The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	摩擦音の発生機構に関する研究
Author(s)	横井, 雅之
Citation	大阪大学, 1995, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3108042
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

摩擦音の発生機構に関する研究

1995年6月

横　井　雅　之

目　　次

記　号　表 …… 1

第1章　緒　論 …… 5

1.1　序説 …… 5

1.2　本研究の概要 …… 7

第2章　摩擦音の発生についての実験と解析 …… 9

2.1　緒言 …… 9

2.2　実験装置および方法 …… 9

2.3　こすれ音と一次モードの鳴き音 …… 11

2.3.1　実験結果 …… 11

2.3.2　理論解析 …… 15

2.4　高次モードの鳴き音 …… 19

2.4.1　実験結果 …… 19

2.4.2　理論解析 …… 26

2.5　結言 …… 32

第3章　摩擦面の表面あらさによる影響 …… 34

3.1　緒言 …… 34

3.2　実験装置および方法 …… 34

3.3　実験結果 …… 36

3.4　考察 …… 41

3.4.1　音圧レベルと回転数の関係 …… 41

3.4.2　表面あらさと音圧レベルの関係 …… 41

3.4.3　表面あらさとはりの横振動加速度レベルの関係 …… 42

3.4.4　音圧レベルとはりの横振動加速度レベルの関係 …… 43

3.5　結言 …… 46

第４章　表面あらさに周期性がある場合の摩擦音 …… 48
4.1　緒言 …… 48
4.2　実験装置および方法 …… 49
4.3　種々の共振現象 …… 51
4.3.1　実験結果 …… 51
4.3.2　理論解析 …… 58
4.4　和差調波共振 …… 61
4.4.1　理論解析 …… 62
4.4.2　計算結果 …… 66
4.4.3　実験結果 …… 72
4.5　結言 …… 74

第５章　摩擦音の速度特性 …… 76
5.1　緒言 …… 76
5.2　実験装置および方法 …… 76
5.3　実験結果 …… 76
5.3.1　一次モードの鳴き音の場合 …… 76
5.3.2　高次モードの鳴き音の場合 …… 78
5.4　理論解析 …… 79
5.4.1　一次モードの場合 …… 80
5.4.2　高次モードの場合 …… 82
5.5　結言 …… 84

第６章　摩擦面間の傾斜角度による影響 …… 85
6.1　緒言 …… 85
6.2　実験装置および方法 …… 86
6.3　傾斜角が正の場合 …… 87
6.3.1　実験結果 …… 87
6.3.2　理論解析 …… 90

6.4　傾斜角が負の場合 …… 96
6.4.1　実験結果 …… 96
6.4.2　理論解析 …… 98
6.5　結言 …… 99

第7章　タイヤのスキールノイズの発生機構 ……100
7.1　緒言 ……100
7.2　実車による試験 ……100
7.2.1　実験方法 ……100
7.2.2　実験結果 ……102
7.3　タイヤ単体によるドラム試験 ……104
7.3.1　実験方法 ……104
7.3.2　実験結果 ……104
7.4　スキール発生条件についての理論解析 ……106
7.4.1　定常円旋回における力のつり合い ……106
7.4.2　スキール発生の1自由度振動モデル ……112
7.4.3　タイヤトレッド部の摩擦特性 ……113
7.5　結言 ……118

第8章　円筒ころ軸受のきしり音の発生機構 ……119
8.1　緒言 ……119
8.2　実験装置および方法 ……119
8.2.1　単体の軸受 ……119
8.2.2　ハウジングに組み込まれた軸受 ……121
8.3　実験結果 ……121
8.3.1　単体の軸受 ……121
8.3.2　ハウジングに組み込まれた軸受 ……127
8.4　理論解析 ……129
8.4.1　外輪または外輪を含むハウジングの基礎方程式 ……130
8.4.2　ころの運動方程式 ……131

8.4.3　ころと円環との連成振動の運動方程式 ……133
8.4.4　計算結果 ……134
8.5　結言 ……141

第9章　総　　括 ……143
9.1　総括 ……143
9.2　鳴き音の防止方法 ……146

参考文献 ……148
謝　　辞 ……151

記　号　表

A　：はりの断面積

b　：外輪または外輪を含むハウジングの幅

b_t：タイヤトレッドのリブ幅

C_i：はりのi次の横振動の減衰係数，
　　タイヤに作用するコーナリングフォース

C_j^*：はりのj次の縦振動の減衰係数

C_t：タイヤリブの減衰係数

E　：はりの縦弾性係数

E_r：外輪または外輪を含むハウジングの縦弾性係数

E_t：タイヤゴムの縦弾性係数

F_i：タイヤに働く横力

$F(v_r)$：はり先端に作用する摩擦力

f_{ei}：はりのi次の横振動の固有振動数

f_s：あらさ周波数

G　：はりの横弾性係数

G_r：外輪または外輪を含むハウジングの横弾性係数

G_y：タイヤトレッドゴムの横弾性係数

g　：重力の加速度

h_c：自動車の重心の地上高

h　：外輪または外輪を含むハウジングの厚さ

K_i：無次元化したころと内外輪の接触状態を示すばね定数

$\overline{K}_i$：無次元化した荷重装置のばね定数

K_f, K_r：前，後輪のタイヤの懸架装置を含むばね定数

K_t：タイヤリブの横弾性係数

$\overline{k}, \overline{k}_c$：ヘルツの弾性接触理論からえられる等価ばね定数

k^2：外輪または外輪を含むハウジングのせん断修正係数

k_i：ころと内外輪の接触状態を示すばね定数

$\overline{k}_i$ ：円筒ころ軸受の荷重装置のばね定数

l ：はりの長さ

l_i ：タイヤトレッドの接地長さ

l_t ：タイヤリブ１本のモデルの接地長さ

l_f, l_r ：自動車の重心と前，後車軸との水平距離

M ：荷重装置の質量（単体軸受の場合）

M_1, M_2 ：荷重装置の質量（ハウジングに組み込まれた軸受の場合）

M_c ：自動車の質量

M_t ：タイヤリブ１本の接地部分の質量

m ：円筒ころの質量

m_ϕ ：外輪または外輪を含むハウジングの単位幅当たりの中央面に働く曲げモーメント

N ：円板の回転数

N_i ：タイヤにかかる垂直荷重

N_t ：タイヤリブの垂直荷重

P ：押しつけ荷重

P_0 ：初期の押しつけ荷重

p_r, p_ϕ ：外輪または外輪を含むハウジングの単位幅当たりの r, ϕ 方向に働く外力

R ：外輪または外輪を含むハウジングの半径

R_i ：コーナリングドラグ

r_c ：自動車の重心点の旋回半径

r_i ：タイヤの旋回半径

r_s ：はり先端の曲率半径

S_1, S_2 ：旋回中の自動車の前輪の実舵角

$S(V)$ ：表面の包絡あらさ曲線

T ：自動車の駆動力

T_i, T_j^* ：時間の関数

$\overline{T}_i, \overline{T}_j^*$ ：はりのつりあい位置からの時間関数.

t_f, t_r ：自動車の前，後輪のトレッド幅の1/2

u ：はりの横方向変位

$\overline{u}$ ：はりのつりあい位置からの横方向変位

V ：円板の回転速度

V_c ：自動車の重心点の速度

v_i ：旋回中の自動車のタイヤの横すべり速度

v_r ：相対すべり速度

v ：はりの縦方向変位

$\overline{v}$ ：はりのつりあい位置からの縦方向変位

x ：はりの固定端からの距離

$X_i(x)$ ：はりの i 次の横振動の固有関数

$X_j^*(x)$ ：はりの j 次の縦振動の固有関数

β ：自動車の車体の中心線と重心点の進行方向のなす角

β_i ：タイヤの横すべり角

δ ：ディラックのデルタ関数

μ_s ：静摩擦係数

μ_d ：動摩擦係数

$\mu(v_r)$ ：摩擦係数（相対すべり速度 v_r の関数）

ν ：ポアソン比

ρ ：はりの密度

ρ_c ：空気の密度

ρ_r ：外輪または外輪を含むハウジングの密度

ρ_t ：タイヤゴムの密度

ϕ ：はり先端の傾斜角度

ϕ_0 ：はり先端の初期の傾斜角度

ϕ_i ：自動車の旋回中心から車体の中心線へおろした垂線と各タイヤの旋回半径のなす角度

ω_f ：強制円振動数

ω_i ：はりの i 次の横振動の固有円振動数

ω_j^* ：はりの j 次の縦振動の固有円振動数

第1章　緒　　論

1.1　序説

二つの物体が互いに摩擦することにより発生する音は，バイオリンやグラスハーモニカによる楽音から機械の回転部分や車両のブレーキなどより発生する騒音にいたるまで我々の周囲に満ちている．とくに近年，機械の高速，高回転化が進められた結果，摩擦箇所より発生する騒音が増加し，これらの低減対策が急務となってきている．

摩擦音のうち，楽音については，Helmholtz[1]がバイオリン，Rayleigh[2]や Spurr[3]がグラスハーモニカに用いられているワイングラスのリンギングの研究を行っている．
一方，機械などから発生する摩擦音については，自動車のブレーキの鳴き[4],[5]，急旋回時のタイヤの鳴き[6]，列車が急カーブの線路を走行中に発生するきしり音[7],[8]，自転車のバンドブレーキの鳴き[9]，さらには大型円筒ころ軸受に発生するきしり音[10]-[13]など，実際の条件等に即して，多くの研究がなされている．これらの研究において，発生する音はいわゆる［鳴き］，［きしり］と呼ばれる騒音で，音圧レベルが高く，高周波で非常な不快感を伴っているのが特徴である．このように，実際の機械などより発生する摩擦音についての研究では，解析手法・低減対策などはその機械に特有な点が多いために，試行錯誤的な手法となり，広く一般に適用することは難しい．

本研究では，乾性摩擦により発生する高周波の音で，特にレベルが高い「鳴き」や「きしり」について，その発生機構を系統的に解明するために，現象の把握が簡単にできる基礎的な実験装置による実験・解析手法の確立を試みた．このような，摩擦音・摩擦振動の基礎的な研究については従来より以下のような研究がなされてきている．

まず，低周波の摩擦振動は古くからstick-slip現象を含む自励振動系の現象として数多く研究が行われてきた．例えば，Bowdenら[14]は，鋼の板の上を鋼のピンがすべる装置によって，stick-slip現象を発生させたが，これは静摩擦係数が動摩擦係数より大きいことが原因であることを示した．亘理ら[15]は回転円筒にばねで支持された振動体を押しつける回転振動系の実験装置を用い，相対速度が零における動摩擦力が静摩擦力に等しい場合と異なる場合で自励振動の振幅と速度との関係が2種類に分けられることを理論的に導き，実験的にも確認した．また，自励振動が発生する速度範囲および最大振幅は摩擦面の状態に依存することも解明した．高野ら[16]-[19]は回転するロータにはめあわされたリング状

の振り子を用いた実験装置において，発生する振動数はすべり速度の増加につれて振動系の固有振動数に近づくことを示した．また，１自由度の回転振動系モデルを作成し，摩擦係数の速度特性を折れ線で近似し，理論計算を行うことにより摩擦振動の発生条件を解明した．杉本[20]はstick-slip現象の解明において，静摩擦の潜在期間の長さが振動の発生に深い影響を与えているとしている．また，本研究の第６章で示されているびびり振動・びびり音に相当するものとして，厚い回転円板の側面に片持ちはりを回転の逆方向に押し付ける跳躍摩擦振動において[21]，離脱する条件を明らかにした．これらの研究においては，摩擦振動の発生は摩擦係数の速度特性が負の勾配であることによっている．

摩擦音と深い関係がある高周波の摩擦振動については，Jarvisら[22]は回転している薄い円板の側面に片持ちはりを押し付けた時の摩擦振動について研究し，その発生には摩擦係数の速度特性だけでなく，はりと円板の連成振動が影響していることを明らかにした．またBaglinら[23]は２枚の板ばねで支持された細い軟鋼のはりと黄銅やエポキシ樹脂の板を摩擦させた．とくに，黄銅の板を摩擦させた時のはりの振動数ははりの横振動の２次の固有振動数に近いことを明らかにした．さらに，Klepp[24]は比較的高速で回転する円板の円周面に片持ちはりを押し付けた時に発生する摩擦振動について，摩擦係数の速度特性曲線を考慮した実験式を用いてはりの高次モードまで考慮した解析を行っている．田中[25]，[26]は薄肉の回転ドラムに片持ちはりを回転方向に逆向けに押し付けて，摩擦係数が一定でもはりとドラムの接触剛性を考慮すると鳴きが発生するとしている．Jarvis[22]や田中[25]，[26]のように，多自由度系においては，摩擦係数の速度勾配が負でなくても，摩擦振動が発生することがある．

このように現在まで，低周波の摩擦振動についてはかなり厳密に理論的・実験的に研究が行われているが，摩擦音に相当する高周波の摩擦振動の研究は発生する振動・音が高周波であり，摩擦面の状態などを完全に把握することが困難なこともあり，十分な解明がなされていない．

以上のことより，本研究では，乾性摩擦により発生する音，とくに高周波でレベルが高くて不快感を伴う［鳴き音］の発生機構を系統的に解明するために，現象の把握が簡単にできる，いわゆる［ピン－円板］方式の実験装置を製作した．ピンには先端が半球状の鋼製の片持ちはりを用い，円板には厚い鋼製のものを用いた．

これを用いて，円板の表面形状および表面あらさを変えるとともに，片持ちはりの長さ，直径などの条件も変化させ，さらに，円板の回転数やはりを傾けて摩擦させるなどの実験

条件を種々変えた．このように多岐にわたる実験結果から発生した摩擦音の種類，特徴などを求めた．また，これらの実験結果に基づいて，はりの横および縦振動の連成振動モデルを作成し，詳細に解析することによって，摩擦音の発生条件を明らかにし，摩擦音低減のための基礎データを求めようとした．さらに，これらの基礎的な研究で得られた結果や知見等を適用して，急カーブを走行中の自動車のタイヤと路面の摩擦によるタイヤの鳴き（タイヤスキール）およびグリース潤滑された比較的大型の円筒ころ軸受から発生する［きしり音］の発生機構の解明を行った．

1．2　本研究の概要

本論文は本章を含めて9章より構成されている．

第2章では，まず本研究のために製作した乾性摩擦による実験装置についての概要を示している．この装置は円周面が研削加工された鋼製の厚い回転円板に先端が半球状の鋼製の片持ちはりを押しつけて摩擦音を発生させる［ピン－円板］方式である．次に，この装置を用いた実験で発生した摩擦音が音圧レベルの低い［こすれ音］と音圧レベルが高く正弦波状をした［鳴き音］に分類できることを示している．さらに，はりの長さ，直径等の諸元を種々変えたときに発生した摩擦音の周波数がはりの横振動の一次モードおよび高次モードの周波数に一致することからそれぞれ［一次モードの鳴き音］および［高次モードの鳴き音］に分類できることを示している．また，これらの発生条件について実験および非線形モデルによる理論解析から検討している．

第3章では，摩擦面の表面あらさの大きさがランダムな場合にあらさの大きさが摩擦音の周波数・音圧レベルなどに及ぼす影響について検討している．すなわち回転円板の円周面のあらさを研削加工により3種類作成し，はりを押しつけた時に発生する摩擦音の音圧や周波数構成について，表面あらさの大きさおよび円板の回転数によるあらさ周波数との関係を示している．さらに，はりを円筒波の音響放射体と考え，はりの横振動加速度から音圧への変換率を計算することにより，表面あらさによる摩擦音の大きさが理論的に求められることを検討している．

第4章では，摩擦面に周期的なあらさが存在する場合に，はりの横振動の固有振動数と円板の回転数によるあらさ周波数との間で高調波共振，分数調波共振，高分数調波共振および和差調波共振などの種々の非線形な共振現象が発生することを示している．なお，これらの発生条件について，理論的な検討も併せて行っている．とくに，和差調波共振現象

という特徴ある現象の発生については詳しく検討を行っている．

第５章では，鳴き音の速度特性，すなわち円板が比較的高回転で鳴き音が発生した状態で回転数を減少させ，すべり速度が低速になった場合に，鳴き音がどのような変化をするかについて検討している．さらに，これらの変化については，stick-slip振動を含む理論解析により検討している．

第６章では，摩擦面間の傾斜角度を種々変えた場合，すなわちはりの円板に対する傾斜角度を変えた場合に発生する摩擦音について，音の種類および周波数成分に及ぼす傾斜角度の影響を実験および理論解析により検討を行っている．

第７章では，自動車が急カーブを走行する時にタイヤと路面の摩擦により発生する［タイヤ鳴き］と呼ばれているスキールノイズの発生機構およびその理論的解析について検討している．実車実験，タイヤ試験機によるタイヤ単体の試験さらにタイヤのトレッドゴムによる３種類の実験を行った結果より，スキールノイズの発生機構，発生条件を理論的に求めることを検討している．

第８章では，グリース潤滑された比較的大型の円筒ころ軸受から発生する［きしり音］と呼ばれる高周波の鳴き音について，その発生機構を検討している．まず軸受単体による場合と一般に使用されているようにハウジングに組み込まれた場合について，それぞれ実験を行っている．この結果より，きしり音の周波数について，実験および理論解析より検討し，発生機構および発生箇所について検討している．

第９章は本論文の総括であり，また鳴き音の防止方法についても検討している．

第2章　摩擦音の発生についての実験と解析

2．1　緒言

機械などから発生する摩擦音については，自動車のブレーキの鳴き[4]，[5]，急旋回時のタイヤの鳴き[6]，列車が急カーブの線路を走行中に発生するきしり音[7]，[8]，自転車のバンドブレーキの鳴き[9]，さらには大型円筒ころ軸受に発生するきしり音[10]－[13]など，実際の条件等に即して，多くの研究がなされている．これらの研究からわかるように，発生する音はいわゆる【鳴き】，【きしり】と呼ばれており，音圧レベルが高く，高周波で非常な不快感を伴っているのが特徴である．

低周波の摩擦振動については第１章で述べたように，数多くの基礎的な研究が行われているが，[14]－[21]　摩擦音のような高周波の摩擦振動については，Baglin[23]らやKlepp[24]により研究されている他はあまり見あたらない．Baglinら[23]は２枚の板ばねで支えられた細い軟鋼のロッドを黄銅やエポキシ樹脂などの非鉄金属の板の上で摩擦させ，とくに黄銅の板の上を摩擦させたときにはロッドの振動はロッドの横振動の二次の固有振動数に近づくことを明らかにした．しかし，高次モードの振動の発生原因については言及していない．また，Klepp[24]は理論的，実験的研究から，速いすべり速度では低次モードに比して高次モードが顕著に現れるなどの結論をえているが，数種類のモードを含む振動である．このように，高周波である鳴き音の発生機構については十分な解明を行うまでには至っていない．

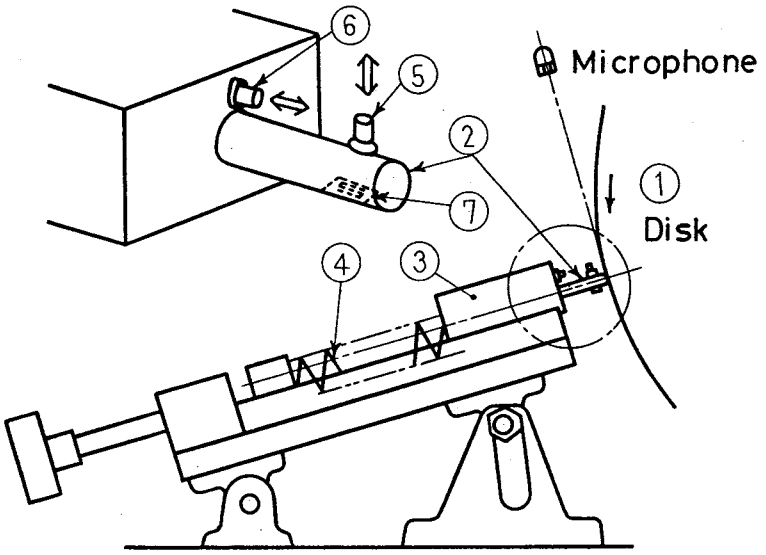
本章では，一端が固定されたはりを厚い円板の円周面に押しつけて摩擦させた時に生じる摩擦音について，片持ちはりの長さ，直径などの諸元を変えたときに発生する音の種類および発生条件を実験的・理論的に解明した結果について述べる．

2．2　実験装置および方法

試作した実験装置を図2.1に示す．本装置はすべり速度の範囲を大きくとれるようにするため，速度に制約のある往復式運動装置とは異なり，厚い円板を回転させ，この円周面に先端が半球状の片持ちはりを押しつける［ピン－円板］方式*の一種である．この利点

＊：トライボロジーの試験でよく用いられる「ピン－円板」方式の装置は円板の側面にピンを押しつけるものであり，本実験のように円周面にピンを押しつける方式は「ピン－円筒」「ピン－ドラム」などと呼ばれている．しかし，本装置の円板は直径２００ｍｍ，厚さ４０ｍｍであり，円筒よりも円板と呼ぶのがふさわしい．また，中空ではないので，ドラムとも呼びにくい．このために，広い意味での「ピン－円板」方式の実験装置であるとみなした．

は円板が厚いので，その剛性ははりに比較して非常に大きく，はりにより励起される円板の振動はほとんど無視することができ，はりの振動のみ考慮すればよいので，現象の把握が簡単にできることにある．一定の速度で回転する厚い円板①の円周面に移動台③に固定された片持ちはり②（先端は半球状に加工されており，他端はネジが切ってある）を一定の荷重で押しつける．はりは厚さ 20mm の鋼板にネジ止めされており，この板はさらに移動台に取り付けられている．このような厚い鋼板に取り付けられたはりの一端はほぼ固定端とみなせる．はりの押しつけ荷重は調節ばね④により一定になるようにした．はりと円板との接触の角度は本体の調節用ボルトにより設定ができる．摩擦音の測定は音場の測定を除いて，すべて円板とはりの接触点の鉛直上方約100mmの点で1/2インチマイクロホンにより行った．摩擦音の発生機構を正確に把握するため，音と密接な関係にあるはりの振動加速度を摩擦方向（円板の円周方向，はりの横振動）および荷重方向（円板の半径方向，はりの縦振動）の２方向について測定した．いずれも小型，軽量（約 0.5gr）のピエゾ型加速度ピックアップであり，摩擦方向ははりの先端⑤に，荷重方向ははりの固定端⑥にそれぞれ取り付けた．はりと円板の間に作用する摩擦力ははりにひずみゲージ⑦を貼り，あらかじめ検定したひずみと摩擦力の関係を表す曲線から求めた．円板の回転速度は光電式装置により求めた．これらのデータはすべてデータレコーダに収録された後，ＦＦＴアナライザによる周波数分析などを行った．本実験での押しつけ荷重は19.6N，はりの円板に対



① 円板
② 片持ちはり
③ 移動台
④ 荷重調整ばね
⑤ 振動加速度ピックアップ（はりの横振動）
⑥ 振動加速度ピックアップ（はりの縦振動）
⑦ ひずみゲージ

図2.1　摩擦音実験装置

する傾斜角はほぼ 0°（すなわち，円板の円周面にほぼ直角）とした．なお，円板の円周面は研削加工が施されており，最大あらさ$Hmax$ は0.5μmである．

2．3　こすれ音と一次モードの鳴き音

2.3.1　実験結果

円板の周速度70cm/s，押しつけ荷重19.6Nで，未使用の焼き入れしたはりと円板の未使用面を摩擦させた場合に，時間経過すなわち摩擦距離（円板の周速度と摩擦時間の積）によってどのような摩擦音が発生するか調べた．表2.1は使用した円板とはりの仕様を示す．はりの先端部はすべて半球状になっている．図2.2にその結果を示す．横軸は摩擦距離，縦軸は摩擦面の状態と関係のある摩擦係数μおよび摩擦面の音圧レベルを表している．

表2.1　円板とはりの寸法と仕様

円　　板		は　　り	
直径 mm	200	直径 mm	7
厚さ mm	40	長さ mm	32
材　質	S45C	材　質	S45C
硬　さ	円周面 高周波焼入れ $H_V=400$	硬　さ	① 先端高周波焼入れ $H_V=700$
			② 焼入れなし $H_V=150$

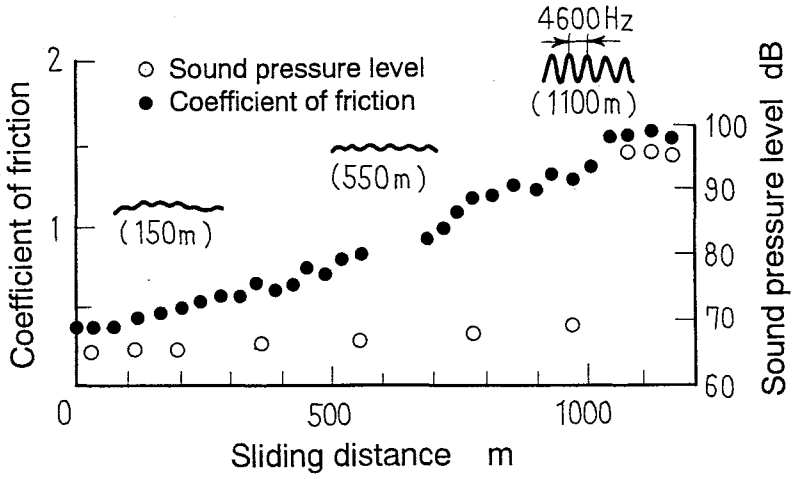


図2.2　摩擦係数，音圧レベルおよび音圧波形の摩擦距離による変化

また摩擦距離150，550および1100mにおける音圧波形も併せて示している．

図2.2より次のようなことがわかる．実験開始から摩擦距離が200mまではμは小さく，摩擦音のレベルも約65dBと低い．その後，摩擦距離の増加とともにμは大きくなるが，摩擦音の音圧レベルは65～70dBと低く，音圧波形も実験初期の時の波形とほとんど変化がない．しかし摩擦距離が1000mをこえると摩擦音は95～97dBと急激に高くなり，「キーン」というかん高い音で，その音圧波形は正弦波状となる．この時のμの値は1.3～1.5となり，摩擦初期の3～4倍に達している．

この実験から摩擦音は音圧レベルの低い音と音圧レベルが高く，正弦波状の波形をもつ音の２種類に分類できることがわかった．前者の摩擦音を［こすれ音（rubbing noise）］，後者を［鳴き音（squeal noise）］と称することにする．

図2.3は鳴き音発生時における音場を測定した結果を示している．図より，摩擦音は円板とはりの接触部より発生し，円板は厚さが40mmもあるためほとんど振動せず，円板から音を放射していない．したがって，摩擦音は本実験の場合には，はりの振動より発生することがわかる．

図2.4に円板の周速度70cm/sにおけるこすれ音と鳴き音発生時の音圧，はりの横振動（摩擦方向振動）加速度（lateral acceleration）および縦振動（荷重方向振動）加速度（longitudinal acceleration）の波形とその周波数分析結果を示す．図における振動加速度レベルは10m/s^{2}を80dBとして dB表示した．縦振動加速度レベルは横振動加速度レベルに比べ非常に低く，こすれ音，鳴き音のいずれの波形も横振動加速度波形によく似ている．また周波数分析結果より，鳴き音においては音，振動加速度ともにその周波数成分は4600Hzおよびその倍音から成り，こすれ音においては4600Hzのほかに低周波の成分が種々含まれていることがわかる．この低周波成分は主に円板の表面あらさやわずかな偏心などにより発生するものと考えられる．鳴き音およびこすれ音の主な周波数成分である4600Hzははりの横振動の一次の固有振動数であることが，はりを荷重19.6Nで円板に押しつけて，小型加振器ではり先端を摩擦方向に加振したときの共振周波数に一致したことから確認された（以後，これを［一次モードの鳴き音］と呼ぶ）．したがって，摩擦音は主にはりの横振動より発生し，そのうちの音圧レベルの高い［鳴き音］ははりの横振動による自励振動より生ずるものと考えられる．

鳴き音，こすれ音の発生時におけるはりと円板との摩擦面の状態がどのようになっているかを知るのに，円板の表面を走査型電子顕微鏡でみるのが不可能なので，はり先端の表

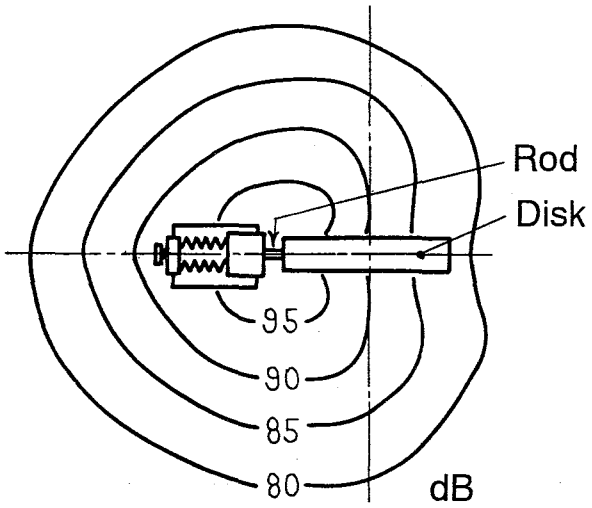


図2.3　鳴き音発生時の音場

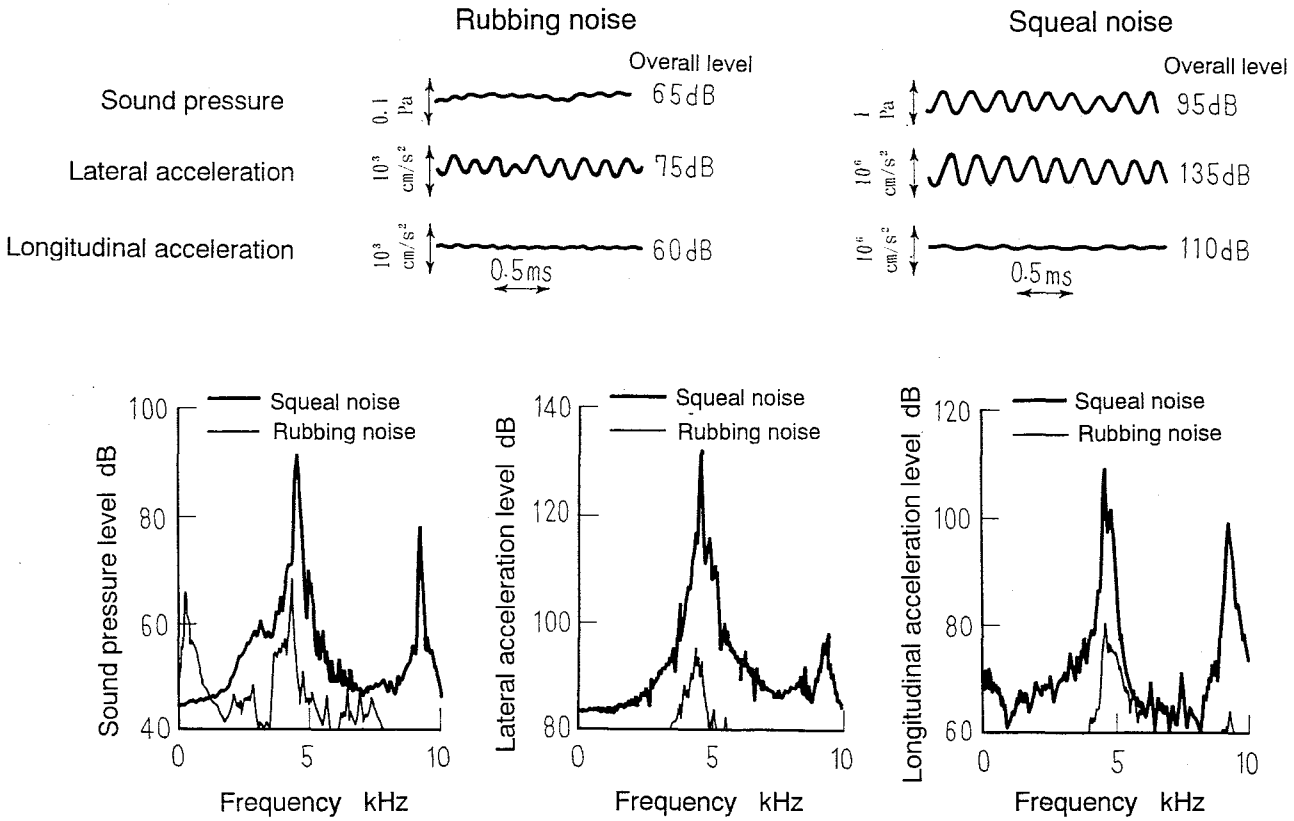
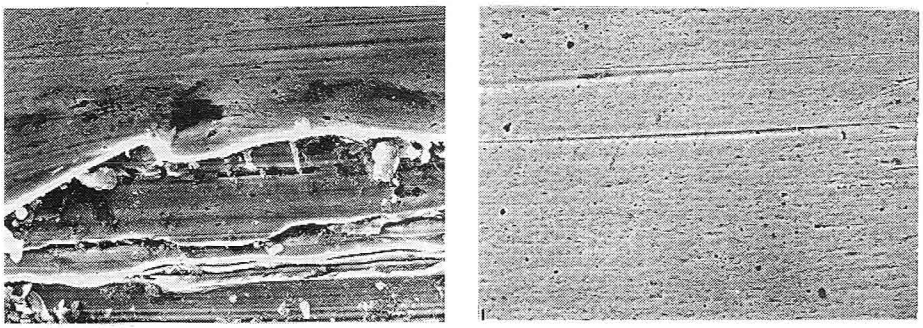


図2.4　こすれ音および鳴き音発生時の音圧，はりの振動加速度波形
およびそれらの周波数分析結果

面を走査型電子顕微鏡で観察した．図2.5(a),(b)はこすれ音，鳴き音発生時のはり先端の表面写真である．こすれ音発生時には図2.5(a)のようにはりの表面は摩耗進行中で数多くの小さなおうとつ部分が存在しているが，摩耗がさらに進行して鳴き音が発生すると図2.5(b)のように表面は摩擦方向にわずかに筋の入ったなめらかな面になる．こすれ音発生時においては円板の摩擦面もはりの摩擦面［図2.5(a)］と同じように小さなおうとつ部分があるものと考えられる．したがって，円板とはりは密着した状態では接触しない．すなわち，接触面積が小さいために摩擦係数が小さくなると思われる．しかし，摩擦距離が長



×600　　×600

（a）こすれ音発生時　　（b）鳴き音発生時

図2.5　はり先端の走査形電子顕微鏡写真

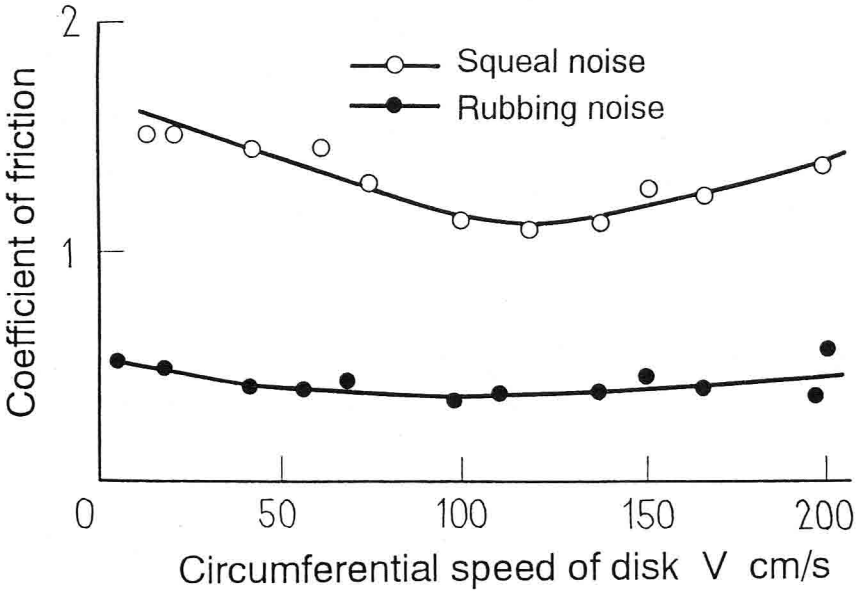


図2.6　摩擦係数と円板の周速度の関係

くなると，はりと円板の摩擦面のおうとつ部分が摩耗して，なめらかな表面となり，はりと円板は密着し，接触面積が大きくなる．このようになると，本実験のような同種金属どうしの摩擦では酸化面が繰り返し摩擦により破壊されて脱落し定常摩耗となり，はりと円板の接触面積が大きくなって摩擦係数が大きくなり，鳴き音が発生すると考えられる．焼き入れ処理されていないはりを用いて同じような実験を行った時には焼き入れ処理をしたはりに比べて短い150mの摩擦距離でこすれ音から鳴き音へ移行した．これは焼き入れしていないはりでは摩耗が早く進むためである．また，その時の音圧レベル，振動波形および周波数成分は焼き入れしたはりの場合と同様な結果を示した．

