1 2) より , $n \rightarrow \infty$ のとき ,

$$\begin{aligned} |\pi(k) P_{- \infty}^n| &\rightarrow \frac{\beta_0 - \epsilon}{\beta_0 + \beta_0} \\ |\pi(k) P_{\infty}^n| &\rightarrow \frac{\beta_0 + \epsilon}{\alpha_0 + \beta_0} \end{aligned}$$

となる。また ,

$$|\pi(k) P(k) P(k+1) \cdots P(k+n)| = r(k+n+1)$$

なので , 式 (3.1 8) , (3.2 6) , (3.2 7) , (3.2 8) より , $n \rightarrow \infty$ のとき , $r(k+n+1)$ は , すなわち $r(n)$ は ,

$$\frac{\alpha_0 - \epsilon}{\alpha_0 + \beta_0} \leq r(n) \leq \frac{\beta_0 + \epsilon}{\alpha_0 + \beta_0}$$

となる。(証明終)

[定理 3.3] $1 - \alpha_0 - \beta_0 < 0$ ならば , 状態確率 $r(n)$ の時間平均値

$$M((r(n))) = \{r(1) + r(2) + \cdots + r(n)\} / n$$

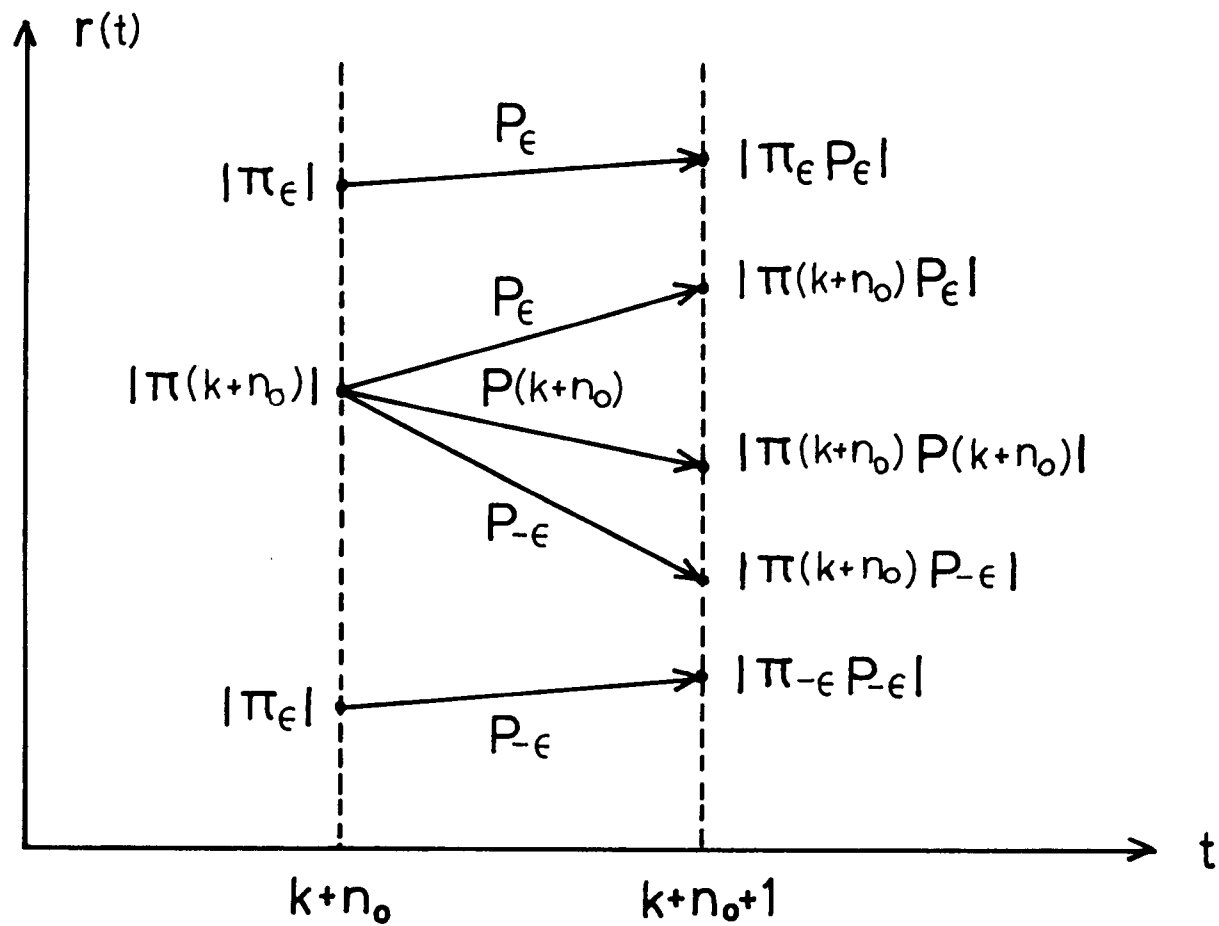


図 3.7 定理 3.2 の証明の説明

は, $n \rightarrow \infty$ のときに,

$$\frac{\beta_0 - \epsilon}{\alpha_0 + \beta_0} \leq M(r(n)) \leq \frac{\beta_0 + \epsilon}{\alpha_0 + \beta_0}$$

となる。

(証明) (i) ある正整数 n_i ($i=1, 2, \dots$) が存在して,

$$|\pi(1)P_{\infty}^{n_i+2}| < |\pi(1)P(1)P(2) \cdots P(n_i+2)| \quad (3.29)$$

が成立するならば, つぎの (3.30), (3.31), (3.32) が成立する。

$$|\pi(1)P(1)P(2) \cdots P(n_i+1)| < |\pi(1)P_{\infty}^{n_i+1}| \quad (3.30)$$

$$|\pi(1)P(1)P(2) \cdots P(n_i+3)| < |\pi(1)P_{\infty}^{n_i+3}| \quad (3.31)$$

$$|\pi(n_i+2)| + |\pi(n_i+3)| < |\pi(1)P_{\infty}^{n_i+1}| + |\pi(1)P_{\infty}^{n_i+2}| \quad (3.32)$$

$1 - \alpha_0 - \beta_0 < 0$ であるので, これら三つの式は, 補題 3.1, 補題 3.2 の (2), および式 (3.29) より, 成立することは明らかである。これらの式をあわせると図 3.8 になる。

(ii) 式 (3.29), (3.30), (3.31), (3.32) より, つぎの不等式が成立する。

$$\begin{array}{c} |\pi(2)| < |\pi(1)P_{\infty}| \\ \vdots \\ |\pi(n_1+2)| + |\pi(n_1+3)| < |\pi(1)P_{\infty}^{n_1+1}| + |\pi(1)P_{\infty}^{n_1+2}| \\ |\pi(n_1+4)| < |\pi(1)P_{\infty}^{n_1+3}| \\ \vdots \\ \hline |\pi(n_i+2)| + |\pi(n_i+3)| < |\pi(1)P_{\infty}^{n_i+1}| + |\pi(1)P_{\infty}^{n_i+2}| \\ |\pi(n_i+4)| < |\pi(1)P_{\infty}^{n_i+3}| \\ \hline \vdots \\ |\pi(n)| < |\pi(1)P_{\infty}^{n-1}| \end{array}$$

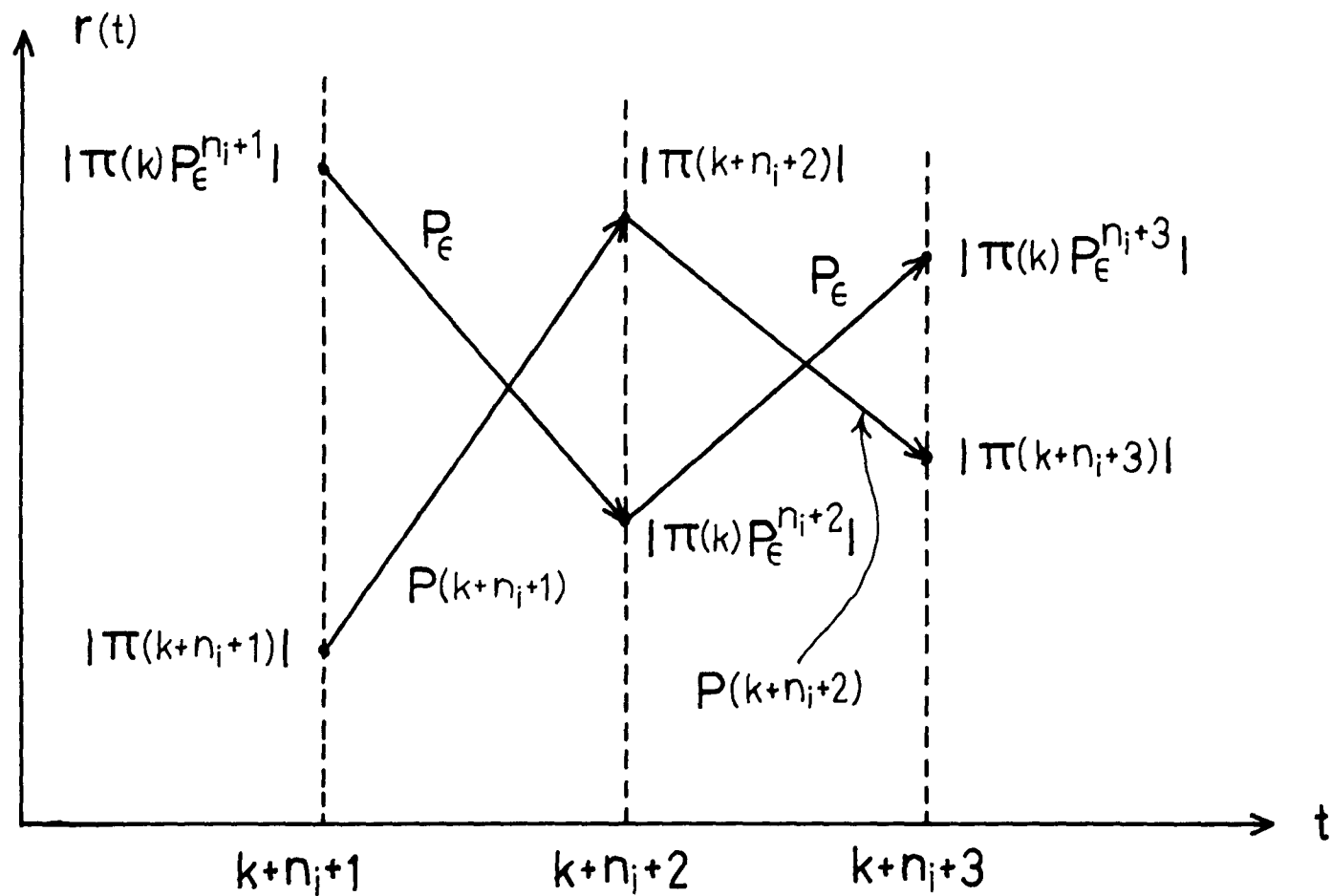


図 3.8 定理 3.3 の証明の説明

これらの不等式をすべて加えると，

$$\begin{aligned} |\pi(1)| + |\pi(2)| + \cdots + |\pi(n)| &< |\pi(1)| + |\pi(1)P_{\in}| + \cdots \\ &+ \cdots + |\pi(1)P_{\in}^{n-1}| \end{aligned} \quad (3.33)$$

となる。また式(3.27)より， $n \rightarrow \infty$ の時

$$\frac{1}{n} \{ |\pi(1)| + |\pi(1)P_{\in}| + \cdots + |\pi(1)P_{\in}^{n-1}| \} \rightarrow \frac{\beta_0 + \epsilon}{\alpha_0 + \beta_0} \quad (3.34)$$

となる。よって式(3.33)，(3.34)より

$$M(r(n)) \leq \frac{\beta_0 + \epsilon}{\alpha_0 + \beta_0}$$

が成立する。同様にして，

$$\frac{\beta_0 - \epsilon}{\alpha_0 + \beta_0} \leq M(r(n))$$

が成立する。(証明終)

〔定理 3.4〕 状態確率 $r(n)$ の時間平均値 $M(r(n))$ は $n \rightarrow \infty$ のとき，

$$\frac{\beta_0 - \epsilon}{\alpha_0 + \beta_0} \leq M(r(n)) \leq \frac{\beta_0 + \epsilon}{\alpha_0 + \beta_0}$$

となる。

(証明) 定理 3.2，定理 3.3 より明らかである。

これで非定常確率オートマトン A ，すなわち有限オートマトン A の状態 s_1 の状態確率の時間平均値についての極限分布がわかった。すると， s_2 の状態確率の時間平均値 $M(1-r(n))$ は， $n \rightarrow \infty$ の時，

$$\frac{\alpha_0 - \epsilon}{\alpha_0 + \beta_0} \leq M(1-r(n)) \leq \frac{\alpha_0 + \epsilon}{\alpha_0 + \beta_0} \quad (3.35)$$

となる。ここで、 $\alpha_0, \beta_0, \epsilon$ は式(3.1)をみたすので、いま仮りに、

$$\alpha_0 < \beta_0, \quad |\alpha_0 - \beta_0| > 2\epsilon$$

とすると、図3.1のように $p_1(t) < p_2(t)$ となる。すると、失敗出力確率が最小であるという意味で、オートマトンAの最適出力は u_1 となる。また、式(3.35)と定理3.4より、 $n \rightarrow \infty$ の時

$$M(1-r(n)) < M(r(n))$$

となり、十分に時間が経過すると、状態 s_1 にいる確率の方が状態 s_2 にいる確率より大きいことになる。すなわち、オートマトンAは最適出力の方をより大きい確率で出すことになる。

Tsetlinの定常ランダム媒体においては、有限オートマトンが最適出力の方をより大きい確率で出せば、すべての出力を等確率で出した時より極限失敗出力確率が小さいという意味で、当を得た動作をすることになる。しかし、非定常ランダム媒体については、有限オートマトンが当を得た動作をするかどうかを簡単に示すことができないので、ここでは一応、「仮の当を得た動作」をすることとっておく。有限オートマトンAが当を得た動作をするかどうかは、次節で考察する。

3.4 有限オートマトンの当を得た動作

本節では、前節において得られた有限オートマトンAの極限状態確率分布により、十分に時間が経過したときの有限オートマトンAが受ける失敗出力の平均値を導き出す。つぎに、この失敗出力の平均値と、媒体に等確率に出力を出したときの失敗出力の平均値とを比較することにより、有限オートマトンAが当を得た動作をすることを示す。

まず初めに、確率オートマトンに入力が等確率でランダムに入ったときの

平均失敗出力率を求める。

長さ m の入力系列 $u^* = u^{(1)} u^{(2)} \cdots u^{(m)}$ に対する遷移確率行列 $P(u^*) = P(u^{(1)}) P(u^{(2)}) \cdots P(u^{(m)})$ を $C^{(1)} C^{(2)} \cdots C^{(m)}$ と表わす。ここで、与えられた入力系列の j 番目の入力 $u^{(j)} = u_i$ のとき、 $C^{(j)} = P(u_i)$ である。ここで、 $P(u_1) = A$, $P(u_2) = B$ とおく。行列 $C^{(j)}$ の第 l 基本行列を $C_l^{(j)}$ ($l=1, 2$) と表わすと、 $C^{(j)} = A, B$ のとき、それぞれ $C_l^{(j)} = A_l, B_l$ ($l=1, 2$) となる。

[補題 3.3] (Yasui & Yajima⁽¹⁰⁾) 確率行列積 $C^{(1)} C^{(2)} \cdots C^{(m)}$ はつぎのように行列和に表わされる。

$$\begin{aligned} C^{(1)} C^{(2)} \cdots C^{(m)} &= C_1^{(m)} + v_2^{(m)} C_1^{(m-1)} C_2^{(m)} \\ &\quad + v_2^{(m-1)} v_2^{(m)} C_1^{(m-2)} C_2^{(m-1)} + \cdots \\ &\quad + v_2^{(2)} v_2^{(3)} \cdots v_2^{(m)} C_1^{(1)} C_2^{(2)} \\ &\quad + v_2^{(1)} v_2^{(2)} \cdots v_2^{(m)} C_2^{(1)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

ただし、 $A_1 A_2 = 0$, $B_1 B_2 = 0^+$,

$$H = A_1 B_2 = -B_1 A_2 = \frac{b \ c - a \ d}{(a+b)(c+d)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$v_2^{(j)} = \begin{cases} 1 - a - b = \lambda \cdots C^{(j)} = A \text{ のとき} \\ 1 - c - d = \mu \cdots C^{(j)} = B \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.38)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} \frac{d}{c+d} & \frac{c}{c+d} \\ \frac{d}{c+d} & \frac{c}{c+d} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

[定理 3.5] 任意の時刻 j において、確率オートマトン C の入力 $u^{(j)} = u_1(u_2)$ となる確率が $1/2$ で、かつ、 $\lambda = \mu$ ならば、無限長入力系列

$+$ 0 は 2×2 零行列を表わす

$u^{(1)} u^{(2)} \dots$ が入ったときに，この入力系列に対応する遷移確率行列 $C^{(1)} C^{(2)} \dots$ の期待行列 $M(C^{(1)} C^{(2)} \dots)$ は

$$M(C^{(1)} C^{(2)} \dots) = \frac{A_1 + B_1}{2} \quad (3.40)$$

となる。

(証明) まず，長さ m の入力系列 $u^{(1)} u^{(2)} \dots u^{(m)}$ について考えてみると， $C^{(1)} C^{(2)} \dots C^{(m)}$ は補題 3.3 により式 (3.36) のように表わされる。ここで各項の期待行列について考えてみよう。第 k 項 ($k = 2, 3, \dots, m$)

$$v_2^{(m-k+2)} v_2^{(m-k+3)} \dots$$

$$v_2^{(m-1)} v_2^{(m)} C_1^{(m-k+1)} C_1^{(m-k+2)}$$

を考える。仮定より， $C^{(m-k+1)}, C^{(m-k+2)}$ の両方とも， A あるいは B になる確率は $1/2$ なので， $C_1^{(m-k+1)}, C_2^{(m-k+2)}$ が $A_1 A_2, A_1 B_2, B_1 A_2, B_1 B_2$ になる確率は，すべて $1/4$ である。式 (3.37) より，第 k 項 ($k = 2, 3, \dots, m$) の期待行列は

$$\begin{aligned} M(v_2^{(m-k+2)} \dots v_2^{(m)} C_1^{(m-k+1)} C_2^{(m-k+2)}) \\ = \lambda^k (A_1 B_2 / 4 + B_1 A_2 / 4) = 0 \end{aligned}$$

となる。なお，第 1 項と第 $(m+1)$ 項の期待行列は，それぞれ，

$$M(C_1^{(m)}) = \frac{A_1 + B_1}{2}$$

$$M(v_2^{(1)} v_2^{(2)} \dots v_2^{(m)} C_2^{(1)}) = \lambda^m \cdot \frac{A_2 + B_2}{2}$$

である。よって，入力系列 $u^{(1)} u^{(2)} \dots u^{(m)}$ が入ったときの遷移確率行列の期待行列は

$$M(C^{(1)} C^{(2)} \dots C^{(m)})$$

$$= \frac{A_1 + B_1}{2} + \lambda^m \cdot \frac{A_2 + B_2}{2} \quad (3.4.1)$$

となる。 $|\lambda| < 1$ より、無限長の入力系列が入ったときには、 $m \rightarrow \infty$ で

$$\lambda^m \cdot \frac{A_2 + B_2}{2} \rightarrow 0$$

となる。(証明終)

この定理 3.5 と式 (3.2) とにより、確率オートマトン C に入力 u_1, u_2 が確率 $1/2$ でランダムに入り、 $\lambda = \mu$ すなわち $a + b = c + d$ ならば、平均失敗出力率の極限值 $R(C)$ は $(\alpha_0 + \beta_0)/2$ となる。