こすれ音と鳴き音の発生機構をより詳しく調べるために円板を低速で回転させながら，こすれ音あるいは鳴き音を発生させ，その状態で円板の速度を増していくとき，摩擦係数がどのように変化するか実験した．その結果を図2.6に示す．低速度でこすれ音であった摩擦音は円板の周速度を20～250cm/sと変化させても，こすれ音のままであり，そのときの摩擦係数は0.3～0.5である．また摩擦係数μの周速度Vに対する勾配$\mu' = d\mu/dV$は小さく負または，ほとんど零に近い．一方，鳴き音が発生する場合でも，円板の周速度が高速では鳴き止み，摩擦音は円板の表面が削り取られて発生する一種の切削音に変化する．鳴き音が発生する時のμは1～1.5で，摩擦係数の周速度に対する勾配μ'は100～120cm/sまでは負，それ以上では正となっている．一般に摩擦係数の速度特性曲線の勾配はある速度になると負から正になり，その勾配が負であるとき自励振動が発生し，正になると振動は減衰するといわれていることに対応している．

2.3.2　理論解析

はりと円板の摩擦実験より、摩擦音は主としてはりの横振動によって生じることが明らかになった．したがって，摩擦音の発生機構を解明するのにはりの横振動についてのみ考えることにする．図2.7に示すように固定されたはりの先端（$x=l$）に押しつけ荷重Pおよび摩擦方向に摩擦力Fが作用するときのはりの横振動の運動方程式ははりのせん断変形と回転慣性を無視すると次式で表される．

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+P\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+C\frac{\partial u}{\partial t}=F(v_r) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1)$$

ここで，$F(v_r)=\mu(v_r)P$で表される．本実験では押しつけ荷重Pは19.6Nと小さく，振動に影響を及ぼさないと考えられるので，式(2.1)において$P\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$の項は無視する．

なお，摩擦力$F(v_r)$ ははり先端$x=l$ に作用するから次式のように表せる．

$$F(v_r)=\mu(v_r)P\delta(x-l) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.2)$$

ここに，δはディラックのデルタ関数である．

式(2.1),(2.2) より横振動の運動方程式は次式のようになる．

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+C\frac{\partial u}{\partial t}=\mu(v_r)\ P\delta(x-l) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2.3)$$

いま，はりの変位 u を次のように表す．

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)T_i(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.4)$$

ここで，$T_i(t)$ は時間の関数，$X_i(x)$ は$x=0$で固定，$x=l$ で自由の境界条件におけるはりのi 次の固有関数であり，式(2.5)のように表される．

$$X_i(x)=\cos m_i x-\cosh m_i x$$
$$+\frac{\sin\lambda_i-\sinh\lambda_i}{\cos\lambda_i+\cosh\lambda_i}(\sin m_i x-\sinh m_i x) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2.5)$$

$m_i{}^4=\dfrac{\rho A\omega_i{}^2}{EI}$ ， $\lambda_i=m_i l$ ，ここで λ_iは

$$\cos\lambda_i\cosh\lambda_i+1=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.6)$$

を満足する．

式(2.4)を式(2.3)に代入し，$X_i(x)$ を両辺にかけて，xについて 0 から l まで積分すると，次のような非線形運動方程式がえられる．

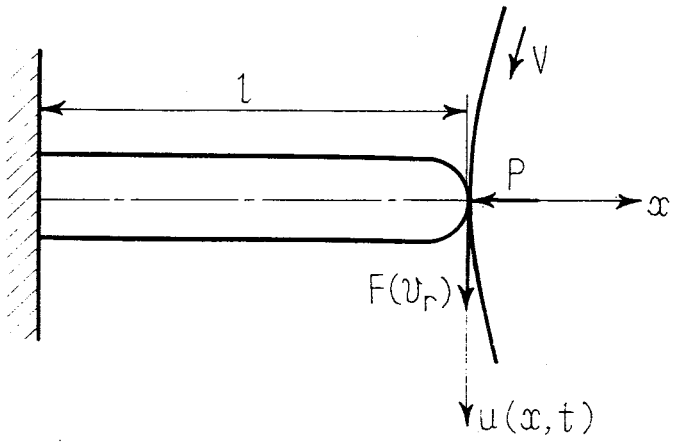


図2.7　摩擦振動の力学的モデル

$$\ddot{T}_i(t)+\frac{C_i}{\rho A}\dot{T}_i(t)+\omega_i{}^2T_i(t)=\frac{X_i(l)}{\rho A l}P\mu\{V-\sum_{i=1}^{\infty}X_i(l)\dot{T}_i(t)\}$$

$$(i=1,2,\cdots\cdots,\infty) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2.7)$$

式(2.7)を初期条件$T_i(0)$, $\dot{T}_i(0)$, $(i=1,2,\cdots,\infty)$ のもとで解けばよいが，非線形であり，解析的に解くことは困難であるので，Runge-Kutta-Gill法（以後ＲＫＧ法と称する）により数値計算を行った．音なので，周波数は 20kHz まで考慮した．本実験の場合には，式(2.7)において二次モードまで，すなわち，$i=1,2$ として計算した．また初期条件は次のようにして与えた．

はり先端に摩擦力$\mu_s P$ （μ_s：静摩擦係数） が作用した時のはり先端の静的たわみを$u_0(l,0)$ とすると，$u_0(l,0)=\sum_{i=1}^{2}X_i(l)T_i(0)$

ここに$T_i(0)$ は

$$T_i(0)=\frac{1}{l}\int_0^l u_0(x,0)X_i(x)\,dx=\frac{\mu_s P K_i}{6EIl} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.8)$$

K_iは次式で表される関数である．

$$K_i=\frac{1}{m_i}\{(6\beta_i+3\beta_i\lambda_i{}^2+2\lambda_i{}^3)\sin\lambda_i+(6+3\lambda_i{}^2-2\beta_i\lambda_i{}^3)\cos\lambda_i$$

$$-(6\beta_i-3\beta_i\lambda_i{}^2+2\lambda_i{}^3)\sinh\lambda_i-(6-3\lambda_i{}^2+2\beta_i\lambda_i{}^3)\cosh\lambda_i\} \quad (2.9)$$

ここに$\beta_i=\dfrac{\sin\lambda_i-\sinh\lambda_i}{\cos\lambda_i+\cosh\lambda_i}$

また減衰係数 C_iの値ははりを荷重19.6Nで円板に押しつけ，その先端を小型加振器で摩擦方向に加振し，加振器を急に外した時の振動加速度の減衰波形から求めた．

摩擦係数 $\mu(v_r)$ の曲線は次式で表されるものとする．

$$\mu(v_r)=\mu_0+\mu_1 v_r+\mu_2 v_r{}^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.10)$$

鳴き音発生時の図2.6に示す摩擦係数μと周速度V の曲線になるように式(2.10)のμ_0～μ_2 を決定し，周速度を変えて振動振幅を計算した．μの勾配μ' が正になると振幅が急激に減衰し，従来の摩擦振動の研究と同じ結果がえられた．V=70cm/sにおいて，式(2.10)の左辺の値は一定として，係数のうちμ_1とμ_2 を変えて勾配を変化させた時の振動加速度レベル（実効値）を計算した．なお減衰係数C_iは0および2×10^{-3} kgs/cm^{2}の２種類について計算した．図2.8はその計算結果を示す．この図から負の小さいμ' に対しては自

励振動が発生せず，μ' が負のある値以上になると急激に振動レベルが大きくなり，自励振動が発生することがわかる．また減衰係数の大きさによって，自励振動が発生するμ' の値が変化する．すなわち，減衰係数が小さくなるほど，より負の小さいμ' の値で自励振動が発生する．

図2.8には実測した横振動加速度レベルも示している．計算結果と比較すると，このμ' の値で自励振動を発生し，鳴き音となることは両者とも一致している．さらに，こすれ音の場合，μ' の値は-4×10^{-4} と非常に小さく図2.8から自励振動が発生しないことは明らかである．

以上のように，式(2.7)を用いて理論的に検討した結果，摩擦係数の速度勾配が負（$\mu' < 0$）で，かつある値以上になると自励振動が発生し，鳴き音となり，小さいときには自励振動が発生せず，こすれ音となることがわかった．

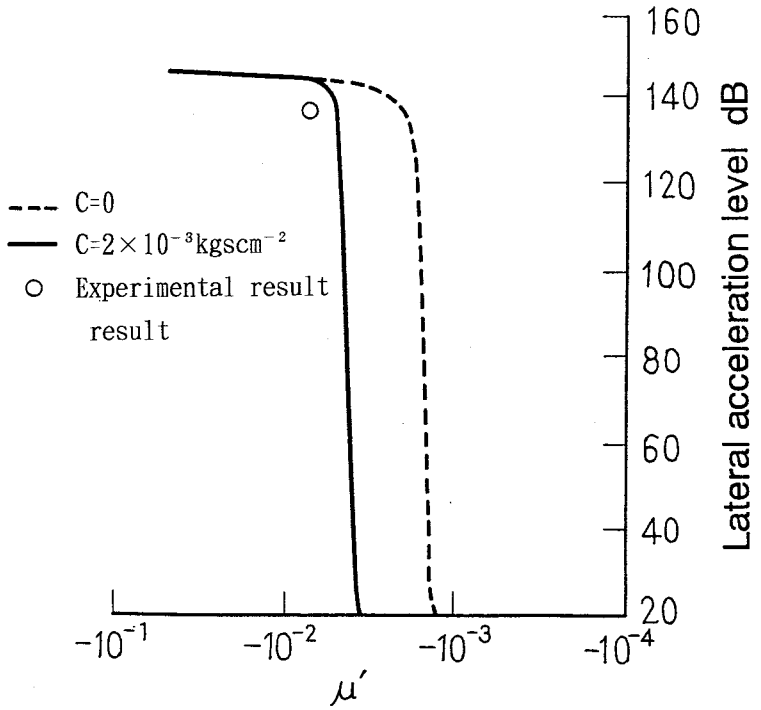


図2.8　種々の摩擦係数の勾配による振動加速度レベルの変化
（円板の周速度 70cm/s）

2.4　高次モードの鳴き音

2.4.1　実験結果

はりが短いと，はりの横振動の一次の固有振動数にほぼ一致する周波数の鳴き音のみ発生した．しかし，はりを長くすると，はりの横振動の高次の固有振動数が低くなり，高次モードの周波数にほぼ一致する鳴き音（以降これを［高次モードの鳴き音］と呼ぶ）が発生する可能性がある．そこで直径 7mm のはりについて長さを 50，65，75，85，90 および100mmと種々変えて実験を行った．表2.2に実験に用いた円板とはりの寸法と仕様を示す．はりの先端は半球状に加工されている．

鳴き音を検討する前に，はりが長い場合のこすれ音を調べてみる．図2.9は長さ75mm，直径7mmのはりにおけるこすれ音およびそのときのはりの横振動加速度の周波数分析結果を示している．この図には，こすれ音の音圧波形も示し，振動加速度レベルは80dBを10m/s^{2}として dB表示した．こすれ音は円板の表面あらさやわずかな偏心などによる低周波成分のほかに図に示すようにはりの横振動の一次から三次の固有振動数およびはりの縦振動の一次の固有振動数と考えられる18000～19000Hzの周波数成分からなり，その音圧レベルはかなり低い．このような周波数構成ははりの長さを変えたこすれ音の実験結果においても変化しなかった．

つぎに鳴き音について述べる．図2.10，2.11は一例として，はり長さ75mm，直径7mmの場合に発生した一次および三次モードの鳴き音の音圧，はりの横および縦振動の加速度波形を示す．多くの場合，実験を開始して数分後，はり先端が摩耗し，摩擦面の直径が1～2mmになると，こすれ音からはりの横振動の一次の固有振動数に一致する770Hzの一次モードの鳴き音（図2.10）が発生する．さらにはりの摩擦面の直径が約3mm程度に摩耗が進むと一次モードの鳴き音が減衰した後，はりの横振動の三次の固有振動数に一致する13900Hzの三次モードの鳴き音（図2.11）に移行する．しかし，一次モードの鳴き音が発生することなく，はりの先端が摩耗し，円板との真の摩擦面積が大きくなると，こすれ音の状態から直接，三次モードの鳴き音が発生する場合も見うけられた．なお，高次モードの鳴き音発生時のはりの先端はかなり摩耗しており，摩擦面の直径も2～3mmあり，摩擦面積はかなり大きくなっている

また，図2.10，2.11から，高次モードの鳴き音が発生する場合，はりの縦振動加速度レベルが大きくなっているのがみられる．すなわち，三次モードの鳴き音発生時の横振動加速度レベルは一次モードの鳴き音のそれの２倍になっているにすぎないが，縦振動加速度

表2.2　円板とはりの寸法と仕様

	円板		はり	
材質	S45C	材質	S45C	
直径 mm	200	直径 mm	5, 5.5, 6, 6.5, 7, 7.5, 8	7
厚さ mm	40	長さ mm	75	50, 65, 75, 85, 90, 100
硬さ H_V	400	硬さ H_V	150	

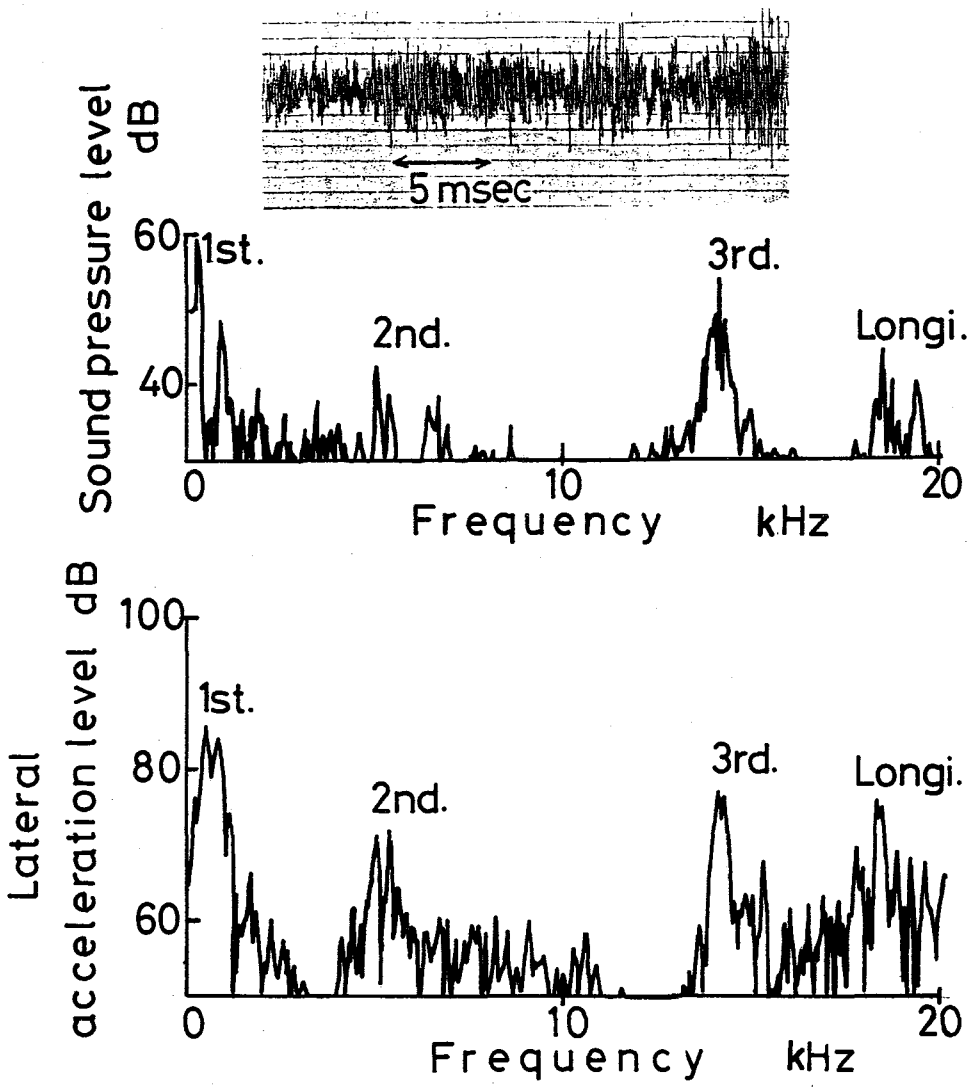


図2.9　こすれ音発生時の音圧とはりの横振動加速度の周波数分析結果

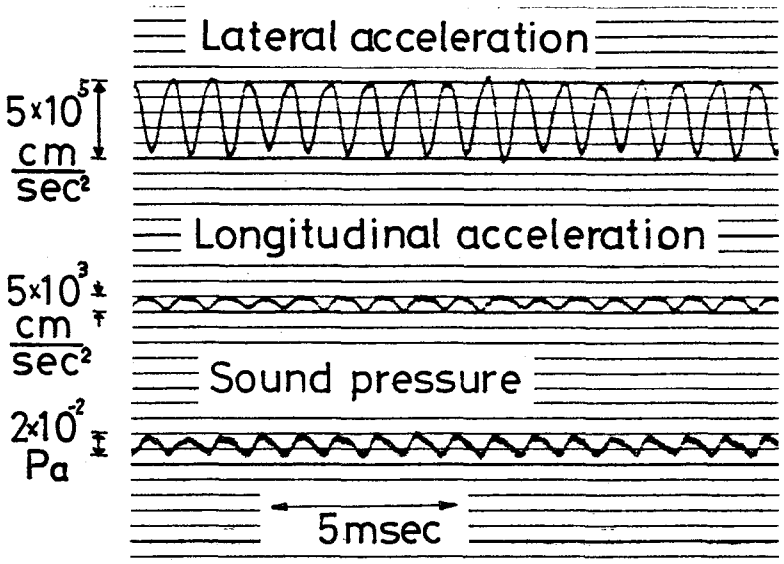


図2.10　はり長さ 75mm における一次モード鳴き音発生時の音圧と振動加速度波形

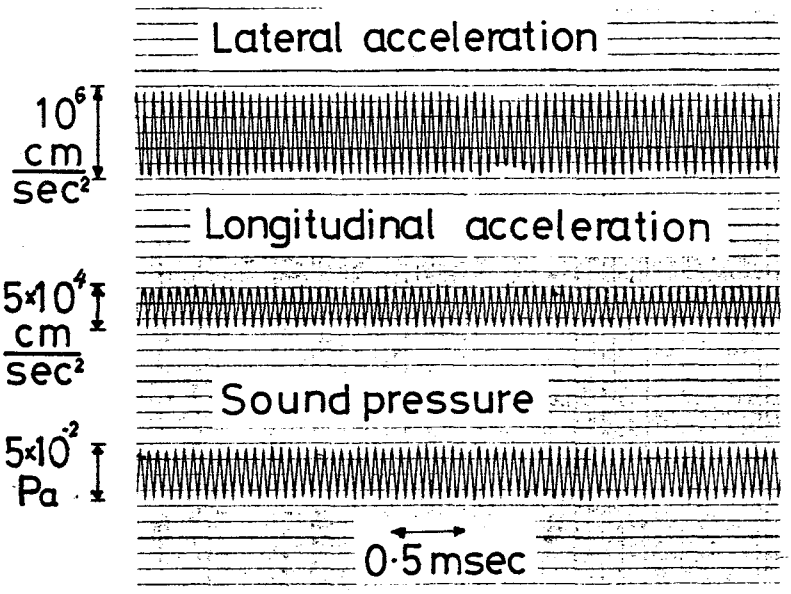


図2.11　はり長さ 75mm における三次モード鳴き音発生時の音圧と振動加速度波形

レベルは一次モードの鳴き音の場合の10倍近く大きくなっている．さらに高次モードの鳴き音の発生機構を知るのに興味ある結果がえられた．すなわち，円板１回転中に一次モードの鳴き音→高次モードの鳴き音→一次モードの鳴き音に移り変わる現象が生ずる場合がある．図2.12ははり長さ100mmについて，一次モードの鳴き音から高次モードの鳴き音に移行する過程を示す波形である（高次モードから一次モードの鳴き音に移行する場合も同じ傾向を示した）．なお，図には高次モードの振動状態がよくわかるように高次モードの鳴き音発生時の時間軸を引き伸ばした波形も示している．最初，横振動ははりの一次の固有振動数430Hzで振動しており，低周波振動のため音圧レベルも低い．しかし，時間の経過とともに一次の振動は減衰し，こすれ音の状態になった後，横振動の四次の固有振動数に一致する15700Hzの鳴き音に移行する．このとき，縦振動加速度は一次の鳴き音発生中には非常に低いレベルであったが，高次モードの鳴き音に移行するにともない，そのレベルが大きくなっていく過程が図よりよくわかる．しかしながら，縦振動加速度レベルが大きくな

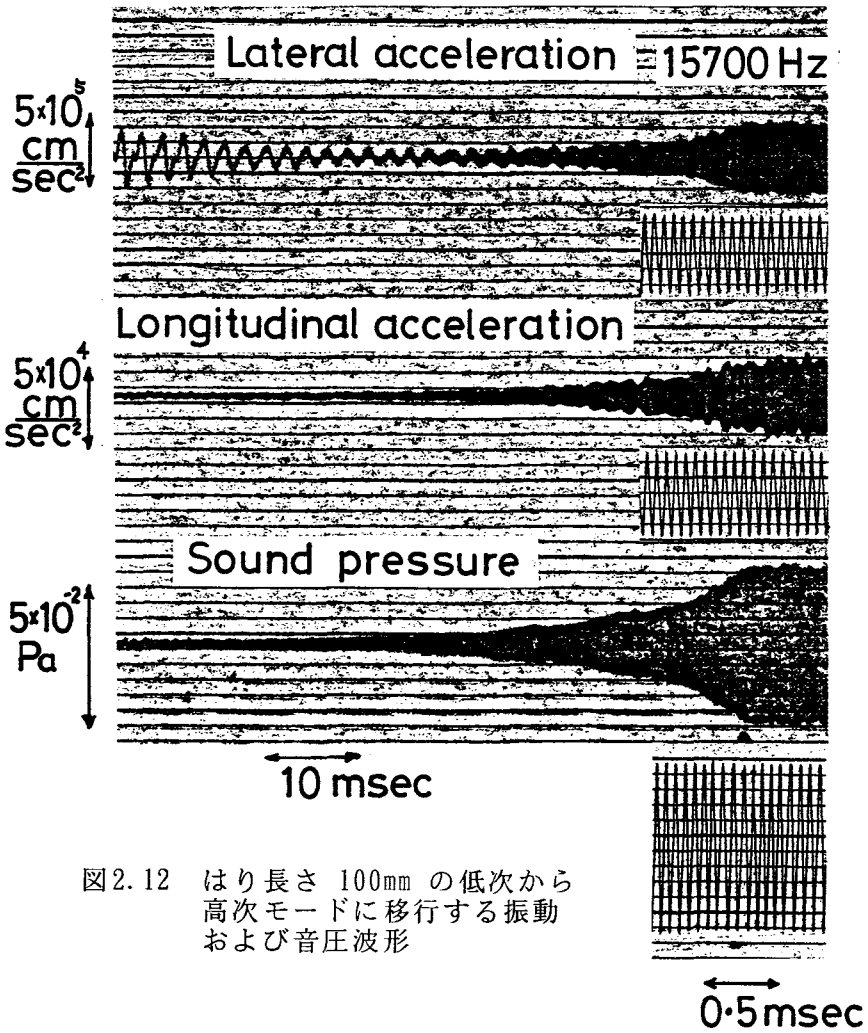


図2.12　はり長さ 100mm の低次から高次モードに移行する振動および音圧波形

っても一次モードの鳴き音が減衰しない場合には完全な高次モードの鳴き音に移行しない．このような実験結果の例をはり長さ100mmについて示したのが図2.13である．横振動加速度波形をみると，一次の振動が減衰せず，縦振動加速度レベルが大きくなっているところで図2.13の時間軸を伸ばした波形に見られるように一次の振動に高次の振動が重畳されている．しかし，図2.12に示すような完全な高次の振動には移行せず，縦振動加速度レベルが小さくなると再び一次のみの振動が発生している．音圧は縦振動加速度が大きくなっているところでは高次振動が重畳され，高周波のため高いレベルを示しているが，図2.12に示す高次モードの鳴き音のような正弦波形ではなく，低周波が含まれており，完全な高次モードの鳴き音は発生していない．

以上の実験結果より，高次モードの鳴き音が発生するのは，一次モードの鳴き音が減衰し，縦振動成分が大きくなる場合か，あるいはこすれ音の状態において縦振動成分が大きくなる場合の二通りであると考えられる．ただし，これらの場合，はりと円板との真の摩擦面積はある程度大きいことが必要である．このように発生した鳴き音の周波数および実測したはりの横振動のモードの次数を種々のはり長さについてまとめたのが表2.3である．はり長さ50，65，85mmでは一次モードの鳴き音のほかに，29200，20500，20400Hzの高周波が鳴き音として示されているが，いずれも可聴周波数以上であり，音圧レベルは非常に低い．しかしながら，はりの横および縦振動加速度のレベルは高く，その波形は正弦波状で

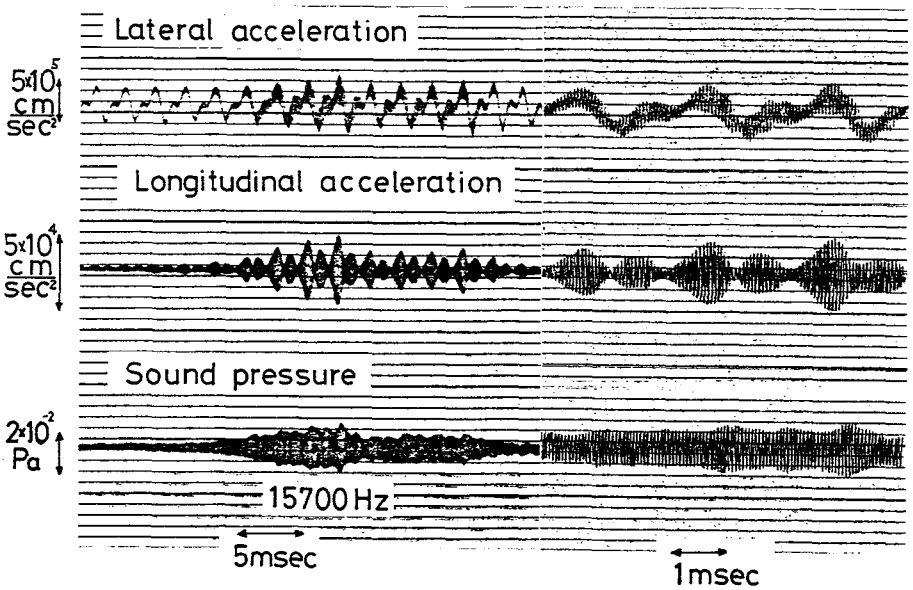


図2.13　はり長さ 100mm の鳴き音の振動および音圧波形

表2.3　種々のはり長さについて発生した鳴き音

はり長さ　mm	鳴き音の周波数　Hz	振動モードの次数
50	1 660 29 200	1 3
65	1 000 20 500	1 3
75	770 13 900	1 3
85	600 20 400	1 4
90	550 18 800	1 4
100	430 15 700	1 4

あり，鳴き音発生時と同じ挙動を示すので，これらの高周波を鳴き音とみなした．この表から，はりの横振動の一次の固有振動数に相当する周波数をもつ鳴き音ははりの長さにかかわらず発生し，高次モードの鳴き音ははり長さが50，65，75mmでは三次モード，85，90，100mmでは四次モードであり，二次モードの鳴き音はいずれの長さのはりでも発生しなかった．

以上のように，こすれ音ははりのすべての横振動の固有振動数成分を含んでいるのに対して，鳴き音ははりの特定のモードの周波数においてのみ発生し，さらにはりの長さによって高次の鳴き音のモードの次数が変わることがわかった．図2.10～2.13の結果から，はりの縦振動の大きさが高次モードの鳴き音の発生に影響を及ぼすことがわかったが，高次の鳴き音の周波数にはりの縦振動の固有振動数が何らかの影響を及ぼしているものと考えられる．

図2.14は表2.3に示した鳴き音の周波数とこすれ音の周波数分析結果から読みとった縦振動の固有振動数（20000Hz以上は周波数分析不可能のため実測していない）の関係を図示したものである．また，この図には（固定－自由）の境界条件で計算したはりの横振動の固有振動数と前節で実験したはり長さ32mmの場合の結果も示している．この図より，高次モードの鳴き音ははりの縦振動の固有振動数に近い横振動の固有振動数で発生していること

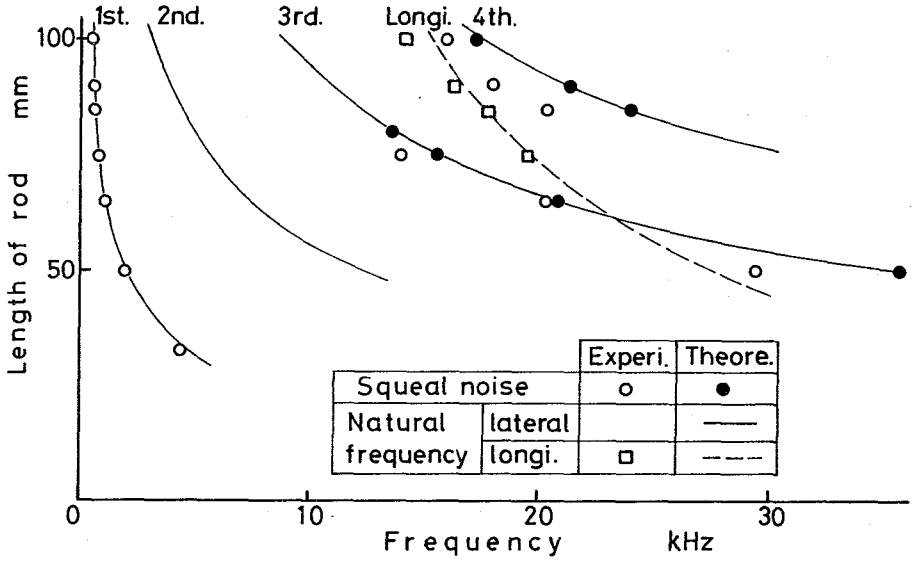


図2.14　はり長さによる鳴き音の周波数の実験結果と計算結果

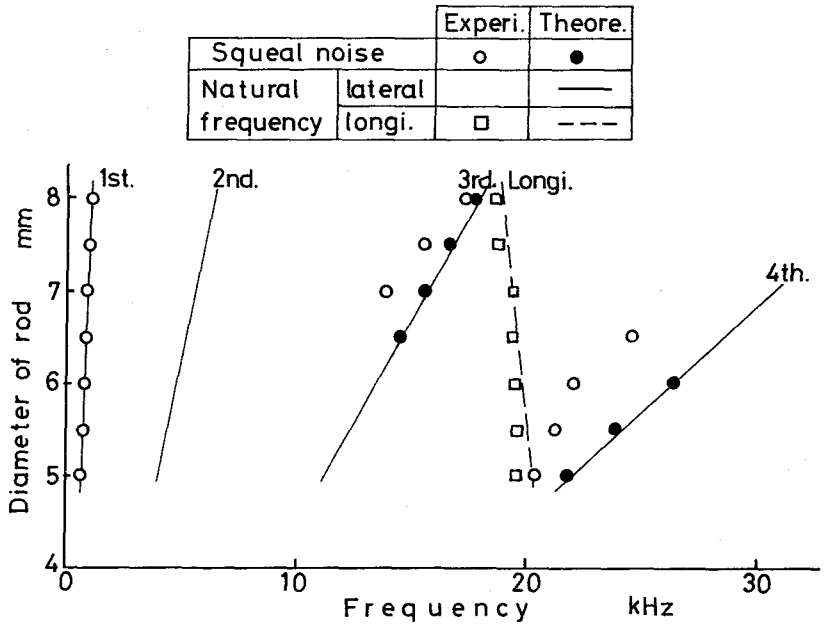


図2.15　はり直径による鳴き音の周波数の実験結果と計算結果

がわかる．はり長さ85，90，100mmでは縦振動の固有振動数に近い四次モードであり，はり長さ50，65，75mmでは三次モードで鳴き音が発生している．また，一次モードの鳴き音の周波数は計算による周波数とほぼ一致しているが，高次モードの周波数はかなり低い値となっている．これははりが完全に固定されていないためと考えられる．はりの長さを変えることにより，高次の鳴き音の振動モードははりの縦振動の固有振動数に左右されることがわかる．このことをさらに確認するために，はり長さを一定にし，はり直径を変化させて，縦振動の固有振動数はあまり変化させないで横振動の固有振動数が変化するようにして，鳴き音の周波数および振動モードを調べた．

図2.15ははり長さ75mm，直径 5，5.5，6，6.5，7，7.5，8mmについて鳴き音の周波数と縦振動の固有振動数および計算によってえられた横振動の固有振動数の関係を示している．直径5，5.5，6，6.5mmでは，横振動の一次のほかに四次の固有振動数である20200，21200，22000，26400Hzの鳴き音が発生し，直径7，7.5，8mmでは三次の固有振動数である 13900，15500，17200Hzの鳴き音が発生したが，二次モードの鳴き音は発生しなかった．この図からも図2.14と同様，鳴き音ははりの縦振動の固有振動数に近い横振動の固有振動数のモードの次数で発生することが明らかである．

以上のように，図2.14，2.15の結果から，高次モードの鳴き音ははりの縦振動の固有振動数に近い横振動の固有振動数の次数で発生することを確認できた．

2.4.2　理論解析

実験結果より，高次モードの鳴き音の発生にはりの縦振動が大きな影響を及ぼしていることがわかった．そこで，はりの横振動のほかに縦振動を考慮し，円板の振動は微少であるので無視して運動方程式をたてる．図2.16ははりの長さ l で押しつけ荷重 P が作用したときの模式図である．はりの左端は固定，右端ははりと円板が弾性接触するものとして，はりのせん断変形と回転慣性を無視すると，はりの横振動および縦振動の運動方程式は次式で表される．(22)，(23)，(25)－(27)

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+C\frac{\partial u}{\partial t}=P\{\mu(v_r)\cos\phi+\sin\phi\}\delta(x-l) \qquad (2.11)$$

$$EA\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-C^*\frac{\partial v}{\partial t}=P\{-\mu(v_r)\sin\phi+\cos\phi\}\delta(x-l) \qquad (2.12)$$

ここで $v_r=V-\dot{u}\cos\phi-\dot{v}\sin\phi$ ，ϕ：はり先端の傾斜角であり，

初期設定角 ϕ_0 とはり先端のたわみ角 $\{\partial u/\partial x\}_{x=l}$ の和で表される

はりの横および縦方向の変位u, v を次のように表す.

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}X_i(x)T_i(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.13)$$

$$v=\sum_{j=1}^{\infty}X_j^*(x)T_j^*(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.14)$$

ここで, $X_i(x)$: $x=0$で固定, $x=l$ で自由の境界条件における i 次の横振動の固有関数,
$X_j^*(x)$: $x=0$で固定, $x=l$ で ヘルツの弾性接触理論から求められる等価ばね定数をもつ弾性支持の境界条件における j 次の縦振動の固有関数で次式から求められる.

$$X_j^*(x)=\sin\left(\frac{\lambda_j^*}{l}x\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.15)$$

ここに, λ_j^*は $\dfrac{\overline{k}_c l}{EA}+\lambda_j^*\cot\lambda_j^*=0$ から求められる.