ここで、Yasui と Yajima⁽¹⁰⁾ によって定義された「零次近似で完全に孤立した確率オートマトン」を拡張して、「 $(0, k)$ 次近似で完全に孤立した確率オートマトン」を定義し、この確率オートマトンについて、当を得た動作を論じよう。

〔定義 3.5〕 確率オートマトン C は、つぎの条件をみたすときに、 $(0, k)$ 次近似で完全に孤立しているという。

$$\begin{aligned} |p_1(t) - \alpha_0| < \epsilon, |p_2(t) - \beta_0| < \epsilon \\ |\alpha_0 - \beta_0| = k \in, k \geq 2 \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

ここで、 $\alpha_0, \beta_0, p_1(t), p_2(t)$ は定義 3.3 と同じである。

〔定理 3.6〕 確率オートマトン C が $(0, k)$ 次近似で完全に孤立しているための必要十分条件は、

$$(1) \quad \|H\| \neq 0$$

$$(2) \quad h' = \frac{k\delta}{1-\delta} \cdot \frac{\max\{\|H\|, \|A\|, \|B_2\|\}}{\|H\|} \leq 1 \quad (3.4.3)$$

ここで, $\delta, \|H\|, \|H_2\|, \|B_2\|$ は定理 3.1 の場合と同じである。

(証明) Yasui & Yamai⁽¹⁰⁾ の Lemma 2 の証明より,

$$\begin{aligned} \|\alpha_0 - \beta_0\| &= \|H\| \geq k\epsilon \\ &= k \cdot \frac{\delta}{1-\delta} \max\{\|H\|, \|A_2\|, \|B_2\|\} \end{aligned}$$

となることより証明される。(証明終)

[定理 3.7] 確率オートマトン C が $(0, k)$ 次近似で完全に孤立しているならば, 零次近似でも完全に孤立している。

(証明) 定義 3.3 と定義 3.5 とより明らかである。(証明終)

つぎに, 有限オートマトン A と確率オートマトン C と結びついたときの極限平均失敗率と, 確率オートマトン C に入力が等確率でランダムに入ったときの極限平均失敗率とを比較するが, まずつぎの補題について述べる。

[補題 3.4] 二つの入力系列 $u^* = u^{(1)}u^{(2)} \cdots u^{(m)}$ と $u^{*'} = u^{(1)'}u^{(2)'} \cdots u^{(m)'}$ に対し,

$$u^{(j)} = u^{(j)'} \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

$$u^{(n)} = u_1, \quad u^{(n)'} = u_2, \quad \lambda = \mu$$

ならば, $u^*, u^{*'}$ に対応する遷移確率行列を, それぞれ P_1, P_2 とすると,

$$P_1 - P_2 = A_1 - B_1 - \lambda H \quad (3.4.4)$$

となる。

(証明) 補題 3.3 と仮定より,

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= C_1^{(n)} - C_1^{(n)'} \\ &\quad + \lambda (C_1^{(n-1)} C_2^{(n)} - C_1^{(n-1)'} C_2^{(n)'}) \end{aligned}$$

となる。ここで, 時刻 $n-1$ における入力の二つの場合を考える。

(i) $u^{(n-1)} = u^{(n-1)'} = u_1$ のとき

$$C_1^{(n-1)} C_2^{(n)} = A_1 A_2 = 0$$

$$C_1^{(n-1)'} C_2^{(n)'} = A_1 B_2 = H$$

(Ⅱ) $u^{(n-1)} = u^{(n-1)'} = u_2$ のとき

$$C_1^{(n-1)} C_2^{(n)} = B_1 A_2 = -H$$

$$C_1^{(n-1)} C_2^{(n)'} = B_1 B_2 = 0$$

(i), (Ⅱ) より証明された。(証明終)

〔定理 3.8〕 確率オートマトン C が $(0, k)$ 次近似で完全に孤立し, かつ, つぎの三つの条件

$$(1) \quad \lambda = \mu \geq 0$$

$$(2) \quad 1 - \alpha_0 - \beta_0 \geq 0$$

$$(3) \quad \frac{\beta_0}{k+1} \leq \alpha_0 \leq \frac{(k-4)\beta_0}{k}$$

をみたすならば, 有限オートマトン A は, 確率オートマトン C に対して, 当を得た動作をする。

(証明) $(0, k)$ 次近似で完全に孤立しているので, 定理 3.7 より, 確率オートマトン C は零次近似で完全に孤立していることがわかる。これと条件 (2) とにもとづいて, 定理 3.2 より, 時刻 t における有限オートマトンの状態 s_1 の状態確率 $r(t)$ は, 十分に時間が経過した後に,

$$r(t) = \frac{\beta_0 - \epsilon_1(t)}{\alpha_0 + \beta_0}, \quad -\epsilon < \epsilon_1(t) < \epsilon$$

となる。このとき, 有限オートマトン A の u_1, u_2 に対応しているのは, それぞれ状態 s_1, s_2 であるので, 十分に時間が経過した後の時刻 t における平均失敗出力率は,

$$\begin{aligned} M(A, C) &= \frac{\beta_0 - \epsilon_1(t)}{\alpha_0 + \beta_0} \alpha(t) \\ &\quad + \frac{\alpha_0 + \epsilon_1(t)}{\alpha_0 + \beta_0} \beta(t) \end{aligned} \quad (3.45)$$

となる。つぎに，確率オートマトン C への入力ランダムに等確率に入ったときの極限平均失敗出力率を $R(C)$ とすると，条件 (1) と定理 3.5 より，

$$R(C) = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}$$

である。つぎに $M(A, C)$ と $R(C)$ を比較してみよう。

$$\begin{aligned} R(C) - M(A, C) &= \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} \\ &\quad - \left\{ \frac{\beta_0 - \epsilon_1(t)}{\alpha_0 + \beta_0} \alpha(t) + \frac{\alpha_0 + \epsilon_1(t)}{\alpha_0 + \beta_0} \beta(t) \right\} \\ &= \frac{F}{2(\alpha_0 + \beta_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= (\alpha_0 + \beta_0)^2 - 2 \{ \alpha(t) \beta_0 + \alpha_0 \beta(t) \\ &\quad + (\beta(t) - \alpha(t)) \epsilon_1(t) \} \end{aligned}$$

ここで，補題 3.4 より， $\beta(t) - \alpha(t) = \beta_0 - \alpha_0 - \lambda |H|$ となる。ここで， $|H|$ は 2×2 行列 H の (1, 2) 要素とする。さらに， $\alpha(t) = \alpha_0 + \epsilon_1(t)$ ， $-\epsilon < \epsilon_1(t) < \epsilon$ とおくと，

$$\begin{aligned} F &= (\alpha_0 - \beta_0)^2 - 2 \{ \lambda |H| (-\epsilon_1(t) - \alpha_0) \\ &\quad + \epsilon_2(t) (\alpha_0 + \beta_0) + \epsilon_1(t) (-\alpha_0 + \beta_0) \} \end{aligned}$$

ここで， $\alpha_0 < \beta_0$ であるので， $|H| = \beta_0 - \alpha_0 > 0$ となることは式 (3.2)，(3.37) より明らかである。これと条件 (1) とより，

|

$$\begin{aligned} F &> (\alpha_0 - \beta_0)^2 - 2 \{ \lambda |H| (\epsilon - \alpha_0) + \epsilon (\alpha_0 + \beta_0) \\ &\quad + \epsilon (-\alpha_0 + \beta_0) \} \\ &= (\alpha_0 - \beta_0)^2 - 2 \{ \lambda |H| (\epsilon - \alpha_0) + 2 \epsilon \beta_0 \} \end{aligned}$$

となる。仮定より，確率オートマトン C は $(0, k)$ 次近似で完全に孤立しているので， $|H| = \beta_0 - \alpha_0 = k \in$ である。よって，

$$\begin{aligned} F &> k^2 \in^2 - 2 \{ \lambda k \in (\in - \alpha_0) + 2 \in \beta_0 \} \\ &= \in [k^2 \in - 2 \{ \lambda k (\in - \alpha_0) + 2 \beta_0 \}] \end{aligned}$$

条件 (1) と (3) より，

$$F > \in (k^2 \in - 4 \beta_0) > 0$$

となる。よって

$$R(C) > M(A, C)$$

となり，定義 2.4 より当を得た動作が行なわれることがわかる。（証明終）

つぎに，この定理 3.8 における条件をみたす確率オートマトンの例を一つあげてみよう。

$$(\text{例}) \quad B = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}$$

すると，

$$\lambda = \mu = 0.05 > 0$$

$$\|H\| = \frac{4}{19}, \|B_2\| = \beta_0 = \frac{8}{19}, \|A_2\| = \alpha_0 = \frac{4}{19}$$

$$h' = \frac{2k}{19} \leq 1 \text{ すなわち } k \leq \frac{19}{2}$$

$$1 - \alpha_0 - \beta_0 = \frac{7}{19} > 0$$

$k = 9$ とすると，

$$\frac{\beta_0}{k+1} = \frac{8}{190}, \alpha_0 = \frac{4}{19}, \frac{(k-4)\beta_0}{k} = \frac{40}{171}$$

$$\frac{8}{190} < \frac{4}{19} < \frac{40}{171}$$

これは，定理 3.8 の条件をみたす確率オートマトンである。

3.5 結 言

前章で定義された非定常ランダム媒体に対する有限オートマトンの動作を調べたのであるが，本章では，非定常ランダム媒体をもう少し具体的なもの，すなわち過去の入出力を記憶する内部状態を持った確率オートマトンとした。また，簡単のために，媒体を2入力としたので，この媒体は零次近似で完全に孤立した確率オートマトンになり，この確率オートマトンと2入力2出力2状態状態出力型有限オートマトンとの相互作用を，Tsetlinのモデル⁽¹⁾とYasuiとYajimaによる諸結果⁽¹⁰⁾とを用いて考察した。その結果として，確率オートマトンがある条件をみたせば，有限オートマトンは当を得た動作を行なうことができることを示した。

ところで，オートマトンは電子計算機，通信系，制御系等々の数学的モデルと考えられるので，このようなオートマトン間の相互作用は，計算機ネットワークや各種機器間の相互情報伝送系のモデルとも考えられ，今後とも非常に興味のある問題である。

なお，本章では有限オートマトンの状態数が2の場合について述べたが，状態数が一般に n の場合についてはかなり解析が複雑になるであろうが，これについては，より一般的な形で次章で考察する。

第4章 有限オートマトンの ε -最適な動作

4.1 緒言

Tsetlin⁽¹⁾ は、定常ランダム媒体に対して ε -最適な動作を行なう有限オートマトン $L_{r,k}$ を定式化した。その後、Fu と Li⁽⁶⁾ はより広い範囲の定常ランダム媒体に対して ε -最適になる有限オートマトン $A_{r,k}$ を構成した。さらに Krylov⁽⁵⁾ により $A_{r,k}$ と同じ動作能力を持つ確率オートマトン $K_{r,k}$ が Tsetlin の有限オートマトンをもとにして作られた。

本章では、非定常ランダム媒体に対するこれら三つのオートマトン $L_{r,k}$, $A_{r,k}$, $K_{r,k}$ の動作を、一様乱数列⁽¹⁵⁾を用いて調べた。その結果、これらのオートマトンはいずれも非定常ランダム媒体に対して ε -最適になることが明らかにされた^{(16),(17)}。

4.2 有限オートマトン $L_{r,k}$ の ε -最適性

本節では Tsetlin によって定義された有限オートマトン $L_{r,k}$ と非定常ランダム媒体 $C_k^n(p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t))$ との相互作用を考察する。なお、本章では非定常ランダム媒体を定義2.1のように C_k と表わすことはしないで、 C_k^n と n をつけて表わす。また、後ほど出てくる C_k^* のように s のついたものは定常ランダム媒体を表わすものとする。

オートマトンとランダム媒体は図2.2のように結合されている。またオートマトン $L_{r,k}$ は図4.1のような状態遷移を行ない、状態 $s_{(i-1)r+1}$, $s_{(i-1)r+2}, \dots, s_{ir}$ は出力 u_i ($i=1, 2, \dots, k$) に対応しているものとする。ここで、定義2.1より、 $i^*=1$ すなわち

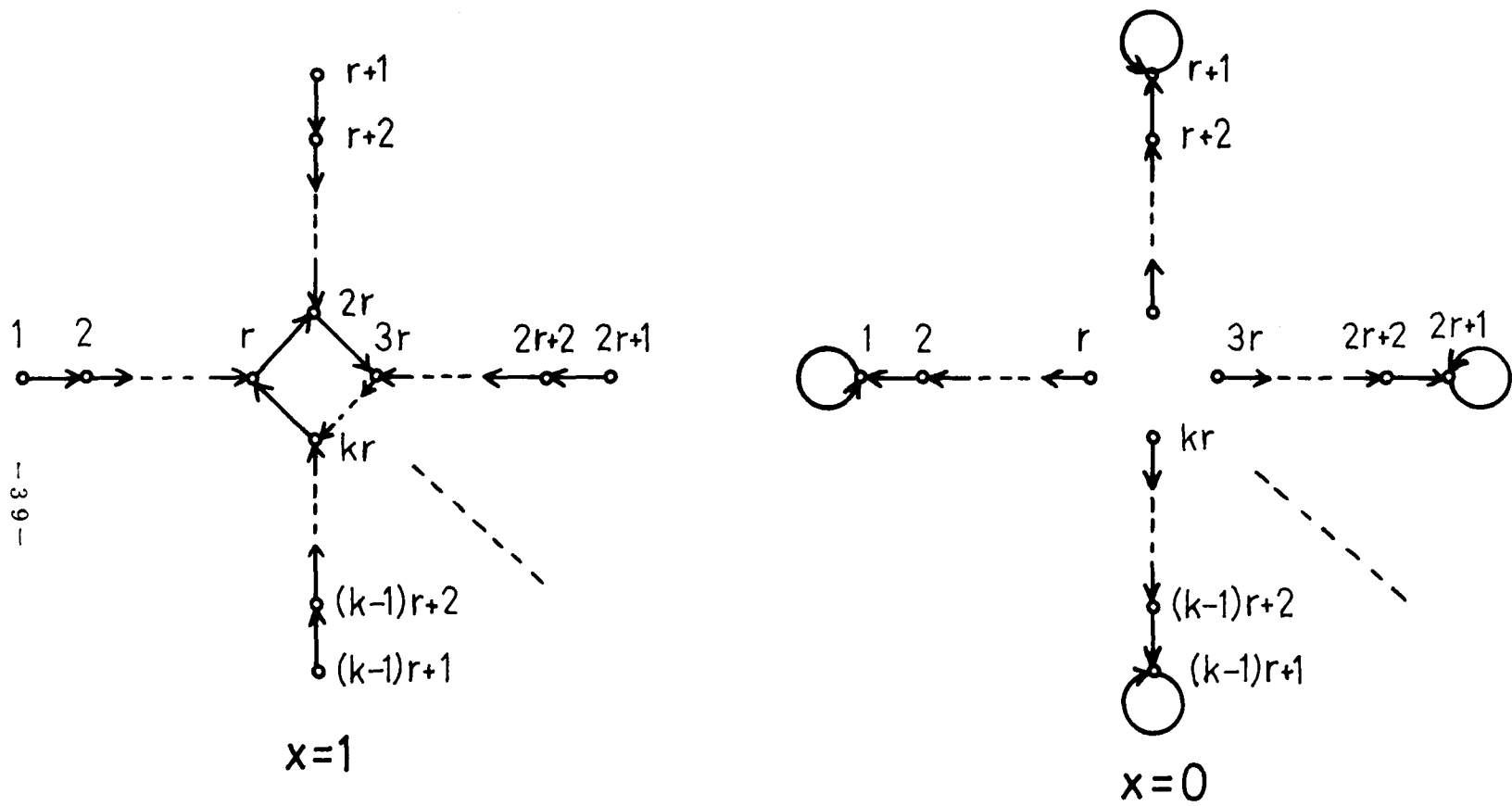


図 4.1 オートマトン $L_{r,*}$ の状態遷移図

$$0 < p_1(t) < \alpha_0 < \beta_0 < p_i(t) < 1, \quad i \neq 1 \quad (4.1)$$

と仮定しても一般性を失わない。つぎに、 $L_{r,k}$ の動作を調べるために、ランダム媒体 C_k^n の確率的な動作を一様乱数数列を用いて表わしてみる。これは、我々が確率システムをシミュレートする場合によく使う方法である。

[命題 4.1] システム $L_{r,k} - C_k^n$ は、一様乱数数列を用いたシステム $\mathcal{L}_{r,k} - C_k^n$ と確率的に等価である。ここで、 $\mathcal{L}_{r,k}$ は $L_{r,k}$ と同じオートマトンであり、 C_k^n はつぎのような動作を行なう。すなわち、区間 $(0, 1)$ でのある一様乱数数列 $\{\ell_t\}$ について、 C_k^n の時間 t における入力 $u(t) = u_i$ のとき、 C_k^n の出力 $x(t)$ は、

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \cdots 0 < \ell_t \leq p_i(t) \\ 0 & \cdots p_i(t) < \ell_t < 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

である。ここで、 $i = 1, 2, \dots, k$

つぎに、一様乱数数列 $\{\ell_t\}$ を用いたシステム $\mathcal{L}_{r,k}^s - C_k^s(p_1, p_2, \dots, p_k)$ を考えてみる。ここで、 $p_1 = \alpha_0, p_2 = p_3 = \dots = p_k = \beta_0$ である。このシステムは図 4.2 のように結合されていて、 C_k^s は入力 u ，出力 x, y をもち、つぎのような動作をする。

$$\left. \begin{aligned} & \cdot u(t) = u_1 \text{ のとき} \\ & x(t) = \begin{cases} 1 & \cdots 0 < \ell_t \leq \alpha_0 \\ 0 & \cdots \alpha_0 < \ell_t < 1 \end{cases} \\ & \cdot u(t) = u_i \text{ (} i \neq 1 \text{) のとき} \\ & \quad x(t) = 1, \quad y(t) = y_1 \quad \cdots 0 < \ell_t \leq \alpha_0 \\ & \quad x(t) = 1, \quad y(t) = y_2 \quad \cdots \alpha_0 < \ell_t < \beta_0 \\ & \quad x(t) = 0 \quad \cdots \beta_0 < \ell_t < 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

また、 $\mathcal{L}_{r,k}^s$ は状態 $s_1, s_2, \dots, s_{kr}$ をもち、図 4.3 のように状態遷移を行ない、出力関数は $L_{r,k}$ と同じものである。