$\overline{k}_c$ は等価ばね定数であり, はり先端と円板の接触状態を球と平面の接触とみなすと同種金属どうしの場合, ヘルツの弾性接触理論から次式で与えられる.

$$\overline{k}_c=\left\{\frac{4Pr_sE^2}{9(1-\nu^2)^2}\right\}^{1/3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.16)$$

式 (2.11), (2.12) に式 (2.13), (2.14) を代入して
i および j 次の固有関数$X_i(x)$, $X_j^*(x)$をそれぞれ 式 (2.11), (2.12) の両辺にかけて,
x について 0 から l まで 積分を行うと次のような非線形の運動方程式がえられる.

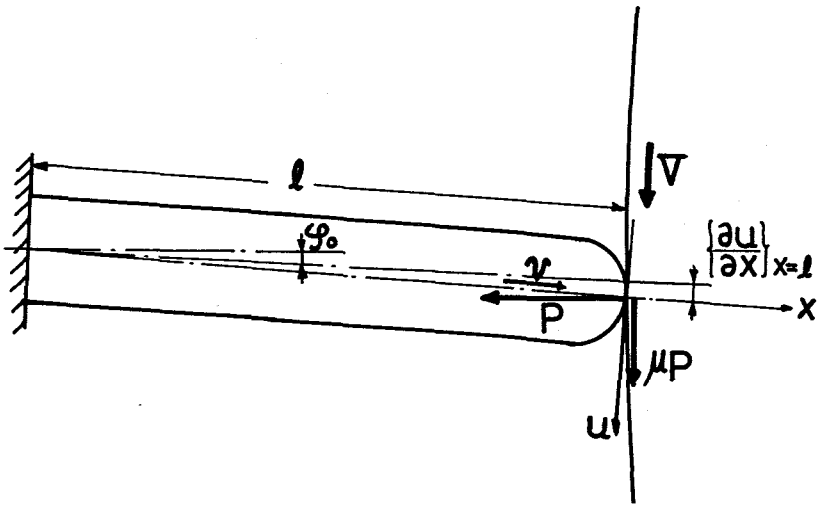


図2.16 はりの摩擦振動モデル

$$\ddot{T}_i+\frac{C_i}{\rho A}\dot{T}_i+\omega_i{}^2T_i=X_i(l)\frac{P}{\rho A l}\{\mu(v_r)\cos\phi+\sin\phi\}$$

$$(i=1,2,\cdots,\infty) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2.17)$$

$$\ddot{T}_j{}^*+\frac{C_j{}^*}{\rho A}\dot{T}_j{}^*+\omega_j{}^2T_j{}^*=-\frac{X_j{}^*(l)}{\overline{X}_j{}^*}\frac{P}{\rho A}\{-\mu(v_r)\sin\phi+\cos\phi\}$$

$$(j=1,2,\cdots,\infty) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2.18)$$

$$\omega_j{}^*=\frac{\lambda_j{}^*}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.19)$$

ここに，$\overline{X}_j{}^*=\frac{l}{2}\left(1-\frac{\sin 2\lambda_j{}^*}{2\lambda_j{}^*}\right)$

いま，原点をはりのつりあい位置に移動し，原点からの変位を

$$\overline{u}=\sum_{i=1}^{\infty}X_i(x)\overline{T}_i(t)$$

$$\overline{v}=\sum_{j=1}^{\infty}X_j{}^*(x)\overline{T}_j{}^*(t)$$

とする．

つりあい位置における傾斜角を$\overline{\phi}$，初期押しつけ荷重をP_0とすると，式(2.17)，(2.18)は次のようになる．

$$\ddot{\overline{T}}_i+\frac{C_i}{\rho A}\dot{\overline{T}}_i+\omega_i{}^2\overline{T}_i=\frac{X_i(l)}{\rho A l}[P\{\mu(v_r)\cos\phi+\sin\phi\}$$

$$-P_0\{\mu(V)\cos\overline{\phi}+\sin\overline{\phi}\}] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.20)$$

$$\ddot{\overline{T}}_j{}^*+\frac{C_j{}^*}{\rho A}\dot{\overline{T}}_j{}^*+\omega_i{}^2\overline{T}_j{}^*=-\frac{X_j{}^*(l)}{\overline{X}_j{}^*\rho A}[P\{-\mu(v_r)\sin\phi+\cos\phi\}$$

$$-P_0\{-\mu(V)\sin\overline{\phi}+\cos\overline{\phi}\}] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.21)$$

式 (2.20),(2.21)における押しつけ荷重P と接触点における垂直方向の変位$\overline{v}\cos\phi-\overline{u}\sin\phi$との関係は，ヘルツの弾性接触理論を用いると次式で表される．

$$P=\overline{k}(\delta_0+\overline{v}\cos\phi-\overline{u}\sin\phi)^{3/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.22)$$

ここで，$\overline{k}=\frac{2}{3}\frac{E\sqrt{r_s}}{(1-\nu^2)}$，$\delta_0$：つりあい位置における初期の垂直方向変位

式(2.22)を式（2.20),(2.21)のP に代入し，初期条件

$\overline{T}_{i0}$, $\dot{\overline{T}}_{i0}$ ($i=1,2,\cdots,m$), $\overline{T}_{j0}^{*}$, $\dot{\overline{T}}_{j0}^{*}$ ($j=1,2,\cdots,n$)のもとでmおよびn個の式（2.20),

(2.21）を解けばよいが，非線形であり，解析的に解くことは困難であるので，ＲＫＧ法により数値計算を行った．式(2.20)，(2.21)の詳細な特性については後で検討することにし，ここでは，種々のはり長さおよび直径について横振動は四次モードまで （$i=1\sim4$），縦振動は一次モードのみ（$j=1$）考慮し，初期設定傾斜角 $\phi_0=0$ として計算した．なお，計算に用いた摩擦係数曲線を図2.17 に示す．摩擦係数については，相対すべり速度に対してＡ，Ｂ，Ｃの３種類用いた．曲線Ｂは実測した一次モードの鳴き音発生時の傾きを表している．高次モードの鳴き音ははり先端と円板の真の摩擦面積が大きい場合にのみ発生することから，この摩擦面積の増加は摩擦係数の負の勾配を大きくするものと考えられる．そこで高次モードの鳴き音発生時には曲線Ｂよりも勾配の大きい曲線Ａを用いた．また曲線Ｃにおいては摩擦係数が相対すべり速度に対して，ほぼ一定値に近く，この曲線を用いて計算すると振動は減衰する．

まず，はり長さ75mm，直径7mmについて初期条件として，はり先端に摩擦力μP_0 が加えられた場合のはりの静たわみを各々の次数のモードについて求めたものを用い，摩擦係数は図2.17 に示されている勾配の小さい曲線Ｂを用いて計算した．なお，$\overline{k}$ ，$\overline{k}_c$ を計算する場合，はり先端の曲率半径r_sの値が必要であるが，実験から高次モードの鳴き音発生時にははり先端が，かなり摩耗し r_sが大きくなっている．したがって，$r_s=40$mmとして，

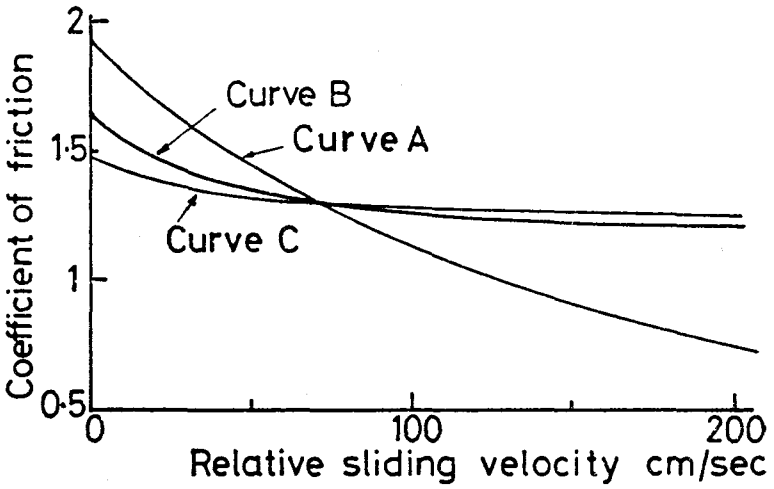


図2.17　計算に用いた摩擦係数曲線

k , k_c を計算した．また，一次モードの鳴き音発生時には高次モードの場合よりはり先端の摩耗が少ないので，小さな値 r_s= 10mmを用いた．計算によってえられた横振動加速度の波形を図2.18(a)に示す．この波形は横振動の一次の固有振動数800Hzにわずかに三次の固有振動数15500Hzの振動が加わっているが，ほぼ正弦波形に近く一次の鳴き音となっている．

前述の実験結果より，高次の鳴き音が発生するのは，はり先端と円板の真の摩擦面積がある程度大きくて，一次モードの鳴き音が減衰した後，縦振動が大きくなるか，あるいは，こすれ音の状態にあって縦振動が大きくなる場合であった．そこで図2.17に示す摩擦係数の勾配が小さい曲線Cを用いて，一次モードの鳴き音を減衰させた後，初期条件として，横振動の $\overline{T}_{i0}$, $\dot{\overline{T}}_{i0}$ は減衰後の値を，縦振動の $\overline{T}_{j0}{}^{*}$ のみ減衰後の値にわずかに大きな値を加えた値 $\overline{T}_{j0}{}^{*}=10^{-5}$を用い，摩擦係数曲線として勾配の大きい曲線Aを用いて計算した．その横振動加速度の計算結果を図2.18(b)に示す．明らかに正弦波形をした三次の固有振動数15500Hzの振動波形がえられた．これらの計算結果は図 2.10 , 2.11 とその大きさ

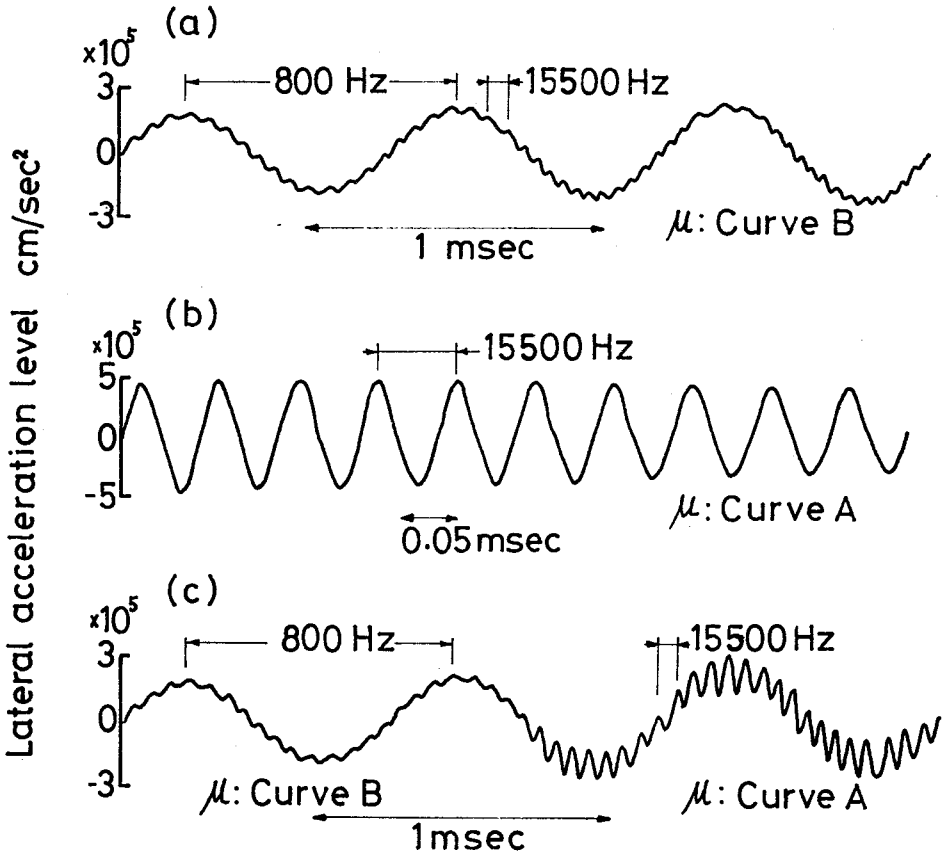


図2.18　種々の初期条件のもとに数値計算したはりの横振動加速度波形

は完全に一致していないが，同じ傾向を示している．また初期条件として，横振動に対してはこすれ音に相当する小さな値$\overline{T}_{i0}=10^{-4}$を，縦振動に対しては図2.18(b)の計算と同じ値を用いて計算した結果，図2.18(b)と全く同じ横振動波形がえられた．このことは，こすれ音の状態にあって縦振動が大きくなる場合に高次モードの鳴き音が発生することを理論的に裏付けている．さらに，初期条件として横振動に対しては，図2.18(a)でえられた一次モードの鳴き音のときの値を，縦振動に対しては，わずかに大きな値$\overline{T}_{j0}^{*}=10^{-5}$を用い勾配の大きい摩擦係数曲線Aによって計算すると図2.18(c)に示すような横振動の振動波形の経過をたどる．一次モードの振動波形において，摩擦係数の勾配および縦振動の初期値を大きくすると三次モードの振動が大きくなるが，図2.18(b)のような三次モードの振動波形にはならない．このことは前述の図2.13の実験結果と同じ傾向である．したがって，はりと円板の摩擦面積が大きくなり，摩擦係数の勾配および縦振動が大きくなっても，一次モードの鳴き音が減衰しなければ，高次の振動は現れるが，完全に高次モードの鳴き音に移行しないことが理論的に明らかになった．

このように種々のはり長さ，直径に対して計算してえられた高次モードの振動波形から周波数を求めた結果を図2.14，2.15の●印で示してある．また，これらの図には式(2.19)より計算した縦振動の固有振動数も示している．これらの計算結果からも，縦振動の固有振動数により近い横振動の固有振動数の次数の鳴き音が発生することがわかる．

図2.14でははり長さ80mmまでは三次モードの鳴き音，85mm以上では四次モードの鳴き音になっている．図2.15においては，はり直径 6mmまでは四次モードの鳴き音，6.5mm 以上ではいずれも縦振動の固有振動数に近い三次モードの鳴き音になっている．ただし，三次モードから四次モードの鳴き音へ変わる図2.14のはり長さ80mmおよび図2.15のはり直径 6.5mmの場合の振動波形は図2.18(b)に示すような正弦波形とはならない．図2.19にそれらの振動波形を示す．いずれの場合も三次モードの周波数が支配的であるが，四次モードの周波数も含まれている．これらの計算結果と実験結果の鳴き音の次数を比較すると，図2.15のはり直径 6.5mmの場合を除いて両者は一致している．この次数の違いは実験結果では四次モードの鳴き音の周波数が計算値の固有振動数よりかなり低くなり，荷重方向固有振動数により近くなったために生じたものと考えられる．

以上のように数値計算結果と実験結果は，ほぼ一致しており，本計算によって高次モードの鳴き音の発生機構を解明できたものと考えられる．

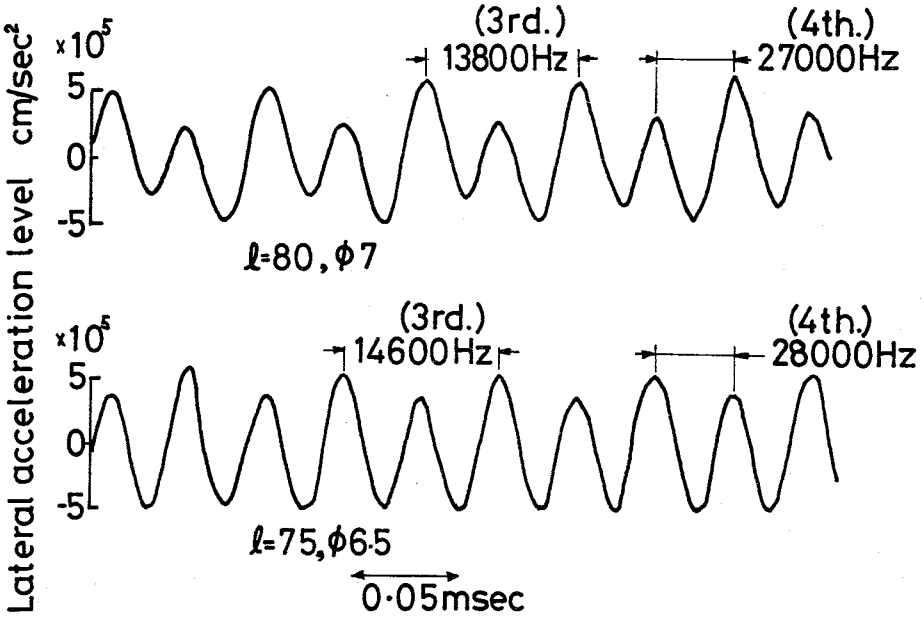


図2.19　はり長さ 80mm, 直径 7mm およびはり長さ 75mm, 直径 6.5mm の数値計算による横振動加速度波形

2.5　結　言

鋼製の片持ちはりを研削加工された厚い鋼製の回転円板の円周面にほぼ垂直に押しつけ，乾性状態で発生させた摩擦音について実験的，理論的に検討した結果，つぎのような結論がえられた．

(1)　本実験装置では円板は厚くて振動しにくいので，摩擦音ははりの振動により発生する

(2)　乾性すべり摩擦により発生する音は，音圧レベルの低い［こすれ音］と波形が正弦波状で音圧レベルの高い［鳴き音］に分類できる．はりと円板の間の摩擦係数が小さく，摩擦面に小さなおうとつ部分が多くある場合には［こすれ音］が発生し，その音圧レベルは低い．摩擦距離が長くなり，はりの先端が摩耗し，摩擦面がなめらかな面になると，摩擦係数は大きくなり，摩擦音は［鳴き音］に移行する．その音圧レベルは［こすれ音］より20～30dB高くなる．

(3)　円板およびはりともに焼き入れ処理して硬さが大きいとき，［鳴き音］が発生するまでの摩擦距離は長いが，はりが焼き入れされず，硬さが小さいときには摩耗が早く進み，［鳴き音］が早期に発生する．

(4)　［こすれ音］の周波数は摩擦面のあらさなどの低周波成分のほかに，はりの横振動および縦振動の固有振動数成分からなっている．

(5)　［鳴き音］はその周波数がはりの一次の固有振動数およびその倍音からなる「一次モードの鳴き音」およびはりの高次の固有振動数にほぼ一致する「高次モードの鳴き音」が発生する．

(6)　一次モードの鳴き音は摩擦係数がすべり速度に対して負の勾配を持つことにより発生する．高次モードの鳴き音ははり先端と円板の間の摩擦面積がある程度大きく（摩擦係数のはり先端の相対すべり速度に対する勾配が大きく），一次の鳴き音が減衰した後，縦振動が大きくなるか，あるいはこすれ音で縦振動が大きくなる場合に発生する．この周波数ははりの縦振動の固有振動数により近い横振動の固有振動数である．

しかし，縦振動が大きくなっても，一次モードの鳴き音が減衰しない場合には完全な高次モードの鳴き音は発生しない．

(7)　はりの横振動および縦振動の連成を考慮した非線形運動方程式を種々の初期条件のもとに数値計算した結果，実験結果とほぼ一致し，高次モードの鳴き音の発生機構を理論的により明確にすることができた．

第3章　摩擦面の表面あらさによる影響

3.1　緒言

表面あらさの大きさは摩擦音および振動に大きな影響を及ぼす．たとえば，レールの波状摩耗による車輪，仕上げ精度の悪いころ軸受や歯車などによる騒音である．これらの騒音は低減すべきものであり，低減対策の基礎的な研究が要望されている．

現在まで，表面あらさによる摩擦音や摩擦振動についての基礎的研究は Charson, Johnson[28],[29], Nayak[27]，石田[30]，西村・高橋[31]-[33]らによりなされている．Johnsonら[28],[29]は円板どうしをころがり接触させたとき，円板の表面あらさがどのようになるか検討し，さらに表面あらさを考慮して摩擦振動を解析している．Nayak[27] は摩擦振動方程式に表面あらさとして広帯域のランダムあらさや正弦波のあらさを用いて理論計算を詳細に行っている．石田[30]は円板どうしがすべりを伴うころがり接触している場合の摩擦音を実験的・理論的に検討し，それに基づいて歯車の歯面間の相対すべりによる音を研究している．西村・高橋[31]-[33]は研削加工によるランダムあらさおよびローレット加工による周期的あらさをもつ小さな円筒とはりを潤滑摩擦したときの摩擦音について詳細に実験を行っている．しかし，これらの研究は摩擦音と摩擦振動の関係を完全に解明するまでには至っていないようである．

本章では，摩擦音におよぼす表面あらさの影響を検討するため，砥石の切込み深さを変えて円板の円周面を研削加工し，3種類のあらさをもつ面をつくり，この円周面にはりを押しつけて摩擦させた．その際，発生する摩擦音およびはりの振動が表面あらさ，円板の回転数によってどのように変化するのか，実験的・理論的に検討した．また，はりの横振動加速度と摩擦音レベルの関係についても検討した．

3.2　実験装置および方法

実験装置は前章まで使用したものと同じであり，押付け荷重は19.6Nである．
また，円板の直径が20cmであるので，円板の回転数 Nrpmは円板の周速度 Vcm/sとほぼ一致する．表3.1にはりの寸法と仕様を示す．なお，はりの先端は半球状をしており，焼入れ処理はなされていない．

表面あらさは円板の円周面に研削加工で砥石の切込み深さを変えて3種類作った．あら

表3.1　円板とはりの寸法と仕様

	円　板		は　り
材質	S45C	材質	S45C
直径　cm	20	直径　cm	0.7
厚さ　cm	4	長さ　cm	3, 5, 7, 10
硬度　H_V	400	硬度　H_V	150

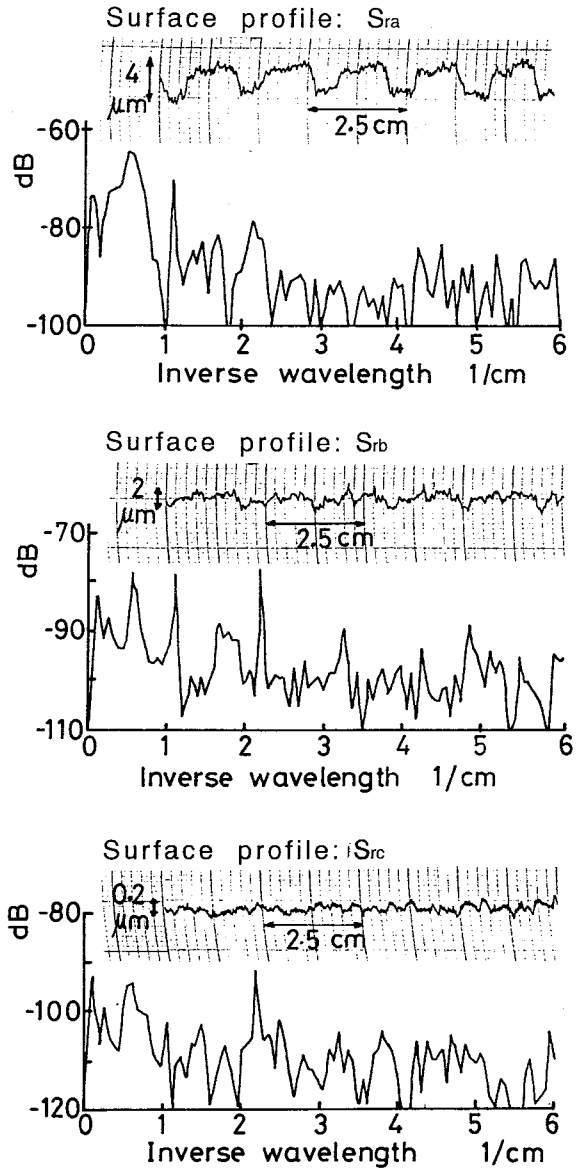


図3.1 表面あらさ波形と周波数分析結果

さは触針式あらさ計による断面曲線および実際のはりと円板が接触状態にあるときの包絡あらさ曲線を測定した．なお，包絡あらさ曲線は，実験に使用したはりの先端（半球状で直径 7mm）を1cm程度切りとり，これを触針の先端につけて，円板に接触させながら円板をゆっくり回転させ，あらさ計からの出力をデータレコーダに記録し，測定した．図3.1に3種類の包絡あらさ曲線の一部とその周波数析結果を示す．表面あらさの大きさは 1cmを0dBとしてdB表示している．表面あらさの大きさの順にSra，Srb，Srcと名付けた．断面曲線より読取った最大あらさH_{max}は包絡あらさ曲線のそれより大きくSra，Srb，Srcでそれぞれ 5，3，0.5μmである．前章の実験で用いた円板の表面あらさはSrcに相当している．図より低周波にピークがみられるが，その他の周波数ではピークもほとんどなくランダムなあらさに近いと考えられる．

3．3　実験結果

図3.2ははり長さ7cm，円板の表面あらさSra，Srb，Srcの3種類について，回転数の変化に対するはりの横振動加速度と音圧レベルの変化を示している．低回転では，円板の偏心の影響を受けやすく，振動，音圧レベルともにかなり変動するが，図には平均的なレベルを示した．なお，振動加速度レベルは80dBを10m/s²として dB表示した．また，回転数が増加するとはりが円板と間欠的に接触しなくなる場合がある．図において，破線で示した回転数でははりが円板から離脱することがあることを示している．Srcでははりは離脱せず，

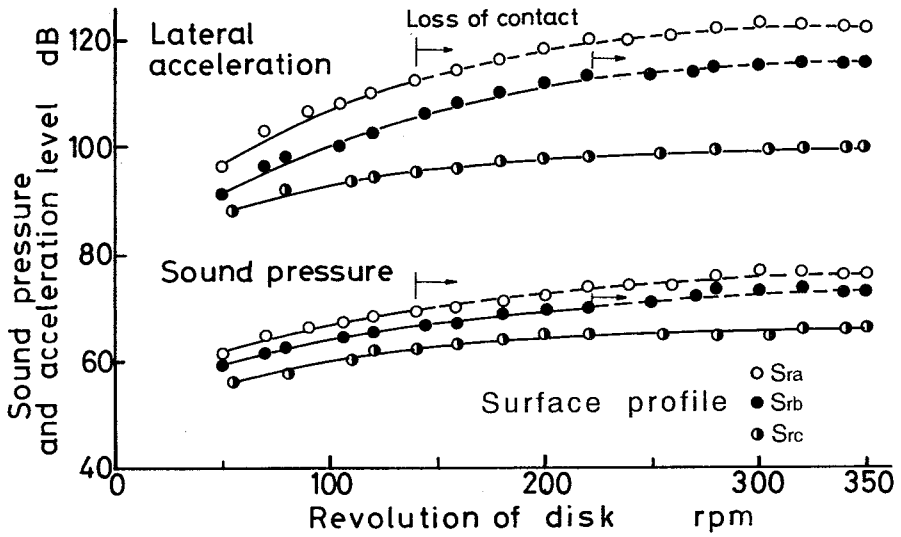


図3.2　表面あらさによる回転数と音圧，はりの横振動加速度レベルの関係（はり長さ 7cm）

Sraでは140rpm，Srbでは220rpmからはりが離脱し始め，表面あらさが大きいほど低回転数からはりの離脱が始まる．また，はりの横振動加速度および音圧レベルははりの円板からの離脱にかかわらず，特にピークもなく回転数とともに増加している．しかし，低回転において横振動加速度レベルの増加に比べて，音圧レベルはそれほど増加していない．これは低回転において，円板を回転させるための駆動部，軸受などからの暗騒音の影響によるものと思われる．そこで波形と周波数分析結果を調べて見る．図3.3および3.4は150rpmおよび300rpmにおける表面あらさSra，Srcについての横および縦振動加速度波形，音圧波形およびそれらの周波数分析結果を示す．なお，図3.3の波形にははりと円板の接触状態を示す波形も示す．これらの図より次のようなことがわかる．

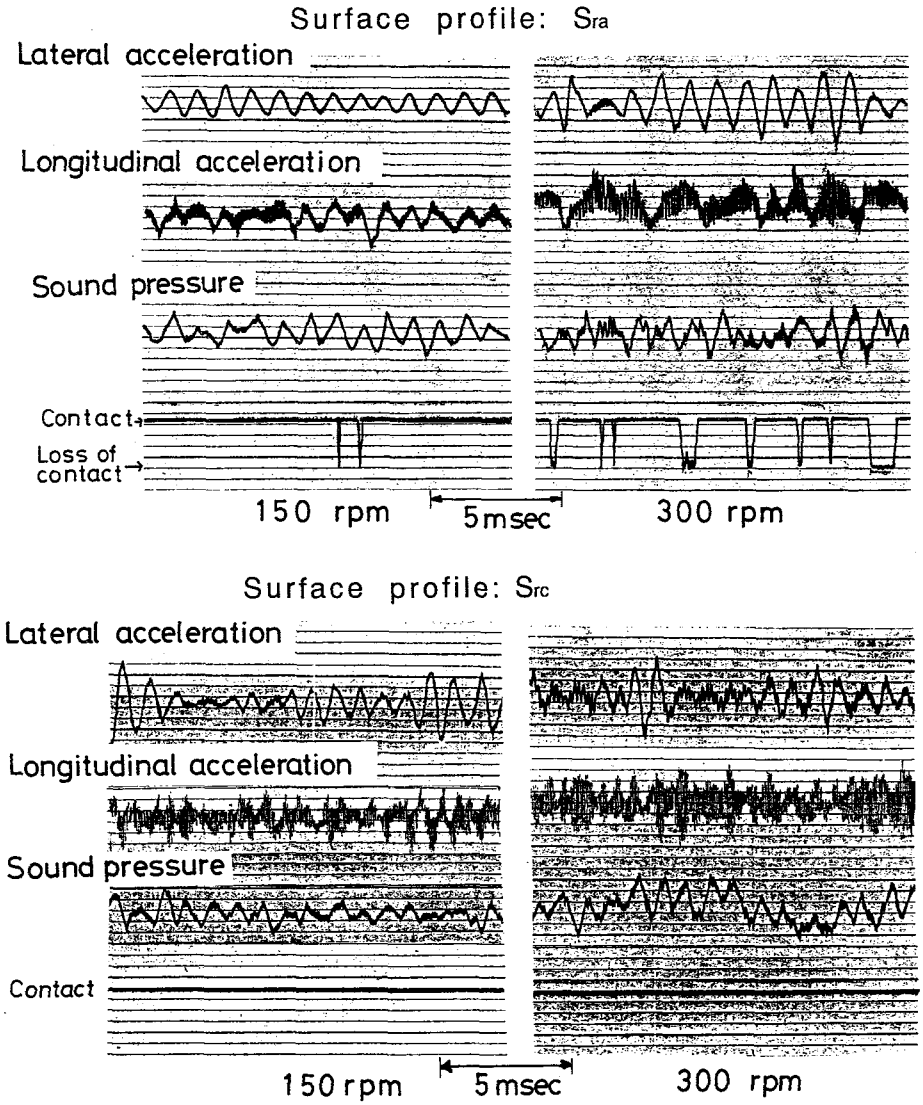


図3.3　表面あらさSra，Src，回転数 150，300rpmにおける
音圧，振動加速度，接触波形（はり長さ 7cm）

表面あらさの大きいSraの場合，(1)横振動加速度，音圧ともにはりの横振動の一次の固有振動数成分が支配的である．(2)音圧レベルには低周波や 9kHzの暗騒音が含まれているが，全レベルの大きさにはほとんど影響を及ぼさない．(3)摩擦音の高周波成分は横振動加速度のそれに比べて相対的にレベルが高い．たとえば，150rpmで摩擦音の一次と三次の固有振動数成分のレベル差が約 20dBに対して，横振動加速度の場合，約35dBある．後述するように，このことは高周波ほど振動から音への変換の割合が高いことを示している．(4)低回転の 150rpmでははりの離脱の回数は少ないが300rpmでははりは非常に頻繁に離脱する．しかし，はりは表面あらさがランダムであることもあってランダムに離脱する．(5)離脱後再びはりが円板に接触するとき，衝撃波形になるように思われるが，Sra程度のランダムな表面あらさの場合は波形よりわかるように比較的なめらかに接触し，わずかにレベルが大きくなっている程度である．(6)図3.4から音圧の周波数特性ははりが離脱する300 rpmの

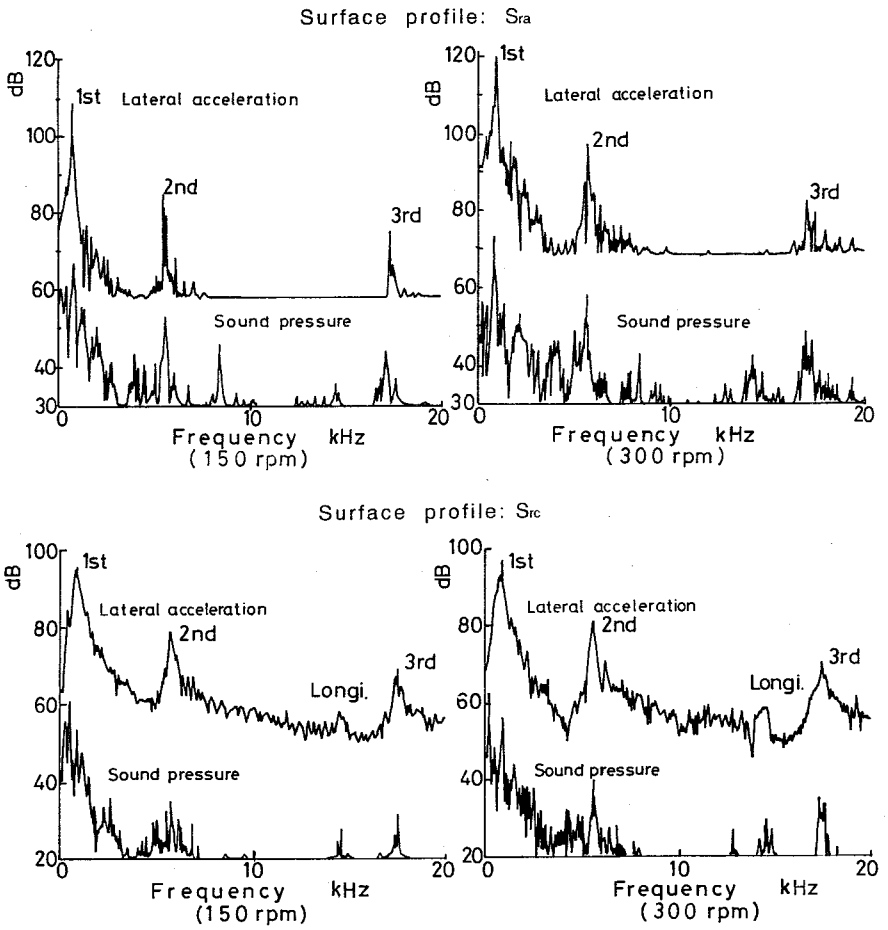


図3.4　表面あらさSra，Src，回転数 150，300rpmにおける音圧，横振動加速度の周波数分析結果（はり長さ 7cm）

場合にも，横振動のそれに対応している．

一方，表面あらさの小さいSrcの場合，(1)横振動加速度はSraの場合と波形，周波数分析結果ともほぼ同じ傾向である．(2)摩擦音は周波数分析結果より明かなようにはりの横振動および縦振動の固有振動数成分より低周波の暗騒音が支配的であり，全レベルに大きな影響を与えている．したがって，波形は固有振動数のほかに低周波が含まれている．(3)はりは円板から離脱しない．

以上のことより，発生する摩擦音は第2章で分類した［こすれ音］に相当するものである．低回転やあらさの小さいSrcの場合のような音圧レベルが低い場合には，暗騒音が大きな影響を及ぼしており，その割合を知る必要がある．また，本実験と同じような装置によ

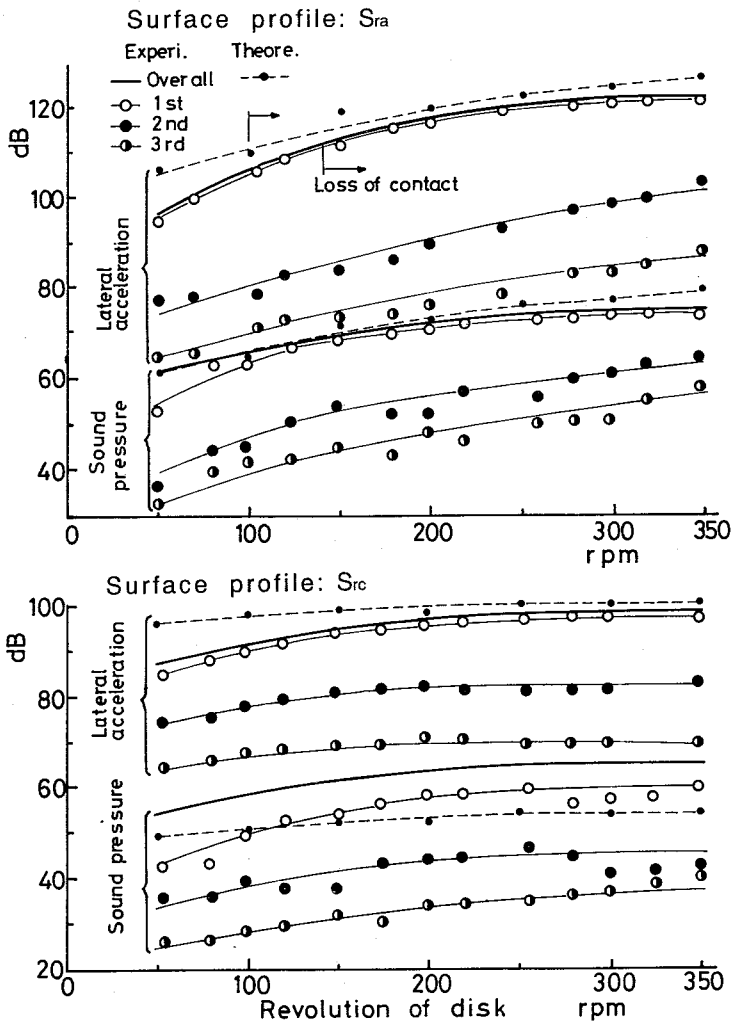


図3.5　表面あらさSra，Srcについて摩擦音，はりの横振動加速度の固有振動成分の回転数による変化

るKlepp[24]の実験によると，高回転数になると高次モードの振動成分が顕著になることが報告されている．

はりの横振動加速度および摩擦音の主な周波数成分である横振動の固有振動数成分が回転数によってどのように変化するかあらさSra，Srcについて示したのが図3.5である．横振動加速度レベルはほぼ一次の固有振動数成分のレベルに一致している．また，あらさSraでは，回転数が増加するにつれて二，三次の成分がやや増大しているが，Kleppの研究ほど高次モード振動が顕著になっているとはいえない．摩擦音の場合，一次の固有振動数成分が支配的であるが，暗騒音の影響がある．とくに，低回転および全レベルの低いあらさSrcにおいてその影響は大きい．

図3.6ははりの長さを変えて，あらさSraについて回転数とはりの横振動加速度および摩擦音の関係を示したものである．はりの長さが3cmでははりは離脱せず，5cmでは200rpm，10cmでは100rpm以上の回転数で離脱を生じ，はりが長いほど低回転から離脱し始める．このことは，はりが長いほど回転数の増加による振動の増大によってはりの先端のたわみがより大きくなるためと思われる．はりの円板からの離脱の状態をのぞいて，いずれのはりにおいても，長さ7cmのはりの実験結果とほぼ同じ傾向を示した．

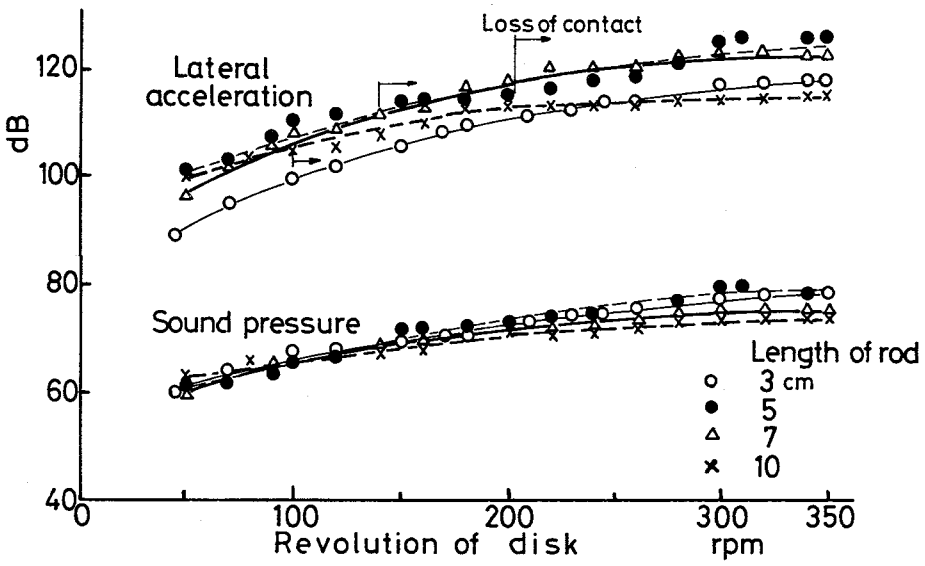


図3.6　種々のはり長さにおける回転数と音圧，
はりの横振動加速度レベルの関係（あらさSra）

3．4　考察

3.4.1　音圧レベルと回転数の関係

実験結果より，回転数の増加にともない振動加速度が増大し，音圧レベルも大きくなる．音圧pとすべり速度V の関係を$p \propto V^{n'}$ として表すと暗騒音のレベル，はり長さ，表面あらさなどによって変化するが，n' の値は1.2～2.2 となった．これは高橋の研究[33]によるn' の値1.2～2.0にほぼ一致している．

3.4.2　表面あらさと音圧レベルの関係

図3.7ははりの離脱が生じなかった長さ 3cmのはりについて，各回転数における表面あらさと音圧の全レベルおよび暗騒音を除いたときの全レベルと考えられるはりの横振動の一次の固有振動数における音圧レベルとの関係を示している．なお，表面あらさはH_{max} で示している．明らかに表面あらさの大きさに比例して音圧レベルは大きくなっている．上述の高橋[33]によると表面あらさH_1と H_2 による音圧レベルの差は表面あらさによって定まると考え，その差は$20 \log_{10}(H_1/H_2)^{m'}$　$(m'=1)$ と表されている．図3.7より上式を用いてm' の値を求めると全レベルのときは$m'=0.8$，一次の固有振動数のレベルのときは$m'=1.2$となって高橋によってなされた実験結果にほぼ一致した．はりの離脱が生じた長さのはりについても上述の値と同じ値であった．

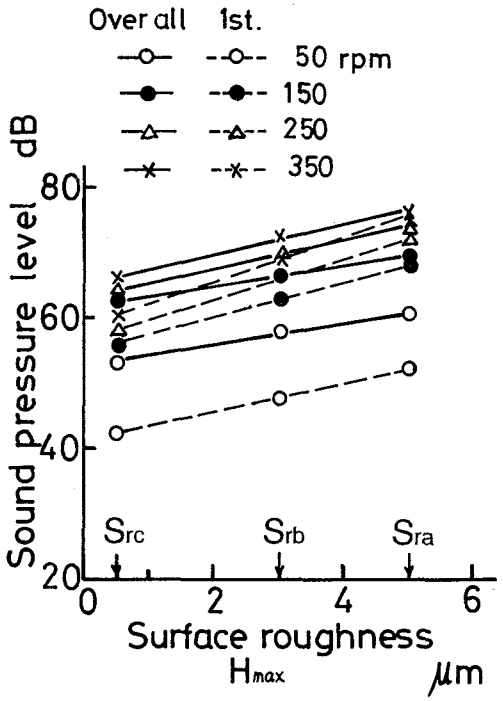


図3.7　種々の回転数における表面あらさと音圧レベルの関係
（はり長さ　3cm）

3.4.3 表面あらさとはりの横振動加速度レベルの関係

図3.1に示すようなランダムな表面あらさのある場合の摩擦によるはりの振動加速度を求める．前章から図3.8に模式図を示すような長さ l のはりに押し付け荷重 P が作用した時のはりの横振動および縦振動の連成を考慮したはりのつりあい位置を原点とする運動方程式は次のように表される．

$$\ddot{\overline{T}}_i+\frac{C_i}{\rho A}\dot{\overline{T}}_i+\omega_i^2\overline{T}_i=\frac{X_i(l)}{\rho A l}[P\{\mu(v_r)\cos\phi+\sin\phi\}$$

$$-P_0\{\mu(V)\cos\overline{\phi}+\sin\overline{\phi}\}\ ]$$

$$\ddot{\overline{T}}_j{}^*+\frac{C_j{}^*}{\rho A l}\dot{\overline{T}}_j{}^*+\omega_j{}^{*2}\overline{T}_j{}^*=-\frac{X_j{}^*(l)}{\overline{X}_j{}^*}\frac{1}{\rho A}\ [P\{-\mu(v_r)\sin\phi+\cos\phi\}$$

$$-P_0\{-\mu(V)\sin\overline{\phi}+\cos\overline{\phi}\}]$$

$$\cdots\cdots\cdots

$$P=\overline{k}\,\overline{\delta}^{3/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.2)$$

ここに，

$$\overline{k}=\frac{2}{3}\frac{E\sqrt{r_s}}{(1-\nu^2)} \quad , \quad \overline{\delta}=\{\delta_0+\overline{v}\cos\phi-\overline{u}\sin\phi+S(V)\}$$

δ_0：つりあいの位置における初期の垂直変位，r_s：はり先端の曲率半径．

$\overline{\delta}$ ＜0の時ははりは円板から離脱する．

長さ 7cmのはりについて，横振動は三次モード（$i=1\sim3$），縦振動は一次モード（$j=1$）まで考慮して $P_0=19.8$N, $\phi_0=0°$ として式(3.1)を数値計算した．なお，あらさ$S(V)$は図3.1の包絡あらさ曲線から読み取った値を用い，摩擦係数$\mu(v_r)$はこすれ音発生時に相当する小さい負の勾配をもつ曲線を用いた．Sra，Srcについて円板の回転数を変えて，横振動加速度を計算したが，そのレベルはかなり変動しているので，その平均値を，実験結果を示した図3.5に破線で示した．横振動加速度レベルは実験結果（全レベル）とほぼ同一の傾向を示している．はりの円板からの離脱は計算ではSraの場合100rpmで生じ，Srcでは離脱は生じなかった．このことも実験結果とほぼ一致している．

3.4.4　音圧レベルとはりの横振動加速度レベルの関係

摩擦音は主にはりの横振動から発生することはすでに第２章で述べたが，はりの横振動加速度から摩擦音にどのような割合で変換されるか調べてみる．

厳密には変換の割合は式(3.1)の運動方程式から，はり表面の振動速度を求め，これを用いて計算した音圧レベルと横振動加速度レベルの比から求めるべきである．しかし，このようにして求められる変換率ははりの横振動のみ考慮し，はり先端に正弦波の外力 $P_0\exp(-i\omega_f t)$（ω_f：強制円振動数）が加わるものとして求められる変換率とほぼ等しいと考えられる．したがって，このような簡略された方法によって変換率を次のように求めた．

まず，図3.9に示すような一端固定の長さl,直径 $2a$ のはりをSkudrzyk[34]，Bailey[35]らが研究しているように円筒波の放射体とみなして，音圧p を求める．

はり表面（$r=a$）における振動速度 V_n は式(3.3)のように表される．

$$(V_n)_{r=a}=\sum_{n=1}^{\infty}B_nX_n\left(z+\frac{l}{2}\right)\cos\phi\exp(-i\omega_f t) \quad \left(-\frac{l}{2}\leqq z\leqq\frac{l}{2}\right)$$

$$V_n=0 \qquad \left(z>\frac{l}{2},\quad z<-\frac{l}{2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.3)$$

ここで，

$$B_n=-\frac{i\,\omega_f P_0 X_n(l)}{\rho A l\sqrt{(\omega_n{}^2-\omega_f{}^2)^2+(C_n/2\rho A)^2\omega_f{}^2}}\exp(i\,\alpha_n)$$

α_n　：位相差

また，円筒波の速度ポテンシャル$\phi(r,\phi,z,t)$は次式で表される．[34],[35]

$$\phi(r,\phi,z,t)=\frac{\exp(-i\,\omega_f t)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_m\cos m\phi H_m{}^{(1)}(k_r r)\ \exp(i\,k_z z)\,dk_z \qquad \cdots\cdots (3.4)$$

$H_m{}^{(1)}(k_r r)$：m次の第一種ハンケル関数，A_m：係数，

$k_r{}^2+k_z{}^2=k_0{}^2=(\omega_f/\overline{c})^2$ ，$\overline{c}$：空気中の音速

はりの表面において音源となる円筒表面の振動速度と空気の粒子速度が等しいことから

$$(V_n)_{r=a}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_{r=a} \qquad \cdots\cdots (3.5)$$

となる．

式(3.3),(3.4)を式(3.5)に代入すると，m は $m=1$のみ存在し，

$$A_1=\frac{F(k_z)}{H_1{}^{(1)\prime}(k_r a)}$$

となる．

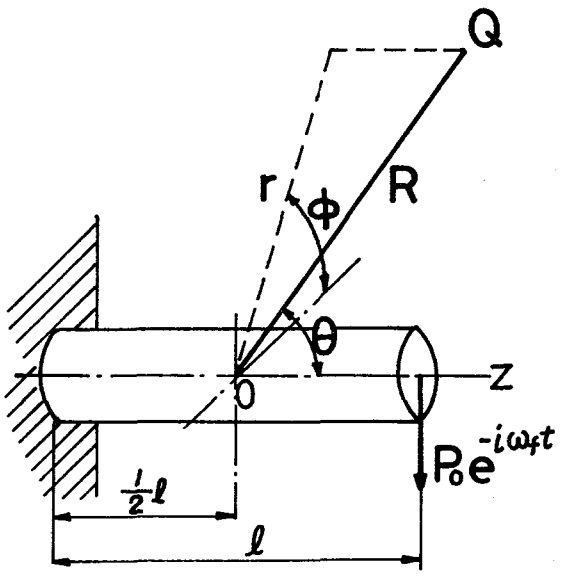


図3.9　はりの円筒波音響放射モデル

ここで，$H_1^{(1)\prime}=\dfrac{\partial H_1^{(1)}}{\partial r}$，$F(k_z)=\int_{-l/2}^{l/2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}B_nX_n\left(z+\dfrac{l}{2}\right)\right]\exp(-ik_zz)\,dz$

したがって，点Q(r,ϕ,z) における音圧$p(r,\phi,z,t)$ はρ_cを空気の密度とすると

$$p(r,\phi,z,t)=-\rho_c\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{i\omega_f\rho_c}{2\pi}\exp(-i\omega_f t)\cos\phi$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(k_z)H_1^{(1)}(k_r r)}{H_1^{(1)\prime}(k_r a)}\exp(ik_zz)\,dk_z \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.6)$$

座標(r,ϕ,z) を(R,θ,ϕ) に変換し，r が比較的大きいと仮定すると音圧p は

$$p(R,\theta,\phi,t)=\frac{i\omega_f\rho_c\exp\{-i(\omega_f t+3/4\pi)\}}{2\pi}\cos\phi\left(\frac{2}{\pi R\sin\theta}\right)^{1/2}$$

$$\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(k_z)\exp[iR\{(k_0^2-k_z^2)^{1/2}\sin\theta+k_z\cos\theta\}]}{(k_0^2-k_z^2)^{1/4}H_1^{(1)\prime}\{(k_0^2-k_z^2)^{1/2}a\}}dk_z\right] \quad\cdots\cdots (3.7)$$

ここで$k_r=k_0\sin\theta$，$k_z=k_0\cos\theta$

式(3.7)の[　]の積分は文献(36)により積分でき，点Qにおける音圧$p(R,\theta,\phi,t)$ は式(3.8)となる．

$$p(R,\theta,\phi,t)=-\frac{i\rho_c\omega_f}{\pi}\cos\phi\frac{\exp\{i(k_0R-\omega_f t)\}}{R}\frac{F(k_0\cos\theta)}{H_1^{(1)\prime}(k_0a\sin\theta)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.8)$$

はりの横振動加速度から音圧への変換率は式(3.8)から求められる音圧測定点における音圧p_{eff}（実効値）と式(3.3)の振動速度を微分して求められる振動測定点における加速度a_l（実効値）との比p_{eff}/a_l（dB)として計算できる．

図3.10は長さ3，5，7 および10cmのはりについて周波数ごとに変換率p_{eff}/a_l を計算した結果および横振動加速度と音圧の周波数分析結果より主に固有振動数においてえられた変換率を示す．また，図には固有振動数における計算による変換率（●印）およびはり長さ7cmの振動加速度と音圧曲線を示している．この図の計算結果より変換率は反共振の周波数で音圧レベルが極小値とならないため，反共振付近で極大値をとっているのがわかる．しかし，実際には振動加速度，音圧ともに大きくなるはりの横振動の固有振動数における変換率が重要であり，反共振点付近における変換率の極大値は問題とならない．また変換率ははりが長いほどやや大きくなっているが，いずれの長さのはりにおいても周波数に対して変換率は増大し，その増加の割合から，音圧はほぼ振動加速度の微分(＝振動加速度×周波数)に比例している．実験結果の変換率は計算結果よりやや大きくなっているが，周波

数に対する変換率の傾向は両者とも一致している．

したがって，この変換率を用いて，振動加速度から音圧レベルを計算できる．すなわち，はりの横振動加速度はほとんど一次の固有振動数からなるものとして，図3.10の一次の固有振動数における変換率から音圧を計算できる．たとえば，はり長さ7cmについて一次の固有振動数における変換率 -47 dBを用い，図3.5において計算でえられた横振動加速度レベルから音圧レベルを計算した結果を図3.5に破線で示している．表面あらさSraにおける音圧レベルは計算結果とほぼ一致している．あらさSrcでは音圧の全レベルと一致しないが，暗騒音レベルを除いた全レベルと考えられる一次の固有振動数成分のレベルとほぼ一致している．

このように図3.10に示すような変換率を用いて，振動加速度レベルから音圧レベルを予測することが可能である．

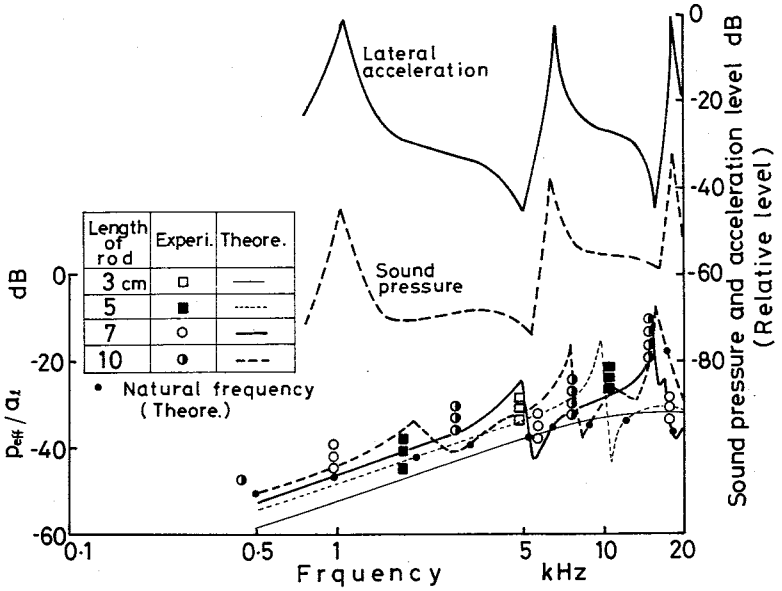


図3.10　種々のはり長さにおける実験および計算よりえられた変換率

3.5　結言

ランダムな表面あらさをもつ円板の円周面とはりを摩擦させ，発生する摩擦音が，表面あらさの大きさ，回転数，振動加速度とどのような関係にあるか理論的，実験的に検討した結果，次のような結論がえられた．

(1)摩擦音は主にはりの横振動の一次の固有振動数成分からなっており，第2章で示した

［こすれ音］に相当する．また，その音圧レベルは表面あらさおよび円板の回転数（すべり速度）の増大にともなって増大し，回転数の1.2～2.2乗，表面あらさの0.8～1.2乗に比例する．

(2)表面あらさおよび回転数の増大にともなって，はりは円板から離脱する．はりが長く表面あらさが大きいほど低回転ではりは離脱する．しかし，離脱が生じても，音圧レベル，波形はほとんど変化しない．

(3)表面あらさが大きい場合，摩擦音，はりの横振動加速度の高次の固有振動数成分は回転数の増大とともにやや増大する．

(4)はりの横振動および縦振動の連成を考慮した運動方程式に強制力として包絡あらさ曲線からえられるランダムな表面あらさを代入して計算したはりの横振動加速度レベルはほぼ実験結果に一致した．

(5)はりを円筒波の音響放射体と考え，振動加速度から音圧への変換率を計算した結果，変換率は実験結果に一致し，音圧ははりの横振動加速度の微分（振動加速度×周波数）に比例することがわかった．この変換率を用いてはりの振動加速度から音圧レベルを計算できる．音圧レベルの大きさは表面あらさが大きい場合，実験結果の全レベルに一致し，表面あらさが小さい場合，暗騒音を除いた全レベルと考えられる横振動の一次の固有振動成分のレベルに一致した．したがって，このような計算方法によって表面あらさによる摩擦音の大きさをある程度予測することが可能である．

第4章　表面あらさに周期性がある場合の摩擦音

4.1　緒言

前章においてランダムな表面あらさが摩擦音に及ぼす影響について検討し，発生した摩擦音は主としてはりの横振動の一次の固有振動数成分からなり，第2章で示した［こすれ音］に相当していた．また，その音圧レベルは表面あらさおよび円板の回転数（すべり速度）の増加にともなって増大することが明らかになった．しかし，実際にはランダムな表面あらさのほかに，周期的な表面あらさをもつ摩擦面もある．たとえば，ころがり軸受，レールなどは長時間摩擦されることにより表面あらさが周期的になり，このあらさが騒音の増大をもたらす．したがって，周期的な表面あらさが摩擦音に及ぼす影響についても研究する必要がある．

周期的な表面あらさによる摩擦音・摩擦振動については次のような研究がなされている．Carson[28]らは二つの円板をころがり接触させ，円板の表面あらさがどのように変化するかを研究している．この研究において，周期的表面あらさをもつ硬鋼製の円板に種々の材質の円板を接触させたときの円板の回転数にたいする振動振幅を実測している．とくに黄銅製の円板の場合，周期的表面あらさによる周波数と接触剛性を考慮した系の固有振動数(contact frequency)との共振のほかに二次調波共振*が生じている．また，Nayak[27]はCarsonの実験を理論的に検討している．すなわち，周期的表面あらさを正弦波の強制入力として，Hertzの接触理論からえられる非線形運動方程式を近似的に解析した結果，一次共振は生じるが，二次調波共振は生じなかった．この結果はCarsonらの実験とは一致しないが，Nayakは一致しない理由の一つとして，Carsonらの実験による二次調波共振付近における振動振幅の増大は二次調波共振ではなく，実験誤差によるものである可能性があることをあげている．高橋[33]はローレット加工による周期的表面あらさをもつ小さな円筒とはりを潤滑摩擦させたときの摩擦音の研究を行っており，周期的あらさによる周波数とはりの固有振動数との共振により音圧レベルがピークとなることを示している．以上の研究から，周期的表面あらさが強制振動の入力となるため，そのあらさの周波数と接触剛性を考慮した系，あるいは接触するはりの固有振動数が共振することは明かであるが，非線形振動特有の高調波共振あるいは分数調波共振が生じるかどうか明らかにされていない．

＊ Carsonらは1/2次調波共振と述べている．しかし，Nayakも指摘しているが二次調波共振の誤りである．

本章においては周期的表面あらさが摩擦音および摩擦振動に及ぼす影響を検討するため，円板の円周面をローレット加工することにより，あらさの異なる4種類の周期的な表面あらさをつくり，この円周面にはりを一定荷重で押しつけ，乾性摩擦させた．このとき発生する摩擦音および摩擦振動が表面あらさの大きさ，円板の回転数，はりの長さによってどのように変化するかを実験した結果，あらさ周波数とはりの横振動の一次共振のほかに高調波共振，分数調波共振，高分数調波共振および和差調波共振などの非線形共振現象が発生するという興味ある結果がえられた．

4．2　実験装置および方法

実験装置は前章まで使用したものと同じである．本実験では，円板の中心に対するはりの傾斜角はほぼ0°，押しつけ荷重は19.6 Nとした．表4.1に実験に使用した円板とはりの諸元および加振試験よりえられたはりの摩擦方向の固有振動数を示す．なお，はりの先端は半球状で熱処理されていない．ローレット加工の切込み深さを変えて，円板の円周面に図4.1に示すような4種類の周期的あらさをつけた．円板周上のあらさの山数は582で1ピッチは約1.1 mmである．なお，切込み深さの大きい順にSa, Sb, Sc, Sdと記号をつける．
図4.2は包絡あらさ曲線および触針式あらさ計より求めた断面曲線を示している．包絡あらさ曲線は前章と同じ方法によって求めた．包絡あらさ曲線はほぼ正弦波に近い波形であり，その最大全振幅はSa, Sb, Sc, Sd でそれぞれ 13, 8, 4, 2 μmである．一方，断面曲線よりえられたH_{max}の値はそれぞれ290, 210, 150, 60 μmである．

表4.1　円板とはりの諸元とはりの横振動固有振動数

	円　板		はり
材　質	S45C	材　質	S45C
直　径　cm	20	直　径　cm	0.7
厚　さ　cm	4	長　さ　cm	3, 7, 10
硬　度　H_V	400	硬　度　H_V	150

はり長さ　cm	固有振動数 Hz	
	一　次	二　次
3	4 650	——
7	1 010	6 350
10	480	2 910

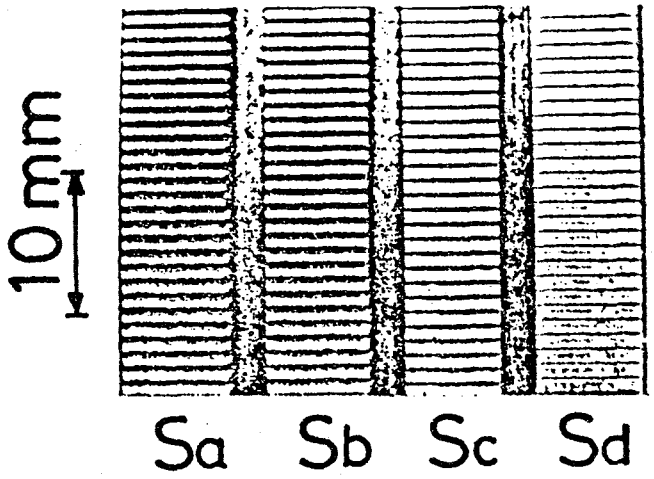
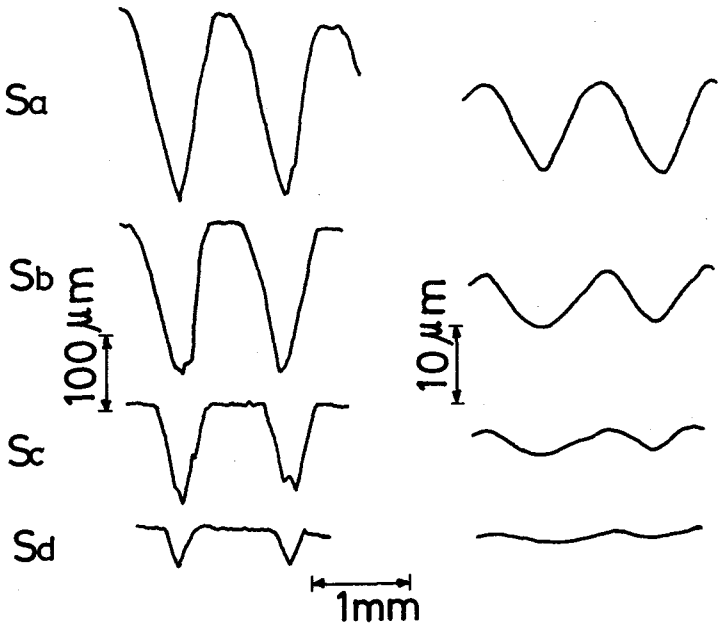


図4.1　円板の表面あらさ



（a）　断面曲線　　（b）　包絡あらさ曲線

図4.2　円板の表面あらさ曲線

4.3　種々の共振現象

4.3.1　実験結果

図4.3は長さ7cmのはりと4種類の周期的表面あらさSa, Sb, Sc, Sdをもつ円板を摩擦させたときの回転数による音圧およびはりの横振動加速度レベルの変化のようすを示している．また，図には3章で述べたランダムな表面あらさSra（包絡あらさ曲線の最大全振幅5μm）の場合の音圧および横振動加速度レベルを太い破線で示した．なお，低回転では音圧および横振動加速度ともにレベルが4～6dBの幅で変動するが，図には平均的なレベルを示した．振動加速度レベルは10m/s²を80dBとしてdB表示した．また，図の横軸には円板の回転数(rpm)のほかに表面あらさと回転数による周波数f_s｛以後，これをあらさ周波数と呼ぶ $f_s=NZ/60$，N：円板の回転数（rpm），Z：円板周上の山数｝と加振試験からえられたはりの横振動の一次および二次の固有振動数f_{e1}, f_{e2} の比f_s/f_{e1} およびf_s/f_{e2}も示している．表面のおうとつのため，回転数が増すと円板とはりとの接触が間欠的になることがある．図において実線で示した回転数でははりが円板から離脱する場合があることを示している．表面あらさSa, Sb, Scの場合には，円板とはりは低回転ですでに離脱し始め，実験中ほとんど離脱したが，あらさの小さいSdの場合は 50rpmの共振点を除いて約95 rpmまで離脱しなかった．

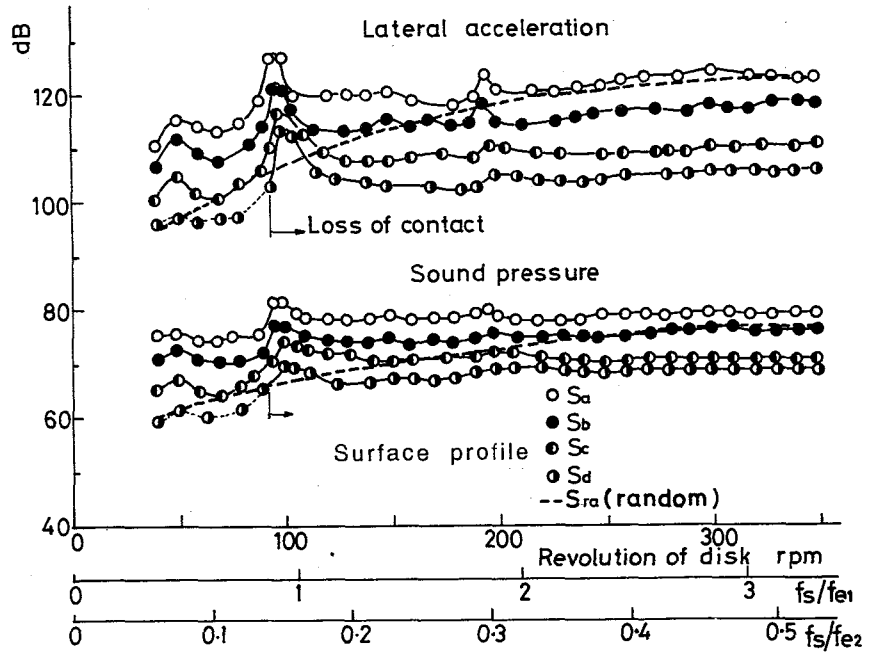


図4.3　種々の表面あらさによる回転数と音圧，はりの横振動加速度レベルの関係（はり長さ 7cm）

図4.3において，音圧および振動加速度レベルが共振点と思われる回転数 50,95,195rpmでピークになっているが，共振の影響の少ない高速回転の300rpmになるとランダムな表面あらさの場合とほぼ同一レベルになっている．このように，周期的あらさの場合ランダムなあらさの場合と異なり，多数の共振点が存在することが大きな特徴となっている．これらの共振を検討するまえに，レベル変動が少なく，回転数に対する特性が音圧と同じ傾向を示す横振動加速度について周波数構成を調べてみる．一例として図4.4にはり長さ7cm，あらさSaで160rpmにおけるはりの横振動加速度の周波数分析結果を示す．はりの一次の固有振動数f_{e1}のレベルが最も高く，ついであらさの周波数成分f_sおよび二次の固有振動数成分f_{e2}のレベルが高い．また，あらさ周波数の高調波成分$2f_s$，$3f_s$，$4f_s$，$5f_s$も現れている．さらに特徴的な周波数成分として，一次の固有振動数f_{e1}とあらさ周波数f_sの整数倍の和である$f_{e1}+f_s$，$f_{e1}+2f_s$が現れていることは注目すべきことである．なお，この図において，とくに$4f_s$成分のレベルが高いのはf_{e2}とほぼ一致し，共振状態に近くなっているためである．

つぎにはり長さ7cm，表面あらさSaについて種々の共振状態を周波数分析結果および波形から検討する．図4.5は音圧および横振動加速度を周波数分析した結果から，周波数成分f_s，$2f_s$，$3f_s$，$\frac{2}{3}f_s$，$\frac{1}{2}f_s$，$\frac{1}{3}f_s$ のレベルを回転数ごとに読み取った結果を示す．また図4.6には共振点における音圧，横振動加速度の周波数分析結果を示す．

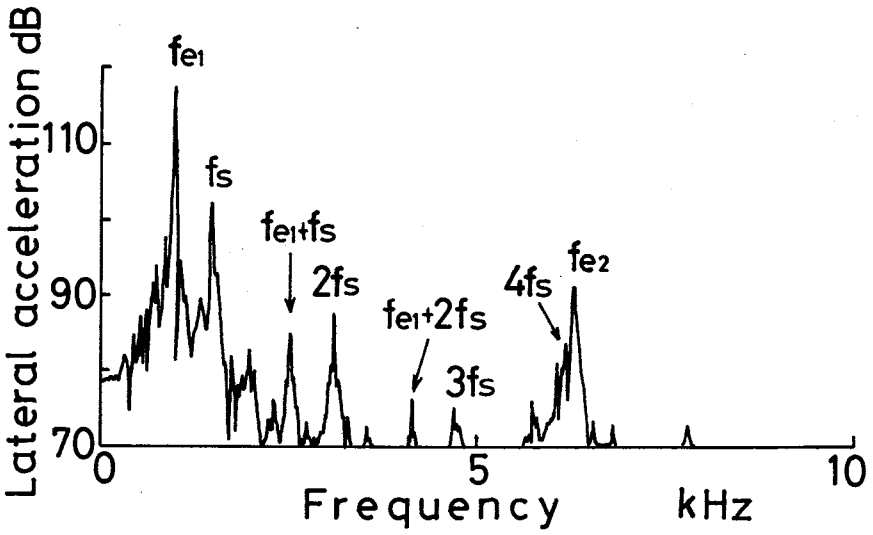


図4.4　はりの横振動加速度の周波数分析結果
（はり長さ 7cm，あらさSa，160rpm）

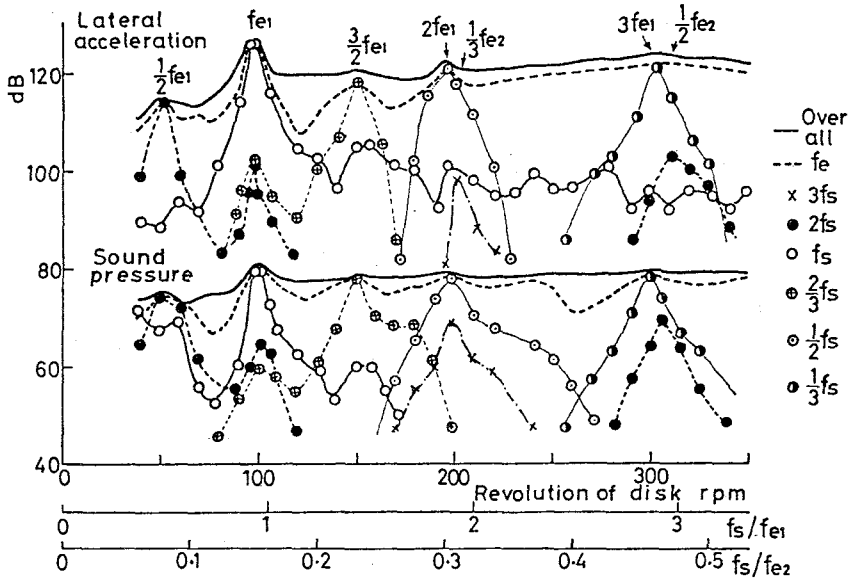


図4.5　種々の回転数における横振動加速度と音圧の f_s, $2f_s$, $3f_s$, $\frac{2}{3}f_s$, $\frac{1}{2}f_s$, $\frac{1}{3}f_s$ のレベルの変化（はり長さ 7cm，あらさSa）