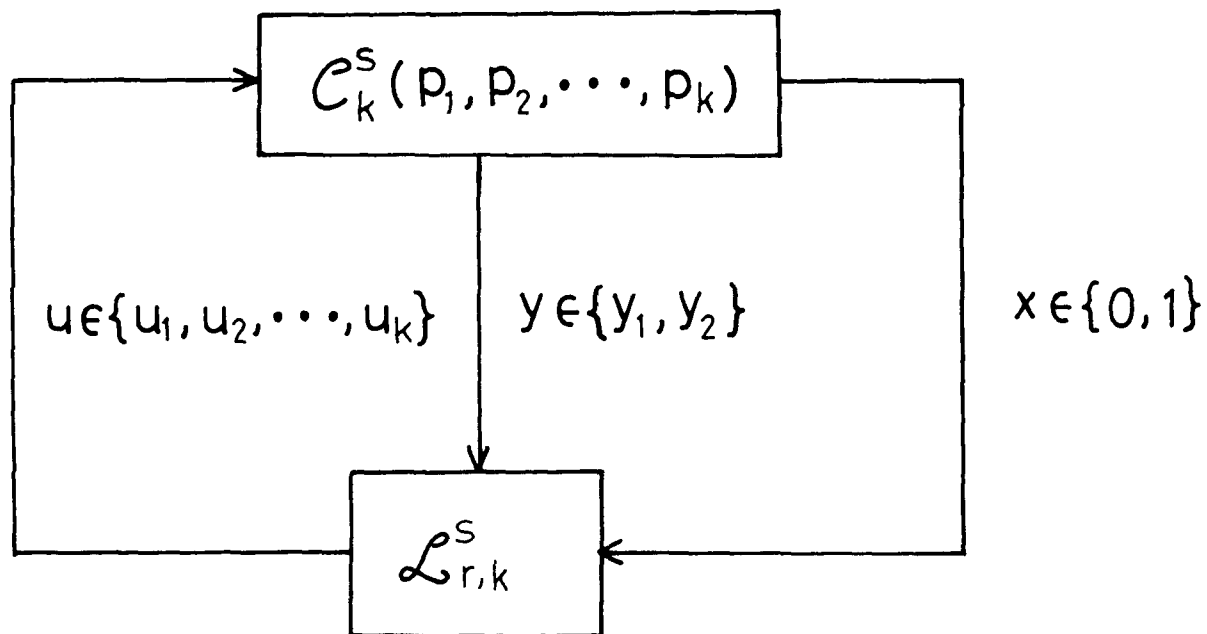
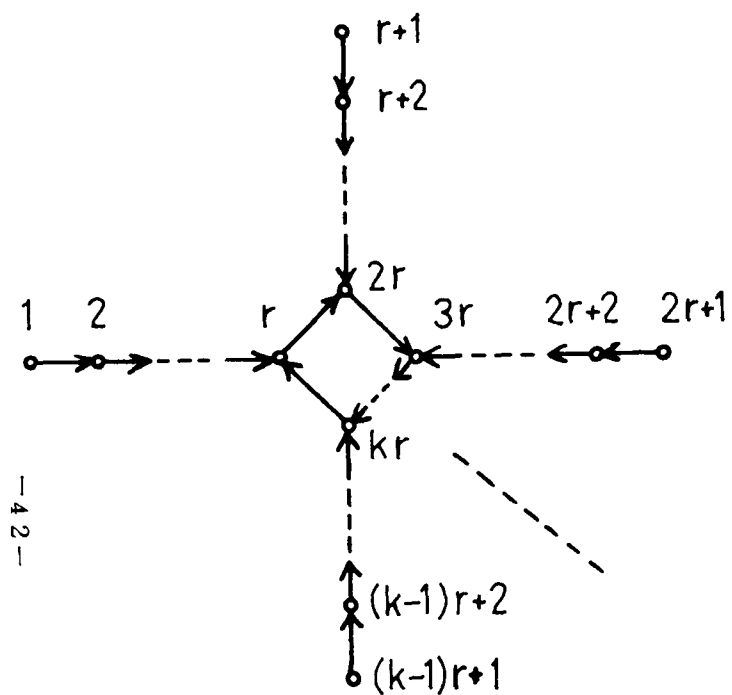
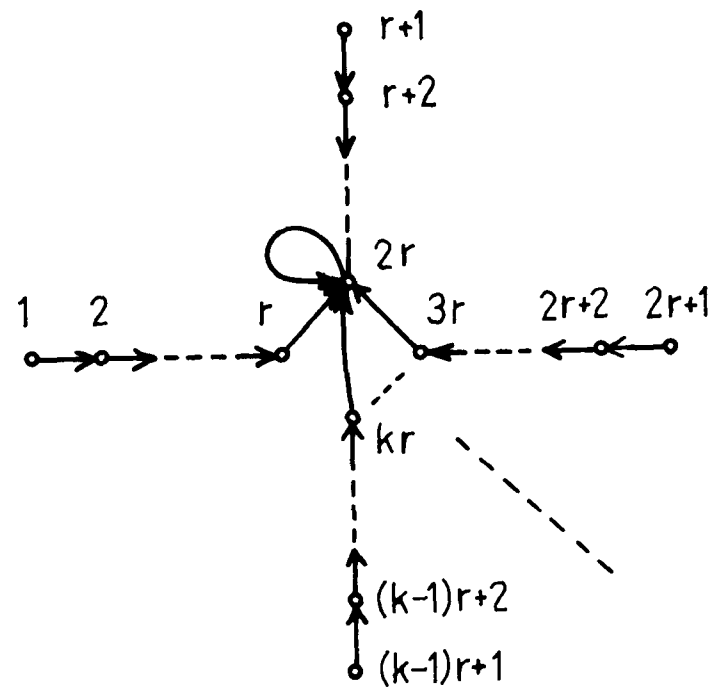


図 4.2 一様乱数列によるシステム $L_{r,k}^s - C_k^s$



$x=1, y=y_2$



$x=1, y=y_1$

図 4.3 オートマトン $\mathcal{L}_{r,k}^s$ の状態遷移図
($x=0$ の場合は $L_{r,k}$ と同じ)

〔命題 4.2〕 一様乱数列を用いたシステム $\mathcal{L}_{r,k}^s - \mathcal{C}_k^s$ はシステム $L_{r,k}^s - C_k^s$ と確率的に等価である。ここで、 C_k^s は定常ランダム媒体 $C_k^s(p_1, p_2, \dots, p_k)$ であり、 $L_{r,k}^s$ は図 4.4 のような状態遷移を行なう確率オートマトンである。ここで、 $p_1 = \alpha_0, p_2 = p_3 = \dots = p_k = \beta_0$ である。

〔補題 4.1〕 区間 $(0, 1)$ の同じ一様乱数列 $\{\ell_t\}$ を用いた二つのシステム $\mathcal{L}_{r,k}^n - \mathcal{C}_k^n, \mathcal{L}_{r,k}^s - \mathcal{C}_k^s$ において、オートマトン $\mathcal{L}_{r,k}^n, \mathcal{L}_{r,k}^s$ の時刻 t における状態をそれぞれ $s^n(t), s^s(t)$ と表わす。ここで $s^n(1) = s^s(1), s^n(t) = s_i, s^s(t) = s_j$ とすると、すべての時刻 t において、つぎの (i) ~ (iii) のうちのいずれかが成立する。

$$(i) \quad 1 \leq i \leq j \leq r$$

$$(ii) \quad m_n r \geq i \geq (m_n - 1)r + 1, \quad m_s r \geq j \geq (m_s - 1)r + 1, \\ m_n r - i \leq m_s r - j, \quad k \geq m_n \geq m_s \geq 2$$

$$(iii) \quad 1 \leq i \leq r, \quad m_s r \geq j \geq (m_s - 1)r + 1, \\ r - i \geq m_s r - j, \quad k \geq m_s \geq 2$$

(証明) (1) まず、時刻 1 では $s^n(1) = s^s(1)$ より、明らかに (i) または (ii) が成立している。

(2) 時刻 t において (i) ~ (iii) のうちのいずれかが成立していたと仮定し、 $s^n(t+1) = s_{i'}, s^s(t+1) = s_{j'}$ とする。

i) (i) が成立しているとき ($1 \leq i \leq j \leq r$)

システム $\mathcal{L}_{r,k}^n - \mathcal{C}_k^n$ と $\mathcal{L}_{r,k}^s - \mathcal{C}_k^s$ の動作と式 (4.1) より、 ℓ_t の値についてのつぎの三つの場合についての結果が得られる。

① $0 < \ell_t \leq p_1(t) < \alpha_0$ のとき

$$s^n(t+1) = \begin{cases} s_{i+1} & \dots i < r \\ s_{2r} & \dots i = r \end{cases} \quad s^s(t+1) = \begin{cases} s_{j+1} & \dots j < r \\ s_{2r} & \dots j = r \end{cases}$$

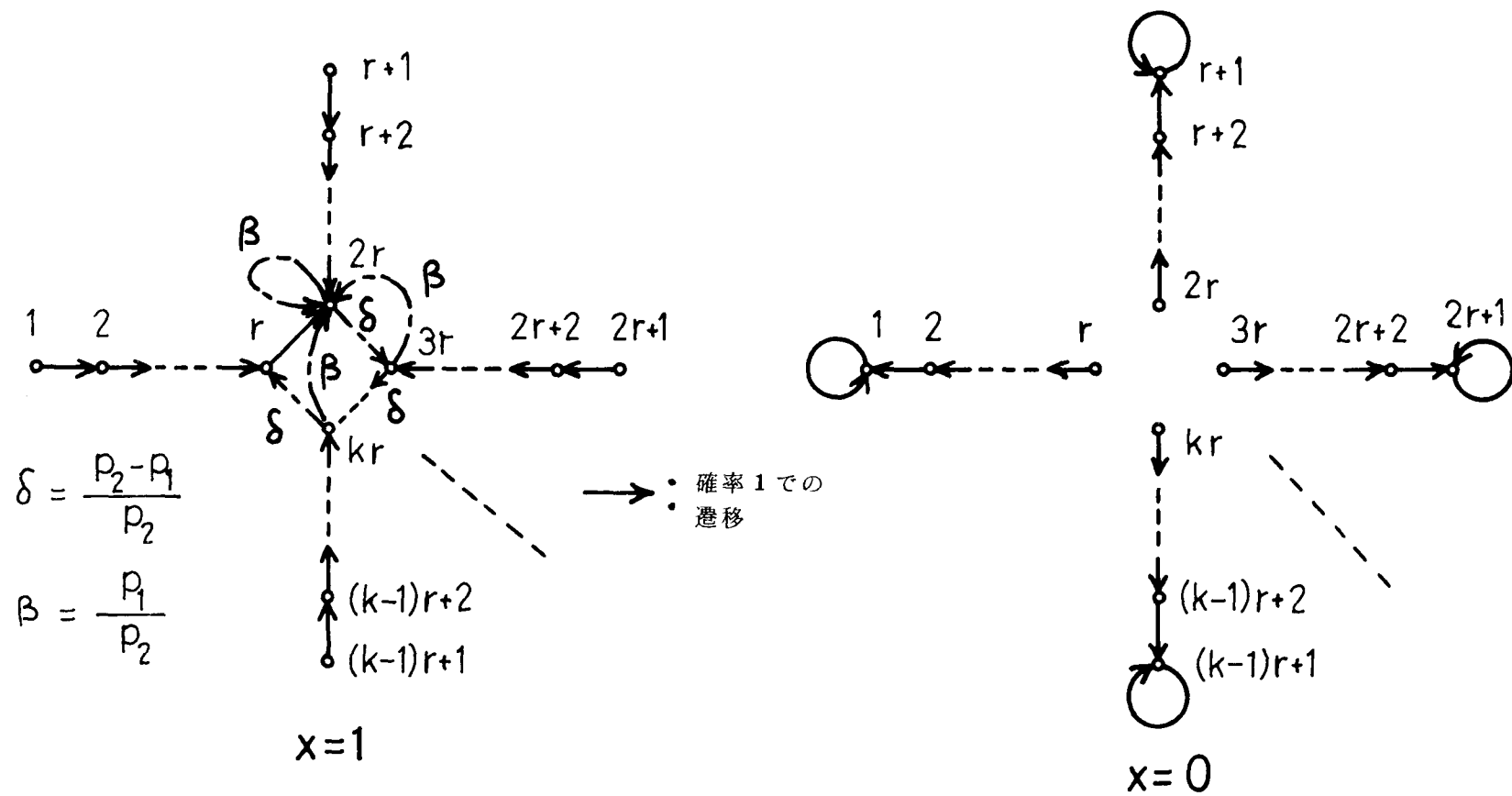


図 4.4 確率オートマトン $L_{r,k}^s$ の状態遷移図

これと，もとの i, j についての条件より， i', j' について $1 < i' \leq j' \leq r$
 または $1 < i' \leq r, j' = 2r$ または $i' = j' = 2r$ の三つの場合がありうる。

② $p_1(t) < \ell_t \leq \alpha_0$ のとき

$$s^n(t+1) = \begin{cases} s_{i-1} \cdots i > 1 \\ s_1 \cdots i = 1 \end{cases} \quad s^s(t+1) = \begin{cases} s_{j+1} \cdots j < r \\ s_{2r} \cdots j = r \end{cases}$$

よって， $1 \leq i' < j' \leq r$ または $1 \leq i' < r, j' = 2r$

③ $p_1(t) < \alpha_0 < \ell_t < 1$ のとき

$$s^n(t+1) = \begin{cases} s_{i-1} \cdots i > 1 \\ s_1 \cdots i = 1 \end{cases} \quad s^s(t+1) = \begin{cases} s_{j-1} \cdots j > 1 \\ s_1 \cdots j = 1 \end{cases}$$

よって， $1 \leq i' \leq j' < r$

ゆえに，①，②，③より ℓ_t がいかなる値のときでも， i', j' について

(i) ~ (iii) のうちのいずれかが成立する。

ii) (ii) が成立しているとき $(m_n r \geq i \geq (m_n - 1)r + 1,$

$m_s r \geq j \geq (m_s - 1)r + 1, m_n r - i \leq m_s r - j, k \geq m_n \geq m_s \geq 2)$

① $0 < \ell_t < \alpha_0, \beta_0 < p_{m_n}(t)$ のとき

$$s^n(t+1) = \begin{cases} s_{i+1} \cdots (m_n - 1)r + 1 \leq i < m_n r \\ s_{(m_n+1)r} \cdots i = m_n r, m_n \neq k \\ s_r \cdots i = k r \end{cases}$$

$$s^s(t+1) = \begin{cases} s_{j+1} \cdots (m_s - 1)r + 1 \leq j < m_s r \\ s_{2r} \cdots j = m_s r \end{cases}$$

よって， $(m_n - 1)r + 1 < i' \leq m_n r, (m_s - 1)r + 1 < j' \leq m_s r,$

$m_n r - i' \leq m_s r - j'$ または $i' = g(m_n)r, (m_s - 1)r + 1 < j' \leq m_s r$

または， $i' = g(m_n)r, j' = 2r$ 。

ここで,

$$g(m) = \begin{cases} m+1 & \cdots & k > m \geq 2 \\ 1 & \cdots & m = k \end{cases}$$

② $\alpha_0 < \ell_i < \beta_0 < p_{m_n}(t)$ のとき

$$s^n(t+1) = \begin{cases} s_{i+1} & \cdots & (m_n-1)r+1 \leq i < m_n r \\ s_{(m_n+1)r} & \cdots & i = m_n r, \quad m_n \neq k \\ s_r & \cdots & i = k r \end{cases}$$

$$s^s(t+1) = \begin{cases} s_{j+1} & \cdots & (m_s-1)r+1 \leq j < m_s r \\ s_{(m_s+1)r} & \cdots & j = m_s r, \quad m_s \neq k \\ s_r & \cdots & j = k r \end{cases}$$

よって, $(m_n-1)r+1 < i' \leq m_n r$, $(m_s-1)r+1 < j' \leq m_s r$,
 $m_n r - i' \leq m_s r - j'$ または $i' = g(m_n)r$, $(m_s-1)r+1 < j' \leq m_s r$
 または $i' = g(m_n)r$, $(m_s-1)r+1 < j' \leq m_s r$, または $i' = g(m_n)r$, $j' = g(m_s)r$. ここで $g(m)$ は①におけるものと同じものである。

③ $\beta_0 < \ell_t < p_{m_n}(t)$ のとき

$$s^n(t+1) = \begin{cases} s_{i+1} & \cdots & (m_n-1)r+1 \leq i < m_n r \\ s_{(m_n+1)r} & \cdots & i = m_n r, \quad m_s \neq k \\ s_r & \cdots & i = k r \end{cases}$$

$$s^s(t+1) = \begin{cases} s_{j-1} & \cdots & (m_s-1)r+1 < j \leq m_s r \\ s_{(m_s-1)r+1} & \cdots & j = (m_s-1)r+1 \end{cases}$$

よって, $(m_n-1)r+1 < i' \leq m_n r$, $(m_s-1)r+1 \leq j' < m_s r$,
 $m_n r - i' < m_s r - j'$ または $i' = g(m_n)r$, $(m_s-1)r+1 \leq j' < m_s r$
 ここで, $g(m)$ は①におけるものと同じ関数である。

④ $\beta_0 < p_{m_n}(t) < \ell_t < 1$ のとき

$$s^n(t+1) = \begin{cases} s_{i-1} & \cdots & (m_n-1)r+1 < i \leq m_n r \\ s_{(m_n-1)r+1} & \cdots & i = (m_n-1)r+1 \end{cases}$$

$$s^s(t+1) = \begin{cases} s_{j-1} & \cdots & (m_s-1)r+1 < j \leq m_s r \\ s_{(m_s-1)r+1} & \cdots & j = (m_s-1)r+1 \end{cases}$$

よって, $(m_n-1)r+1 \leq i' < m_n r$, $(m_s-1)r+1 \leq j' < m_s r$, $m_n r - i' \leq m_s r - j'$ 。

ゆえに, ①~④より ℓ_t がいかなる値のときでも, i' , j' について (i)~(iii) のうちのいずれかが成立する。

iii) (iii) が成立しているとき ($1 \leq i \leq r$, $m_s r \geq j \geq (m_s-1)r+1$, $r-i \geq m_s r - j$, $k \geq m_s \geq 2$)

① $0 < \ell_t \leq p_1(t) < \alpha_0 < \beta_0$ のとき

$$s^n(t+1) = \begin{cases} s_{i+1} & \cdots & 1 \leq i < r \\ s_{2r} & \cdots & i = r \end{cases}$$

$$s^s(t+1) = \begin{cases} s_{j+1} & \cdots & (m_s-1)r+1 \leq j < m_s r \\ s_{2r} & \cdots & j = m_s r \end{cases}$$

よって, $1 < i' \leq r$, $(m_s-1)r+1 < j' \leq m_s r$, $r-i' \geq m_s r - j'$ または, $1 \leq i' \leq r$, $j' = 2r$ または $i' = j' = 2r$ 。

② $p_1(t) < \ell_t \leq \alpha_0 < \beta_0$ のとき

$$s^n(t+1) = \begin{cases} s_{i-1} & \cdots & 1 < i < r \\ s_1 & \cdots & i = 1 \end{cases}$$

$$s^s(t+1) = \begin{cases} s_{j+1} & \cdots & (m_s-1)r+1 \leq j < m_s r \\ s_{2r} & \cdots & j = m_s r \end{cases}$$

よって, $1 \leq i' < r$, $(m_s-1)r+1 < j' \leq m_s r$, $r-i' > m_s r - j'$ また

は $1 \leq i' < r$, $j' = 2r$

③ $p_1(t) < \alpha_0 < \ell_t \leq \beta_0$ のとき

$$s^n(t+1) = \begin{cases} s_{i-1} & \cdots & 1 < i \leq r \\ s_1 & \cdots & i = 1 \end{cases}$$

$$s^s(t+1) = \begin{cases} s_{j+1} & \cdots & (m_s - 1)r + 1 \leq j < m_s r \\ s_{(m_s+1)r} & \cdots & j = m_s r, m_s \neq k \\ s_r & \cdots & j = kr \end{cases}$$

よって, $1 \leq i' < r$, $(m_s - 1)r + 1 < j' \leq m_s r$, $r - i' > m_s r - j'$ または $1 \leq i' < r$, $j' = g(m_s)r$. ここで $g(m)$ は Ⅱ) - ①におけるものと同じものである。

④ $p_1(t) < \alpha_0 < \beta_0 < \ell_t < 1$ のとき

$$s^n(t+1) = \begin{cases} s_{i-1} & \cdots & 1 < i \leq r \\ s_1 & \cdots & i = 1 \end{cases}$$

$$s^s(t+1) = \begin{cases} s_{j-1} & \cdots & (m_s - 1)r + 1 < j \leq m_s r \\ s_{(m_s-1)r+1} & \cdots & j = (m_s - 1)r + 1 \end{cases}$$

よって, $1 \leq i' < r$, $(m_s - 1)r + 1 \leq j' < m_s r$, $r - i' \geq m_s r - j'$.
ゆえに ①~④より, i' , j' について (i)~(iii) のうちのいずれかが成立する。

ゆえに (i)~(iii) より, ℓ_t の値のすべての場合について, 時刻 $(t+1)$ における i' , j' について (i)~(iii) のうちのいずれかが成立していることが示された。

(3) (1), (2) より帰納法により, すべての時刻 t において (i)~(iii) のうちのいずれかが成立していることが証明された。(証明終)

[補題 4.2] システム $\mathcal{L}_{r,k}^n - \mathcal{C}_r^n$, $\mathcal{L}_{r,k}^s - \mathcal{C}_r^s$ において, $\mathcal{L}_{r,k}^n$ と

$\mathcal{L}_{r,k}^s$ が，初期状態が同じで，同じ一様乱数列によって動いているとき，時刻 t におけるそれぞれの出力を $u^n(t)$, $u^s(t)$ とする。このとき，任意の時刻 t において， $u^n(t)$, $u^s(t)$ についてつぎの三つの場合だけが現われる。

$$(i) \quad u^n(t) = u^s(t) = u_1$$

$$(ii) \quad u^n(t) = u_1, \quad u^s(t) = u_j, \quad j \neq 1$$

$$(iii) \quad u^n(t) = u_i, \quad u^s(t) = u_j, \quad i \neq 1, \quad j \neq 1, \quad i \geq j.$$

(証明) オートマトン $\mathcal{L}_{r,k}^n, \mathcal{L}_{r,k}^s$ のどちらも，状態 $s_{(i-1)r+1}$, $s_{(i-1)r+2}, \dots, s_{ir}$ は出力 u_i に対応しているので，補題 4.1 より，明らかに (i)~(iii) が成立する。(証明終)

[補題 4.3] システム $L_{r,k} - C_k^n, L_{r,k}^s - C_k^s$ において， $L_{r,k}$ と $\mathcal{L}_{r,k}^s$ の初期状態が同じであるとし，時刻 t における出力 u_1 の出力確率をそれぞれ $\rho_1^n(t)$, $\rho_1^s(t)$ とすると，任意の時刻 t について，

$$\rho_1^n(t) \geq \rho_1^s(t)$$

となる。

(証明) 命題 4.1, 4.2 より，システム $L_{r,k} - C_k^n$ と $\mathcal{L}_{r,k}^n - C_k^n$, $L_{r,k}^s - C_k^s$ と $\mathcal{L}_{r,k}^s - C_k^s$ は，それぞれ等価であり， $\mathcal{L}_{r,k}^n$ と $\mathcal{L}_{r,k}^s$ の出力の関係は補題 4.2 のようであるので，証明された。(証明終)

さてここで，システム $L_{r,k}^s - C_k^s(p_1, p_2, \dots, p_k)$ について調べる。ただし， $p_1 = \alpha_0$, $p_2 = p_3 = \dots = p_k = \beta_0$ 。まず，確率オートマトン $L_{r,k}^s$ の動作は， C_k^s と結びついていることにより，文献 (1) と同様にして，式 (4.4) のように $kr \times kr$ 遷移確率行列 P によって表わされることがわかる。この確率行列 P からわかるように， $L_{r,k}^s$ の動作はエルゴード的なマルコフ連鎖であるので，極限状態確率ベクトルが存在する。これを $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{kr})$ とすると

[illegible]

- 50 -

$$\pi = \pi P$$

となり，これにより次式が導かれる。

$$\begin{aligned}
 \pi_1 &= q_1 \pi_1 + q_1 \pi_2 \\
 \pi_2 &= p_1 \pi_1 + q_1 \pi_3 \\
 &\vdots \\
 \pi_m &= p_1 \pi_{m-1} + q_1 \pi_{m+1} \\
 &\vdots \\
 \pi_r &= p_1 \pi_{r-1} + \delta p_k \pi_{kr} \\
 \pi_{r+1} &= q_2 \pi_{r+1} + q_2 \pi_{r+2} \\
 \pi_{r+2} &= q_2 \pi_{r+1} + q_2 \pi_{r+3} \\
 &\vdots \\
 \pi_{r+m} &= p_2 \pi_{r+m-1} + q_2 \pi_{r+m+1} \\
 &\vdots \\
 \pi_{2r} &= p_2 \pi_{2r-1} + p_1 \pi_r \\
 &\quad + \beta (p_2 \pi_{2r} + p_3 \pi_{3r} + \dots + p_k \pi_{kr}) \\
 &\quad \text{-----} \\
 \pi_{(k-1)r+1} &= q_k \pi_{(k-1)r+1} + q_k \pi_{(k-1)r+2} \\
 \pi_{(k-1)r+2} &= p_k \pi_{(k-1)r+2} + q_k \pi_{(k-1)r+3} \\
 &\vdots \\
 \pi_{(k-1)r+m} &= p_k \pi_{(k-1)r+m-1} + q_k \pi_{(k-1)r+m+1} \\
 &\vdots \\
 \pi_{kr} &= p_k \pi_{kr-1} + \delta p_{k-1} \pi_{(k-1)r}
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

ここで， π_i の解の形をつぎのようにおく。

$$\pi_{(i-1)r+m} = A_i \lambda_i^{m-1}, \quad 1 \leq m \leq r, \quad 1 \leq i \leq k.$$

これを式 (4.5) の $\pi_{(i-1)r+m}$ に代入すると，

$$q_i \lambda_i^2 - \lambda_i + p_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

となり， $\lambda_i = 1$ または $p_i / q_i (= \alpha_i)$ がでてくる。

これより， $\pi_{(i-1)r+m}$ の一般解は $\lambda_i = 1$ と p_i / q_i の二つの解をあわせたものになっているので，

$$\pi_{(i-1)r+m} = A_i \alpha_i^{m-1} + B_i$$

と表わせる。上式を式 (4.5) の $\pi_{(i-1)r+1}$ に代入して

$$B_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

がわかる。これで，

$$\pi_{(i-1)r+m} = A_i \alpha_i^{m-1} \quad (4.6)$$

となったが，つぎに式 (4.6) を式 (4.5) の π_{ir} に代入すると

$$\left. \begin{aligned} A_1 \alpha_1^{r-1} &= p_1 A_1 \alpha_1^{r-2} + \delta p_k A_k \alpha_k^{r-1} \\ A_3 \alpha_3^{r-1} &= p_3 A_3 \alpha_1^{r-2} + \delta p_2 A_2 \alpha_2^{r-1} \\ A_4 \alpha_4^{r-1} &= p_4 A_4 \alpha_4^{r-2} + \delta p_3 A_3 \alpha_3^{r-1} \\ A_k \alpha_k^{r-1} &= p_k A_k \alpha_k^{r-2} + \delta p_{k-1} A_{k-1} \alpha_{k-1}^{r-1} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

ここで，

$$\sigma_i = \sum_{\ell=1}^r \pi_{(i-1)r+\ell}$$

とおくと，

$$\sum_{i=1}^k \sigma_i = 1 \quad (4.8)$$

$$\sigma_i = A_i \frac{\alpha_i^r - 1}{\alpha_i - 1} \quad (4.9)$$

となる。ここで， σ_i は出力 u_i の出力確率になっている。式 (4.7)，
(4.8) より， A_i がつぎのように決定される。

$$A_i = \frac{\frac{1}{q_i \alpha_i^r \delta^{f(i)}}}{\sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j - q_j} \cdot \frac{\alpha_j^r - 1}{\alpha_j^r} \cdot \frac{1}{\delta^{f(j)}}} \quad (4.10)$$

ここで，

$$f(i) = \begin{cases} k-i+1 & \cdots & i \neq 1 \\ 0 & \cdots & i = 1 \end{cases}$$

である。式 (4.9) (4.10) より

$$\sigma_i = \frac{\frac{1}{p_i - q_i} \cdot \frac{p_i^r - q_i^r}{p_i^r} \cdot \frac{1}{\delta^{f(i)}}}{\sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j - q_j} \cdot \frac{p_j^r - q_j^r}{p_j^r} \cdot \frac{1}{\delta^{f(j)}}} \quad (4.11)$$

また， $p_1 = \alpha_0 < \beta_0 = p_2 = p_3 = \cdots = p_k$ であるので， $\alpha_0 < 1/2$ とすると，
式 (4.11) より

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_1 = 1 \quad (4.12)$$

となることは容易にわかる。これよりつぎの定理が成立する。

〔定理 4.1〕 非定常ランダム媒体 $C_k^n(p_1(t), p_2(t), \cdots, p_k(t))$ に
対して動作するオートマトン $L_{r,k}$ は，条件 $\alpha_0 < 1/2$ がみたされるならば，
 C_k^n に対して ϵ -最適になる。

(証明) 補題 4.3 より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_1^n(t) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_1^s(t) = \sigma_1$$

となる。これと条件 $\alpha_0 < 1/2$ より式 (4.1 2) が成立するので

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_1^n(t) = 1$$

となる。よって式 (4.1) の仮定と定義 2.3 より証明された。(証明終)

これで、Tsetlin の有限オートマトン $L_{r,k}$ と非定常ランダム媒体との相互作用を一様乱数列によって調べ、オートマトン $L_{r,k}$ の ε -最適性を示した。

4.3 有限オートマトン $A_{r,k}$, 確率オートマトン $K_{r,k}$ の ε -最適性

つぎに、 Fu によって構成されたオートマトン $A_{r,k}$ と非定常ランダム媒体との相互作用を調べ、 $L_{r,k}$ の場合と同様のことが成立することを示そう。ここで、 $A_{r,k}$ の状態遷移は図 4.5 にあるように行なわれ、出力関数は $L_{r,k}$ と同じで、状態 $s_{(i-1)r+1}, s_{(i-1)r+2}, \dots, s_{ir}$ は出力 $u_i (i=1, 2, \dots, k)$ に対応しているものとする。システム $L_{r,k} = C_k^n$ の場合と同様に、システム $A_{r,k} = C_k^n(p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t))$ と確率的に等価な一様乱数列を用いたシステム $\mathcal{A}_{r,k}^n = C_k^n$ を考え、さらに、システム $A_{r,k}^s = C_k^s(p_1, p_2, \dots, p_k)$ に確率的に等価な一様乱数列によるシステム $\mathcal{A}_{r,k}^s = C_k^s$ を作ることができる。ただし、 C_k^n は式 (4.1) をみたし、 C_k^s については、 $p_1 = \alpha_0, p_2 = p_3 = \dots = p_k = \beta_0$ とする。また、確率オートマトン $A_{r,k}^s$ は図 4.6 にあるような状態遷移を行ない、各オートマトン $A_{r,k}^s, \mathcal{A}_{r,k}^n, \mathcal{A}_{r,k}^s$ は $A_{r,k}$ と同じ出力関数をもつものとする。このとき、オートマトン $L_{r,k}$ の場合と同様にして、一様乱数列を用いて $\mathcal{A}_{r,k}^n$ と $\mathcal{A}_{r,k}^s$ の関係を調べることにより、 $A_{r,k}$ と $A_{r,k}^s$ について補題 4.3 と同様の関係が成立することが示される。また、 $A_{r,k}^s = C_k^s$ において、オートマトン $A_{r,k}^s$ の動作を、 $L_{r,k}$ の場合と同様にして解析すると、つぎの式 (4.1 3) が得られる。

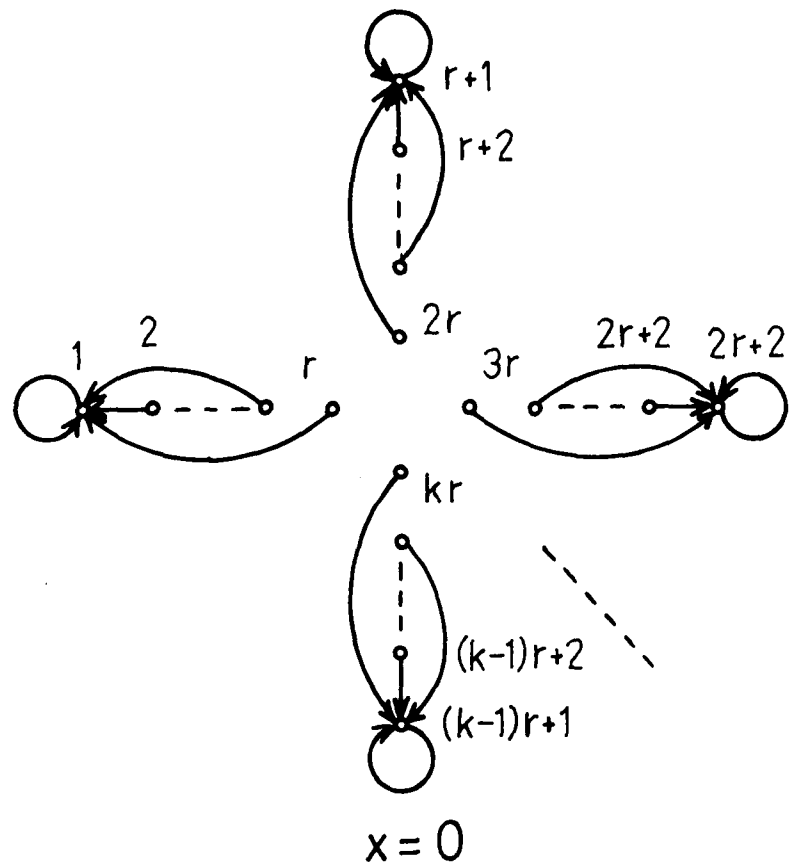
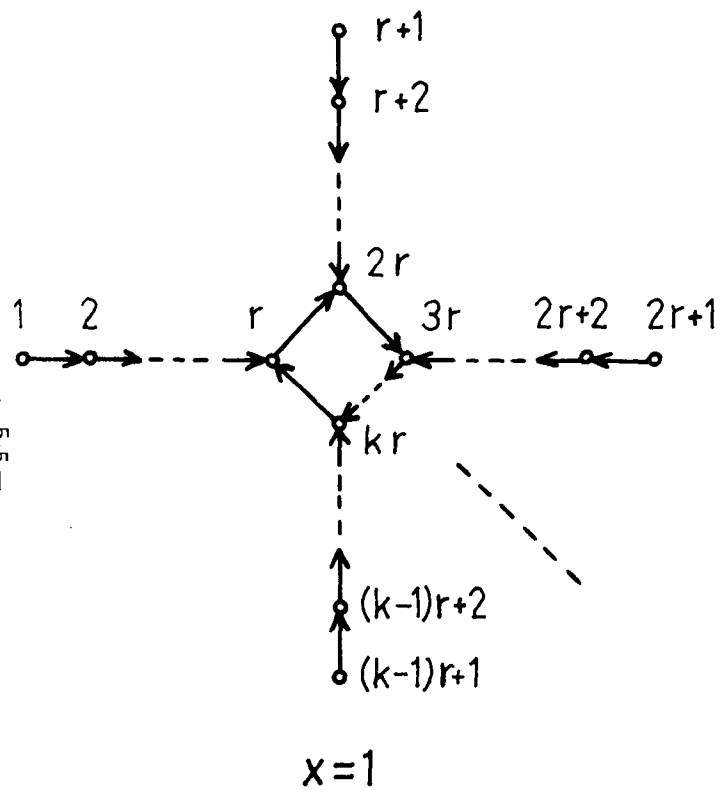


図 4.5 オートマトン $A_{r,k}$ の状態遷移図

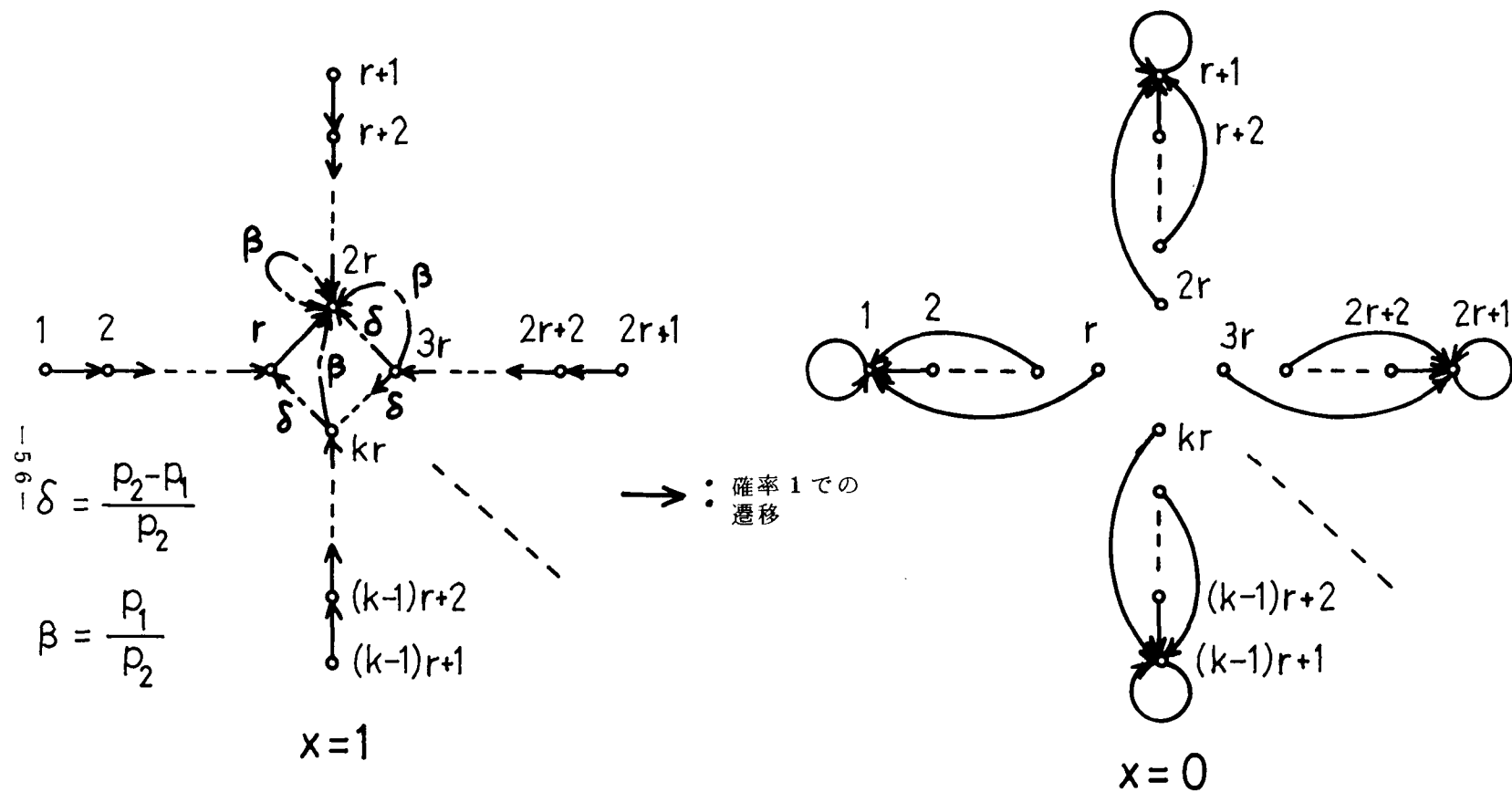


図 4.6 確率オートマトン $A_{r,k}^s$ の状態遷移図

$$\sigma_i = \frac{\frac{1}{p_i^r} + \frac{1}{\partial f(i)}}{\sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j^r} + \frac{1}{\partial f(i)}} \quad (4.13)$$

ここで,

$$f(i) = \begin{cases} k-i+1 & \cdots & i \neq 1 \\ 0 & \cdots & i = 1 \end{cases}$$

$$p_1 = \alpha_0 < \beta_0 = p_2 = \cdots = p_k$$

であるので, 式 (4.13) より

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_1 = 1 \quad (4.14)$$

となる。よって, これらの諸結果より $L_{r,k}$ の場合と同様にしてつぎの定理が成立する。

〔定理 4.2〕 非定常ランダム媒体 $C_k^n(p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t))$ に対して動作するオートマトン $A_{r,k}$ は, C_k^n に対して ϵ -最適になる。

(証明略)