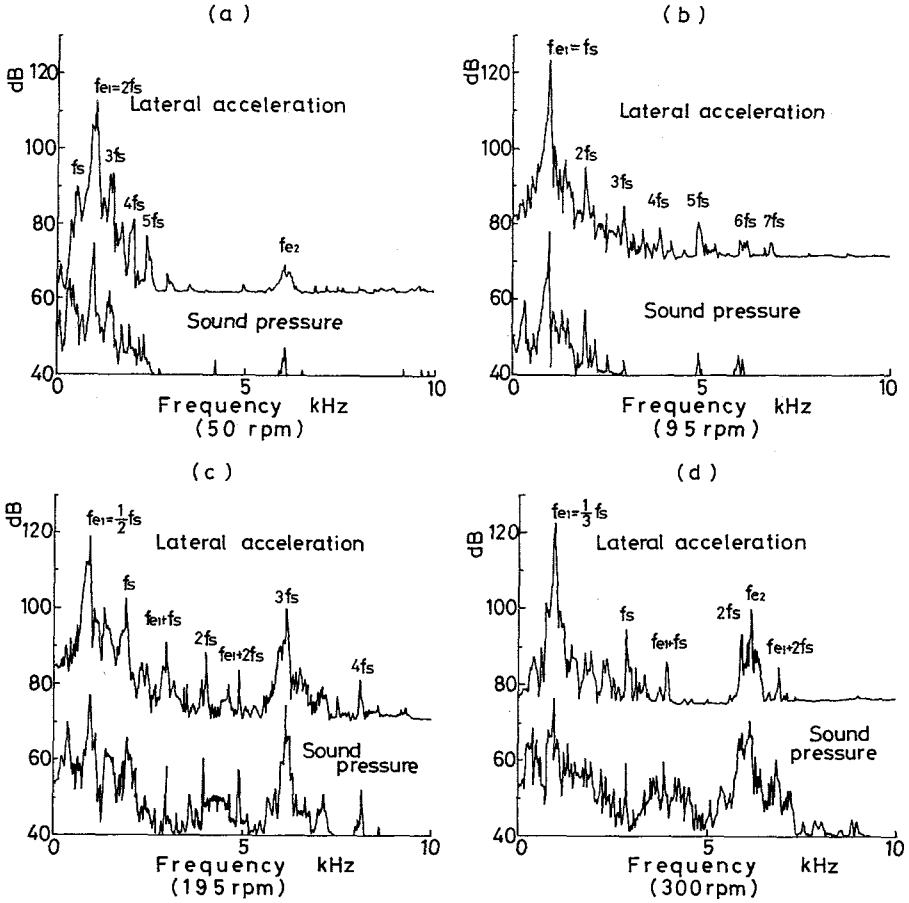


図4.6　回転数 50，95，195，300rpm における横振動加速度，音圧の周波数分析結果（はり長さ 7cm，あらさSa）

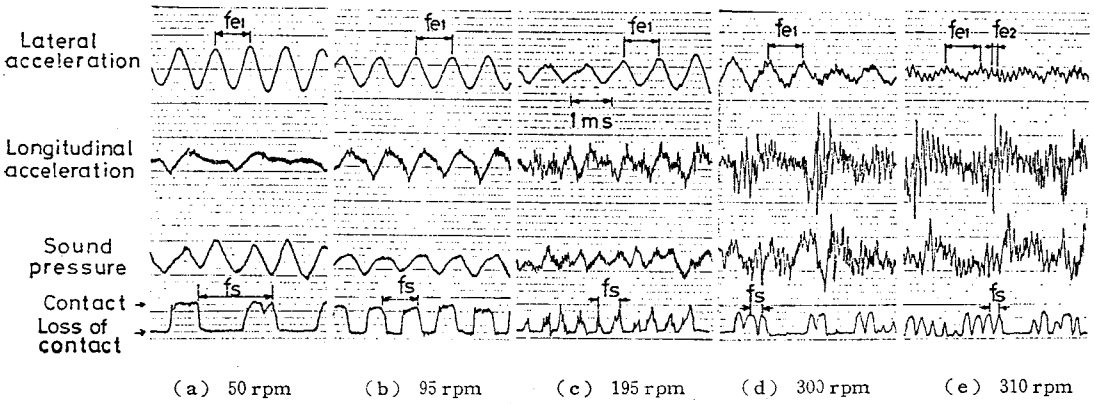


図4.7　種々の回転数における音圧，振動加速度および接触波形
（はり長さ 7cm，あらさSa）

図4.7には種々の回転数における音圧，はりの振動加速度およびはりと円板の接触波形を示している．発生する摩擦音は周波数分析結果から，前章のランダムあらさの場合とはやや異なるもの［こすれ音］の一種であることがわかる．

図4.5～4.7から，回転数の増大にともなって，次のような回転数において種々の共振が生じていることがわかった．

(i)50rpm：図4.6(a)および4.7(a)より，あらさ周波数f_sの倍音$2f_s$とはりの一次の固有振動数f_{e1}がほぼ一致しf_{e1}の二次調波共振を生じている．

(ii)95rpm：全レベルが最大となり，$f_s \fallingdotseq f_{e1}$となって$f_{e1}$の一次共振点である．
[図4.6(b)，図4.7(b)]，

(iii) 150rpm：全レベルには顕著なピークはみられないが，図4.5においてf_{e1}成分とともに$\frac{2}{3}f_s$成分が増加している．すなわち，$\frac{2}{3}f_s \fallingdotseq f_{e1}$なる2/3次調波共振（高分数調波共振と呼ばれている）が現れている．

(iv)195rpm：$\frac{1}{2}f_s$成分が大きくなり，しかも図4.7(c)の接触波形をみると，おおむね2山ごとにはりと円板が接触し，f_{e1}の1/2次調波共振であることがわかる．さらにわずかに高い回転数で図4.5および図4.6(c)の周波数分析結果をみると，$3f_s$成分のレベルが高くなって二次の固有振動数f_{e2}の三次調波共振が生じていることがわかる．

(v)300rpm:図4.5および4.6(d)より$\frac{1}{3}f_s$成分が増大して，1/3次調波共振が生じている．

このときの図4.7(d)の接触波形から，はりと円板は3山ごとに接触する場合があるのが見受けられる．

(vi) 310rpm：全レベルにはピークはあらわれていないが，図4.5から$2f_s$成分のレベルが大きくなり，f_{e2}の二次調波共振($2f_s \fallingdotseq f_{e2}$)を生じている．このことは，横振動加速度波形および音圧波形にf_{e2}成分が含まれていることからもわかる．

以上のようにあらさ周波数f_sの整数倍および分数倍がはりの一次の固有振動数f_{e1}と共振する，いわゆる，高調波および分数調波共振が生じる．このような共振はかみ合い誤差の大きい歯車の振動の場合に生ずることが報告されている．[37][38]また，さらにf_sの2/3倍が共振する高分数調波共振現象が生じるうえに，二次の固有振動数f_{e2}の高調波共振が発生することは興味ある実験結果である．なお，第3章において検討したとおり，振動加速度の音圧への変換率は高周波ほど大きい．したがって，音圧波形により顕著に高周波のf_{e2}成分が現れる．また，f_{e1}の一次共振は$f_s/f_{e1}=1$より低速側($f_s/f_{e1} \fallingdotseq 0.9$)で生じている．これは実際の摩擦状態においてはりの振動数が加振試験によってえられた固有振動数より低くなることおよびはりが円板から離脱することによるためと考えられる．

ここまでは，主に表面あらさの大きい場合について述べてきたが，再び図4.3を見ると表面あらさが小さくなるほど音圧，振動加速度レベルは低下し，f_{e1}の一次共振点でのピーク値も小さくなっている．しかし，あらさが小さい場合でもf_{e1}の一次共振のほか二次および1/2次調波共振現象がわずかに現れているのがわかる．また，表面あらさが大きいほど一次および1/2次調波共振がわずかに低回転で生ずるのがみられるが，これはあらさが大きくなるとはり先端の振動振幅の増大によってはりと円板の接触時間が短くなり，接触剛性が大きくなって，はりの振動数が低くなるためと考えられる．

はり長さを変えることにより，短いはりでは一次共振点が高いために，高調波共振を，長いはりでは固有振動数が低いために，一次の固有振動数の分数調波共振および二次の固有振動数の高調波共振をそれぞれより詳細に検討することが可能である．そこではり長さ3cmおよび10cm，あらさSaについて回転数に対する音圧とはりの横振動加速度の全レベルおよび横振動加速度の周波数分析からえられた各周波数成分のレベルをそれぞれ図4.8，4.9に示す．長さ3cmの短いはりではf_{e1}の一次共振点430rpmのほかに85，110，145，210rpmでそれぞれ五，四，三，二次の高調波共振がはっきり現れている．一方，はり長さ10cmでは，f_{e1}の一次共振点が45rpmと低いため，一次の固有振動数f_{e1}の高調波共振を確認することはできなかった．しかし，2/3次の高分数調波共振(80rpm)および1/2，1/3次の分数調波共振

点(90, 145rpm)が存在し，さらに二次の固有振動数f_{e2}の一次共振(290rpm)の高調波共振である四，三，二次共振点(75, 95, 145rpm)も存在しており，分数調波，高分数調波共振および二次の固有振動数f_{e2}の高調波共振が生じている．

さらに図4.8をよくみると，はり長さ10cmで上述の高調波，分数調波共振以外に音圧，振動ともに全レベルが二次の固有振動数f_{e2}の一次共振点前後の250, 330rpmにおいてピーク

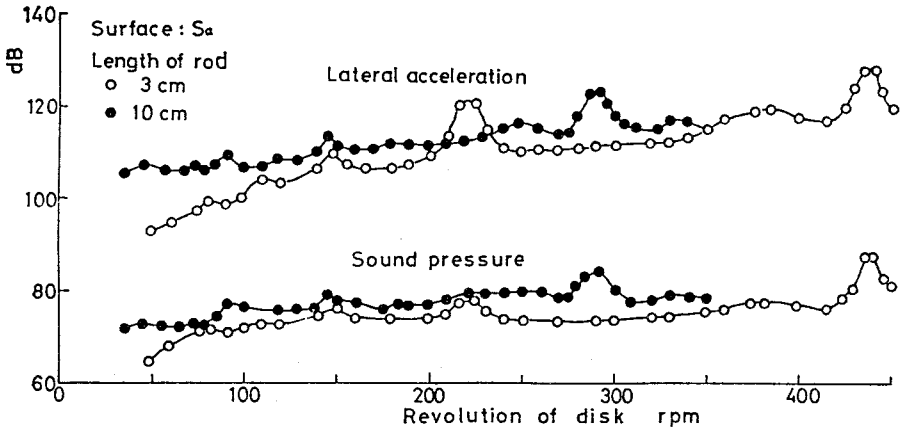


図4.8　はり長さ 3cm, 10cm における回転数と音圧，はりの横振動加速度レベルの関係（あらさSa）

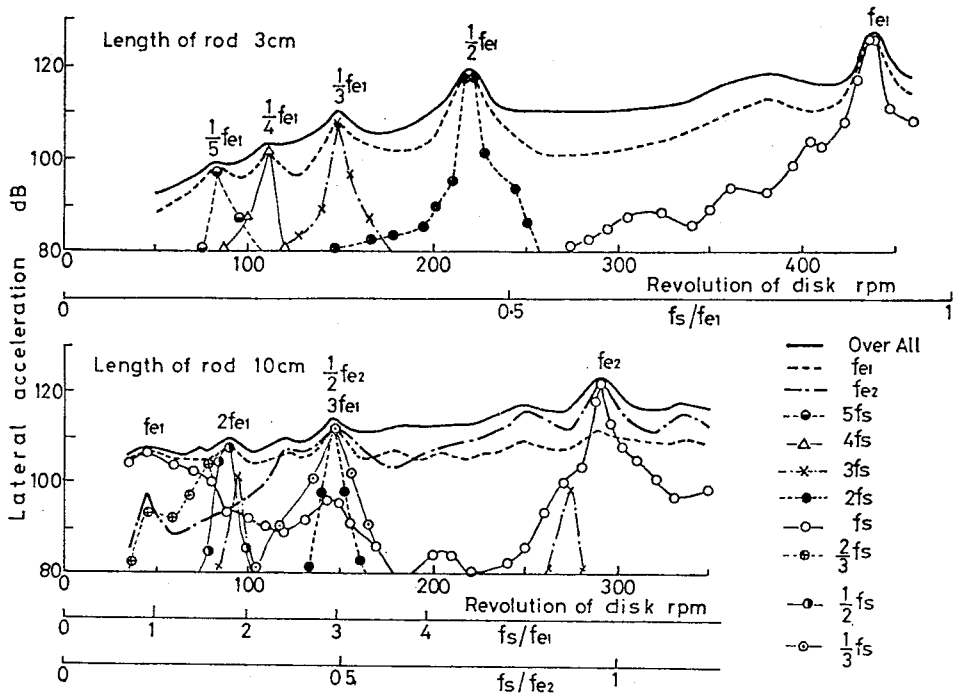


図4.9　種々の回転数における横振動加速度の各周波数成分のレベルの変化（はり長さ 3, 10cm, あらさSa）

値を示している．これらの回転数における横振動加速度を周波数分析した結果を図4.10に示す．この図から，これらの回転数において，あらさ周波数f_sおよび一次の固有振動数f_{e1}成分よりも二次の固有振動数f_{e2}成分のレベルが大きくなっており，f_{e2}の共振点であると考えられる．前述したように，はり長さ7cmの場合，f_{e1}とf_sの和音が現れるが（図4.4,4.6），はり長さ10cmの場合はf_{e1}が小さいため，f_{e1}とf_sの和音のほかに差音も現れる．250rpmでf_sとf_{e1}の和f_s+f_{e1}，330rpmでf_sとf_{e1}の差f_s-f_{e1}はそれぞれf_{e2}に一致し，これらの周波数の和，差がf_{e2}と共振していることがわかる．さらに120rpmにおいて全レベル値が小さなピークを示している．これはf_{e1}とf_sの倍音の和$f_{e1}+2f_s$がf_{e2}と共振しているためである．このような共振現象は，いいかえると250rpmでf_{e1}とf_{e2}の差音,330rpmで和音，120rpmでは$(f_{e2}-f_{e1})/2$がf_sと共振する和差調波共振である．この和差調波共振はあらさの小さいSdの場合にも現れた．

以上のように周期的あらさをもつ円板とはりを摩擦させると，はりが円板から離脱する

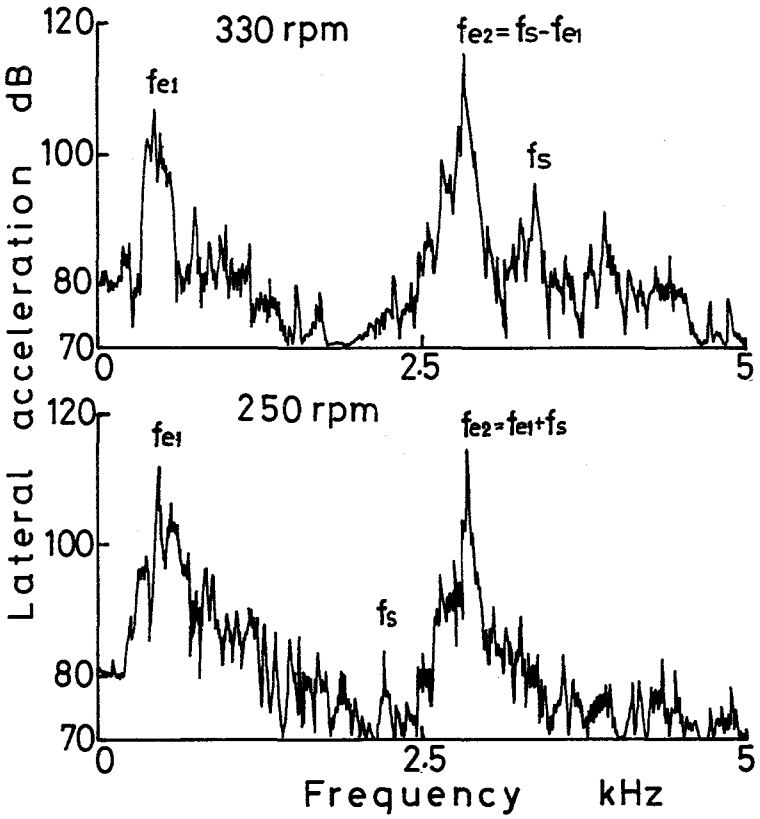


図4.10　和・差調波共振時のはりの横振動加速度の周波数分析結果
（はり長さ 10cm，あらさSa）

などの非線形性により，はりの横振動の一次の固有振動数の高調波，分数調波，高分数調波共振，高次の固有振動数の高調波共振のほかにあらさ周波数およびその倍振動とはりの横振動の一次の固有振動数と二次の固有振動数の和，差が共振するという非常に特徴のある現象が現れた．

4.3.2　理論解析

(i)　表面あらさと音圧レベルの関係

ランダムな表面あらさの場合，第3章で示した高橋の研究[33]のように，表面あらさ H_1 と H_2 による音圧レベルの差は $20\,log(H_1/H_2)^{m'}$ によって表された．周期的表面あらさの場合，種々のはりおよび回転数における表面あらさと音圧レベルの関係をあらわす実験結果から上式の m' の値を求めると約0.8となり，ランダムな表面あらさの場合と同じ値になった．

(ii)　はりの横振動加速度と回転数の関係

摩擦音と密接な関係にあるはりの横振動加速度レベルの回転数に対する変化を求める．周期的表面あらさ $S(t,V)$ をもつ円周面に長さ l のはりを荷重 P で押し付けたときのはりの横振動および縦振動は，はりのつりあい位置を原点とすると次式で表される．

$$\ddot{\overline{T}}_i+\frac{C_i}{\rho A}\dot{\overline{T}}_i+\omega_i^2\overline{T}_i=\frac{X_i(l)}{\rho A l}[P\{\mu(v_r)\cos\phi+\sin\phi\}$$

$$-P_0\{\mu(V)\cos\overline{\phi}+\sin\overline{\phi}\}\ ]$$

$$\ddot{\overline{T}}_j{}^*+\frac{C_j{}^*}{\rho A l}\dot{\overline{T}}_j{}^*+\omega_j{}^{*2}\overline{T}_j{}^*=-\frac{X_j{}^*(l)}{\rho A\overline{X}_j{}^*}\ [P\{-\mu(v_r)\sin\phi+\cos\phi\}$$

$$-P_0\{-\mu(V)\sin\overline{\phi}+\cos\overline{\phi}\}]$$

$$\cdots\cdots\cdots

ここに，

$$\overline{k}=\frac{2}{3}\frac{E\sqrt{r_s}}{(1-\nu^2)}\quad,\quad \overline{\delta}=\{\delta_0+\overline{v}\cos\phi-\overline{u}\sin\phi+S(t,V)\}$$

$S(t,V)$ は図4.2の包絡あらさ曲線から正弦波で近似する．すなわち，

$$S(t,V)=\varepsilon_0\sin(2\pi f_s t+\theta)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(4.3)$$

ε_0：包絡あらさ曲線の振幅，θ：位相角，　δ_0：つりあいの位置における初期の垂直変位，なお，$\overline{\delta}<0$の時はりは円板から離脱する．その際，式(4.2)において$P=0$とする．

はり長さ7cm（表面あらさSa,Sd）および10cm（表面あらさSa）について横振動は二次モード($i=1,2$)まで，縦振動は一次モードのみ($j=1$)考慮して$P_0=19.6$N，$\phi_0=0$，$\dot{\theta}_0=0$とし式(4.1)からはりの横振動加速度レベルをＲＫＧ法により数値計算した．その結果を図4.11に示す．なお，計算に際しては摩擦係数$\mu(v_r)$はこすれ音発生時に相当する小さい負の勾配をもつ曲線を用いた．

まず，長さ7cmのはりの場合について述べる．図4.12には表面あらさSaの場合の各回転数における計算による横振動加速度波形を示している．なお，55rpmにおいては押し付け荷重の変動波形も示している．

振動レベルについて図4.3の実験結果と比較すると，実験では回転数が増加するにつれて振動レベルは増大しているが，計算では一次共振点を超えると振動レベルは低下し，ある回転数以上になるとほぼ一定になる傾向があり，高回転では実験とかなりレベル差を生じ

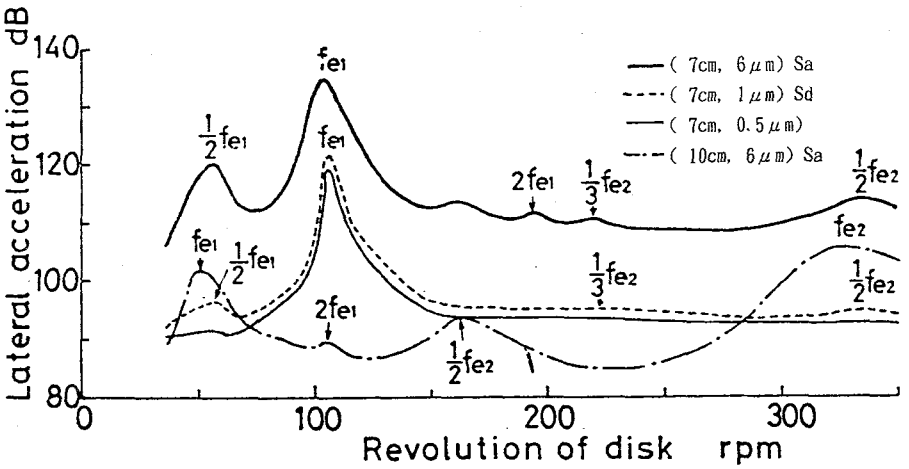


図4.11　はりの横振動加速度レベルの計算結果

る．これは実際の接触面が周期的あらさのほかにランダムなあらさも含んでいるにもかかわらず，計算では周期的あらさのみ考慮したためと思われる．低回転の55rpmでは振動波形から$2f_s=f_{e1}$ になっているのがよくわかり，f_{e1}の二次調波共振を生じている．また，押し付け荷重変動波形において，周期的あらさの谷ごとに荷重が零となり，はりが円板から離脱することを示している．105rpmで，f_{e1}の一次共振点になり，f_{e1}の振動波形であるが，一次共振点を超えた140rpmでは振動波形はf_sとf_{e1}成分からなり，その振幅の大きさはランダムである．さらに回転数が増加し，160rpmになるとf_sの波形で３周期のうち２周期の振幅が大きくなり，残りの１周期の振幅が小さくなっている．この現象は2/3次高分数調波共振であると思われる．さらに195rpmになると振動の全レベルは顕著なピークを示さないが，振動波形をみると１周期おきに大きな振幅となり，$f_s=2f_{e1}$ の関係をみたして1/2次分数調波共振を生じている．さらに高回転の220,330rpmでf_{e2}の三，二次調波共振が生じ，振動波形にもf_{e2}成分が含まれるようになる．なお，実験では195rpm付近で1/2次調波共振およびf_{e2}の三次調波共振が現れていたが，はりの二次の固有振動数f_{e2}の

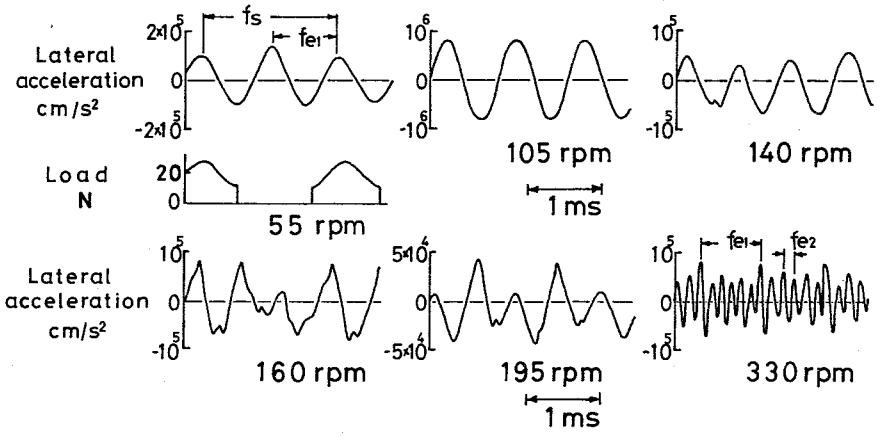


図4.12　種々の回転数における計算による横振動加速度波形（はり長さ 7cm）

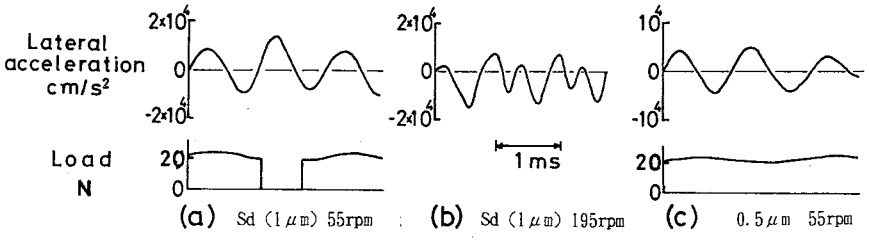


図4.13　計算による横振動加速度波形（はり長さ 7cm）

計算値がやや高いため，計算ではf_{e2}の三次調波共振は220rpmで現れている．

表面あらさSdの場合，振動レベルをみるとf_{e1}の一，二次調波共振，f_{e2}の三，二次調波共振は現れているが，f_{e1}の1/2次調波共振は現れていない．図4.13(a),(b)にf_{e1}の二次調波共振(55rpm)および195rpmにおける振動波形を示す．f_{e1}の二次調波共振点ではSdの場合でもはりは円板から離脱し，図4.12と比較すればわかるように離脱時間はSaの場合より短くなっている．また，195rpmにおける振動波形はSaの場合と同様の波形であり，1/2次調波共振がわずかに起こっていることを示している．

以上の計算結果より，表面あらさが小さくても高調波共振が生じ，はりと円板との離脱が高調波，分数調波共振の有無を決定すると考えられるので，はりが円板から離脱しないと考えられる表面あらさSdの1/2の振幅(0.5μm)について計算を試みた．図4.11にその結果を細線で示すが，f_{e1}の一次共振点以外共振現象はほとんど現れていない．参考のため，一例として55rpmの振動波形を図4.13(c)に示す．明らかにはりは円板から離脱せず，その波形もf_{e1}成分が支配的となって，f_{e1}の二次調波共振はほとんど現れていない．したがって，表面あらさが小さく，はりが円板から離脱しない場合，高調波，分数調波共振はほとんど生じないといえよう．

つぎに，はり長さ10cmについて検討する．図4.8の実験結果を図4.11と比較すると，はり長さ7cmの場合と同様に，計算による振動加速度レベルは高回転において実験結果ほど高くならない．この理由は前述のとおりである．また，f_{e1}の一次，f_{e2}の一次および高調波共振についてはほぼ実験結果と同じような現象を示すが，f_{e1}とf_{e2}の和差調波共振は計算結果ではほとんど現れなかった．これについては，次節で詳しく検討する．

4．4　和差調波共振

前節で，周期的な表面あらさを考慮して，はりの横および縦振動を連成させた非線形運動方程式を直接，ＲＫＧ法によって数値計算した．しかしながら数値計算では和差調波振動だけは現れず，また，はりが円板から離脱するなどの非線形性により種々の共振現象が生ずることを述べてきたが，理論的考察が十分でなかったように思われる．

本節では，この和差調波振動について，はりのたわみ角と弾性接触による変位の非線形性と摩擦係数の速度に対する非線形性を考慮して，理論的な考察を行い，その結果と実験結果を比較検討した．

4.4.1 理論解析

従来の和差調波振動の研究では，長くて薄い矩形断面ばりや直径が大きく薄い円板などが用いられ，それらの剛性が小さいために生じる大変形ひずみの非線形性を考慮したものが多い．例えば，山本ら[39]の矩形断面ばりは幅1.9cm,厚さ0.05cm，長さ81.6cmと薄くかつ長く，曲げ剛性$EI=40.8\mathrm{kNmm^2}$（$E=206\mathrm{GPa}$, $I=0.198\mathrm{mm^4}$）と非常にたわみやすくなっている．また，安田ら[40]の円板でも直径43cm厚さ 0.04cm と薄く，板の曲げ剛性$Eh^3/\{12(1-\nu^2)\}$（ν：ポアソン比）は1.21Nと小さい．これに対し，本研究で用いた円形断面ばりは直径 0.7cm，長さ10cmであり，$EI=24.3\mathrm{Nm^2}$と剛性が非常に大きい．したがつて，本研究では大変形ひずみによる非線形性は考慮しなかつた．

また，前節では，はりの横および縦振動を連成させた運動方程式によって摩擦振動を検討してきたが，本節では，はりの和差調波振動を簡明かつ定性的に考察を進めることができるように振幅が小さく，発生条件にあまり影響がないと考えられるはりの縦振動を無視し，横振動のみ考えることにする．なお，横振動は二次モードの振動まで考慮した．

周期的な表面あらさ，$S(t,V)$)をもつ円周面に長さl の片持ちはりが図4.14 に示すように傾斜角ϕをもち，荷重P で押しつけられる．このとき，はりのつりあい位置における横変位 $\overline{u}$ を

$$\overline{u}=\sum_{i=1}^{2}X_i(x)\overline{T}_i(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.4)$$

ここで，はりの運動方程式にガラーキン法を適用すると次式がえられる．

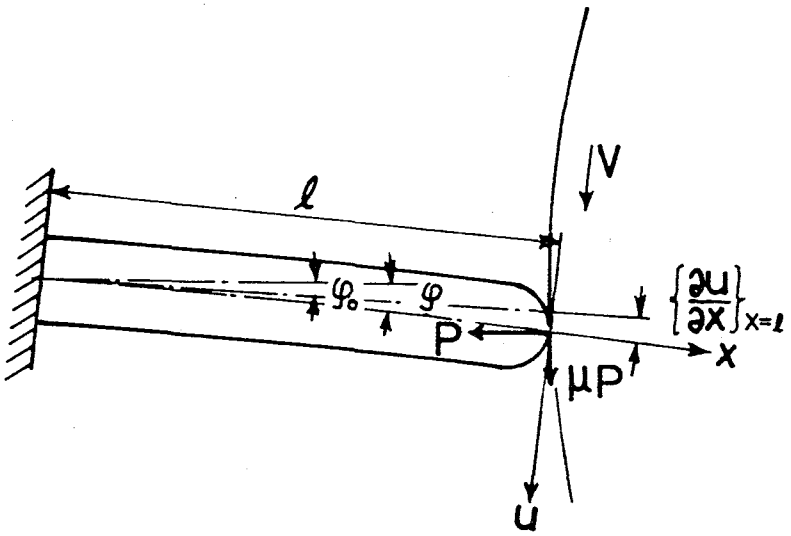


図4.14　はりの摩擦振動モデル

$$\ddot{\overline{T}}_i+\frac{C_i}{\rho A}\dot{\overline{T}}_i+\omega_i{}^2\overline{T}_i=\frac{X_i(l)}{\rho A l}[P\{\mu(v_r)\cos\phi+\sin\phi\}$$

$$-P_0\{\mu(V)\cos\overline{\phi}+\sin\overline{\phi}\}\ ] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.5)$$

はりの初期の傾斜角ϕは0°，つりあい位置における傾斜角$\overline{\phi}$とϕ_0は等しいものとすると，式(4.5)において$\sin\overline{\phi}=0$，$\cos\overline{\phi}=1$が成立ち，また，はり先端のたわみ角も微小であるので，次の近似式が成立つ．

$$\cos\phi\fallingdotseq 1$$

$$\sin\phi\fallingdotseq\frac{d\overline{u}}{dx}=\sum_{i=1}^{2}\frac{dX_i}{dx}\overline{T}_i=\sum_{i=1}^{2}X_i{}'\ \overline{T}_i=\Delta\phi$$

したがつて，上式を用いると式(4.5)は次のように書換えられる．

$$\ddot{\overline{T}}_i+\frac{C_i}{\rho A}\dot{\overline{T}}_i+\omega_i{}^2\overline{T}_i=\frac{X_i(l)}{\rho A l}[P\{\mu(v_r)+\Delta\phi\}-P_0\mu(V)]$$

$$(i=1,2) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4.6)$$

また，押付け荷重P，接触点における垂直変位$\overline{u}\sin\phi$および表面あらさ$S(t,V)$の間にはヘルツの弾性接触理論から次の関係式が成立つ．

$$P=\overline{k}\,\overline{\delta}^{3/2}=\overline{k}\{\delta_0-\overline{u}\sin\phi+S(t,V)\}^{3/2}$$

$$\fallingdotseq\overline{k}\{\delta_0-\overline{u}\Delta\phi+S_0\cos\omega_s t\}^{3/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.7)$$

ここで，表面あらさ$S(t,V)$は前節の包絡あらさ曲線から$S_0\cos\omega_s t$と近似する．

ω_s：あらさ周波数で$\omega_s=2\pi NZ/60$と表される．

なお，$\overline{\delta}<0$，すなわち$\delta_0-\overline{u}\Delta\phi+S_0\cos\omega_s t<0$の時，はりは円板から離れる．この時，式(4.7)において$P=0$である．

摩擦係数$\mu(v_r)$は相対速度v_rの次のような多項式で表されるものとする．

$$\mu(v_r)=\mu_0+\mu_1 v_r+\mu_2 v_r{}^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.8)$$

なお，本研究では，Vがかなり大きいため(200-400 cm/s)，$v_r=V-\dot{\overline{u}}$は正と考えられるので，$v_r>0$と仮定する．ここで，式(4.7)をそのまま式(4.6)に代入して解くことはできないので，まず式(4.7)を級数展開して，式(4.6)を解くわけであるが，前節でも示したように円板の周速度が100cm/s を超えると，はりは円板から離脱する．しかしながら，式(4.7)を級数展開し，はりの離脱を考慮して，式(4.6)をハーモニックバランス(Harmonic balance)法により解析することは可能であるが非常に複雑である．そこで，

後述するように，はりの離脱を考慮して，ＲＫＧ法により数値計算してえられた波形とはりが離れないものとしてハーモニックバランス法により求めた解の波形を比較検討した結果(図4.15)，あまり差異が見られなかったので，以後，近似的に円板からのはりの離脱を考えないでハーモニックバランス法によって和差調波振動を解析する．

まず，式(4.7) を式(4.9) のように第3項まで級数展開する．

$$P=P_0\left\{1-\frac{3}{2}(\tilde{u}\,\Delta\phi-\tilde{S}_0\cos\omega_s t)+\frac{3}{8}(\tilde{u}\,\Delta\phi-\tilde{S}_0\cos\omega_s t)^2\right\} \quad \cdots\cdots \quad (4.9)$$

ここで，$\tilde{u}=\overline{u}/\delta_0$ ， $\tilde{S}_0=S_0/\delta_0$

なお，はりの離脱も考えてP を第３項まで級数展開した式 (4.9)を用いた場合と式(4.7)を用いた場合について，式 (4.6)をＲＫＧ法によって数値計算した結果，両者はよく一致した．したがって，本研究の諸元に対しては，式 (4.7)のP は第３項まで級数展開すれば十分であることが確認された．