以上, 非定常ランダム媒体と有限オートマトン $A_{r,k}$ との相互作用を, 一様乱数列によるシステムにおきかえて $L_{r,k}$ の場合と同様にして解析することにより, 定理 4.2 にあるように有限オートマトン $A_{r,k}$ は非定常ランダム媒体に対して ϵ -最適になることが示された。

つぎに, 非定常ランダム媒体と $A_{r,k}$ 型, $L_{r,k}$ 型の種々の確率オートマトンとの相互作用を考察するのであるが, ここでは, 状態遷移が図 4.7 によって表わされる Krylov の確率オートマトン $K_{r,k}^{(5)}$ の非定常ランダム媒体に対する動作について調べる。

システム $L_{r,k} - C_k^n$, $A_{r,k} - C_k^n$ の場合と同様にして, システム

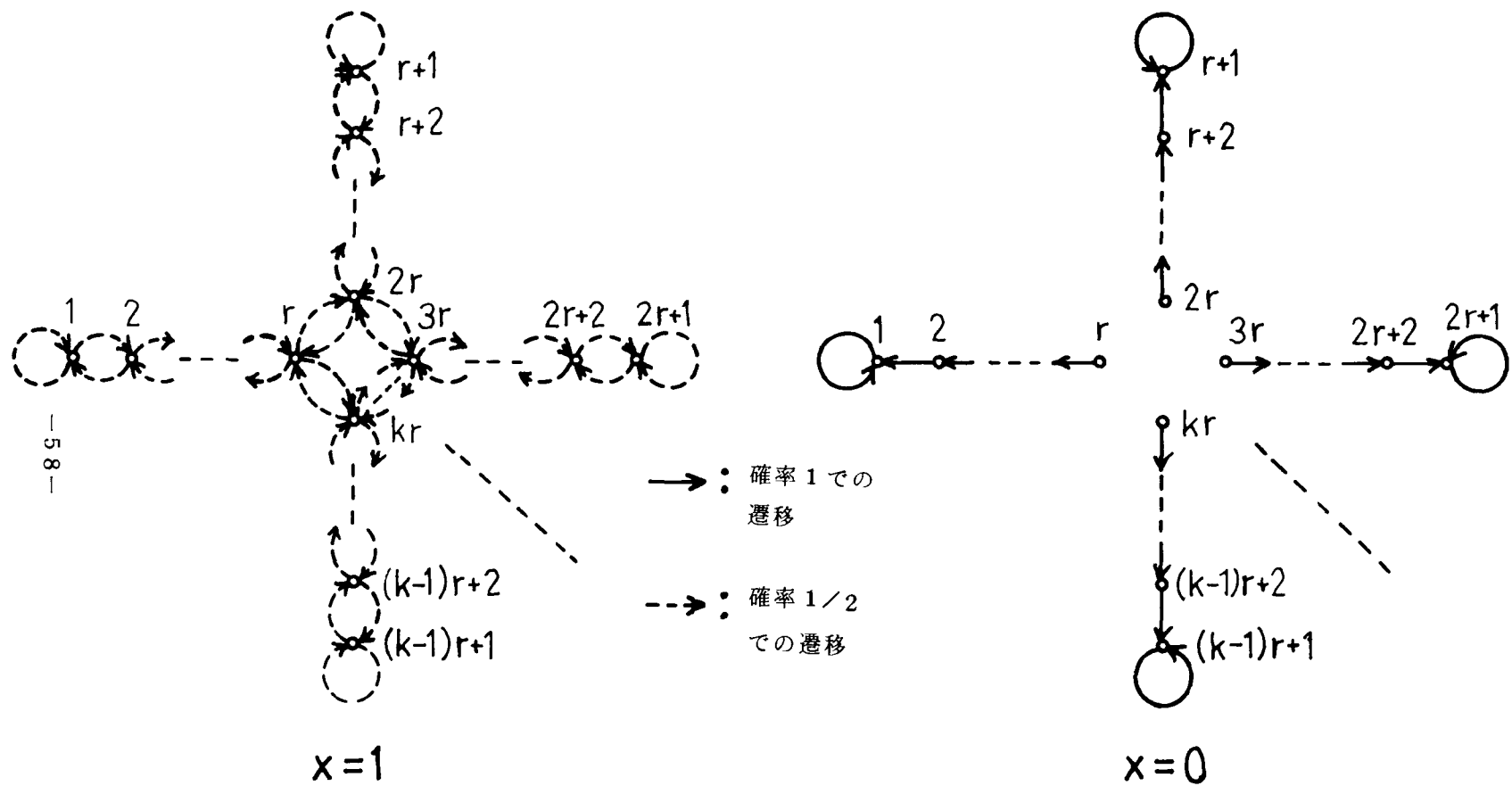


図 4.7 確率オートマトン $K_{r,k}$ の状態遷移図

$K_{r,k} - C_k^n(p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t))$ と確率的に等価な，互いに独立な二つの一様乱数列を用いたシステム $\mathcal{L}_{r,k}^n - \mathcal{C}_k^n$ を考える。ここで， $K_{r,k}$ の出力関数は $L_{r,k}$ と同じものであるとする。

・ $\mathcal{C}_k^n$ の動作： $\mathcal{C}_k^n$ の入力 $u(t) = u_i$ のとき，出力 $x(t)$ は，一様乱数列 $\{\ell_i\}$ によって，つぎのように決定される。

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \dots & 0 < \ell_i \leq p_i(t) \\ 0 & \dots & p_i(t) < \ell_i < 1 \end{cases}$$

・ $\mathcal{L}_{r,k}^n$ の動作：入力 x と一様乱数列 $\{\ell_i'\}$ によって，つぎのように状態遷移を行なう。

(i) $x = 0$ または $x = 1$ ， $\frac{1}{2} < \ell_i' < 1$ のとき

$L_{r,k}$ における $x = 0$ の場合と同じ状態遷移を行なう。

(ii) $x = 1$ ， $0 < \ell_i' < \frac{1}{2}$ のとき

$L_{r,k}$ における $x = 1$ の場合と同じ状態遷移を行なう。

つぎに一様乱数列によるシステム $\mathcal{L}_{r,k}^s - \mathcal{C}_k^s$ をつぎのようにして構成する。

ここで， $\mathcal{C}_k^s = \mathcal{C}_k^s(p_1, p_2, \dots, p_k)$ で， $p_1 = \alpha_0$ ， $p_2 = \dots = p_k = \beta_0$ である。

・ $\mathcal{C}_k^s$ の動作：システム $\mathcal{L}_{r,k}^s - \mathcal{C}_k^s$ におけるものと同じものである。

・ $\mathcal{L}_{r,k}^s$ の動作：

(i) $x = 0$ または $x = 1$ ， $\frac{1}{2} < \ell_i' < 1$ のとき

$\mathcal{L}_{r,k}^n$ における $x = 0$ の場合と同じ状態遷移を行なう。

(ii) $x = 1$ ， $0 < \ell_i' \leq \frac{1}{2}$ ， $0 < \ell_i \leq p_1$ のとき

$\mathcal{L}_{r,k}^n$ における $x = 1$ ， $y = y_1$ の場合と同じ状態遷移を行なう。

(iii) $x = 1$ ， $0 < \ell_i' \leq \frac{1}{2}$ ， $p_1 < \ell_i \leq p_2$ のとき

$\mathcal{L}_{r,k}^n$ における $x = 1$ ， $y = y_2$ の場合と同じ状態遷移を行なう。

これより，乱数列によるシステム $\mathcal{L}_{r,k}^s - \mathcal{C}_k^s$ と確率的に等価なシステム

$K_{r,k}^s = C_k^s(p_1, p_2, \dots, p_k)$ が存在する。ここで、 C_k^s は定常ランダム媒体で、 $K_{r,k}^s$ は図 4.8 におけるような状態遷移を行なう確率オートマトンである。このとき $\gamma_{r,k}^n$ と $\gamma_{r,k}^s$ について、補題 4.1 における $\gamma_{r,k}^n$ と $\gamma_{r,k}^s$ についての関係と同様の関係が成立し、さらに、 $K_{r,k}$ と $K_{r,k}^s$ について、補題 4.3 と同様の性質が成立するが、証明その他詳細は省略する。

また、システム $K_{r,k}^s = C_k^s$ において、 $K_{r,k}^s$ の動作を $L_{r,k}^s$ の場合と全く同様にして解析でき、以下のようになる。

$$\sigma_i = \frac{\frac{1}{a_i - b_i} \cdot \frac{a_i^r - b_i^r}{a_i^r} \cdot \frac{1}{\partial f(i)}}{\sum_{j=1}^k \frac{1}{a_j - b_j} \cdot \frac{a_j^r - b_j^r}{a_j^r} \cdot \frac{1}{\partial f(j)}} \quad (4.15)$$

ここで、 σ_i は出力 u_i の出力確率で

$$a_i = \frac{p_i}{2}, \quad b_i = 1 - \frac{p_i}{2}$$

$$f(i) = \begin{cases} k-i+1 & \dots & i \neq 1 \\ 0 & \dots & i = 1 \end{cases}$$

$$p_1 = \alpha_0 < \beta_0 = p_2 = \dots = p_k$$

である。このことより、 $a_1 < 1/2$ 、 $a_1 < a_i$ 、 $i \neq 1$ となるので

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_1 = 1$$

となる。以上により、 $L_{r,k} = C_k^n$ の場合と同様にしてつぎの定理が成立する。

[定理 4.3] 非定常ランダム媒体 $C_k^n(p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t))$ に対して動作する確率オートマトン $K_{r,k}$ は、 C_k^n に対して ε -最適になる。

(証明略)

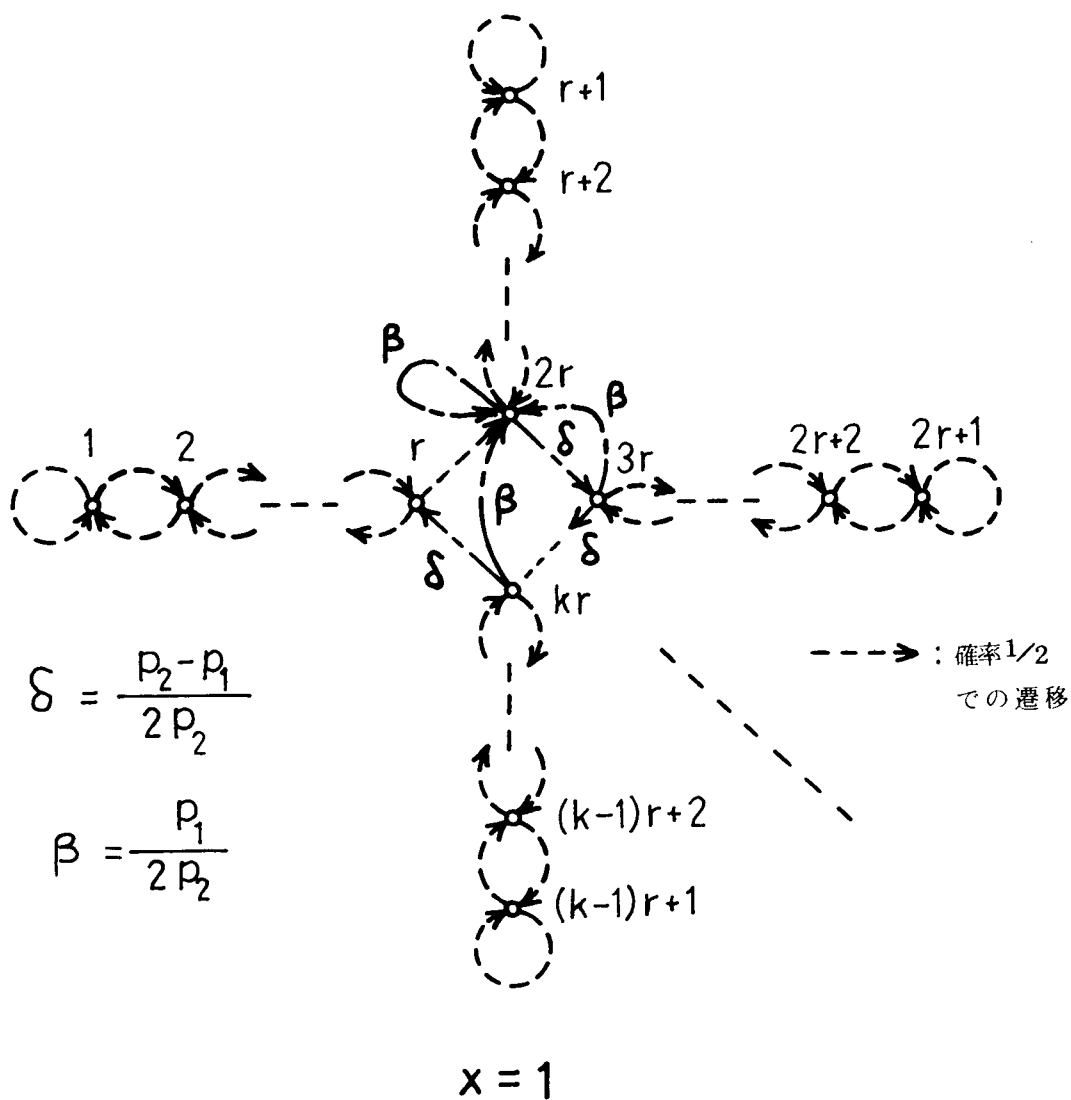


図 4.8 確率オートマトン $K_{r,k}^s$ の状態遷移図

($x = 0$ の場合は $K_{r,k}$ と同じ)

以上， $L_{r,k}$ 型確率オートマトン $K_{r,k}$ と非定常ランダム媒体 C_k^n との相互作用を，二つの一様乱数列を用いて調べることにより， $K_{r,k}$ は C_k^n に対して ϵ -最適になることがわかった。

4.4 結 言

Tsetlin による有限決定性オートマトン $L_{r,k}^{(1)}$ ， Fu による有限決定性オートマトン $A_{r,k}^{(6)}$ ，Krylov による $L_{r,k}$ 型確率オートマトン $K_{r,k}^{(5)}$ と非定常ランダム媒体との相互作用を一様乱数列を用いて考察し，各オートマトンは定常ランダム媒体の場合と同様に ϵ -最適になることがわかった。なお， $K_{r,k}$ は $L_{r,k}$ 型確率オートマトンの一つであるが，他の種々の $L_{r,k}$ 型， $A_{r,k}$ 型確率オートマトンについても同様の性質が成立することは，一様乱数列を用いる本章の $K_{r,k}$ の解析と同様にして，容易に示される。

第5章 可変構造 fuzzy オートマトンの 最適動作と ϵ - 最適動作

5.1 緒 言

本章では可変構造 fuzzy オートマトンの非定常ランダム媒体に対する動作を調べるのであるが，第3章，第4章における考察とつぎの二点において異なっている。まず第一に，本章におけるオートマトンは学習機能をそなえている，すなわち，自己の構造を変化させることができる可変構造を持っていることである。第二は本章のオートマトンとして fuzzy オートマトンを用いることである。

第一の学習機能を持つオートマトンとは，可変構造を持ち環境に対して合目的的に動作するオートマトンのことであり，このようなオートマトンとして確率オートマトンを用いることができる。Varshavskii と Vorentsov⁽⁴⁾ は，初めて学習機能を持つ可変構造確率オートマトンを構成し，その遷移確率行列を非線形補強法によって逐次変化させることにより，このオートマトンはランダム媒体に対して最適に動作しうることを示した。その後，Narendra⁽⁹⁾ により，線形補強法を用いる可変構造確率オートマトンは最適動作はしえないで， ϵ - 最適な動作しか行なわれないことが証明された。さらに，Varshavskii⁽⁴⁾ や Chandrasekaran⁽¹⁸⁾ の非線形補強法による確率オートマトンの最適動作に関する諸結果は修正せねばならないことが指摘されている。

つぎに，第二の fuzzy オートマトンについて述べよう。Wee と Fu⁽²²⁾ は Zadeh によって定義された fuzzy 集合および fuzzy システム^{(19),(20),(21)} に基づいて，パターン認識，自動制御などの学習システムのモデルとして fuzzy

オートマトンを定式化した。fuzzy オートマトンは、特別の場合として、決定性、非決定オートマトンを包含し⁽²³⁾、また確率オートマトンともある一面において類似点がある⁽²⁴⁾。また、学習オートマトンとしての fuzzy オートマトンは、設計の容易さ、計算の容易さなどの利点があげられている。浅居と北嶋^{(25),(26)}は、fuzzy オートマトンを用いて、学習制御による多峰性最適点探索を行なわせており、状態遷移の修正には線形補強法を用いている。また、著者も可変構造 fuzzy オートマトンによる確率的プラントの学習制御について考察している^{(27),(28),(29)}。

以上、学習機能を持つ可変構造オートマトンと fuzzy オートマトンに関する現在までの研究経過を述べた。ところで、ランダム媒体に対する可変構造オートマトンの動作に関する研究については、可変構造確率オートマトンしか行なわれていず、可変構造 fuzzy オートマトンについては、Fu と Li⁽⁶⁾によって、シミュレーション実験により調べられているにすぎない。本章では、Fu と Li の fuzzy オートマトンとは異なった線形補強法を持つ fuzzy オートマトン FA1, FA2 を構成し、これらの fuzzy オートマトンの非定常ランダム媒体に対する動作について考察し、つぎのような結果が得られた。^{(30),(31),(32)}

すなわち、fuzzy オートマトン FA1 は、非定常ランダム媒体がある条件をみたせば、この媒体に対して最適な動作を行ない、しかも、有限時間で最適状態に落ちつくことが証明された。これは有限オートマトンや確率オートマトンにはなかった性質である。また、fuzzy オートマトン FA2 については、本論文で定義されたすべての非定常ランダム媒体に対して、 ϵ -最適性が成立することが証明された。さらに FA1, FA2 の動作について、つぎのような事柄を考察した。FA1 については、確率オートマトンよりも良い動作を示すことが証明されたが、この二つのオートマトン間の動作の差を、シミュレ

ーション実験を行なうことにより，確かめた。FA2 については，ランダム媒体に対して ϵ -最適性が成立することを，FA2 のパラメーターを変化させてシミュレーション実験を行なうことにより確かめた。また，FA2 のランダム媒体に対する動作についての考察をもとにして，FA2 の確率的プラント⁽²⁷⁾に対する動作や二つの FA2 間の確率的零和ゲーム^{(33), (34), (35)}に対する動作についても考察した。

5.2 Fuzzyオートマトン FA1 の構成とその動作

非定常ランダム媒体に対する fuzzyオートマトンの動作を考察するが，fuzzyグレードの補強法の違いにより，二種の fuzzyオートマトン FA1，FA2 が構成される。本節では，fuzzyオートマトン FA1 を構成し，この FA1 の非定常ランダム媒体 $C_k(p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t))$ に対する動作を調べ， C_k がある条件をみたせず，FA1 は C_k に対して最適になり，しかも有限時間で最適状態に落ち着くことを示す。

まず，fuzzyオートマトンを定義しよう。

〔定義 5.1〕 fuzzyオートマトン FA とは

$$FA = (X, U, S, f, \{F(x) | x \in X\}, g)$$

なるシステムである。ここで，

(1) $X = \{0, 1\}$; 入力の集合

(2) $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$; 出力の集合

(3) $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$; 状態の集合

(4) $f = f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t))$; 時刻 t における k 次元 fuzzy 行 (状態) ベクトルである。ただし，

$$0 \leq f_i(t) \leq 1, \quad 1 \leq i \leq k, \quad t = 1, 2, \dots.$$

(5) $F(\ell)=F_t(\ell)$: 時刻 t における次数 k の fuzzy (遷移) 行列である。

すなわち, 各 $\ell \in X$ に対して,

$$F_t(\ell) = \|f_{ij}^{\ell}(t)\|$$

$$0 \leq f_{ij}^{\ell}(t) \leq 1, \quad 1 \leq i, j \leq k, \quad t = 1, 2, \dots。$$

(6) g : 出力関数で, $u(t)$ を時刻 t における出力とすると,

$$u(t) = u_{j^*}, \quad f_{j^*}(t) = \max_j f_{j^*}(t) \quad (5.1)$$

である。

〔定義 5.2〕 時刻 t における fuzzy オートマトン FA の入力 $x(t) = \ell$ のとき, 時刻 $t+1$ における fuzzy 状態ベクトルはつぎのように決定される。

$$f(t+1) = f(t) \circ F_t(\ell) \quad (5.2)$$

ここで, 演算「 $\circ$ 」についてつぎの三つの場合がある⁽²²⁾

$$(1) f_j(t+1) = \max_m \min [f_m(t), f_{mj}^{\ell}(t)] \quad (5.3)$$

このとき, FA を悲観的 fuzzy オートマトンという。

$$(2) f_j(t+1) = \min_m \max [f_m(t), f_{mj}^{\ell}(t)] \quad (5.4)$$

このとき, FA を楽観的 fuzzy オートマトンという。

(3) $f_j(t+1)$ が確率 $1/2$ で式 (5.3), (5.4) によって交互に決定されるとき, FA を複合 fuzzy オートマトンという。

この節で構成される fuzzy オートマトンとして, 定義 5.2 における複合 fuzzy オートマトンを採用し, 以下のような状態遷移グレードの補強法を行なう。このような補強法を持つ (複合) fuzzy オートマトンを $FA1$ とする。

オートマトン $FA1$ に入力 ℓ が入り, 状態 s_i へ遷移して出力 u_i を出し, つぎに媒体からの入力が x であったとする。すなわち $x(t-1) = \ell, s(t) = s_i, u(t) = u_i$ のとき, fuzzy 遷移行列をつぎのように変化させる。

$$\begin{aligned}
f_{ii}^{\ell}(t+1) &= r^{\ell}(t) f_{ii}^{\ell}(t) + \{1 - r^{\ell}(t)\} \{1 - x(t)\} \\
f_{jj}^{\ell}(t+1) &= r^{\ell}(t) f_{jj}^{\ell}(t) + \{1 - r^{\ell}(t)\} \cdot x(t), \quad j \neq i \\
f_{jm}^{\ell}(t+1) &= f_{mm}^{\ell}(t), \quad j \neq m
\end{aligned} \tag{5.5}$$

ただし,

$$r^{\ell}(t) = 1 - \frac{1}{N(\ell, t)}$$

$N(\ell, t)$: 時刻 1 から t までに入力 ℓ であった回数である。

つぎに, 上に述べたような補強法をもつ fuzzy オートマトン $FA1$ と非定常ランダム媒体との相互作用について調べる。

〔定理 5.1〕 非定常ランダム媒体 $C_k(p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t))$ について, つぎの条件

$$\alpha_0 < \frac{1}{2} < \beta_0 \tag{5.6}$$

がみたされるならば, C_k に対して動作している fuzzy オートマトン $FA1$ の状態遷移グレードは, 時間無限大において, つぎのようになる。すなわち,

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき, } f_{mj}^{\ell} \rightarrow \lambda_j, \quad \lambda_{i^*} > \lambda_j, \quad j \neq i^*$$

である。

(証明) $x(t-1) = \ell$, $u(t) = u_i$ のときに, $FA1$ の入力を $x(t)$ とすると, $FA1$ の補強の式 (5.5) より, $f_{jj}^{\ell}(t)$ はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
f_{ii}^{\ell}(t+1) &= r^{\ell}(t) f_{ii}^{\ell}(t) + \{1 - r^{\ell}(t)\} \lambda_i^{\ell}(t) \\
f_{jj}^{\ell}(t+1) &= r^{\ell}(t) f_{jj}^{\ell}(t) + \{1 - r^{\ell}(t)\} \bar{\lambda}_i^{\ell}(t), \quad j \neq i
\end{aligned} \tag{5.7}$$

ここで,

$$r^{\ell}(t) = 1 - \frac{1}{N(\ell, t)}, \quad \lambda_i^{\ell}(t) = 1 - x(t), \quad \bar{\lambda}_i^{\ell}(t) = x(t).$$

すると, $f_{mm}^{\ell}(t)$ は式 (5.7) より

$$f_{mm}^{\ell}(t+1) = \frac{1}{N(\ell, t)} \{ g_m^{\ell}(t_1^{\ell}) + g_m^{\ell}(t_2^{\ell}) + \cdots + g_m^{\ell}(t_{N(\ell, t)}^{\ell}) \} \quad (5.8)$$

と表わされる。ここで,

$$g_m^{\ell}(t) = \begin{cases} \lambda_m^{\ell}(t) \cdots u(t) = u_m \text{ のとき} \\ \bar{\lambda}_j^{\ell}(t) \cdots u(t) = u_j, \quad j \neq m \text{ のとき} \end{cases} \quad (5.9)$$

である。いま, すべての時刻 t において, $u(t) = u_i^*$ とすると,

$$f_{mm}^{\ell}(t) = \begin{cases} \frac{1}{N(\ell, t)} \{ \lambda_{i^*}^{\ell}(t_1^{\ell}) + \lambda_{i^*}^{\ell}(t_2^{\ell}) + \cdots + \lambda_{i^*}^{\ell}(t_{N(\ell, t)}^{\ell}) \}, & m = i^* \\ \frac{1}{N(\ell, t)} \{ \bar{\lambda}_{i^*}^{\ell}(t_1^{\ell}) + \bar{\lambda}_{i^*}^{\ell}(t_2^{\ell}) + \cdots + \bar{\lambda}_{i^*}^{\ell}(t_{N(\ell, t)}^{\ell}) \}, & m \neq i^* \end{cases} \quad (5.10)$$

となる。ここで $p_r \{ x(t) = 1 \mid u(t) = u_j \} = p_j(t)$ であるので, $\lim_{t \rightarrow \infty} f_{ii}^{\ell}(t)$

を η_i と表わすと, 式 (5.10), (2.6) より

$$i = i^* \text{ のとき} \quad \eta_i > 1 - \alpha_0$$

$$i \neq i^* \text{ のとき} \quad \eta_i < \alpha_0$$

となることは明らかである。

しかし, 一般には任意の時刻 t について, $u(t) = u_i^*$ は成立せず $f_{mm}^{\ell}(t)$ はつぎのように表わされる。

$$f_{mm}^{\ell}(t) = \frac{1}{N(\ell, t)} [\{ \bar{\lambda}_1^{\ell}(t_{1,1}^{\ell}) + \bar{\lambda}_1^{\ell}(t_{1,2}^{\ell}) + \cdots + \bar{\lambda}_1^{\ell}(t_{1,N_1}^{\ell}) \} + \cdots + \{ \bar{\lambda}_i^{\ell}(t_{i,1}^{\ell}) + \bar{\lambda}_i^{\ell}(t_{i,2}^{\ell}) + \cdots + \bar{\lambda}_i^{\ell}(t_{i,N_i}^{\ell}) \} + \cdots]$$

$$\begin{aligned} & \cdots + \{ \lambda_m^\ell(t_{m,1}^\ell) + \lambda_m^\ell(t_{m,2}^\ell) + \cdots + \lambda_m^\ell(t_{m,N_m^\ell}^\ell) \} + \\ & \cdots + \{ \bar{\lambda}_k^\ell(t_{k,1}^\ell) + \bar{\lambda}_k^\ell(t_{k,2}^\ell) + \cdots + \bar{\lambda}_k^\ell(t_{k,N_k^\ell}^\ell) \}] \end{aligned} \quad (5.11)$$

ここで， $t_{i,j}^\ell$ は入力 ℓ が入ってから状態 s_i になった時刻で， N_i^ℓ は時刻 t までに入力 ℓ が入ってから状態が s_i になった回数であり， $N(\ell, t) = \sum_{i=1}^k N_i^\ell$ となる。また，この式 (5.11) はつぎのように表わせる。

$$f_{mm}^\ell(t) = \frac{1}{N(\ell, t)} \sum_{i=1}^k N_i^\ell \cdot h_i^\ell(t) \quad (5.12)$$

ここで，

$$\begin{aligned} & h_i^\ell(t) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{N_i^\ell} \{ \bar{\lambda}_i^\ell(t_{i,1}^\ell) + \bar{\lambda}_i^\ell(t_{i,2}^\ell) + \cdots + \bar{\lambda}_i^\ell(t_{i,N_i^\ell}^\ell) \}, & i \neq m \\ \frac{1}{N_i^\ell} \{ \lambda_i^\ell(t_{i,1}^\ell) + \lambda_i^\ell(t_{i,2}^\ell) + \cdots + \lambda_i^\ell(t_{i,N_i^\ell}^\ell) \}, & i = m \end{cases} \end{aligned} \quad (5.13)$$

である。さて， $\lim_{t \rightarrow \infty} N(\ell, t) = \infty$ であるので，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_i^\ell}{N(\ell, t)} = \alpha_i^\ell \quad (5.14)$$

とおく。すなわち，入力 ℓ が入ってから状態 s_i にある割合の極限值が α_i^ℓ である。ここで， $p_r \{x(t)=1 | u(t)=u_i\} = p_i(t)$ であるので， $\lim_{t \rightarrow \infty} N_i^\ell = \infty$ の場合には，式 (5.13)，(2.6) より， δ_i をつぎのように定める。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_i(t) = \begin{cases} \delta_i & i \neq m \\ 1 - \delta_i & i = m \end{cases} \quad (5.15)$$

$$0 < \delta_i^* < \alpha_0 < \beta_0 < \delta_i < 1, \quad i \neq i^* \quad (5.16)$$

ゆえに式 (5.1 2), (5.1 4), (5.1 5) より

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} f_{ji}^{\mathcal{L}}(t) \\ &= \alpha_1^{\mathcal{L}} \delta_1 + \alpha_2^{\mathcal{L}} \delta_2 + \cdots + \alpha_{i-1}^{\mathcal{L}} \delta_{i-1} + \alpha_i^{\mathcal{L}} (1 - \delta_i) + \alpha_{i+1}^{\mathcal{L}} \delta_{i+1} \\ & \quad + \cdots + \alpha_k^{\mathcal{L}} \delta_k, \quad i=1, 2, \cdots, k. \end{aligned} \quad (5.1 7)$$

となる。ただし, $\lim_{t \rightarrow \infty} N_j^{\mathcal{L}} < \infty$, すなわち $\alpha_j^{\mathcal{L}} = 0$ の場合 δ_j は式 (5.1 6) をみたさないが $\alpha_j^{\mathcal{L}} \delta_j = 0$ となっている。ここで,

$$f_{ji}^{\mathcal{L}}(t+1) = f_{ji}^{\mathcal{L}}(t) \quad (5.1 8)$$

であるので

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_{ji}^{\mathcal{L}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f_{ji}^{\mathcal{L}}(t) = \lambda_i, \quad i=1, 2, \cdots, k \quad (5.1 9)$$

である。よって, 式 (5.1 7) より

$$\lambda_{i^*} - \lambda_i = \alpha_{i^*}^{\mathcal{L}} (1 - 2\delta_{i^*}) + \alpha_i^{\mathcal{L}} (2\delta_i - 1), \quad i \neq i^*. \quad (5.2 0)$$

また, 式 (5.1 6) と条件式 (5.6) とより

$$1 - 2\delta_{i^*} > 0 > 1 - 2\delta_i \quad (5.2 1)$$

となるので

$$\lambda_{i^*} > \lambda_i, \quad i \neq i^*$$

である。(証明終)

〔定理 5.2〕 (Wee & Fu^(2,2)) 複合fuzzyオートマトンにおいて, 遷移グレード $f_{ij}^{\mathcal{L}}(t)$ が

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき } f_{ij}^{\mathcal{L}}(t) \rightarrow \lambda_j$$

ならば, 状態グレード $f_j(t)$ は

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき } f_j(t) \rightarrow \lambda_j$$

となる。

〔定理 5.3〕 非定常ランダム媒体 $C_k(p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t))$ が、条件 $\alpha_0 < \frac{1}{2} < \beta_0$ をみたすならば、 C_k に対して動作している fuzzy オートマトン $FA1$ の出力 $u(t)$ について、つぎのことが成立する。すなわち、 t 、 N を自然数とすると、

$$\exists N < \infty, \quad \forall t > N, \quad u(t) = u_{i^*}$$

となる。

(証明) 定理 5.1, 5.2 より、 C_k に対して動作する $FA1$ の状態グラフは

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき, } f_{i^*}(t) > f_i(t), \quad i \neq i^* \quad (5.22)$$

となる。ここで、

$$f_{i^*}(t) - f_i(t) = d(t) \quad (5.23)$$

とおくと、式 (5.22) (5.23) より、ある θ が存在して

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき, } \lim_{t \rightarrow \infty} d(t) > \theta > 0. \quad (5.24)$$

ここで、収束数列 $\{d(t)\}$ と式 (5.24) より、ある数 η が存在して

$$0 < \eta < \theta, \quad \exists N < \infty, \quad \forall t > N, \quad d(t) > \eta \quad (5.25)$$

となる。すなわち、

$$\exists N < \infty, \quad \forall t > N, \quad d(t) > 0 \quad (5.26)$$

である。これと式 (5.23) より

$$\exists N < \infty, \quad \forall t > N, \quad f_{i^*}(t) > f_i(t). \quad (5.27)$$

また、fuzzy オートマトンの出力関数より

$$\exists N < \infty, \quad \forall t > N, \quad u(t) = u_{i^*}$$

となる。(証明終)

〔系 5.1〕 非定常ランダム媒体 $C_k(p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t))$ について、条件 $\alpha_0 < 1/2 < \beta_0$ がみたされるならば、 C_k に対して動作している

fuzzyオートマトン $FA1$ は, C_k に対して最適である。

(証明) 定義 2.2 と定理 5.3 より明らかである。

以上のように, 条件 $\alpha_0 < \frac{1}{2} < \beta_0$ がみたされる非定常ランダム媒体に対して, fuzzyオートマトン $FA1$ は最適動作を行ない, しかも有限時間で最適状態に落ちつくことが証明された。次節では, 違った型の fuzzyオートマトン $FA2$ の動作について述べよう。

5.3 fuzzy オートマトン $FA2$ の構成とその動作

本節では, fuzzy オートマトン $FA2$ として, 定義 5.2 におけるようなものではなく, 状態グレードを直接変更していくものを採用する。

まず, $FA2$ の補強法について述べるが, $FA2$ の状態集合, 入力集合, 出力集合, fuzzy 状態ベクトル, 出力関数は定義 5.1 と同じであるとする。 $FA2$ が出力 u_i を出し, それに対する非定常ランダム媒体 C_k からの応答が x であったとする。すなわち, 出力 $u(t) = u_i$, 入力を $x(t)$ とすると, つぎのように状態グレードが変更される。

$$\begin{aligned} f_i(t+1) &= r(i, t) f_i(t) + \{1 - r(i, t)\} \lambda_i(t) \\ f_j(t+1) &= f_j(t) \quad , \quad j \neq i \end{aligned} \quad (5.28)$$

ただし,

$$r(i, t) = 1 - \frac{1}{N(i, t) + M} \quad , \quad \lambda_i(t) = 1 - x(t) \quad (5.29)$$

$N(i, t)$: 時刻 1 から t までに出力 u_i を出した回数

M : 正の定数。

また, 初期 fuzzy ベクトル $f(1)$ を

$$f(1) = (1, 1, \dots, 1) \quad (5.30)$$

と設定しておく。

〔補題 5.1〕 $FA2$ が非定常ランダム媒体 $C_k(p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t))$ に対して動作しているとき，十分大きい時刻まで出力 u_i を出していたとすると，

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき， } 1 - \alpha_0 \leq f_{i^*}(t), \quad 1 - \beta_0 > f_i(t), \quad i \neq i^*$$

である。ここで， α_0, β_0, i^* は定義 2.1 におけるものである。

(証明) 時刻 t までに出力 u_i を m_i 回出していたとする。すなわち， $m_i = N(i, t)$ とすると， $FA2$ の補強式 (5.28) より

$$f_i(t+1) = \frac{1}{m_i + M} \{ M f_i(1) + \lambda_i(n_1) + \lambda_i(n_2) + \dots + \lambda_i(n_{m_i}) \} \quad (5.31)$$

となる。ただし， $n_j (j=1, 2, \dots, m_i)$ は出力 u_i を出した時刻である。

ここで， $f_i(1) = 1, i=1, 2, \dots, k$ であるので，

$$f_i(t+1) = \frac{1}{1 + \frac{M}{m_i}} \left\{ \frac{M}{m_i} + \frac{\lambda_i(n_1) + \lambda_i(n_2) + \dots + \lambda_i(n_{m_i})}{m_i} \right\} \quad (5.32)$$

と表わせる。ここで， $\lambda_i(t) = 1 - x(t)$ であるので，

$$p_i \{ \lambda_i(t) = 1 \} = 1 - p_i(t)$$

となり，式 (2.6) より

$$1 > 1 - p_{i^*}(t) > 1 - \alpha_0 > 1 - \beta_0 > 1 - p_i(t) > 0$$

となり，

$$\frac{\lambda_i(n_1) + \lambda_i(n_2) + \dots + \lambda_i(n_{m_i})}{m_i} \begin{cases} \geq 1 - \alpha_0, & i = i^* \\ > 1 - \beta_0, & i \neq i^* \end{cases} \quad (5.33)$$

である。ここで、条件より、 $t \rightarrow \infty$ のとき $m_i \rightarrow \infty$ であるので

$$m_i \rightarrow \infty \text{ のとき, } M/m_i \rightarrow 0. \quad (5.34)$$

式 (5.32), (5.33), (5.34) より

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき} \quad f_i(t) \begin{cases} > 1-a, & i = i^* \\ < 1-b, & i \neq i^* \end{cases}$$

となる。(証明終)

〔補題 5.2〕 $FA2$ 非定常ランダム媒体 C_k に対して動作しているとき、 $FA2$ の出力 $u(t)$ について、つぎの二つの場合のみが表われる。

(i) $\exists N < \infty, \forall t > N$ について

$$u(t) = u_{i_1}, u_{i_2}, \dots \text{ or } u_{i_\ell}, 1 \leq \ell \leq k-1, \quad i_j \neq i^*$$

(ii) $\exists N < \infty, \forall t > N$ について、 $u(t) = u_{i^*}$

(証明) $FA2$ の出力 $u(t)$ について、証明しようとする (i), (ii) 以外につぎの三番目の場合がある。

(iii) $\exists N < \infty, \forall t > N, \quad u(t) = u_{i^*}, u_{i'_1}, u_{i'_2}, \dots \text{ or } u_{i'_\ell}$

$$1 \leq \ell \leq k-1, \quad i_j' \neq i^*$$

この (iii) の場合、補題 5.1 より

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき } f_{i^*}(t) > 1 - \alpha_0$$

$$f_i(t) < 1 - \beta_0, \quad i = i'_1, i'_2, \dots, i'_\ell$$

ゆえに、このとき $\alpha_0 < \beta_0$ より

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき } f_{i^*}(t) > f_i(t)$$

となり、 $FA1$ の定理 5.3 の証明と同様にして

$$\exists N < \infty, \forall t > N, \quad u(t) = u_{i^*}$$

となる。ゆえに、(iii) の場合も (ii) の場合になってしまう。(証明終)

〔定理 5.4〕 $FA2$ が非定常ランダム媒体 $C_k(p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t))$ に対して動作しているとき, M が十分大きいならば, $FA2$ の出力 $u(t)$ は

$$\exists N < \infty, \quad \forall t > N, \quad u(t) = u_{i^*}$$

である。

(証明) 補題 5.2 より, $FA2$ の出力 $u(t)$ について, 二つの場合がある。補題 5.2 の (ii) の場合は明らかであるから, (i) の場合

$$\exists N < \infty, \quad \forall t > N, \quad u(t) = u_{i_1}, u_{i_2}, \dots \text{ or } u_{i_\ell} \quad (5.3.5)$$

$$1 \leq \ell \leq k-1, \quad i_j \neq i^* \quad (1 \leq j \leq \ell)$$

について調べればよい。また, すべての i について

$$f_i(t+1) = \frac{1}{1 + \frac{M}{m_i}} \left\{ \frac{M}{m_i} + \frac{\lambda_i(n_1) + \dots + \lambda_i(n_{m_i})}{m_i} \right\} \quad (5.3.2)$$