そこで，式 (4.8),(4.9)を式 (4.6)に代入し，さらに，$\overline{u}$，$\dot{\overline{u}}$ の四乗以上の高次項を省略すると次式がえられる．

$$\ddot{\overline{T}}_i+\omega_i^2\overline{T}_i=-\frac{C_i}{\rho A}\dot{\overline{T}}_i+Q_i[(a_0+a_1\cos\omega_s t+a_2\cos 2\omega_s t)$$

$$\times(\alpha_1\dot{\overline{u}}+\alpha_2\dot{\overline{u}}^2+\alpha_3\dot{\overline{u}}^3+\Delta\phi)$$

$$+(b_0+b_1\cos\omega_s t)(\alpha_0+\alpha_1\dot{\overline{u}}+\Delta\phi)\overline{u}\,\Delta\phi$$

$$+f_0+f_1\cos\omega_s t+f_2\cos 2\omega_s t] \quad (i=1,2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.10)$$

ここで$Q_i=\dfrac{X_iP_0}{\rho A l}$ ， $a_0=1+\dfrac{3}{16}\tilde{S}_0^2$ ， $a_1=\dfrac{3}{2}\tilde{S}_0$ ， $a_2=\dfrac{3}{16}\tilde{S}_0^2$ ，

$$b_0=-\frac{3}{2\delta_0}\ ,\ b_1=-\frac{3\tilde{S}_0}{4\delta_0}\ ,\ f_0=f_2=\alpha_0 a_2\ ,\ f_1=\alpha_0 a_1\ ,$$

$$\alpha_0=\mu(V)\ ,\ \alpha_1=-(\mu_1+3\mu_2V^2)\ ,\ \alpha_2=3\mu_2V\ ,\ \alpha_3=-\mu_2$$

いま，式 (4.10)において，強制力のあらさ周波数ω_sとはりの一次および二次の固有振動数ω_1，ω_2 の間で，

$$\omega_s=p_2\pm p_1\ ,\ p_1\fallingdotseq\omega_1\ ,\ p_2\fallingdotseq\omega_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.11)$$

を満たすp_1，p_2 を振動数とする二つの振動が同時に発生するかを調べる．なお，±の符号は以下＋は和，－は差調波振動をそれぞれ表す．

式 (4.10)の解をあらさ周波数ω_sの倍振動まで考慮して，次のようにおく．

$$\overline{T}_i = P_{i0} + R_i \cos(p_i t + \beta_i) + P_{i1} \cos \omega_s t + P_{i2} \cos 2\omega_s t$$

$$(i=1,2) \quad \cdots\cdots \quad (4.12)$$

ここで，R_i および β_i は時間とともにゆっくり変化する関数である．また，P_{i0}，P_{i1}，P_{i2} は次のように近似する．

$$P_{i0} = \frac{Q_i f_0}{\omega_i^2}, \quad P_{i1} = \frac{Q_i f_1}{(\omega_i^2 - \omega_s^2)}, \quad P_{i2} = \frac{Q_i f_2}{(\omega_i^2 - 4\omega_s^2)} \quad (i=1,2) \qquad (4.13)$$

式 (4.12),(4.13) を (4.10)に代入し，式 (4.11)の関係を用い，ハーモニックバランス法を適用すると次の関係式がえられる．

$$2p_1\dot{R}_1 = -Q_1\,[(e_{11} + e_{12}R_1^2 + e_{13}R_2^2)\,p_1R_1$$
$$+(e_{14} + e_{15}R_1^2 + e_{16}R_2^2)R_2\cos\phi + (e_{17} + e_{18}R_1^2 + e_{19}R_2^2)R_2\sin\phi]$$

$$2p_2\dot{R}_2 = -Q_2\,[(e_{21} + e_{22}R_1^2 + e_{23}R_2^2)\,p_2R_2$$
$$+(e_{24} + e_{25}R_1^2 + e_{26}R_2^2)R_1\cos\phi + (e_{27} + e_{28}R_1^2 + e_{29}R_2^2)R_1\sin\phi]$$

$$2p_1R_1\dot{\beta}_1 = -Q_1\,[(e_{31} + e_{32}R_1^2 + e_{33}R_2^2)R_1$$
$$+(e_{34} + e_{35}R_1^2 + e_{36}R_2^2)R_2\cos\phi + (e_{37} + e_{38}R_1^2 + e_{39}R_2^2)R_2\sin\phi]$$

$$2p_2R_2\dot{\beta}_2 = -Q_2\,[(e_{41} + e_{42}R_1^2 + e_{43}R_2^2)R_2$$
$$+(e_{44} + e_{45}R_1^2 + e_{46}R_2^2)R_1\cos\phi + (e_{47} + e_{48}R_1^2 + e_{49}R_2^2)R_1\sin\phi]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.14)$$

ここで，$\phi = \beta_2 \pm \beta_1$，$e_{11} \sim e_{49}$ は p_1，p_2，ω_s，$a_0 \sim a_2$，$b_0 \sim b_1$，$f_0 \sim f_2$，Q_1，Q_2 などで表され，例として e_{11} を示すと次のとおりである．

$$e_{11} = \frac{C_1}{Q_1} - \alpha_1 a_0 X_1 - \alpha_1 b_0 X_1 \left\{ \left(P_{10}^2 + \frac{1}{2}P_{11}^2 + \frac{1}{2}P_{12}^2 \right) X_1 X_1' \right.$$
$$\left. + \left(P_{10}P_{20} + \frac{1}{2}P_{11}P_{21} + \frac{1}{2}P_{12}P_{22} \right)(X_1X_2' + X_1'X_2) + \left(P_{20}^2 + \frac{1}{2}P_{21}^2 + \frac{1}{2}P_{22}^2 \right) X_2X_2' \right\}$$
$$- \alpha_1 b_1 X_1 \left\{ \left(P_{10}P_{11} + \frac{1}{2}P_{11}P_{12} \right) X_1X_1' + \frac{1}{2}\left(P_{10}P_{21} + P_{11}P_{20} + \frac{1}{2}P_{11}P_{22} + \frac{1}{2}P_{12}P_{21} \right) \right.$$
$$\left. \times (X_1X_2' + X_1'X_2) + \left(P_{20}P_{21} + \frac{1}{2}P_{21}P_{22} \right) X_2X_2' \right\}$$
$$-3\alpha_3 X_1^3 \left\{ a_0\left(\frac{1}{2}P_{11}^2 + 2P_{12}^2 \right) + a_1 P_{11}P_{12} - \frac{1}{4}a_2 P_{11}^2 \right\}$$
$$-3\alpha_3 X_1^2 X_2 \left\{ a_0(P_{11}P_{21} + 4P_{12}P_{22}) + a_1(P_{11}P_{22} + P_{12}P_{21}) - \frac{1}{2}a_2 P_{11}P_{21} \right\}$$

$$-3\alpha_3 X_1 X_2^2\left\{a_0\left(\frac{1}{2}P_{21}^2+2P_{22}^2\right)+a_1 P_{21}P_{22}-\frac{1}{4}a_2 P_{21}^2\right\}$$

定常状態では式(4.14) において $\dot{R}_1=\dot{R}_2=\dot{\beta}_1=\dot{\beta}_2=0$ である．したがって，式（4.14）の右辺を零とおいた式および式(4.11) の関係から，R_1，R_2，ϕ，p_1，p_2 の定常解を求めることができる．

定常解の安定性は，求められた定常解の平衡位置からの微小量を考えた変分方程式からラウス・フルビッツの安定判別を用いて検討することができる．

4.4.2 計算結果

前節の実験結果によれば，和差調波振動が発生する高回転数では，はりは円板から離脱する．図4.15は，はりの先端での和および差調波振動変位をはりの離脱を考慮したＲＫＧ法による数値計算結果とはりの離脱を考慮しないハーモニックバランス法による結果を示す．はりの直径0.7cm，長さ10cm，表面あらさ $S_0=4\mu$m および押付け荷重 $P_0=19.6$N について計算した．また，摩擦係数の式（4.8)の係数は $\mu_0=0.18$，$\mu_1=-3.2\times10^{-4}$ s/cm，$\mu_2=5\times10^{-10}$ s³/cm³ を用いた．（その曲線は後述の図4.22 に破線で示す）なお，参考のために強制力である表面あらさの波形も図に示した．一般の共振現象とは異なり，強制力

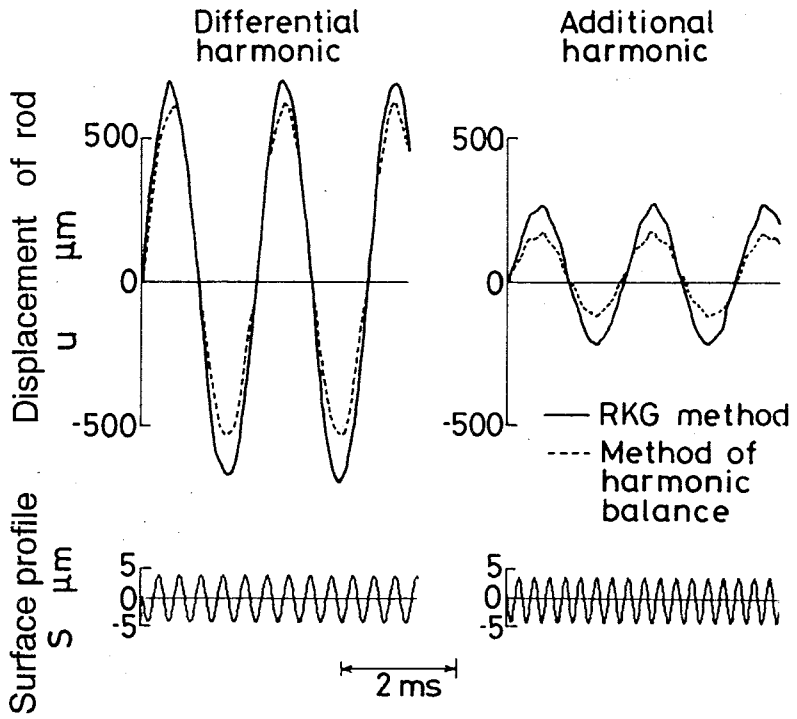


図4.15　ＲＫＧ法とハーモニックバランス法による和差調波振動波形および表面あらさ波形の比較

であるあらさ周波数の振動はほとんど現れず，はりの一次の固有振動数に二次の振動が重畳された振動波形が現れている．また，振幅も強制力の振幅の50～150倍あり，いずれの波形も顕著な和差調波振動が現れていることを示している．また，ＲＫＧ法による結果はハーモニックバランス法による振幅よりやや大きいものの，全体として，その波形にあまり顕著な差異は認められない．そこで，和差調波振動の計算は以後，近似的にはりの離脱を考慮しないハーモニック・バランス法によって行った．

図4.16 (a),(b)は差および和調波振動について，無次元化したあらさ周波数Ω｛$\Omega=\omega_s/(\omega_2\pm\omega_1)$｝とはりの一次および二次の変位振幅である$R_1$，$R_2$ の関係を示す．なお，図4.15に示した振動波形のR_1，R_2 の値を図4.16中に黒丸で示してある．和，差調波振動いずれもΩ=1 付近で最大となる安定な振動が発生する．とくに，和調波振動ではΩ=1 以上になると振幅が急激に減少し，和調波振動は消滅してしまう．また，和調波振動は差調波振動より安定範囲が狭く，発生しにくい（図4.16b)．この理由の一つに摩擦係数のすべり速度に対する勾配の大きさがあげられる．すなわち，後述の図4.22 の破線の摩擦係数曲線に示すように，和調波振動が発生するすべり速度における摩擦係数の勾配（-8.7×10^{-5} s/cm）は差調波振動におけるそれ（-2.0×10^{-4} s/cm）より小さい．

そこで，摩擦係数のすべり速度に対する勾配による和差調波振動の振幅を計算した結果を図4.17 に示す．あらさ$S_0=4\mu$m，押し付け荷重$P_0=19.6$Nとして，和および差調波振動で，各々Ω=1 となるすべり速度における摩擦係数$\mu(V)$ の値は一定として，式(4.8) の係数のうちμ_0 と μ_1 を変え，摩擦係数の負の勾配を変化させた．和，差調波振動，いずれにおいても，負の勾配が小さくなるにつれて，振幅R_1，R_2 は減少し，とくに勾配が -1×10^{-4} s/cm以下になると急激に減少し，勾配が -8.6×10^{-5} s/cm以下では，ほとんど和差調波振動は発生しなくなる．

このことから，摩擦係数の負の勾配が和差調波振動の発生の有無に影響していることは明らかである．一般に，鋼どうしが接触する場合，その摩擦係数曲線は図4.22 の破線のように，わずかに下に凸の曲線になるのが普通である．したがって，差調波振動よりすべり速度が大きいところで発生する和調波振動の摩擦係数の負の勾配は小さくなる可能性があり，和調波振動は発生しにくくなることになる．いま，和調波振動における摩擦係数の勾配を差調波振動のそれと同じになるように，図4.22 の破線で示す摩擦係数曲線を平行移動させて，和調波振動の振幅を計算した．その結果を図4.18 に示す． R_1，R_2 ともに，その大きさは図4.16(a)の差調波振動の場合とほぼ同じであるが，摩擦係数の勾配が同じで

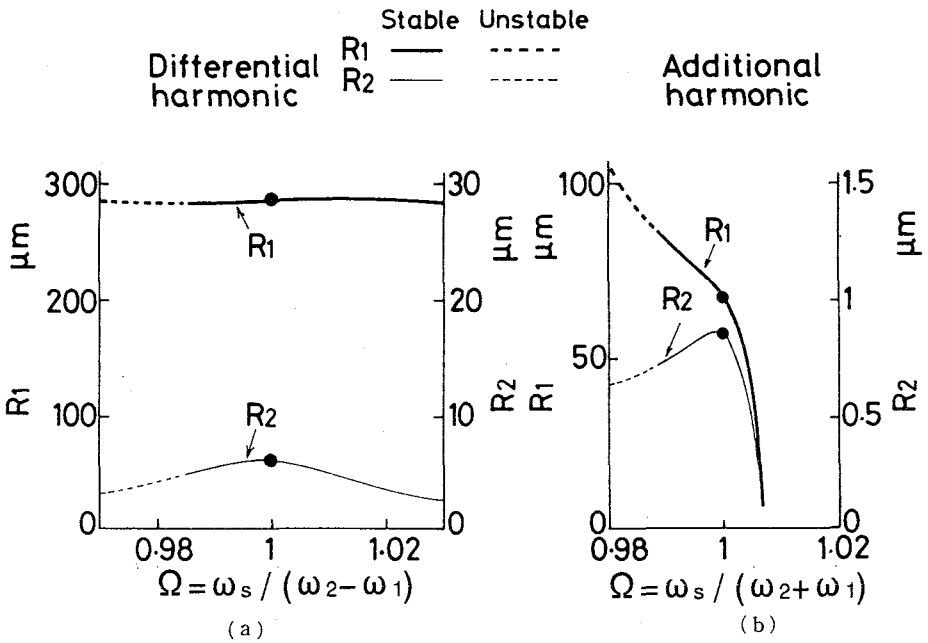


図4.16　和差調波振動の共振曲線の一例（あらさ $S_0 = 4\mu m$）

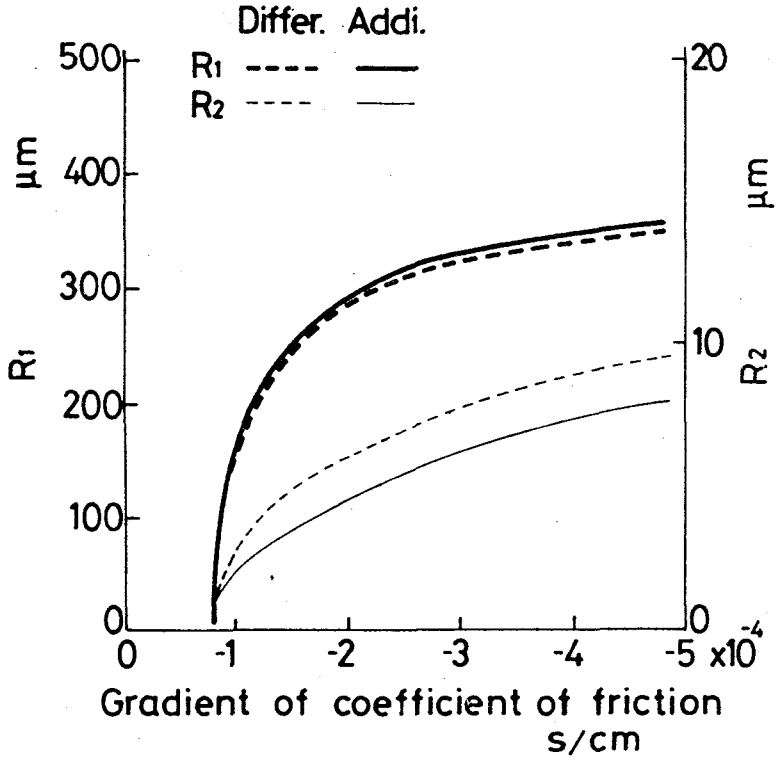


図4.17　種々の摩擦係数の勾配に対する振幅の変化（あらさ $S_0 = 4\mu m$）

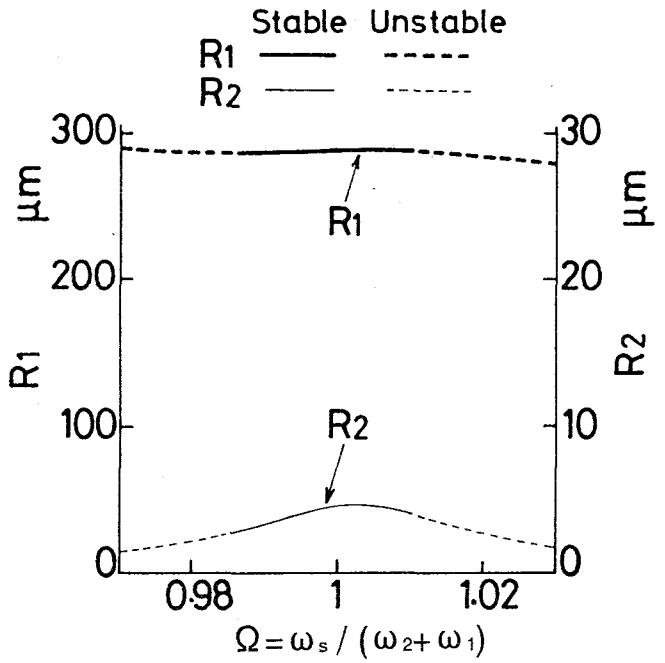


図4.18　差調波振動の摩擦係数の勾配を用いて計算した和調波振動の振幅
（あらさS_0= 4μm）

あるにもかかわらず，その安定な発生範囲は狭い．このことは，和調波振動が発生しにくい理由に上述のような摩擦係数の負の勾配が小さいことのほかに，式（4.5)の運動方程式が和調波振動を発生しにくい特性をもっていることを示している．

摩擦係数の負の勾配について検討してきたが，摩擦係数の勾配が零，すなわち，摩擦係数が一定の場合の和差調波振動を検討してみる．摩擦係数が一定値μ_cの場合，式(4.10)からハーモニック・バランス法によって次の関係式がえられる．

$$2p_1\dot{R}_1=-Q_1\{g_{11}p_1R_1+(g_{12}+g_{13}R_1^2+g_{14}R_2^2)R_2\sin\phi\}$$

$$2p_2\dot{R}_2=-Q_2\{g_{21}p_2R_2+(g_{22}+g_{23}R_1^2+g_{24}R_2^2)R_1\sin\phi\}$$

$$2p_1R_1\dot{\beta}_1=-Q_1\{(g_{31}+g_{32}R_1^2+g_{33}R_2^2)R_1$$
$$+(g_{34}+g_{35}R_1^2+g_{36}R_2^2)R_2\sin\phi\}$$

$$2p_2R_2\dot{\beta}_2=-Q_2\{(g_{41}+g_{42}R_1^2+g_{43}R_2^2)R_2$$
$$+(g_{44}+g_{45}R_1^2+g_{46}R_2^2)R_1\sin\phi\} \quad \cdots\cdots \quad (4.15)$$

$g_{11}\sim g_{46}$ は p_1, p_2, ω_s, $a_0\sim a_2$, b_0, b_1, $f_0\sim f_2$, Q_1, Q_2 などで表される．

定常解を求めるため，式（4.15）の右辺を零とおいた式から次の関係式がえられる．

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2=\frac{g_{11}p_1(g_{22}+g_{23}R_1{}^2+g_{24}R_2{}^2)}{g_{21}p_2(g_{12}+g_{13}R_1{}^2+g_{14}R_2{}^2)}$$

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2=\frac{g_{11}{}^2p_1{}^2}{(g_{12}+g_{13}R_1{}^2+g_{14}R_2{}^2)^2}+\frac{g_{21}{}^2p_2{}^2}{(g_{22}+g_{23}R_1{}^2+g_{24}R_2{}^2)^2}$$

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2=\frac{(g_{31}+g_{32}R_1{}^2+g_{33}R_2{}^2)}{(g_{34}+g_{35}R_1{}^2+g_{36}R_2{}^2)}\frac{(g_{44}+g_{45}R_1{}^2+g_{46}R_2{}^2)}{(g_{41}+g_{42}R_1{}^2+g_{43}R_2{}^2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.16)$$

和差調波振動が発生するためには，式（4.16）の第二式は常に正であるから，式(4.16)の第一，第三式の右辺が正であることが必要条件である．$P_0=19.6$N，$\mu_c=0.09$ とおいて，種々のあらさS_0に対し，解が存在するための必要条件の範囲を図4.19に影の部分で示す．定常解が存在すれば，必ずこの図に求められているR_1，R_2 の範囲にあることを示している．あらさの大きい$S_0=4,6\mu$mでは，差調波振動の解の必要条件の範囲は存在しないすなわち，差調波振動は発生しない．また，和調波振動では，$S_0=6\mu$mにおいては，$R_1>0$，$R_2>0$ が存在範囲となる．これらの結果は，和調波振動が発生しにくく，差調波振動が発生しやすかった摩擦係数が負の勾配をもつ場合と異なる．解の存在の可能性があるあらさについて，図4.19の解の存在範囲を考慮して，式（4.16)を用いて式(4.15)の定常解R_1，R_2 を求めたが，解は存在しなかった．さらに定常解がないことを確認するため，解の存在の可能性があるあらさについて摩擦係数を一定としてはりの離脱を考慮したＲＫＧ法によって数値計算を行った．図4.20にその一例として，あらさ$S_0=4\mu$m,和調波振動が発生する可能性があるあらさ周波数$\omega_s=p_2+p_1$ における振動波形を示す．表面あらさ周波数に一致する小振幅の波形であり，図4.15に示すような和差調波振動波形は求められない．さらに，初期条件を種々変えて，計算を行ったが，いずれも，図4.20のような波形で，和差調波振動波形は求められなかった．すなわち，摩擦係数が一定では和差調波振動は発生しない．

以上の検討の結果，摩擦係数の勾配が和差調波振動の発生に大きな影響を及ぼし，ある負の勾配以上にならないと和差調波振動は発生しないことがわかった．なお，前節において，ＲＫＧ法の数値計算によって，和差調波振動が発生しなかったのは，片持ちはりを小さなランダムな表面あらさをもつ円板に摩擦させた時のこすれ音発生時の摩擦係数曲線を用いたため，高回転（200～400rpm）において，摩擦係数の勾配が零または正になっていたことによると思われる．

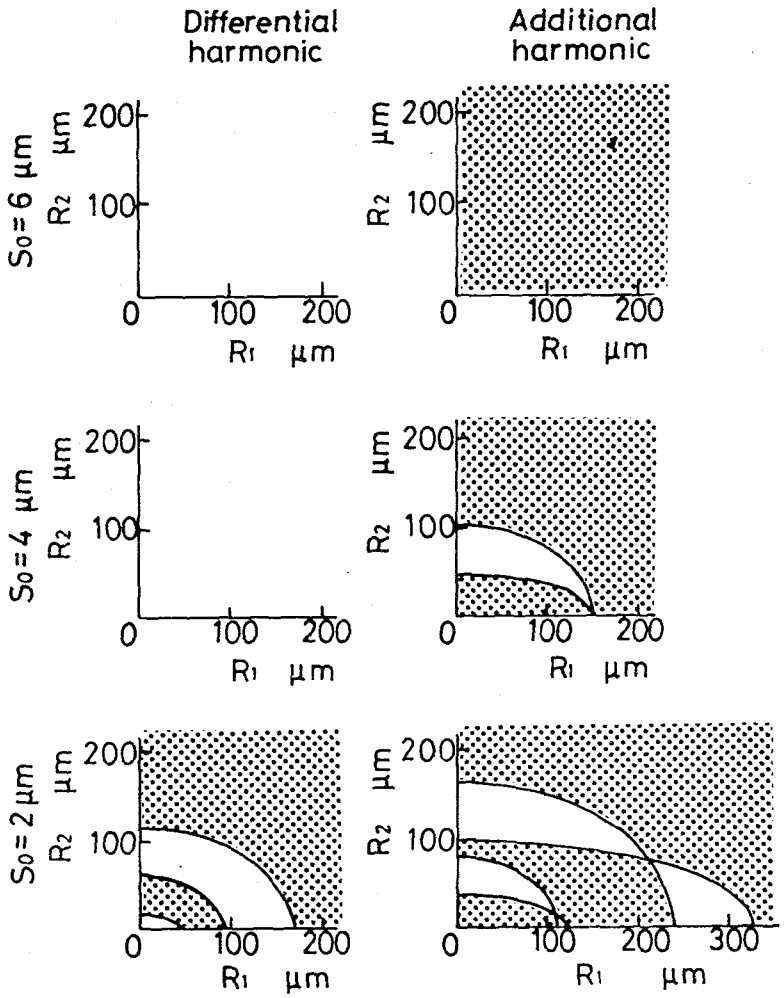


図4.19　種々の表面あらさS_0の大きさに対する摩擦係数一定の場合の予測されるR_1, R_2 の存在範囲

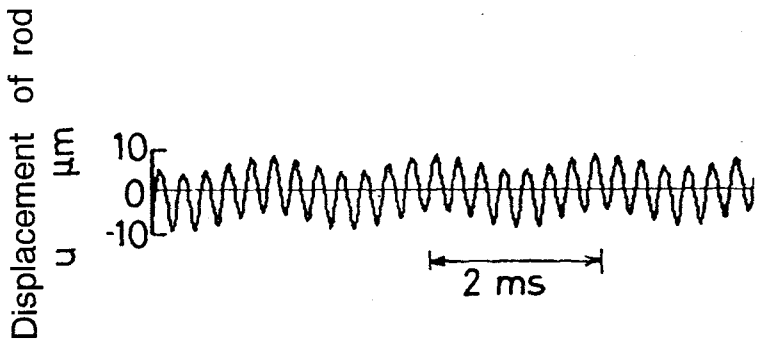


図4.20　ＲＫＧ法により計算された摩擦係数一定の場合のはりの振動波形（あらさS_0＝４μm）

最後に，強制力である表面あらさS_0が和差調波振動の発生がどのような影響を及ぼすか検討した．図4.21は図4.22の破線の摩擦係数曲線を用い，S_0= 2，4，6μmの場合の和差調波振動の振幅を計算した結果を示す．あらさが小さくなると和差調波振動の発生範囲が狭くなり，発生しにくくなる．とくに和調波振動ではあらさによる振動振幅への影響は大きく，あらさが4μm以下になると振幅は急激に減少し，S_0= 2μmでは和調波振動はえられなかった．

4.4.3 実験結果

理論解析結果から，和差調波振動の発生に摩擦係数のすべり速度に対する負の勾配が影響を及ぼしていることが明らかになった．このことを確認するため実験を行った．実験装置は4.2節で用いたものと同一であり，片持ちはり（長さ10cm，直径0.7cm，S45C製）をローレット加工による周期的なあらさをもつ厚い円板（直径20cm，厚さ4cm,S45C製，円周面上の山数は582 で1 ピッチは約1.1mm ）の円周面に一定荷重で押付けて摩擦音を発生させる．はりの横振動加速度は先端につけた小型軽量のピエゾ型加速度ピックアップにより測定した．摩擦係数は，はりに貼ったひずみゲージを用い，あらかじめ測定したひずみと摩擦力の関係から求めた．なお，摩擦係数はかなり変動するが，ローパスフィルタによって変動分をカットした．はりの離脱状態は，はりが円板と接触している時，導通する回路によって調べた．円板の中心に対するはりの傾斜角はほぼ0°，押しつけ荷重P_0= 19.6N,あらさS_0= 4μmである．

円板の回転数 200～400rpmにおいて乾性状態で摩擦させた時のはりの振動加速度レベルおよび摩擦係数を測定した．図4.22は和差調波振動が発生した場合を，図4.23は差調波振動はわずかに発生しているが，和調波振動が発生していない場合をそれぞれ示す．振動加速度は10 m/s^2 を80dBとしてdB表示し，図の横軸には表面あらさ周波数$f_s(=\omega_s/2\pi)$と加振試験からえられたはりの二次の固有振動数f_{e2}の比も示している．また，和および差調波共振はそれぞれ$f_{e2}+f_{e1}$（f_{e1}：はりの一次の固有振動数），$f_{e2}-f_{e1}$で示している．なお，図4.22には先に計算で用いた摩擦係数曲線を破線で示してある．図4.23の摩擦係数の負の勾配は明らかに図4.22のそれより小さい．したがって，これらの図から，摩擦係数の負の勾配が小さい時，和差調波振動，とくに和調波振動は発生しにくいことがわかる．

これらの実験結果は，摩擦係数がある値以上の負の勾配にならないと和差調波振動が発生しない計算結果と同じ傾向である．

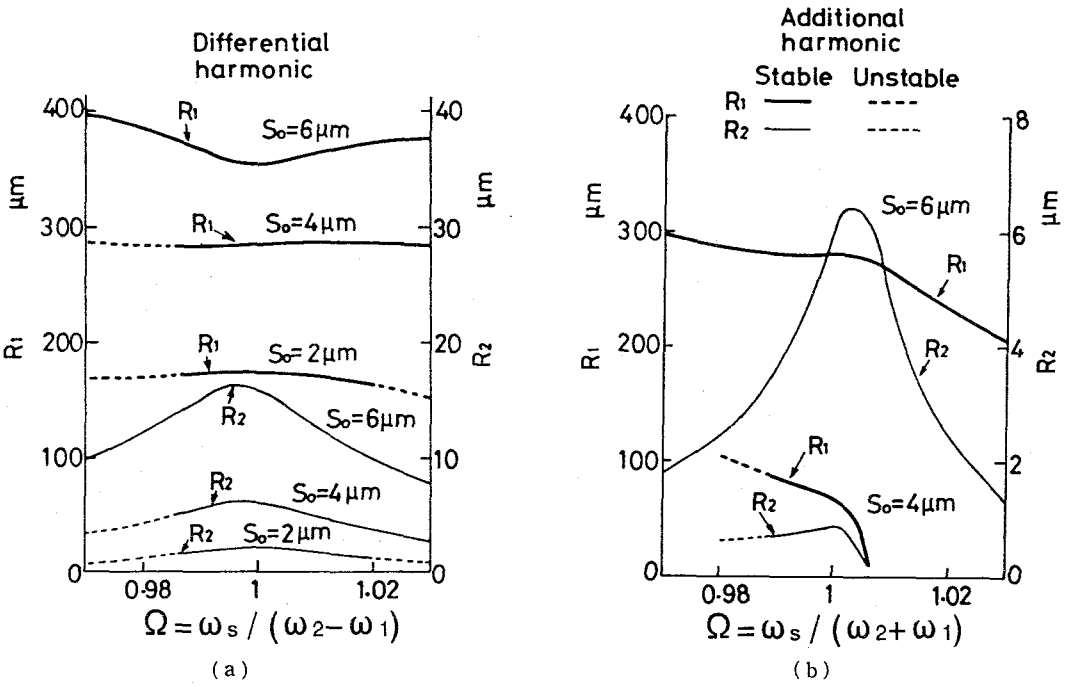


図4.21　あらさS_0を変えた場合の共振曲線

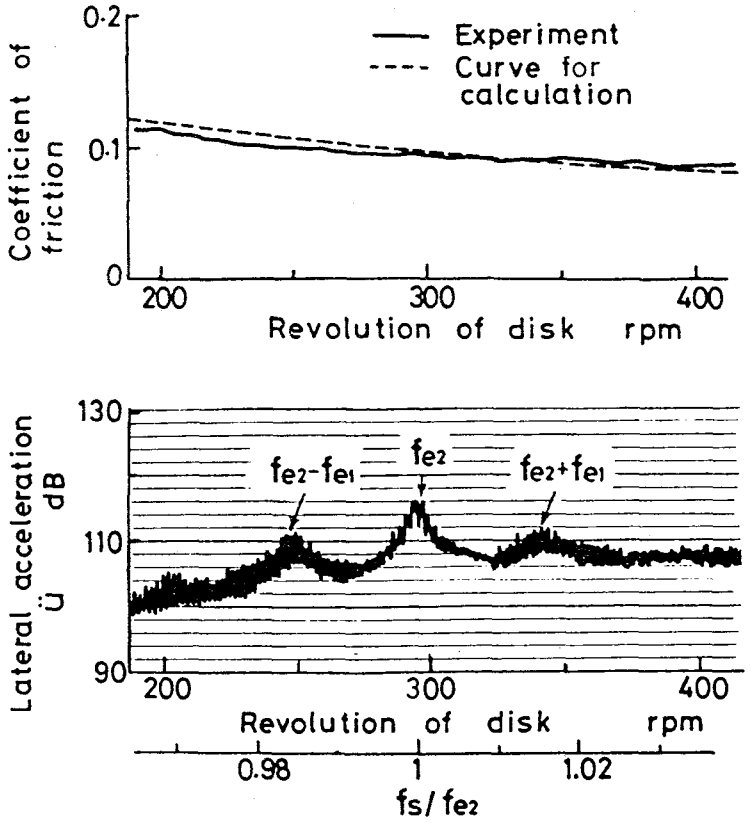


図4.22　和差調波振動が発生する時の回転数に対する振動加速度レベルと摩擦係数の変化　（あらさS_0＝4μm）

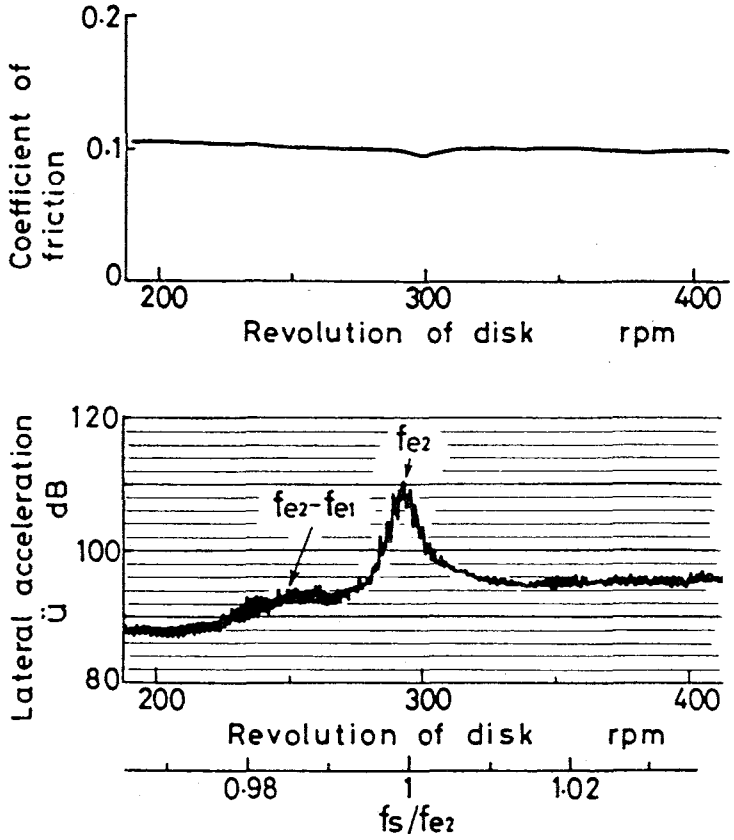


図4.23　和差調波振動が発生しにくい時の回転数に対する振動加速度レベルと摩擦係数の変化　（あらさS_0= 4μm）

4.5　結言

円周面に周期的なあらさをもつ回転円板に剛性の大きい片持ちはりを乾性状態で押しつけて，円板の回転数を変化させた時の摩擦音および摩擦振動について理論的，実験的に検討した結果，つぎのような結論がえられた．