が成立している。ここで, N がどのように大きい値であっても, すなわち m がどのように大きくても, M をこの N より十分大きくとることができる。このとき, すべての i について, m_i/M は, ほとんど「0」に等しい。すなわち,

$$m_i/M \cong 0, \quad i=1, 2, \dots, k. \quad (5.3.6)$$

である。式 (5.3.6), (5.3.2) より

$$\forall t < N \text{ について, } f_i(t) \cong 1, \quad i=1, 2, \dots, k. \quad (5.3.7)$$

式 (5.3.5) と補題 5.1 より,

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき, } f_{i_j}(t) < 1 - \beta_0 < 1, \quad i_j \neq i^* \quad (5.3.8)$$

となる。また, 式 (5.3.7) より $f_{i^*}(t) \cong 1$ であるので, $f_{i^*}(t) < 1 - \beta_0$ となるまで, 出力 u_{i^*} を出ることができる。式 (5.3.2) より, $f_{i^*} <$

$< 1 - \beta_0$ となるのは，少なくとも $M/m_{i^*} < 1$ のときである。ここで， M は十分大きい値となっているので， m_{i^*} は十分大きいものだとしてよい。また，

$$p_i \{ \lambda_{i^*}(t) = 1 \} = 1 - p_{i^*}(t), \quad 0 < p_{i^*}(t) < \alpha_0$$

であるので，

$$\frac{\lambda_{i^*}(n_1) + \cdots + \lambda_{i^*}(n_{m_{i^*}})}{m_{i^*}} = \lambda_{i^*} > 1 - \alpha_0, \quad (5.3.9)$$

となっている。このとき，式 (5.3.2) より， $f_{i^*}(t)$ は m_{i^*} について，単調減少となっており，補題 5.1 より，

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき， } f_{i^*}(t) > 1 - \alpha_0$$

で $1 - \alpha_0 > 1 - \beta_0$ であるので， $N < N'$ について

$$\forall t > N', \quad f_{i^*}(t) > 1 - \beta_0$$

となる。また，これと式 (5.3.8) より

$$\exists N' < \infty, \quad \forall t > N', \quad f_{i^*}(t) > f_i(t), \quad i \neq i^* \quad (5.4.0)$$

となり，FA2 の出力関数より

$$\exists N' < \infty, \quad \forall t > N', \quad u(t) = u_{i^*} \quad (5.4.1)$$

となる。(証明終)

[系 5.2] fuzzy オートマトン FA2 が非定常ランダム媒体 $C_k(p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t))$ に対して動作しているとき，FA2 は C_k に対して ε -最適である。

(証明) 定義 2.3 と定理 5.4 より明らかである。

以上で，fuzzy オートマトン FA2 を構成し，その非定常ランダム媒体に対する動作を調べ，FA2 は，本論文で定義されたすべての非定常ランダム媒体に対して ε -最適であることが明らかになった。次節では，このような

性質をもとにして，これら fuzzy オートマトンの種々のシステムに対する動作を調べ，またそのシミュレーション実験を行ない，これらの性質を確かめる。

5.4 fuzzy オートマトンの種々のシステムに対する動作とそのシミュレーション

1) fuzzy オートマトン $FA1$ の動作

定理 5.3，系 5.1 によって示された fuzzy オートマトン $FA1$ の，最適で，有限時間で最適状態に落ちつくという性質を確かめるために，シミュレーション実験を行なう。なお，ここでは定常なランダム媒体を用いるものとする。また， ϵ - 最適にしかならない確率オートマトン⁽⁹⁾ のランダム媒体に対する動作もシミュレーション実験で調べることにより $FA1$ との比較を行なう。

(1) fuzzy オートマトン $FA1$

ここでの fuzzy オートマトン $FA1$ として，遷移グレードを変更するものではなく，直接に状態グレードを変更するもの⁽³¹⁾を採用する。この場合にも，定理 5.3，系 5.1 が成立することは，文献 (31) より，定理 5.3 と同様にして容易に示される。補強法は以下のようなものである。

$u(t) = u_i$ のとき，媒体出力を $x(t)$ とすると

$$f_i(t+1) = \alpha(t)f_i(t) + \{1 - \alpha(t)\}\lambda_i(t)$$

$$f_j(t+1) = \alpha(t)f_j(t) + \{1 - \alpha(t)\}\bar{\lambda}_i(t), \quad j \neq i.$$

ここで， $\alpha(t) = 1 - \frac{1}{t}$ ， $\lambda_i(t) = 1 - x(t)$ ， $\bar{\lambda}_i(t) = x(t)$ 。

(2) 確率オートマトン

$\pi_i(t)$ を時刻 t における状態 i の状態確率とし，状態出力型確率オートマトンとする。出力 $u(t) = u_i$ のとき入力を $x(t)$ とすると， $\pi_i(t)$ はつぎの

ように変更される。

(i) $x(t) = 0$ のとき

$$\pi_i(t+1) = \pi_i(t) + \beta(1 - \pi_i(t))$$

$$\pi_j(t+1) = \pi_j(t) - \beta\pi_j(t), \quad j \neq i.$$

(ii) $x(t) = 1$ のとき

$$\pi_\ell(t+1) = \pi_\ell(t), \quad \ell = 1, 2, \dots, k.$$

このような状態確率の補強を行なうならば，ランダム媒体が条件 $\alpha_0 < \frac{1}{2} < \beta_0$ をみたすとき

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_i^*(t) = 1$$

となることが証明されている⁽⁹⁾。すなわち，この確率オートマトンは ϵ -最適になる。

(3) シミュレーションとその結果

条件 $\alpha_0 < \frac{1}{2} < \beta_0$ がみたされるランダム媒体 $C_6(p_1, p_2, \dots, p_6)$ に対する動作を調べるのであろうが，ここで， $p_1 = 0.8$ ， $p_2 = 0.6$ ， $p_3 = 0.7$ ， $p_4 = 0.55$ ， $p_5 = 0.90$ ， $p_6 = 0.4$ とし，また確率オートマトンについては $\beta = 0.01$ とする。この結果は，図 5.1 のようになる。

ここで， $I(t)$ は

$$I(t) = \frac{1}{t} \sum_{\ell=1}^t x(\ell) \quad (5.42)$$

である。この図 5.1 を見ると，fuzzy オートマトンの方が確率オートマトンより早く， $I(t)$ が最適な値 $p_{i*} = p_6 = 0.4$ に収束している。これは，fuzzy オートマトンは最適になり，確率オートマトンは ϵ -最適にしかないという，その差が現われたものである。

2) Fuzzy オートマトン FA2 の動作

Fuzzy オートマトン FA2 については，ランダム媒体に対する動作だけで

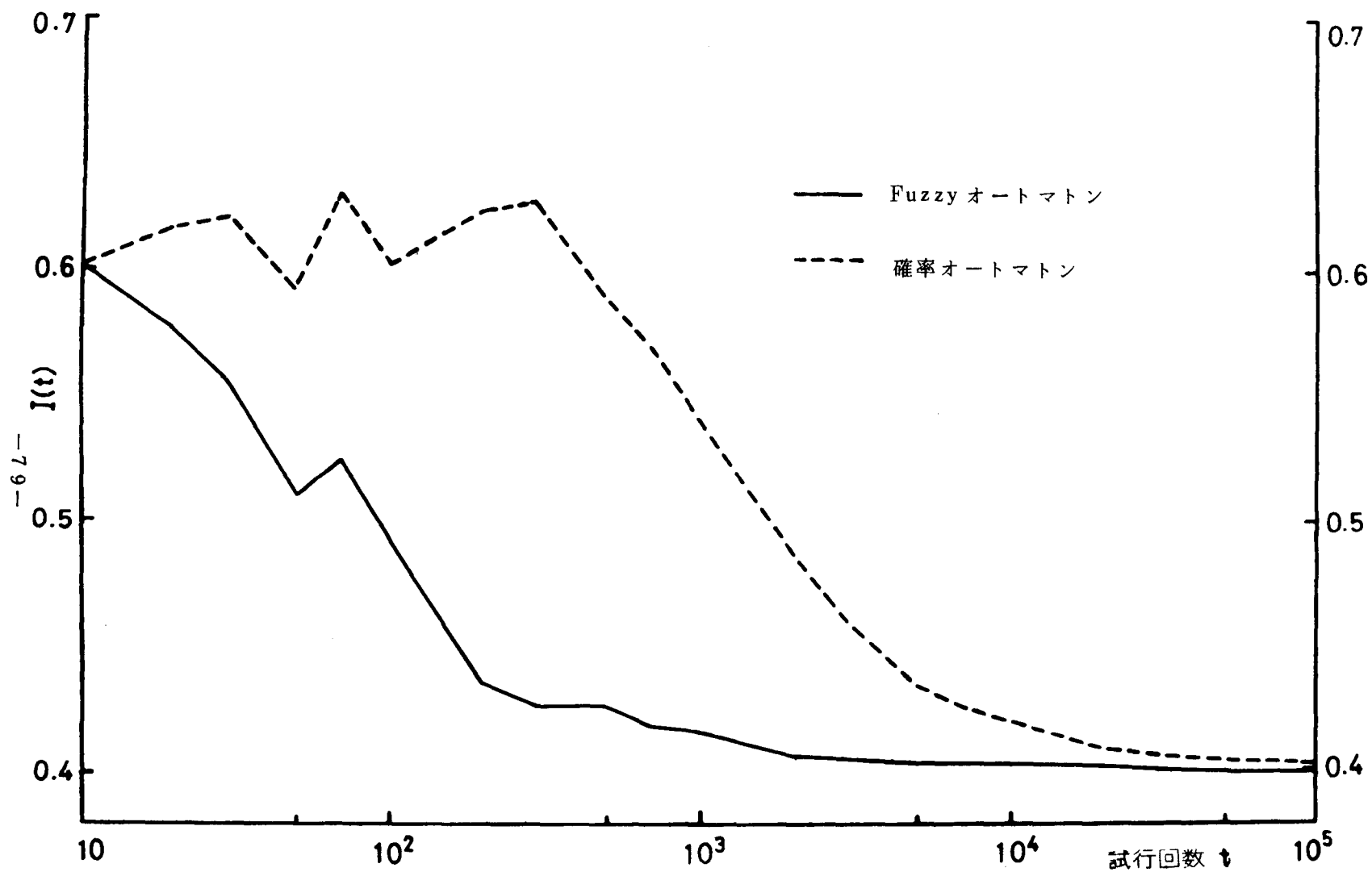


図 5.1 ランダム媒体における確率オートマトンと fuzzy オートマトン $FA1$ の動作

はなしに，確率プラントに対する動作や，二つのFA2間の二人零和確率ゲームについても考察し，そのシミュレーション実験を行なう。

(1) FA2とランダム媒体

ランダム媒体 $C_6(p_1, p_2, \dots, p_6)$ に対するFA2の動作を調べる。ここで， $p_1=0.2$ ， $p_2=0.3$ ， $p_3=0.4$ ， $p_4=0.5$ ， $p_5=0.6$ ， $p_6=0.7$ とする。また正定数 M については，10，100，1000の三通りについて実験を行ない，その結果は図5.2のようになった。ここで， $I(t)$ は式(5.42)で表わされたものである。この図5.2にあるように，それぞれの M の値について，最適値 $p_{j*} = p_1 = 0.2$ に収束しているが， M の値が大きくなるにつれて収束の速度は遅くなっている。

(2) FA2と確率プラント

すでに，筆者らは離散的な確率プラントを制御するfuzzyオートマトンを設計していたが⁽²⁷⁾，この同じ確率プラントに対しても，fuzzyオートマトンFA2は ϵ -最適とよく似た動作をすることが示される。

・プラントの性質

プラントの出力 x は $[1, 6]$ なる区間の連続値をとるものとし，入力 u は $\{u_1, u_2, u_3\}$ の三種類とする。未知プラントは，特性値 $M(x|u_\nu)$ を中心として，つぎのような一様分布をもつ雑音があるものとする。

$$p(x|u_\nu) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \dots & -\frac{s}{2} + M(x|u_\nu) < x < \frac{s}{2} + M(x|u_\nu) \\ 0 & \dots & \text{その他} \end{cases} \quad \nu=1,2,3 \quad (5.43)$$

ここで， $M(x|u_1)=2.5$ ， $M(x|u_2)=3.5$ ， $M(x|u_3)=4.5$ であり，また $s=3.0$ とした。

・FA2の動作

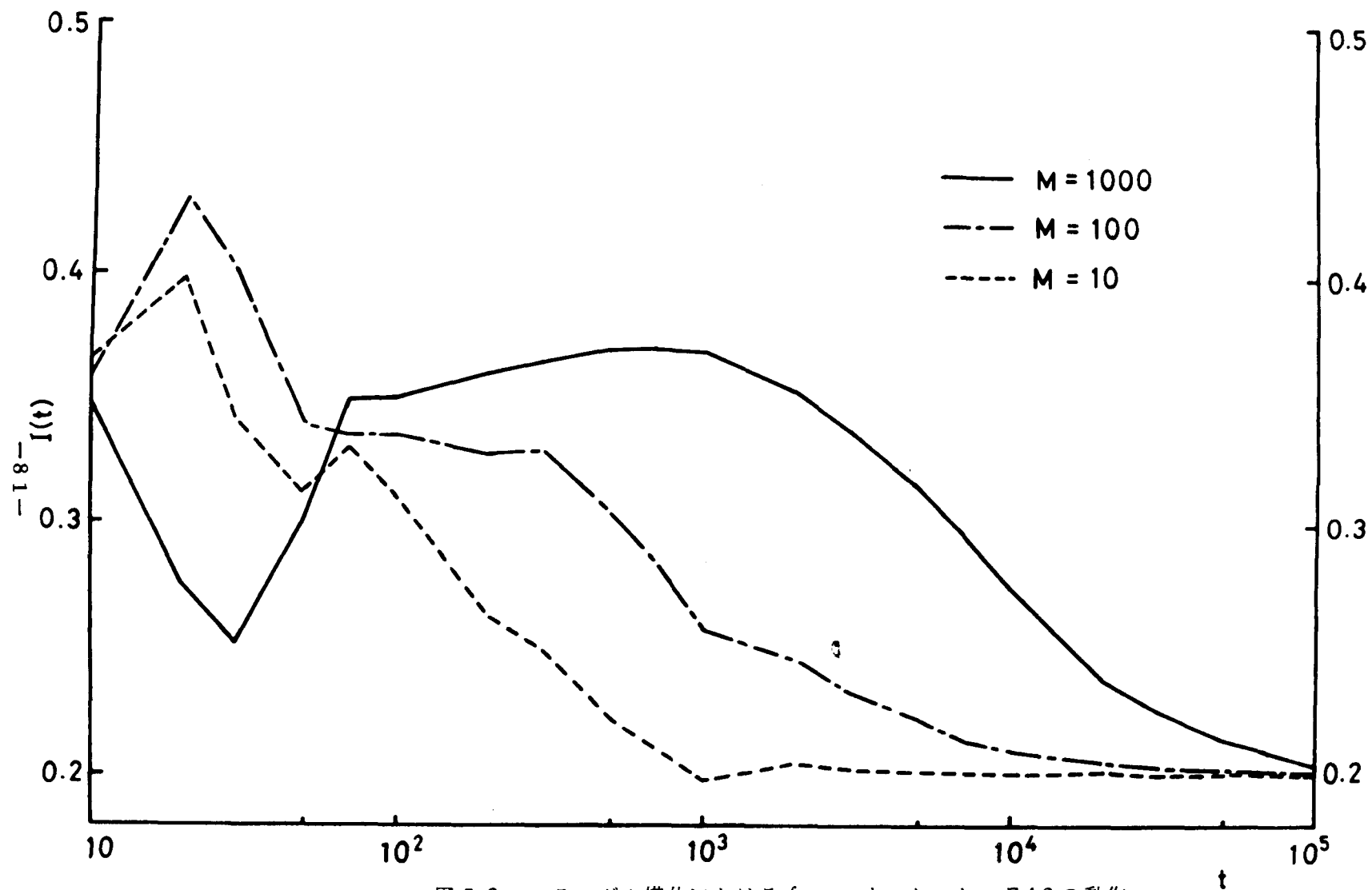


図 5.2 ランダム媒体における fuzzy オートマトン FA2 の動作

プラントの出力 x が連続値であるために，これを適当に分割することにより，オートマトンの入力を離散的にする。ここでは，区間 $[1, 6]$ を 5 等分することにより， $k \leq x < k+1$ のとき， $x = x_k$ とした。ここで， $x = k + 0.5$ である。また，補強法は式 (5.28) において $\lambda_i(t) = 1 - x_k / K$ としたものである。ただし， K は 6 以上の値をとってよいが，ここでは $K = 6$ とした。

以上のように $FA2$ が動作すると，プラントの性質より， $\lambda_i(t)$ の期待値は $1 - M(x|u_i)/6$ となるので，ランダム媒体 $C_3(2.5/6, 3.5/6, 4.5/6)$ に対して動作しているのと同様なものになるので，定理 5.4，系 5.2 と同様な性質が成立する。すなわち，

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{i^*}^*(t) = 1, \quad M(x|u_{i^*}^*) = \min_i M(x|u_i)。$$

・シミュレーションとその結果

シミュレーションは $M=1, 100, 1000$ について行ない，図 5.3 のようになり， ϵ -最適と同様な動作を行なうことを確かめた。ところが，このシステムでは， M が非常に小さい 1 の場合についても $FA2$ は最適状態に収束していた。これは，一つのプラント入力 u に対する出力 x の値の範囲が広いからだと思われる。

(3) 二つの $FA2$ 間の二人零和確率ゲーム

つぎのようなゲーム行列 A で表わされる二人零和確率ゲームを考える。^{(3.3), (3.4), (3.5)}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad -1 \leq a_{ij} \leq 1 \quad (5.44)$$

ここで， a_{ij} はオートマトン F^1, F^2 がそれぞれ戦略（出力） u_i, u_j を出したときに，オートマトン F^1 のとる利得の期待値である。零和ゲームであるので， F^2 の利得の期待値は $-a_{ij}$ である。このゲームをつぎのような行