(1)　表面あらさが大きくなると，はりが円板から離脱するなどの非線形性により，摩擦音およびはりの振動に，はりの横振動の一次固有振動数の一次共振点のほかに高調波共振，分数調波共振および高分数調波共振が現れる．さらに，はりの横振動の高次の固有振動数の一次および高調波共振が生ずる．また，はりが長い場合には，横振動の一次と二次の固有振動数の和および差調波共振という特徴ある現象が生ずる．

(2)　摩擦音の音圧レベルは表面あらさの増加にともない高くなり，はり長さにかかわらずランダムな表面あらさの場合と同様に表面あらさの約0.8乗に比例して増大する．発生する摩擦音は周波数分析結果から，前章のランダムあらさの場合とはやや異なるもの［こす

れ音］の一種であることがわかった．

（3） はりの横振動および縦振動の連成を考慮して導き出された非線形の運動方程式の強制力として包絡あらさ曲線からえられた周期的表面あらさ（正弦波で近似）を考えて，はりの横振動加速度を計算した結果，高調波共振については実験結果とほぼ同じ傾向を示したが，分数調波共振，高分数調波共振は実験結果ほど明確には現れなかった．

（4） 計算結果によると，表面あらさが小さく，はりが円板から離脱しない場合には，高調波，分数調波共振はほとんど生じない．

（5） 和差調波振動を解明するために，はりの横振動に変位および速度の非線形性を考慮した運動方程式をたて，はりの円板からの離脱を考慮しないハーモニックバランス法による近似解法は和差調波振動の存在範囲などを求めるのに十分有用である．

（6）接触しながら摩擦をともなう片持ちはりの和差調波振動発生には，変位の非線形性よりも速度の非線形性の影響が大きい．とくに，摩擦係数のすべり速度に対する勾配が負のある値以上になると和および差調波振動ともに発生し，摩擦係数が一定の時は和差調波振動は発生しない．

（7）和差調波振動のうち，差調波振動より和調波振動が発生しにくいことが実験からも計算においても確認された．

（8）摩擦係数のすべり速度に対する勾配が負の時，和差調波振動は発生するが，勾配がほぼ零に近い場合には発生しにくいことが実験的にも明らかにされた．

第5章　摩擦音の速度特性

5.1　緒言

第2章では，主に比較的高速度の約70cm/sにおける鳴き音について検討したが，それらの波形はほぼ正弦波であり，顕著なstick-slip波形は現れなかった．このため，理論解析においてもstick-slip振動は考慮しなかった．しかしながら，円板の回転速度をさらに低速にすると典型的なstick-slip波形が発生することが，亘理ら[15]および高野ら[19]により行われた低い周波数での摩擦振動の理論解析結果から予測される．

本章では，円板の回転が低速度の場合に，はりの横振動の一次および高次モードの周波数の鳴き音がどのような特性を示すのか実験的，理論的に検討した結果について述べる．

5.2　実験装置および方法

実験装置は前章まで用いたものと同一である．実験は片持ちはり（長さ3，7，10cm，直径0.7cm，S45C製）を乾性状態で回転している厚い円板（直径20cm，厚さ4cm，S45C製）の円周面に荷重14.7Nでほぼ垂直に押しつけ，鳴き音を発生させるものである．円板回転速度（すべり速度）を70cm/sで鳴き音を発生させてから0.2cm/sまで順次速度を下げながら鳴き音のレベルおよび周波数などの変化を見た．

5.3　実験結果

円板の回転速度が比較的高速度（約70cm/s）の場合，はりの横振動の一次の固有振動数に相当する周波数の［一次モードの鳴き音］のほかに，はりの高次の固有振動数に相当する周波数の［高次モードの鳴き音］が発生した．この2種類の鳴き音について，すべり速度が低速度になるとどのように変化するかを示す．

5.3.1　一次モードの鳴き音の場合：

図5.1ははりの長さが 3cmにおける一次モードの鳴き音のすべり速度に対する音圧およびはりの横振動加速度レベルの変化を示す．なお，図中の振動加速度レベルは80dBを10m/s^{2}として，dB表示した．また，この図にはすべり速度V における鳴き音の周波数f_VとV=70 cm/sにおける一次モードの鳴き音の周波数f_{e1}との比$\eta = f_V / f_{e1}$ も示している図から，速度が低くなると鳴き音は周波数の異なる3種類の音に変化することがわかる．

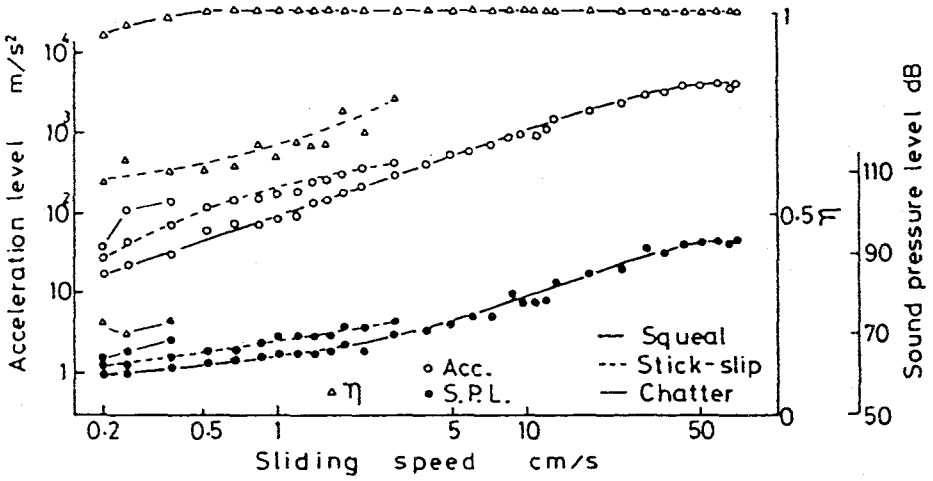


図5.1 種々のすべり速度に対する音圧，はりの横振動加速度レベル
および周波数比ηの変化　（はり長さ 3cm）

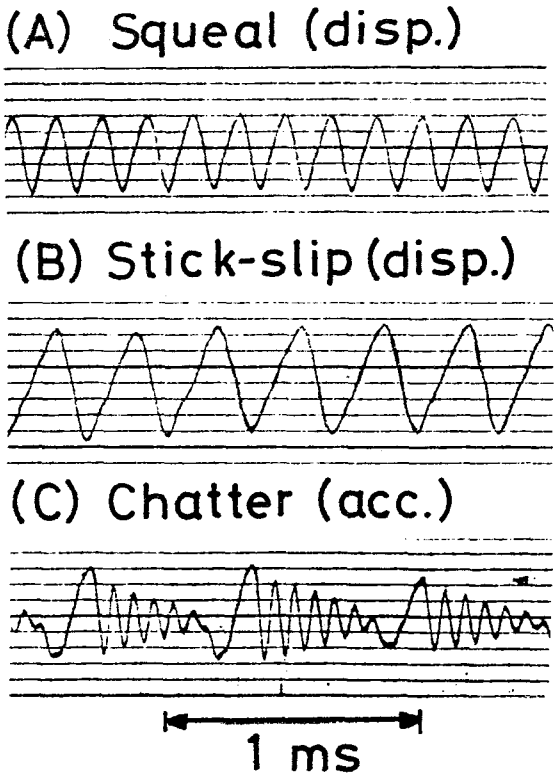


図5.2 $V=0.2$cm/sにおける3種類の鳴き音の波形

図5.2には，これら3種類のすべての音が発生する，すべり速度$V=0.2$cm/sにおけるはりの横振動変位あるいは加速度の波形を示す．図5.1および5.2より3種類の音は次のように分類できる．

(A)：一次モードの鳴き音のままで，波形はほぼ正弦波であり，0.2～70cm/sまでの全範囲で発生する．周波数は低速でやや低くなるが，ほぼ一定である．

(B)：典型的なStick-slip波形を示す音であり，すべり速度が3～4cm/sの低速になると発生する．周波数は低速になるにつれて低くなり，振動加速度レベルとほぼ同じ傾向を示している．

(C)：びびり振動（Chatter）に似た波形で，回転速度が0.4cm/s程度の低速度になると現れる．この周波数はf_{e1}の約1/5と非常に低い．

振動加速度および音圧レベルともに低速になると減少するが，1cm/s以下の低速度領域では，音圧レベルが暗騒音レベルと同一となり，ほとんど減少しない．はりの長さが7cmおよび10cmの場合もすべり速度に対する傾向はほぼ同一であった．

5.3.2　高次モードの鳴き音の場合：

はりの長さが7cmでは三次モードが，10cmでは四次モードの鳴き音がそれぞれ発生した．図5.3は長さ7cmのはりの三次モードの鳴き音について，すべり速度に対する音圧，はりの横振動加速度レベルおよび周波数比η（$\eta=f_V/f_{e3}$，f_{e3}：$V=70$ cm/sにおける三次モードの鳴き音の周波数）の変化を示す．一次モードの鳴き音の場合と異なり，鳴き音は低速

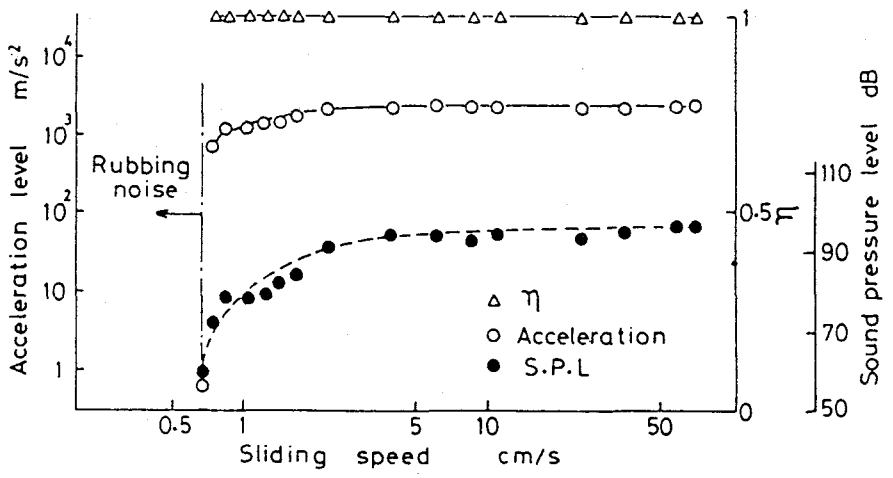


図5.3 三次モードの鳴き音におけるすべり速度に対する音圧，振動加速度レベルおよび周波数比ηの変化　（はり長さ 7cm　）

度でstick-slip波形やびびりによるものは発生せず，約0.75cm/sになると，こすれ音になった．はりの長さが10cmでは，発生した四次モードの鳴き音はすべり速度が約0.3cm/sになるとこすれ音になった．なお，これらの鳴き音の音圧波形はいずれも正弦波形であった．

5.4 理論解析

実験結果より，低速度では，stick-slip振動が発生していることがわかった．長さl の片持ちはりの先端に，押しつけ荷重P が作用する時のはりの横振動のi 次モードの運動方程式は，はりのせん断変形と回転慣性を無視し，傾斜角および荷重の変動がないものとすると，平衡位置においては次式のように表される．

$$\ddot{\overline{T}}_i+\frac{C_i}{\rho A}\dot{\overline{T}}_i+\omega_i^2\overline{T}_i=\frac{X_i(l)}{\rho A l}P\{\mu(v_r)-\mu(V)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.1)$$

ここに，$v_r=V-\dot{\overline{u}}$

ここではりの変位はn 次までのモードを考慮すると次式のように表せる．

$$\overline{u}=\sum_{i=1}^{n}X_i\overline{T}_i \qquad (i=1,n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.2)$$

摩擦係数$\mu(v_r)$ は次式で表されるものとする．

$$\mu(v_r)=\mathrm{sgn}(v_r)\mu_0+\mu_1 v_r+\mu_2 v_r^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.3)$$

定常振動しているはりが円板の回転速度V でstickするためには，相対すべり速度が零でかつ，この時の静摩擦力が動摩擦力より大きいことが必要である．

また，式(5.3)の非線形性のために，解析的に解くことは困難であるので，ＲＫＧ法により数値計算を行った．なお，数値計算においては，次の条件を満たすときにstickするものとした．

ε_vを零に十分近い小さな値とすると，

$$\mu(v_r)=\mathrm{sgn}(v_r)\mu_s\ ,\ |v_r|\leqq\varepsilon_v \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.4)$$

$$\left|\frac{1}{\rho A}\sum_{i=1}^{n}C_iX_i\dot{\overline{T}}_i+\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2X_i\overline{T}_i\right|\leqq\frac{P}{\rho A l}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\{\mu(v_r)-\mu(V)\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (5.5)$$

さらに，stick中の振動としては，

$$\begin{aligned}\overline{u}&=V(t-t_1)+\overline{u}_0\\ \dot{\overline{u}}&=\sum X_i\dot{\overline{T}}_i=V \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.6)\\ \ddot{\overline{u}}&=0\end{aligned}$$

再びslipするためには，

$$\left| \frac{1}{\rho A}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \dot{\overline{T}}_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 X_i \overline{T}_i \right| > \frac{P}{\rho A l}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \{\mu_s - \mu(V)\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.7)$$

を満足すればよい．この時，$\dot{\overline{T}}_i$ の値については，式(5.5)でstickするときの $\dot{\overline{T}}_i$ の値を用いる．

$\overline{T}_i$ の値については，式(5.2)の両辺に X_i をかけて0から l まで積分すると次式のようになる．

$$\overline{T}_i = \frac{\mu(v_r)P}{6EI}\Pi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.8)$$

ここに Π：固有関数を含んだ式　（省略）

これらをslip開始時の $\overline{T}_i$，$\dot{\overline{T}}_i$ の値として用いた．

以上の計算方法により，長さ 7cmのはりについて，すべり速度を変化させた時に一次および三次モードの鳴き音がどのように変化するか検討した．いずれの計算も三次モードまで，すなわち，$n=3$ とした．

5.4.1　一次モードの場合

図5.4は式(5.3)の摩擦係数の相対すべり速度が零の時の値が連続（$\mu(0)=\mu_s$）または，不連続の場合（$\mu(0)\neq\mu_s$）について，すべり速度 V を10cm/sから0.2cm/sまで変化させた時の変位および周波数の変化を示す．なお，ここには，$V=2$cm/sにおける変位および速度波形も示してある．計算に用いた摩擦係数は $\mu_0=1.7$，$\mu_1=-6.8\times10^{-3}$ (s/cm)，$\mu_2=1.7\times10^{-7}$ (s/cm)^3，$\mu_s=1.785$であり，μ_s は $\mu(0)$ の1.05倍とした．

(i)　連続（$\mu(0)=\mu_s$）の場合

周波数は速度によりほとんど変化しないが，変位振幅は速度の減少により零に近づく，変位波形からはわかりにくいが，速度波形から，部分的にstickが発生しているのがわかる．

(ii) 不連続（$\mu(0)\neq\mu_s$）の場合

周波数は速度の減少とともに低くなる．変位振幅は速度の低下とともに減少するが，(i)の場合と異なり一定値に収束する．波形は典型的なstick-slipである．これらの傾向は一自由度系でえられたものと，ほぼ同じ傾向を示した．計算結果と実験結果を比較するために，図5.1における鳴き音およびstick-slipの振動加速度から計算によって求めた変位 $\tilde{U}=U_V/U_{70}$　（U_V，U_{70}：速度V cm/sおよび70cm/sにおける変位）を図5.5に示す．

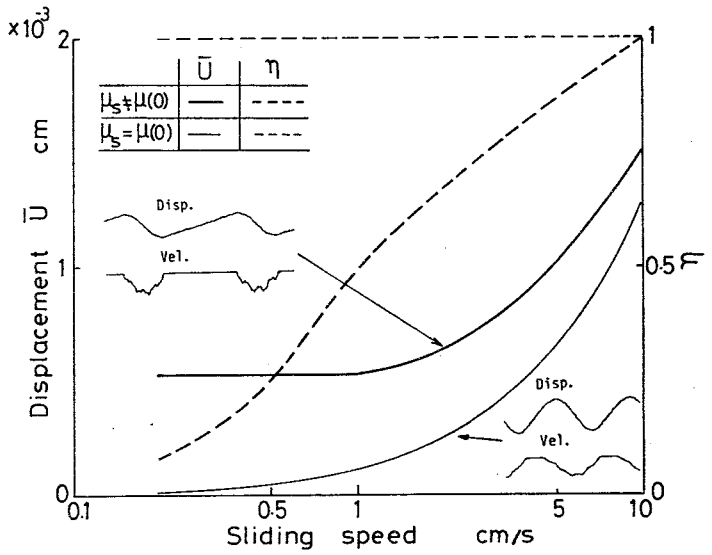


図5.4 $\mu(0)$ が連続および不連続の場合の種々のすべり速度に対する計算結果の変位 $\overline{u}$ および周波数比 η （一次モード）

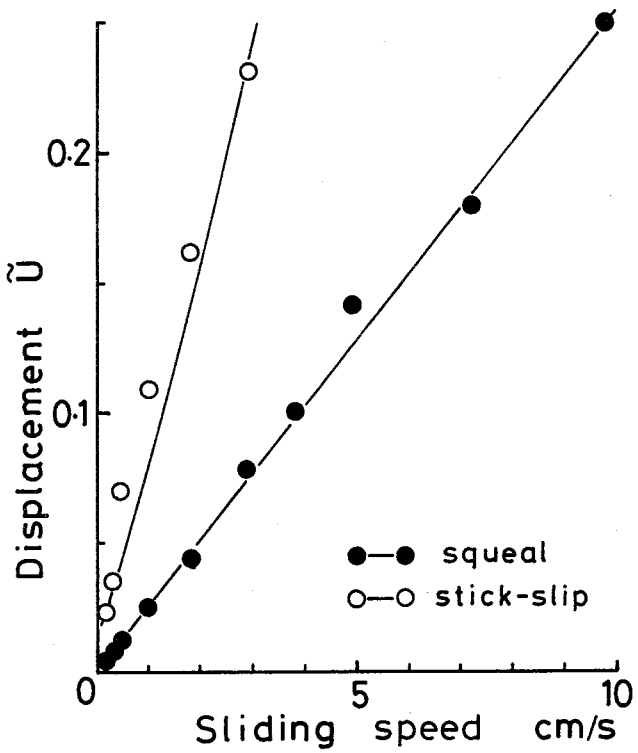


図5.5 鳴き音およびstick-slipの場合のすべり速度と変位振幅 $\widetilde{U}$ の関係

この図より，速度が減少するにつれて，変位は鳴き音では零に収束し，stick-slip振動では一定値に収束している．よって，実験における鳴き音は連続（$\mu(0)=\mu_s$）の場合に発生し，stick-slip振動は不連続（$\mu(0)\neq\mu_s$）の場合に発生することが明らかになった．これらの結果は従来の研究と一致する．[15],[19]

5.4.2　高次モードの場合

図5.6は一次モードの計算に用いた摩擦係数を使用した場合のすべり速度0.2～10cm/sにおける変位および周波数の変化のようすを示す．なお，$V=1$および5cm/sにおける変位および速度波形も図中に示す．

(i)　連続（$\mu(0)=\mu_s$）の場合

計算結果は示していないが，すべり速度70cm/sでは，三次モードである．10cm/s以下では，すべて一次モードであり，速度の低下につれて振幅も減少している．また，stick-slip振動も発生しているが，部分的なために，その周波数はあまり変動していない．

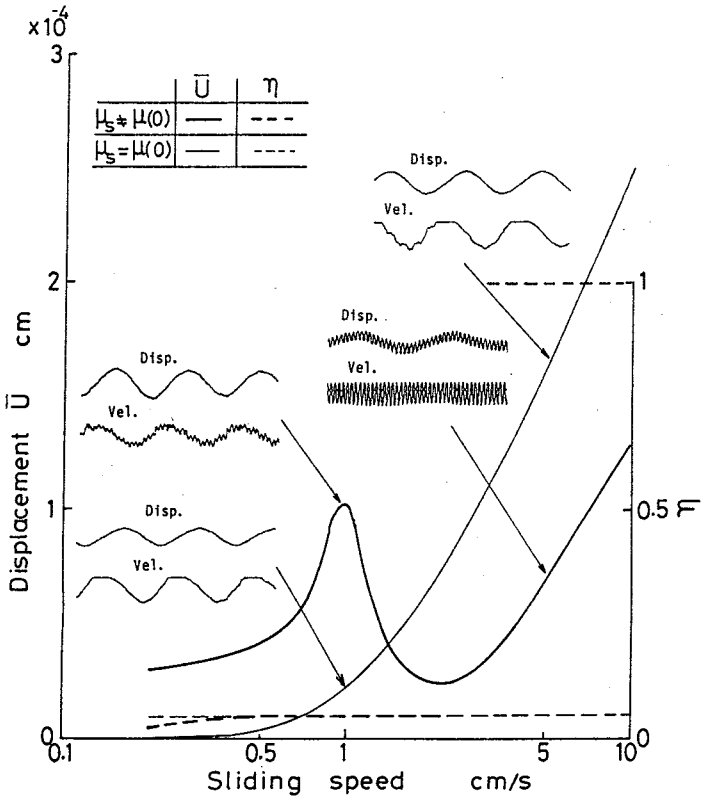


図5.6　$\mu(0)$ が連続および不連続の場合の種々のすべり速度に対する計算結果の変位 $\overline{u}$ および周波数比 η　（三次モード）

(ii) 不連続（$\mu(0) \neq \mu_s$）の場合

すべり速度が3cm/sまでは，三次モードで，それ以下では，一次モードで振動している．三次モードで振動している速度範囲では，変位振幅は(i)の場合と同様に減少するが，一次モードになると再び増加し，ピークの後再び減少するが，一定値に収束する．

次に，摩擦係数の速度勾配を小さくした場合の，高次モードの振動の変化を示したのが図5.7である．図5.6の場合と異なり，摩擦係数が連続，不連続の場合も速度が2～3cm/sまで三次モードであり，振幅も小さく，ほぼ一定である．それ以下の速度では，図5.6の場合と同様にピークをもち，さらに減少して一定値に収束する．しかし，stick-slip振動は発生しなかった．

図5.6，5.7と実験結果から，三次モードの振動から直接stick-slip振動へ移行することはなかった．また，摩擦係数の速度勾配が大きい場合には，摩擦係数が連続であっても，すぐに一次モードの振動になり，さらに低速では，stick-slip振動が発生することがある．図5.6の不連続の場合の結果から，三次モードの振動は低速度になるといったん減少し，その後一次モードの振動が大きくなることがわかる．実験では，三次モードの鳴き音が一次モードに変化せずに鳴き止むのは，高次モードの振幅がいったん減少すると，低速度のた

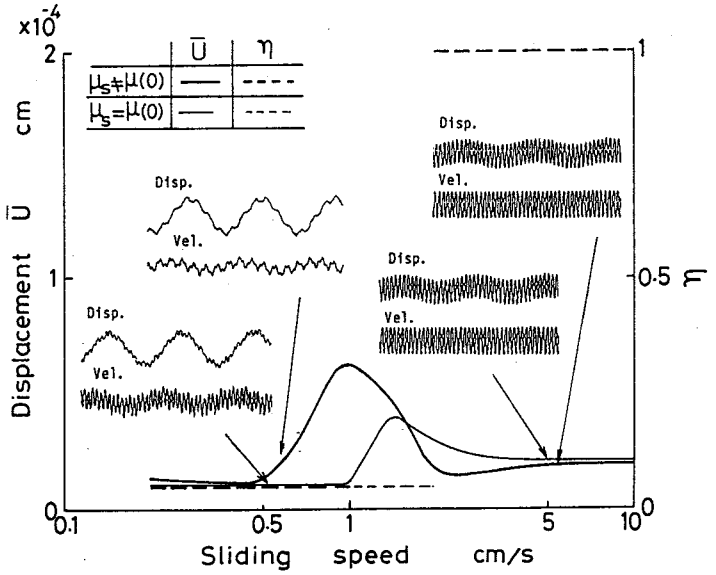


図5.7 摩擦係数の速度勾配を小さくした時の，$\mu(0)$ が連続および不連続の場合の種々のすべり速度に対する計算結果の変位 $\overline{u}$ および周波数比 η（三次モード）

め，はりと円板の摩擦状態が変化することなどから，一次モードの振動も発生しにくくなるためと考えられる．

5.5 結言

すべり速度が比較的高速で発生した鳴き音が低速度に至るまでの速度特性について，実験的，理論的に検討した結果，次のような結論がえられた．

(1) はりの横振動の一次の固有振動数に一致する一次モードの鳴き音は低速度になると，そのまま鳴き音が継続する場合，stick-slip振動による音およびびびり音に変化する場合の3種類に分かれる．周波数は鳴き音の場合ほぼ一定であるが，その他の場合は低速度になるに伴い低くなる．音圧レベルおよび振動加速度レベルはいずれの場合においても速度減少に伴い小さくなる．

(2) 高次モードの鳴き音は低速度においては，一次モードの鳴き音の場合と異なり，こすれ音となる．鳴き音の周波数はすべり速度にかかわらずほぼ一定である．

(3) stick-slip振動を考慮したはりの摩擦振動の運動方程式を数値計算することによって摩擦係数が相対速度が零で連続な時は正弦波の鳴き音が，孤立点をもつ時には典型的なstick-slip振動による音がそれぞれ発生することが本実験において明らかになった．

第6章　摩擦面間の傾斜角度による影響

6.1　緒言

第2章において，片持はりを回転している厚い鋼製の円板の円周面に乾性状態で押しつけ，摩擦音を発生させた場合，レベルの低い［こすれ音］とレベルが高く，音圧波形が正弦波状の［鳴き音］の2種類の音が発生した．また，はりを長くすると摩擦音の周波数がはりの横振動の一次の固有振動数に一致する［一次モードの鳴き音］のほかに，高次の固有振動数に一致する［高次モードの鳴き音］が発生した．高次モードの鳴き音の周波数は，はりの縦振動の固有振動数に近い横振動の固有振動数にほぼ一致する周波数で発生することがわかった．これらの実験はすべて，はりが円板となす角度を0°（はりを円板の円周面に垂直の押し付ける）として行ったが，はりを傾斜させて摩擦させると，はりと摩擦面の間の傾斜角度によって，発生する摩擦音の特性が変化し，はりを円板に垂直に押し付けた場合と非常に異なった結果がえられた．なお，以下では，はりと摩擦面との傾斜角をはりの円板にたいする傾斜角によって表すことにする（ここで《傾斜角が正》とは《はりを円板の回転方向に傾けて摩擦させる》ことである．）

片持ちはりと回転円板，円筒などとの摩擦振動については多くの研究がなされているが，とくに片持ちはりを摩擦面に傾けて摩擦させる研究はJarvisら[22]および田中[25]によって行われている＊ Jarvisらは比較的うすい鋼製円板の側面に鋼製はりを押し付けて摩擦させた時の摩擦振動について，はり傾斜角を考慮した円板とはりの連成振動の運動方程式をたて，傾斜角が0°～25°に対する摩擦振動の振幅の安定性について研究している．田中はうすい回転ドラムの円周面にはりを押し付け，はりの傾斜角を約1°～20°まで変えた場合に発生する摩擦音の発生領域について，ドラムとはりの連成を考慮した運動方程式による安定判別を行っている．しかしながら，これらの研究では，摩擦音は円板またはドラムから発生しており，本研究のようにはりから摩擦音が発生する機構によるものとは異なるため，はりの傾斜角によって摩擦音の周波数が変化しないものと思われる．したがって，現在まではりの傾斜角を変えた場合に発生する摩擦音の周波数が変化することについては研究がなされていない．

＊　これら2氏の論文では，傾斜角の符号のとり方が本章によるものと逆になっている．

本章においては，はりの傾斜角が正および負の場合に発生する摩擦音に対する傾斜角の影響について，実験的・理論的に検討した結果について述べる．

6．2 実験装置および方法

図6.1に示すように，実験装置は前章まで使用したものと同一であり，はりの傾斜角度は円板の回転方向と同じ方向に下向きにとった場合を正とした．摩擦音ははりと円板の接触部鉛直上方約10cmの位置の設置したコンデンサマイクロホンにより測定し，はりの振動は横振動および縦振動について小形・軽量（0.4gr） のピエゾ型加速度ピックアップにより振動加速度を測定した．

表6.1 円板とはりの諸元

	円　　板		は　り
材　　質	S45C	材　　質	S45C
直　径 cm	20	直　径 cm	0.7
厚　さ cm	4	長　さ cm	3,5,7,10
硬　度 H_V	400	硬　度 H_V	150

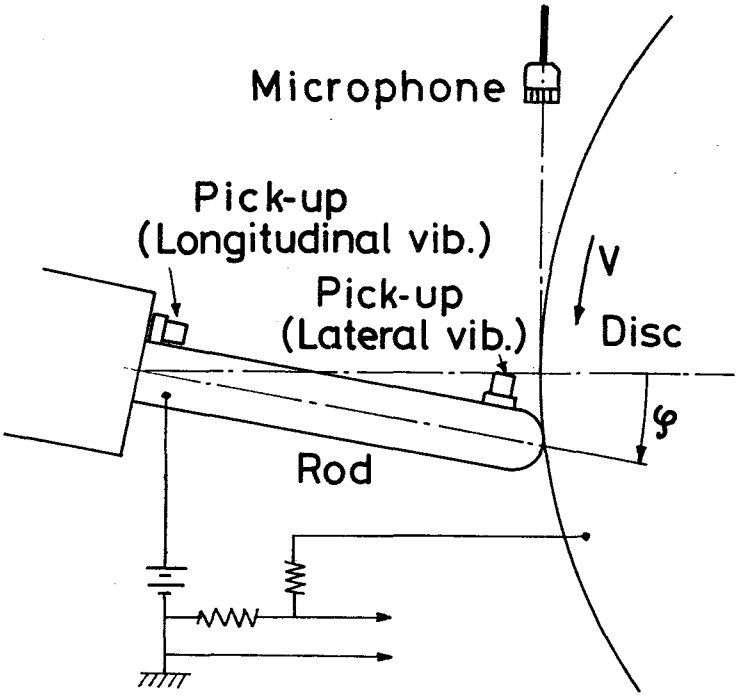


図6.1 実験装置 （傾斜角が正の状態）

また，はりが円板から離脱することがあるので，離脱の状態をはりと円板が接触している間，導電する回路により調べた．押付け荷重は 19.6N で一定とした．表6.1 に実験で用いた円板とはりの諸元を示してある．

はりの傾斜角ϕが$\phi \geqq 0$ および$\phi < 0$ の場合で発生する摩擦音の特性が非常に異なる．すなわち，$\phi \geqq 0$の場合には，［こすれ音］および［鳴き音］が発生するが，$\phi < 0$の場合には旋削時のびびりのように激しい振動をともなった［びびり音］が発生した．以下に$\phi \geqq 0$および$\phi < 0$の場合にわけて，それぞれの特性について述べる．

6．3　傾斜角が正の場合（$\phi \geqq 0$）

6.3.1　実験結果

まず，こすれ音について述べる．図6.2 ははりの長さ 7cm，円板の回転速度 70cm/s で傾斜角が 0，4，8° の場合の音圧とはりの横振動加速度の周波数分析結果を示したものである．なお，振動加速度は 10m/s²を 80dB としてdB表示した．円板駆動部分や円板の表面

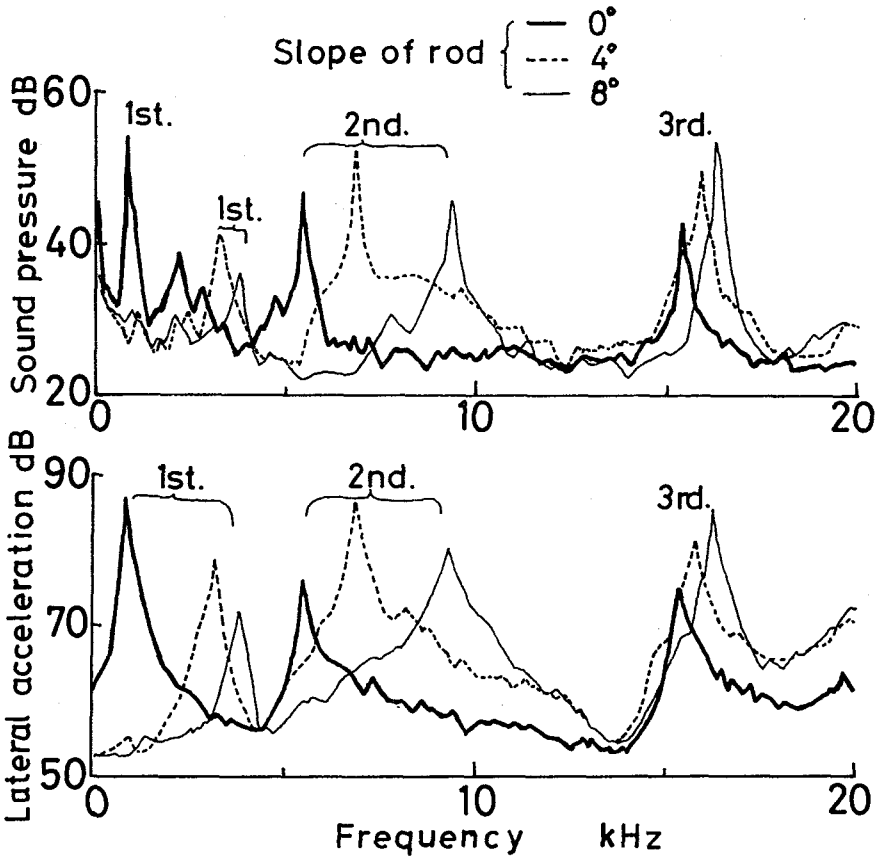


図6.2　種々の傾斜角に対する音圧，はりの横振動加速度の周波数分析結果（はり長さ 7cm ）

あらさなどによる低周波成分を除いて，いずれの傾斜角においても，その主な周波数成分ははりの横振動の一～三次の固有振動数成分からなっている．なお，はりの縦振動の一次の固有振動数は約 21kHz であるので，縦振動成分としては，横振動加速度の20kHz付近にわずかなピークがみられるだけである．図から，傾斜角をわずかに変化させるだけで横振動の一～三次の固有振動数に相当する周波数が高くなっていることがよくわかる．このことは注目すべき興味ある結果である．

これらの周波数の増加の比率は傾斜角 $\phi=0°$ と 8° で一次モードの場合，約４倍，二次モードで約1.8 倍，三次モードで1.06倍であり，とくに固有振動数の低い一次モードの場合，その比率が大きく，高次モードになるほど小さくなっている．この増加の比率を図示したのが図 6.3 である．図の縦軸は各モードの周波数の増加の比率 $(\xi_n)_\phi=(f_{en})_\phi/(f_{en})_0$ ［任意の傾斜角 $\phi°$ におけるｎ次モードの周波数 $(f_{en})_\phi$ と $\phi=0°$ における周波数 $(f_{en})_0$ との比］を表している．この図から高次モードほど周波数の増加の比率が小さくなることがよくわかる．なお，一次モードにおいて，傾斜角が 2° までは増加の比率が大きいが， 2° 以上になると，増加の比率が小さくなる．これは傾斜角が大きくなると，はりの先端のたわみのため，はりと円板との接触剛性が小さくなることによるものと考えられる．したがって，はり先端のたわみが大きい長いはりほど，このような現象が顕著に現れる．図6.4 ははりの長さ 3，5，10cm について，各モードにおける周波数の増加の比率を表している．この図より，はりが長いほど傾斜角 ϕ の小さい範囲での周波数増加の比率が大きくなっている．また，はりが長いほど ϕ の変化による各モードの周波数の増加の比率が大きくなっている．さらに，図6.2 から，各モードの周波数が高くなるばかりでなく，傾斜角が増加するにともなって，横振動の一次の固有振動数成分のレベルが減少し，二，三次の固有振動数成分のレベルが増加するのがわかる．これは前述のように傾斜角が大きくなるにつれて，はり先端のたわみの影響が大きくなり，一次モードより二，三次モードで振動しやすくなるためと思われる．