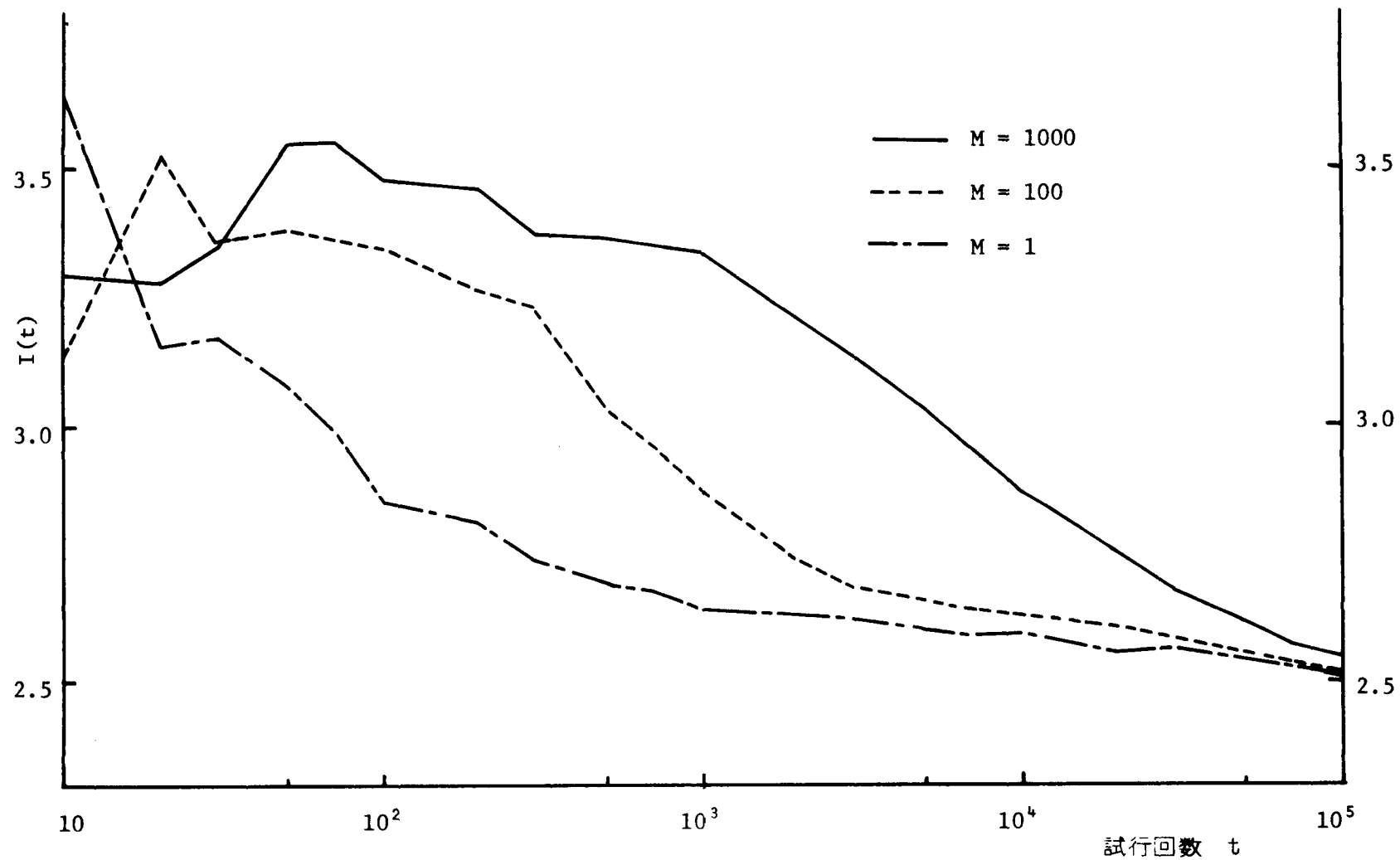


図 5.3 確率的プラントにおける FA2 の動作

列 P をもつものに表わすことができる。

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad (5.45)$$

ここで、 p_{ij} は F^1, F^2 がそれぞれ出力 u_i, u_j を出したときに、オートマトン F^1 が勝つ確率である。勝ったときには「1」だけ受け取り、負けたときには「1」だけ支払うものとする、利得の期待値は

$$a_{ij} = 1 - 2p_{ij} \quad (5.46)$$

となる。ここで、オートマトン F^1, F^2 として、fuzzy オートマトン $FA2$ とし、オートマトンの入力として、「勝ち」のときは $x = 0$ 、「負け」のときは $x = 1$ とするとつぎの定理が成立する。

〔定理 5.5〕 ゲーム行列 $[a_{ij}]$, $i = 1, 2, j = 1, 2$ について、つぎの (i) または (ii) のうちいずれかが成立するとき

$$(i) \quad \forall \ell, \quad a_{k\ell} > a_{k'\ell} \quad k' \neq k$$

$$(ii) \quad \forall \ell, \quad a_{\ell k} < a_{\ell k'} \quad k' \neq k$$

F^1, F^2 の戦略対は (u_{i_0}, u_{j_0}) に収束する。ここで、

$$a_{i_0 j_0} = \max_i \min_j a_{ij}$$

である。

(証明) まず、(i) が成立する場合を考えてみる。式 (5.46) と条件 $a_{k\ell} > a_{k'\ell}$ より $p_{k\ell} < p_{k'\ell}$ となる。

また、 $FA2$ である F^1 よりみると、非定常ランダム媒体 $C_2(p_1(t), p_2(t))$ に対して動作しているようになる。ここで、 $p_i(t) = p_{i1}$ or p_{i2} , $i = 1, 2$ である。ゆえに $p_k(t) < p_{k'}(t)$ であるので、系 5.2 より十分大きい時刻の後に F^1 の出力 $u(t)$ は u_k に落ちつく。さらに、 $p_{k\ell} > p_{k'\ell}$ すなわち $a_{k\ell} < a_{k'\ell}$ とすると、 $FA2$ である F^2 は定常ランダム媒体 $C_2(p_1, p_2)$ に対

して動作していることになる。ここで、 $p_j = 1 - p_{kj}$ 、 $j = 1, 2$ である。
 ゆえに F^2 の出力も、 $p_\ell < p_{\ell'}$ であるので、十分大きい時刻の後に u_ℓ に落ちつく。
 ゆえに、十分長い試行の後に、 F^1, F^2 の戦略対は (u_k, u_ℓ) に落ちつく。
 ここで、 $a_{k\ell} = \max_i \min_j a_{ij}$ となることは明らかである。(ii)
 が成立する場合も同様である。(証明終)

・シミュレーションとその結果

F^1, F^2 は同じ値のパラメーター M をもつものとする。利得行列は

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ -0.2 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad \max_i \min_j a_{ij} = 0.3$$

とした。シミュレーションは $M = 1, 10, 1000$ について行ない、その結果は図 5.4 のようになった。ここで、 $I(t)$ は F^1 の利得の平均値である。
 $M = 1$ 以外では $I(t)$ は 0.3 に収束している。すなわち、 F^1, F^2 の戦略対は (u_1, u_1) に収束しているのがわかる。

5.5 結 言

本章では、第 3, 4 章とは異なり、学習機能を持つ可変構造 fuzzy オートマトンの非定常ランダム媒体に対する動作について考察した。補強法の違いにより、二種の可変構造 fuzzy オートマトン $FA1, FA2$ を構成した。
 まず、 $FA1$ については、ある条件のみたされた非定常ランダム媒体に対して最適性が成立し、さらに有限時間で最適状態に落ち着くことが示された。

つぎに、 $FA2$ については、本論文で定義された一般の非定常ランダム媒体に対して ϵ -最適になることが示された。この $FA2$ については、非定常ランダム媒体に対する動作だけではなく、確率的プラントに対する動作、二つの $FA2$ 間の確率的零和ゲームについても調べた。また以上の fuzzy

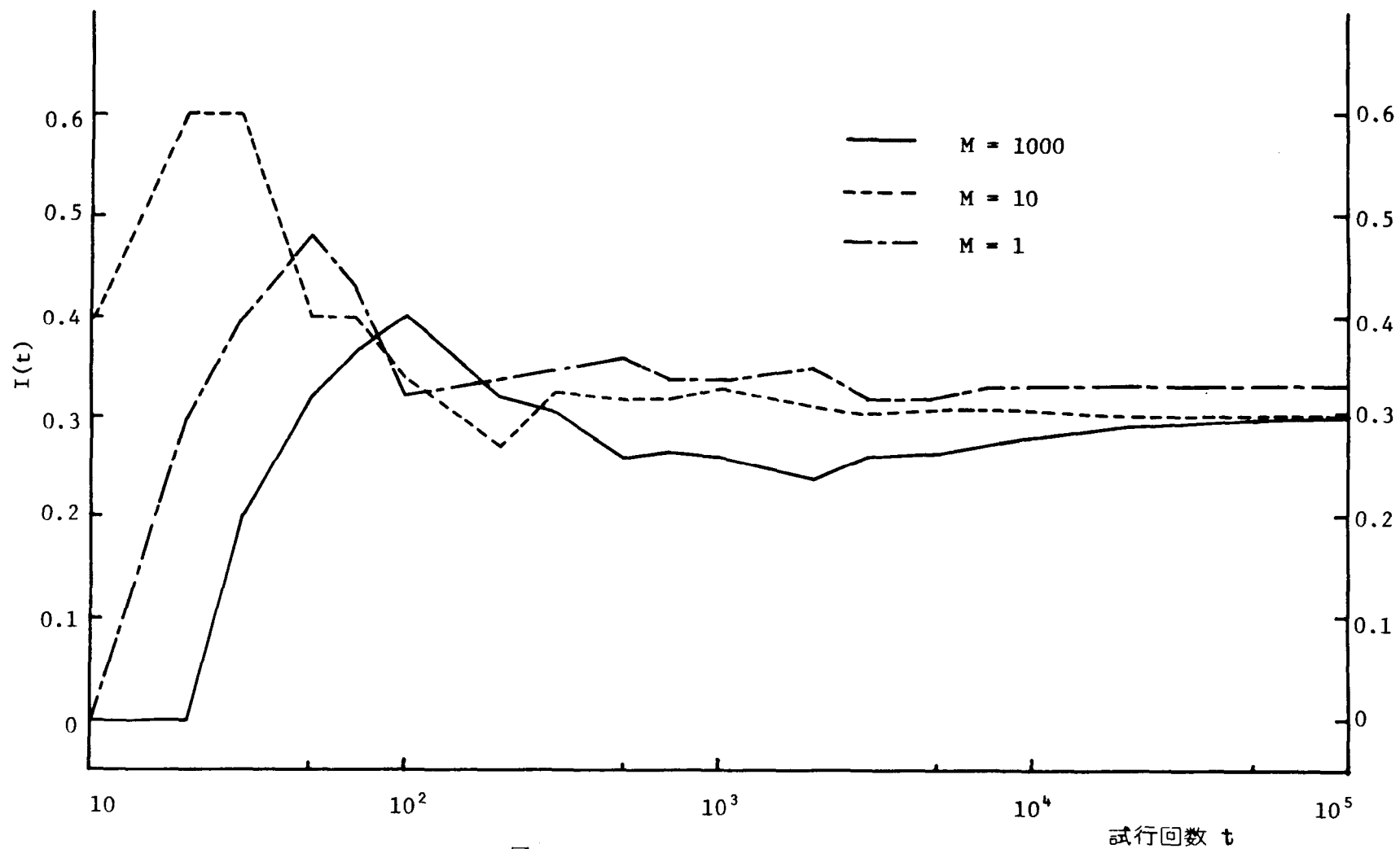


図 5.4 2つの FA2 間の 2 人零和ゲーム

オートマトン $FA1$, $FA2$ に関するシステムについて，シミュレーション実験を行ない，その理論的結果を確かめた。

ところで，可変構造 fuzzy オートマトン $FA1$ は非定常ランダム媒体に対して最適になり，しかも有限時間で最適状態に落ちつくことがわかったが，このような性質は，可変構造確率オートマトンや有限オートマトンにはなかったものである。一般に学習行動における収束速度がより速いという fuzzy オートマトンの性質は，ランダム媒体に対して動作する場合だけでなく，学習制御における最適点探索の場合についても成立することが，⁽²⁵⁾，⁽²⁶⁾ 浅居と北嶋，によって指摘されている。学習オートマトンのこのような動作比較についてはより一般的な考察が望まれる。

第 6 章 結 論

本論文では，非定常確率的環境，すなわち非定常ランダム媒体としてより一般的なものを考え，この媒体に対して動作する有限決定性オートマトン，可変構造 fuzzy オートマトンの動作について考察した。

まず第 3 章では，非定常ランダム媒体を確率オートマトンとして定式化し，これと有限決定性オートマトンとの相互作用を調べ，有限決定性オートマトンが当を得た動作をすることができるための確率オートマトンの条件を導き出した。第 4 章では，より一般の非定常ランダム媒体に対して動作する有限決定性オートマトンや確率オートマトンについて，一様乱数列を用いて解析し，その結果，これらのオートマトンは非定常ランダム媒体に対して ϵ -最適になることが明らかになった。つぎに第 5 章では，第 3，4 章と違って，学習機能を持つ可変構造 fuzzy オートマトンの非定常ランダム媒体に対する動作を調べた。ここでは，補強法の違いにより，二種の fuzzy オートマトン $FA1$, $FA2$ を構成した。 $FA1$ についてはある条件のみたされた非定常ランダム媒体に対して最適になりかつ有限時間で最適状態に落ち着き， $FA2$ は本論文で定義されたすべての非定常ランダム媒体に対して ϵ -最適になることが証明された。

ところで，オートマトンがランダム媒体に対して最適であるというのは，オートマトンの時刻 t における最適出力確率を $\rho_{i*}(t)$ とすると， $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{i*}(t) = 1$ となる場合である。ところが ϵ -最適の場合には，このことが成立しないで，学習速度が遅くなればなるほど $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{i*}(t)$ は 1 に近づき，1 には決してならないことである。有限決定性オートマトン，可変構造確率オ

オートマトン，可変構造fuzzyオートマトンのいずれもがランダム媒体に対して ϵ -最適になるが， $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{i*}(t)$ と学習速度との関係が定量的に論じられているのは有限決定性オートマトンの場合だけである。そのため，可変構造確率オートマトン，fuzzyオートマトンについても， $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{i*}(t)$ と学習速度との関係が調べられねばならないと同時に，各種オートマトンを含む統一されたオートマトンの動作についての考察が今後に残された問題である。

謝

辞

本研究に関して、直接、懇切なる御指導をいただき、励ましていただいた田中幸吉教授に衷心より深甚の謝意を表わします。

大学院修士および博士課程において、御教示御指導いただいた情報工学科木沢誠教授，藤沢俊男教授，嵩忠雄教授，電気工学科，牧本利夫教授，藤沢和男教授，難波進教授，末田正教授に対して心から深謝します。

また、研究の全過程において終始、適切な御助言，御討論いただいた豊田順一助教授に心から深謝の意を表します。

志村正道助教授，都倉信樹助教授，的場進助教授には，大学院の講義その他を通して御指導頂きました。ここに心より感謝の意を表します。

また，本研究遂行にあたり，終始有益な御助言，御教示を頂いた田中研究室の水本雅晴工学博士に深く感謝いたしますとともに，数々の御討論，御助言を頂いた同研究室の北橋忠宏工学博士，田村進一工学博士にも厚く感謝いたします。

なお，修士および博士課程を通じともに研究し励ましあって来た学友である安部憲広氏，落水浩一郎氏，竹内昭浩氏らの御助言，御討論に対しても心より感謝いたします。

また，筆者の在学中，種々の面で御協力いただいた田中研究室の方々，ことに，江沢義典氏，金孝行氏，三上和敬氏，富永昌二氏，山本順人氏に対して心よりの感謝の意を表します。

文 献

- (1) M. L. Tsetlin: "On the behavior of finite Automata in random media", Automation and Remote Control, **22**, 10, p. 1210 (1961).
- (2) H. Robbins: "Some aspects of sequential design of experiments", Bulletin of American Mathematical Society, **55**, p. 527 (1952).
- (3) S. M. Samuels: "Randomized rules for the two-armed-bandit problem with finite memory", Annals of Mathematical Statistics, **39**, 6, (1968).
- (4) V. I. Varshavskii and I. P. Vorentsova: "On the behavior of stochastic automata with a variable structure", Automation and Remote Control, **24**, 3, p. 327 (1963).
- (5) V. Yu. Krylov: "On one automaton that is asymptotically optimal in random medium", Automation and Remote Control, **24**, 9, p. 1114 (1963).
- (6) K. S. Fu and T. J. Li: "Formulation of learning automata and automata games", Information Sciences, **1**, p. 327 (1969).
- (7) B. Chandrasekaran and D. W. Shen: "Adaptation of stochastic automata in non-stationary environments", Proc. 1967 Nat'l Electronics Conf., **23**, p. 39.

- (8) K. S. Narendra and R. Viswanthan: "A two-level system of stochastic automata for periodic random environments," IEEE Trans. **SMC-2**, No. 2 p. 285 (1972).
- (9) R. Viswanthan and K. S. Narendra: "A note on the linear reinforcement scheme for variable-structure stochastic automata", IEEE Trans. **SMC-2**, p. 292 (1972).
- (10) T. Yasui and S. Yajima: "Two-symbol probabilistic automata", Inf. and Cont., **16**, p. 203 (1970).
- (11) 辻, 水本, 豊田, 田中: "非定常ランダム媒体と有限オートマトンとの相互作用について", 信学会オートマトン研資, **A 71-28** (1971-06).
- (12) 辻, 水本, 豊田, 田中: "非定常ランダム媒体におけるオートマトン", 信学論 (D), **55-D, 1**, p. 23 (昭47-01).
- (13) H. Tsuji, M. Mizumoto, J. Toyoda, K. Tanaka: "An automaton in the non-stationary random environment", Inf. Sci., **6**, p. 123 (1973).
- (14) 田中幸占: "情報工学", p. 50, 朝倉書店 (1969).
- (15) 馬場, 榎木: "確率オートマトンの学習的性能に関する研究" 第15回自動制御連合講演会 (昭47).
- (16) 辻, 水本, 豊田, 田中: "非定常ランダム媒体におけるオートマトンの漸近的最適動作について", 信学論 (D), **57-D, 1**, p. 31 (昭49-01).
- (17) 辻, 水本, 豊田, 田中: "オートマトン間の n 人ゲームに関する一考察", 信学会オートマトンと言語研資, **AL 73-20** (1972-07).

- (18) B. Chandrasekaran and D. W. C. Shen: "On Expediency and Convergence in variable structure automata", IEEE Trans. **SSC-4**, No. 1, p. 52 (1968).
- (19) L. A. Zadeh: "Fuzzy sets", Inform. Control, **8**, p. 338 (1965).
- (20) 水本: "Fuzzy 代数とその応用", 数理科学, (昭45-4~昭48-12).
- (21) L. A. Zadeh: "Toward a theory of fuzzy systems", Electronics Res. Lab., Univ. California, Berkeley, ERL Rep. No. 69-2, June (1969).
- (22) W. G. Wee and K. S. Fu: "A formulation of fuzzy automata and its application as a model of learning systems", IEEE Trans. **SSC-5**, No. 3, p. 215 (1969).
- (23) E. S. Santos and W. G. Wee: "General formulation of sequential machines", Inform. Control, **12**, p. 5 (1968).
- (24) M. Mizumoto, J. Toyoda and Tanaka: "Some considerations on fuzzy automata", J. Comp. System Sciences, **3**, No. 4, p. 409, (1969).
- (25) 浅居, 北嶋: "あいまいオートマトンとその学習制御への応用", 制御工学, **14**, No. 9, (1970).
- (26) K. Asai and S. Kitajima: "A method for optimizing control of multimodal systems using fuzzy automata", Inf. Sci., **3**, No. 1, p. 1 (1971).
- (27) 田中, 豊田, 水本, 辻: "あいまいオートマトン理論とその制御への応用", 制御工学, **14**, No. 9, p. 541 (1970).

- (28) 辻, 水本, 豊田, 田中: "Fuzzy オートマトンによる学習制御",
昭和 45 信学会全国大会.
- (29) 辻, 水本, 豊田, 田中: "Fuzzy オートマトンによる確率的対象の学習制御", 昭和 46 信学会全国大会.
- (30) 辻, 水本, 豊田, 田中: "非定常ランダム媒体と可変構造 fuzzy オートマトンとの相互作用", 信学会オートマトンと言語研資, **A L 72-**
(1972-07).
- (31) 辻, 水本, 豊田, 田中: "ランダム媒体と可変構造 fuzzy オートマトンとの相互作用", 信学論 (D), **55-D, 2**, p. 143 (昭47-02).
- (32) 辻, 水本, 豊田, 田中: "非定常ランダム媒体における fuzzy オートマトンの最適動作について", 信学論, (投稿中).
- (33) V. Yu. Krylov and M. L. Tsetlin: "Games between automata",
Automation and Remote Control, **24, 7**, p. 889 (1963).
- (34) B. Chandrasekaran and D. W. Shen: "Stochastic automata game", IEEE Trans., **SSC-5, 2**, p. 145 (1969).
- (35) 竹内, 北橋: "オートマトン間の二人零和ゲーム", 信学論 (A),
56-A, 2, p. 90 (昭 48-2).