つぎに鳴き音について述べる．傾斜角 ϕ に対するはり長さ7cm の鳴き音の周波数の変化を図6.3に，はり長さ 3 ,5cmの場合を図 6.4 にそれぞれ示す．なお，はり長さ 10cm でははり先端のたわみが大きいため，傾斜角を大きくすると鳴き音はほとんど発生しなかったので，図には示していない．第２章での実験結果と同様に可聴周波数範囲で発生する鳴き音の周波数は，はり長さ 3，5cm では一次モードの周波数のみ，はり長さ 7cm では一次および三次モードの周波数である．鳴き音は図からわかるように傾斜角が大きくなると発生

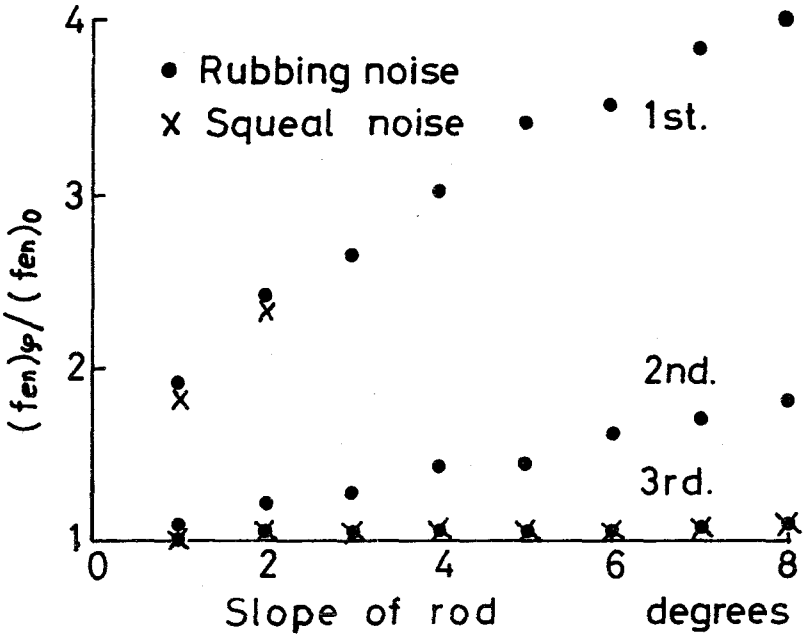


図6.3　傾斜角に対するはりの振動モードの周波数の増加の比率
（はり長さ 7cm ）

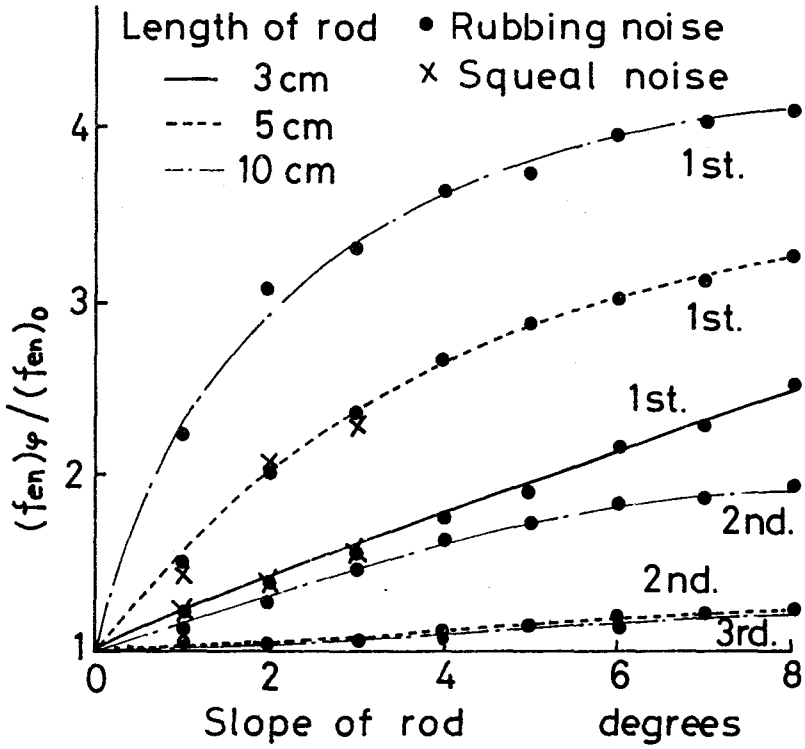


図6.4　種々のはり長さにおける傾斜角と周波数の
増加の比率の関係

しにくくなり，はり長さ 3cm では傾斜角ϕが 0° ～ 3°，5cm では 0° ～ 3°，7cm では一次モードは0° ～ 2°，三次モードは0° ～ 8° の間でのみ発生している．傾斜角がある程度以上大きくなると一次モードの鳴き音は発生しにくくなるが，これはこすれ音の場合に述べたように，傾斜角が大きくなるにつれて横振動の一次の固有振動数成分が減少し，高次モードの成分が増大するために，一次モードの鳴き音が発生しにくくなるものと考えられる．しかしながら，傾斜角によって，鳴き音の周波数はいずれの長さのはりにおいても一次，三次ともに，こすれ音のそれとほぼ同じ比率で増加する．

以上のように，［こすれ音］，［鳴き音］ともに傾斜角によって，摩擦音の周波数がかなり変化することは非常に興味深い実験結果である．そこで，傾斜角によって，摩擦音の周波数がどのように変化するかを理論的に検討する．

6.3.2　理論解析

長さlのはりが荷重P で図6.5 に示すように傾斜角ϕで円板に押付けられて，摩擦振動している時のはりの横振動および縦振動の運動方程式は，はりのつり合い位置を原点とすると次式で表される．

$$\ddot{\overline{T}}_i+\frac{C_i}{\rho A}\dot{\overline{T}}_i+\omega_i^2\overline{T}_i=\frac{\dot{X}_i(l)}{\rho A l}[P\{\mu(v_r)\cos\phi+\sin\phi\}$$

$$-P_0\{\mu(V)\cos\overline{\phi}+\sin\overline{\phi}\}]$$

$$\ddot{\overline{T}}_j^*+\frac{C_j^*}{\rho A}\dot{\overline{T}}_j^*+\omega_j^{*2}\overline{T}_j^*=-\frac{X_j^*(l)}{\rho A\overline{X}_j^*}[P\{-\mu(v_r)\sin\phi+\cos\phi\}$$

$$-P_0\{-\mu(V)\sin\overline{\phi}+\cos\overline{\phi}\}] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6.1)$$

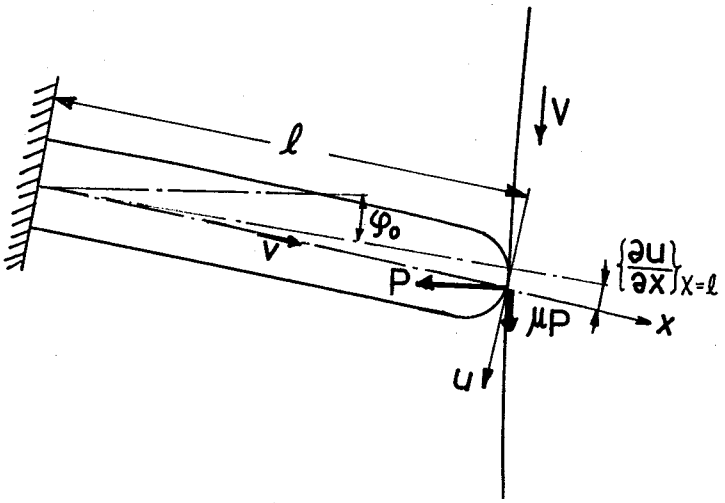


図6.5　はりの振動モデル

ここに，v_r：円板とはりとの相対すべり速度で $v_r=V-\dot{\overline{u}}\cos\phi-\dot{\overline{v}}\sin\phi$ で表される．

$\overline{X}_j{}^*=\dfrac{l}{2}\left(1-\dfrac{\sin 2\lambda_j{}^*}{2\lambda_j{}^*}\right)$，$\lambda_j{}^*=l\,\omega_j{}^*\sqrt{\dfrac{\rho}{E}}$，$\phi$：はり先端の傾斜角で初期設定角 ϕ_0 とはり先端のたわみ角の和で表される　$\phi=\phi_0+\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\}_{x=l}$，$\overline{\phi}$：つりあい位置における傾斜角．

式(6.1) において，押し付け荷重 P と接触点における垂直方向の変位 $\overline{v}\cos\phi-\overline{u}\sin\phi$ の間には次の関係式が成り立つ．

$$P=\overline{k}\,\overline{\delta}^{3/2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (6.2)$$

ここに

$$\overline{\delta}=\delta_0+\overline{v}\cos\phi-\overline{u}\sin\phi$$

$$\overline{u}=\sum_{i=1}^{\infty}X_i(l)\overline{T}_i\,,\quad \overline{v}=\sum_{j=1}^{\infty}X_j{}^*(l)\overline{T}_j{}^*$$

δ_0：つりあい位置における初期の垂直変位で $P_0=\overline{k}\,\delta_0{}^{3/2}$ よりえられる．$\overline{k}$：ヘルツの弾性接触理論よりえられる係数（第２章を参照）．

傾斜角によって，摩擦音の周波数がどのように変化するか検討するのに，式（6.1）を解析的に解くことが困難なため，数値計算によって解かねばならない．しかし，数値計算では，このような特徴ある実験結果を定性的に簡単に考察することは困難である．そこで，式(6.1) を次のような仮定のもとに簡単化して考察を進めることにする．すなわち，

(1) はりの縦振動は周波数の変動には影響をほとんど及ぼさないと考えられるので，これを無視し，横振動のみ考える．

(2) モード内の連成を考慮せず，単一モードのみを取扱う．

(3) はりの傾斜角 ϕ の変動を無視し（はり先端のたわみ角の変動を無視），ϕ は初期設定傾斜角 ϕ_0 に等しく一定とする．

以上の仮定のもとにｎ次モードについて考えると式(6.1) は次式のように表される．

$$\ddot{\overline{T}}_n+\frac{C_n}{\rho A}\dot{\overline{T}}_n+\omega_n{}^2\overline{T}_n=\frac{X_n(l)}{\rho A l}[P\{\mu(v_r)\cos\phi_0+\sin\phi_0\}$$

$$-P_0\{\mu(V)\cos\phi_0+\sin\phi_0\}] \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad (6.3)$$

$$P=\overline{k}(\delta_0-\overline{u}\sin\phi_0)^{3/2}=\overline{k}\{\delta_0-X_n(l)\overline{T}_n\sin\phi_0\}^{3/2}$$

ここで，傾斜角 ϕ_0 が正の場合，はりは円板から離脱しないので，

$\delta_0 > X_n(l)\overline{T}_n \sin\phi_0$ であるから，$\{\delta_0 - X_n(l)\overline{T}_n \sin\phi_0\}^{3/2}$を

$X_n(l)\overline{T}_n \sin\phi_0$ の三次まで級数展開すると，押しつけ荷重P は次式で表される．

$$P = \overline{k}\{\delta_0 - X_n(l)\overline{T}_n \sin\phi_0\}^{3/2} \fallingdotseq P_0\left\{1 - \frac{3}{2}\eta\overline{T}_n + \frac{3}{8}\eta^2\overline{T}_n^2 + \frac{1}{16}\eta^3\overline{T}_n^3\right\} \quad \cdots\cdots (6.4)$$

ここで

$$\eta = X_n(l)\sin\phi_0 / \delta_0$$

さらに摩擦係数$\mu(v_r)$ を相対すべり速度 v_rの多項式で表すことにする．

$$\mu(v_r) = \mu_0 + \mu_1 v_r + \mu_2 v_r^3 \quad \cdots\cdots (6.5)$$

式(6.4),(6.5)を(6.3)に代入すると次式がえられる．

$$\ddot{\overline{T}}_n + \omega_n^2\overline{T}_n = \varepsilon f(\overline{T}_n, \dot{\overline{T}}_n) = \frac{X_n(l)}{\rho A l}P_0\left[\left(1 - \frac{3}{2}\eta\overline{T}_n + \frac{3}{8}\eta^2\overline{T}_n^2 + \frac{1}{16}\eta^3\overline{T}_n^3\right)\times\{(\beta_0 + \beta_1\dot{\overline{T}}_n + \beta_2\dot{\overline{T}}_n^2 + \beta_3\dot{\overline{T}}_n^3)\cos\phi_0 + \sin\phi_0\} - \{\mu(V)\cos\phi_0 + \sin\phi_0\}\right] - \frac{C_n}{\rho A}\dot{\overline{T}}_n \quad \cdots\cdots (6.6)$$

ここで

$\beta_0 = \mu_0 + \mu_1 V + \mu_2 V^3 = \mu(V)$,　$\beta_1 = -(\mu_1 + 3\mu_3 V^2)X_n(l)\cos\phi_0$

$\beta_2 = 3\mu_3 V X_n^2(l)\cos^2\phi_0$,　$\beta_3 = -\mu_3 X_n^3(l)\cos^3\phi_0$

式(6.6)から傾斜角ϕ_0 に対するはりの横振動数$\overline{\omega}_n$ は位相振幅徐変化法を用いると式(6.7)のように求められる．

$$\overline{\omega}_n = \omega_n(1 + \Delta\omega_n) = \omega_n - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_n a_n}\int_0^{2\pi} f(\overline{T}_n, \dot{\overline{T}}_n)\sin\theta\, d\theta$$

$$= \omega_n\left[1 + \frac{P_0 X_n^2(l)}{2\rho A l\omega_n^2}\sin\phi_0\left\{\frac{3}{2\delta_0}\left(\mu(V)\cos\phi_0 + \frac{1}{4}\beta_2\omega_n^2 a_n^2\cos\phi_0 + \sin\phi_0\right) - \frac{X_n(l)^2}{64\delta_0^3}a_n^2\sin^2\phi_0\left(3\mu(V)\cos\phi_0 + \frac{1}{2}\beta_2\omega_n^2 a_n^2\cos\phi_0 + 3\sin\phi_0\right)\right\}\right] \quad \cdots\cdots (6.7)$$

a_n：振動の振幅

本研究のようなはりの傾斜角が 0～8° の場合には，$\sin\phi_0 \ll \cos\phi_0$ であり，また，β_2の値が小さいため，$\beta_2\omega_n^2 a_n^2 \ll 1$ となるので，式(6.7)は式(6.8)のようになる．

$$\overline{\omega}_n=\omega_n\left\{1+\frac{3P_0X_n^2(l)}{8\rho A l\,\omega_n^2\delta_0}\mu(V)\sin 2\phi_0\left(1-\frac{X_n^2(l)a_n^2\sin^2\phi_0}{32\delta_0^2}\right)\right\} \quad (6.8)$$

さらに，振動振幅a_nが小さく，$\dfrac{X_n^2(l)a_n^2\sin^2\phi_0}{32\delta_0^2}$ が無視できる場合には，$\overline{\omega}_n$ はさらに次式のように簡単な式で表される．

$$\overline{\omega}_n=\omega_n\left\{1+\frac{3P_0X_n^2(l)}{8\rho A l\,\omega_n^2\delta_0}\mu(V)\sin 2\phi_0\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6.9)$$

式(6.8),(6.9)から次のことがわかる。まず，振幅a_nが小さい場合，式(6.9)から，

(1)周波数変化量$\Delta\omega_n$は傾斜角 ϕ_0に対して $\sin 2\phi_0$ に比例して増加する．

(2)$\Delta\omega_n$ ははりの振動速度が零のときの摩擦係数$\mu(V)=\beta_0$に比例する．

(3)押し付け荷重は，$P_0=\overline{k}\,\delta_0^{3/2}$ より式(6.9)の$\Delta\omega_n$ を書き換えると$\Delta\omega_n$ は$\sqrt[3]{P_0}$ に比例する．

(4)はりの長さl は，$\omega_n=\dfrac{\lambda_n^2}{l^2}\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A}}$ の関係を用いると，$\Delta\omega_n$ は l^3 に比例する．

(5)$\Delta\omega_n$はω_n^2に逆比例することから，高次モードになるほど（ω_nが大きくなる），$\Delta\omega_n$ は小さくなる．

振幅a_nが大きい場合には式(6.8)における$\Delta\omega_n$ の第２項が大きくなって、振幅が小さい場合に比して$\Delta\omega_n$ の値は小さくなる．

式(6.8),(6.9)における考察から，傾斜角ϕ_0によって摩擦音の周波数が変化することが明らかになった．この原因として，(i)大振幅によるはりの非線形性，(ii)接触荷重の非線形性の２つが考えられる．Chu[41]らによれば，振幅が大きくなるとはりの固有振動数が高くなることが理論的に求められている．そこで，傾斜角によるはりの横振動加速度の変化を実測してみた．その結果を音圧，はりの縦振動加速度とともに図6.6に示す．音圧，振動加速度とともに傾斜角によって大きさはほとんど変化しないことがわかる．したがって，傾斜角の増大にともなってはりの振幅は大きくならず，はりの非線形性による周波数の変化はないと考えられる．つぎに押しつけ荷重の変動がなく，一定荷重P_0の場合を考えてみる．式(6.3)の右辺は簡単に

$$\frac{P_0X_n(l)}{\rho A l}\cos\phi_0\left(\beta_1\dot{\overline{T}}_n+\beta_2\dot{\overline{T}}_n^2+\beta_3\dot{\overline{T}}_n^3\right)$$

と表され，式(6.3)と同様の計算を行うと$\Delta\omega_n=0$　となる．したがって，$\overline{\omega}_n=\omega_n$となり傾斜角$\phi_0$によって，はりの周波数は変化しない．さらに，押しつけ荷重Pと$\overline{\delta}$との関係が，たとえば$P=\overline{k}\,\overline{\delta}$および$P=\overline{k}\,\overline{\delta}^2$で表されると仮定すると，振幅が小さい場合，式(6.9)は，

$$\overline{\omega}_n=\omega_n\left\{1+\frac{X_n^2(l)\overline{k}}{4\rho A l\omega_n^2}\mu(V)\sin 2\phi_0\right\}\qquad(P=\overline{k}\,\overline{\delta})$$

$$\overline{\omega}_n=\omega_n\left\{1+\frac{X_n^2(l)\overline{k}\,\delta_0}{2\rho A l\omega_n^2}\mu(V)\sin 2\phi_0\right\}\qquad(P=\overline{k}\,\overline{\delta}^2)\quad\cdots\cdots(6.10)$$

と表され，いずれの場合も傾斜角の増加にともなって，$P=\overline{k}\,\overline{\delta}^{3/2}$の場合と同様に周波数は高くなる．しかしながら，$l=7$cm，$P_0=19.6$ N，$\phi_0=4°$のときの計算を行うと，$P=\overline{k}\,\overline{\delta}$の場合，周波数の増加の比率は$(\xi_1)_{4°}=71$となり，実験結果より非常に大きく，$P=\overline{k}\,\overline{\delta}^2$の場合には，$(\xi_1)_{4°}=1.2$となって実験結果より小さくなる．

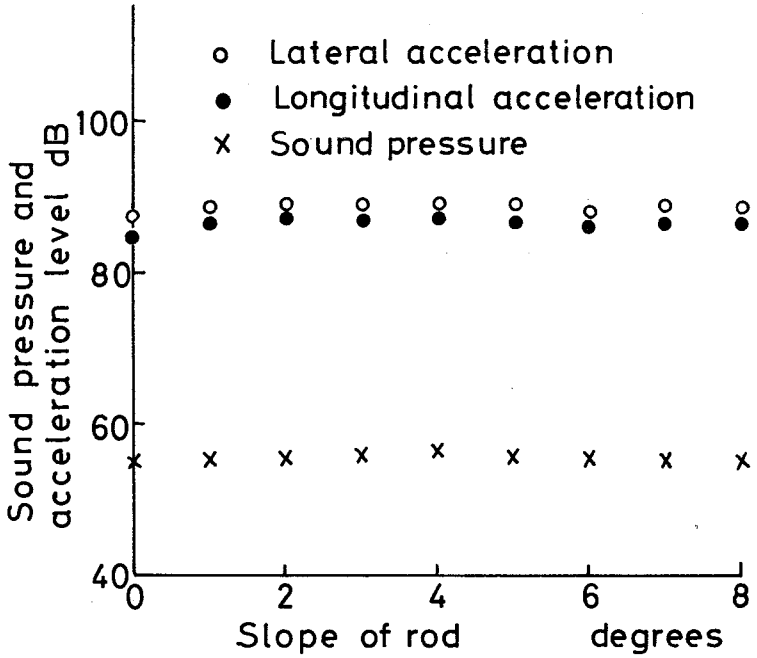


図6.6　傾斜角による音圧，はりの横および縦振動加速度のレベル変化（はり長さ 7cm ）

以上の考察から，はりの周波数が傾斜角ϕ_0によって変化するのは，はりと円板が$P=\overline{k}\,\overline{\delta}^{3/2}$で示されるような関係で弾性接触する場合にのみ生じる特徴ある現象であることがわかる．

つぎに，式(6.8),(6.9)から計算された結果と実験結果を比較検討してみる．

(1)こすれ音と鳴き音：はり長さ 7cmの一次モードの振動について計算を行う．振幅a_nが小さいこすれ音の場合には式(6.9)を用いればよい．ここで$\mu(V)$の値は第2章における摩擦係数曲線からえられた値 0.5を用いて計算する．その結果を図6.7に示すが，ほぼ実験結果に一致していることがわかる．鳴き音の場合には，$\mu(V)$が約1.2であり，式(6.9)から計算すると$\Delta\omega_n$は$\mu(V)$が大きい値だけこすれ音の場合より大きくなる．しかし，振幅a_nが大きいために（こすれ音の約30倍），式(6.8)を用いると，$\Delta\omega_n$の第2項の値が大きくなり，$\Delta\omega_n$は小さくなる．図6.7にその計算結果を破線で示すが，実験結果とほぼ一致している．

(2)はり長さl：式(6.9)から$\Delta\omega_n$はl^3に比例して増加する．たとえば，こすれ音について$\phi_0=4°$で，はりの長さ 3および10cm について計算すると，周波数の増加の比率は$(\xi_1)_{4°}=1.1$（$l=3$cm），$(\xi_1)_{4°}=5.1$（$l=10$cm）となる．実験結果では

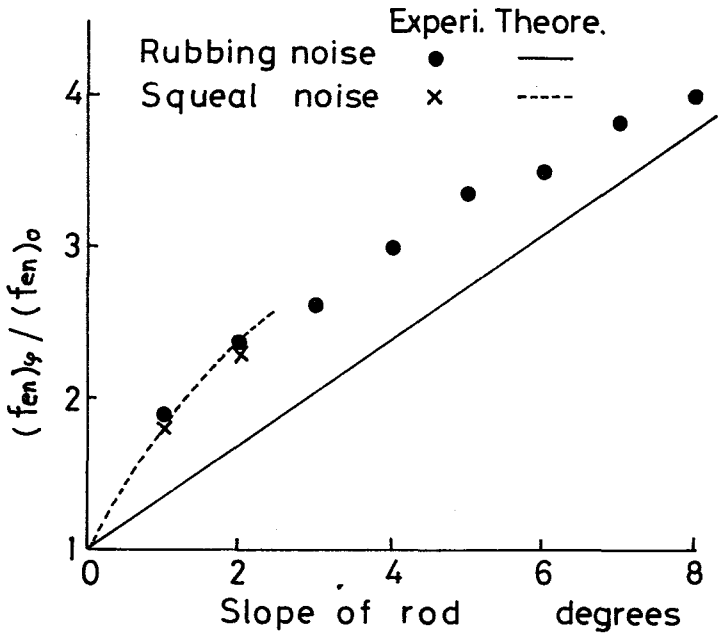


図6.7　こすれ音および鳴き音の周波数の増加の比率と傾斜角の関係
（実験値と計算値の比較，はり長さ 7cm ）

表6.2　はりの一次～三次モードの傾斜角による周波数の増加の比率
（はり長さ 7cm ）

傾斜角 φ deg.	$(f_{en})_\varphi/(f_{en})_0$					
	一次		二次		三次	
	実験値	計算値	実験値	計算値	実験値	計算値
2	2.4	1.70	1.2	1.02	1.02	1.002
4	3.0	2.39	1.4	1.04	1.03	1.005
6	3.5	3.07	1.6	1.05	1.04	1.007
8	4.0	3.75	1.8	1.07	1.06	1.009

$(\xi_1)_{4'}=1.7$（$l=3$cm），$(\xi_1)_{4'}=3.6$（$l=10$cm）であり，とくにはりが長い 10 cmでは実験結果より1.5倍ちかく周波数が高くなっている．これは，はりは長いほどたわみやすいために，はりと円板との接触剛性が小さくなり，式(6.9)で使用したδ_0を求めるのに用いた$\overline{k}$ の値よりも小さい値になるにもかかわらず，$\overline{k}$ の値を一定として計算したためと思われる．

(3)高次モード：はり長さ 7cmについて式(6.8)による計算結果を表6.2に示す．各モードともに傾斜角の増大にともない周波数の増加比率が大きくなること，および高次モードになるほど周波数の増加の比率が小さくなることは実験値と一致している．しかしながら増加の比率は実験値とは差があり，とくに二，三次モードではこの傾向が著しい．これは実験では図6.2の周波数分析結果からもわかるように，すべてのモードの周波数が含まれているにもかかわらず計算においてはモード連成を考慮しないことによるものと思われる．

以上のように式(6.8),(6.9)によってえられた傾斜角ϕ_0による周波数の変化量は実験結果と定量的には完全に一致していないが，定性的にはよく一致しており，式(6.8),(6.9)は傾斜角ϕ_0の変化によって周波数が変化するという特徴をよく表している．

6．4　傾斜角が負の場合（$\phi<0$）

6.4.1　実験結果

はり長さ 7cm，円板の回転速度 70cm/s，はりの傾斜角$\phi_0=-0.5°$ の場合の音圧，はりの横振動および縦振動の振動加速度およびはりと円板の接触波形を図6.8(a),(b)に示す．

図6.8(a)がびびり音発生前，図6.8(b)がびびり音発生時の波形である．傾斜角が-0.5°と小さい場合，実験開始後すぐにびびり音は発生せず．図6.8(a)のようなはりの横振動の一次の固有振動数f_{e1}成分と高周波成分を含む，こすれ音に類似した波形をもつ摩擦音が発生する．しかし，はりがf_{e1}と同じ周波数で円板から離脱することからもわかるように，振動加速度および音圧レベルはこすれ音よりも高い．図6.8(a)のような状態が２～３分続いた後，はり固定台が荷重方向（円板の半径方向）に振動し始め，図6.8(b)に示すような，かん高い不快な音をともなったびびり音が発生する．このときの音圧は90～95dBと非常に高く，はりと円板が接触するとき，衝撃音のような高いレベルの高周波が発生し，はりが円板から離脱するとはりは減衰しながらf_{e1}の自由振動をする．このような振動が一定周期で繰り返される．この繰り返しの振動数は約 70Hz であり，はり固定台の荷重方向の固有振動数に一致していることが加振試験より明らかになった．このようなびびり現象ははり固定台が荷重方向に振動せず固定とみなしていた時に発生した摩擦音とは非常に異なり，土井[42]による旋削における被削材の水平振動によるびびりと同じ現象であるといえるであろう．すなわち，ここで用いた円板（厚いためにほとんど振動しない）が旋削におけるバイトに，はり固定台の荷重方向振動が被削材の水平方向振動に対応している．傾斜角を-0.5°より大きくすると，すぐにびびり音を発生する．びびり音は図6.8(b)に示したものとまったく同様な波形であるが，はりを -2°以上傾けると，びびり振動は非常に激しくなり，はり先端が損傷し実験はできなかった．

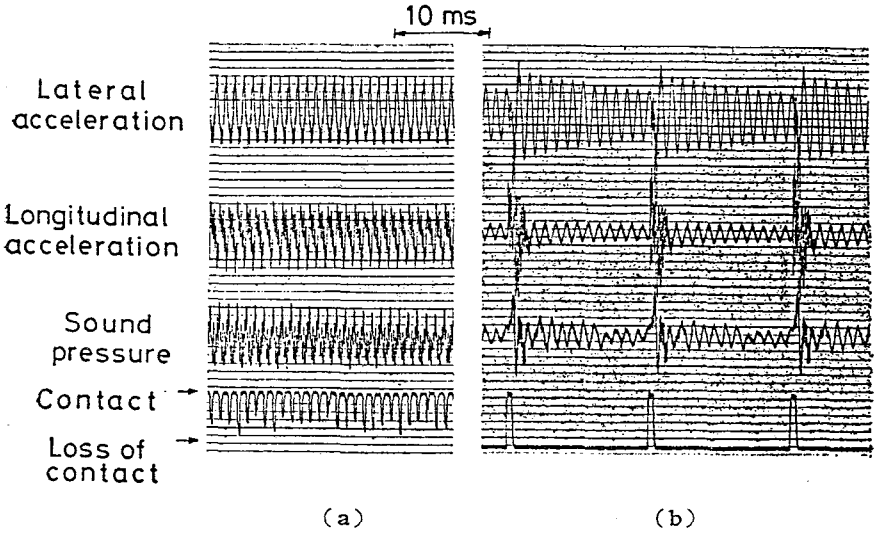


図6.8　びびり音発生前（ａ）とびびり音発生時（ｂ）の音圧，はりの振動加速度および接触波形（はり長さ 7cm ）

以上の実験結果から，びびり音の発生機構は次のように考えられる．実験開始直後，-0.5° のような小さい傾斜角の場合にはこすれ音であるが，はりの接触が負であるために摩擦によって表面のわずかなおうとつや損傷による強制力がはりに加えられ，はりは円板の回転方向へくいこまれるように変形する．このため，はりに加えられる荷重が増加し摩擦力も大きくなる．このとき，厚い円板は水平方向に変形しないので，はり固定台が動かざるをえなくなり，はりは円板から離脱し始める［図6.8(a)］．このような状態がくりかえされている間に，くりかえし摩耗によりはりおよび円板の表面の損傷が激しくなり，はり先端の変形量も大きくなって，はりへ作用する荷重はさらに増加する．このため，はり固定台は荷重方向に大きく移動させられ，はりは円板から完全に離脱することになる．しかし，押しつけ荷重 19.6N がはり固定台に加わっているので，再びはりは円板に接触するようになる．このような振動がくりかえされる．この周期ははり固定台の荷重方向の固有周期に一致することになる．

6.4.2　理論解析

図6.9ははり長さ7cmにおいて，はり固定台が固定しているとして導いた式（6.1）を用いて傾斜角を 0～ -2° まで変化させ計算した荷重およびはりの横振動加速度レベルを示す．

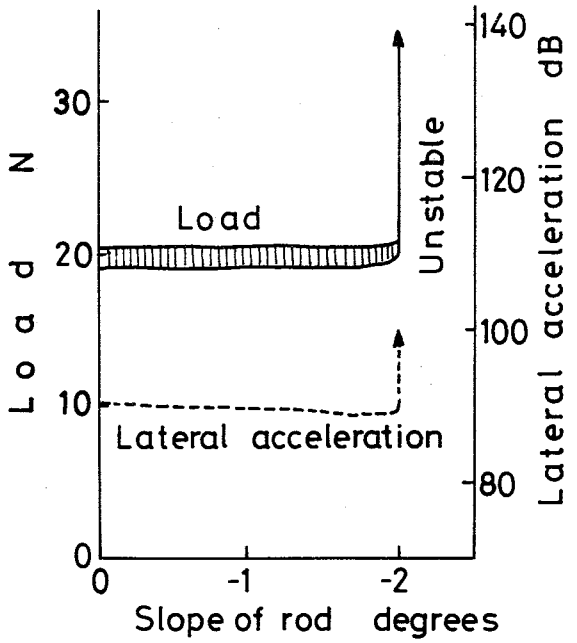


図6.9　負の傾斜角における荷重およびはりの横振動加速度レベルの変化（はり長さ 7cm，式(6.1)による計算結果）

なお，計算は初期荷重 19.6N，円板の回転速度70cm/s，摩擦係数$\mu(v_r)$は第２章で実験からえられたこすれ音の値を用いて行った．図から -2° で荷重，振動加速度ともにレベルが急激に大きくなって発散状態となり，振動が不安定になることがわかる．実際には，このような大きな荷重になる前にはり固定台が移動して，はりが円板から離脱し前述のようなびびり音が発生するものと考えられる．なお，実験結果ではびびり音は傾斜角が 約-0.5° で発生しているが，計算では -2° 以上に傾けないと発生しない．これは計算におけるはり先端のたわみ角に対する傾斜角の変化が実際より大きくなっているためと思われる．

6.5 結言

はりを円板に対して傾け，乾性摩擦させた場合に発生する摩擦音，摩擦振動について，理論的，実験的に検討した結果，次のような結論が得られた．

(1) はりの傾斜角が正の場合には［こすれ音］および［鳴き音］が発生し，負の場合には旋削時のびびりのような激しい振動をともなった［びびり音］を発生する．

(2) はり傾斜角が正で，こすれ音が発生する場合には傾斜角が大きくなるにともない，はりの横振動の各モードの固有振動数が高くなるという特徴ある現象を生じる．また，はりが長くなると傾斜角による周波数の増加の比率は大きくなる．さらに高次モードになるほど，傾斜角による周波数の増加の比率は小さくなる．また，鳴き音は，傾斜角が大きくなるにともない，周波数が高くなるが，発生しにくくなる．とくに一次モードの鳴き音は傾斜角が大きくなると発生しにくくなる．

(3) はりと円板の弾性接触を考慮したはりの横振動の運動方程式から，傾斜角による周波数の変動を近似的に求めた結果，定性的に実験結果と一致した．また，傾斜角による周波数の変動は荷重変動がない場合には生じず，はりと円板が弾性接触し$P=\overline{k}\,\overline{\delta}^{3/2}$のような関係を保ちながら荷重変動があるときのみ生じることが明らかになった．

(4) はり傾斜角が負の場合，表面のわずかなおうとつなどによりはりに強制力が加わってはりは円板の回転方向にくいこまれるように変形する．このため，はりへの荷重が増加し，はり固定台が移動せざるをえなくなり，はりは円板から離脱する．しかし，はり固定台には押しつけ荷重が加わっているので，はりは再び円板に接触する．このようなくり返しがはり固定台の荷重方向の固有振動の周期に一致して行われ，音圧レベルの高いびびり音が発生する．

第7章　タイヤのスキールノイズの発生機構

7.1 緒言

非金属どうしの摩擦音の例として，自動車が急旋回時に横すべりし，タイヤと路面の間で発生するタイヤスキールノイズを取り上げ，この発生機構を解明した．

自動車のタイヤ騒音はトレッドパターンノイズ，風切り音，スキールノイズ，弾性振動音などに分類される．これらのうち，スキールノイズ（以下スキールと称する）はMillerらの研究[6]を除いて，あまり行われておらず，その発生機構は十分解明されていない．Millerらはスキールや路面に残ったタイヤのこん跡を分析して，スキール発生部分の研究を行った．それによると，タイヤ接地面の後ろの部分に Buckled region と呼ばれる低接地圧部分が存在し，この周囲が振動しているのを観察し，この振動によってスキールが発生すると述べている．しかし，スキール発生時の運転条件については述べられていない．一方，タイヤと路面の間の摩擦特性については，ブレーキやコーナリング性能に大きな影響を与えるために，Moore[43]，Savkoor[44]，Schallamach[45]や Grosch[46]らにより多くの研究がなされているが，スキール発生との関係について述べられたものは見あたらない．

本章では．急旋回時に発生するスキールの発生機構を解明するために，実車試験およびタイヤ単体によるドラム試験を行い，タイヤに加わる垂直荷重やタイヤの横すべり速度がスキール発生にどのような関係があるかを検討した．さらに，タイヤのトレッド部分のゴムを用い，ゴムの摩擦係数とすべり速度や摩擦面温度の関係を実験から求めた．これに基づき，スキール発生条件やスキールの周波数などを理論的に求め，実車試験およびドラム試験結果と比較検討した．

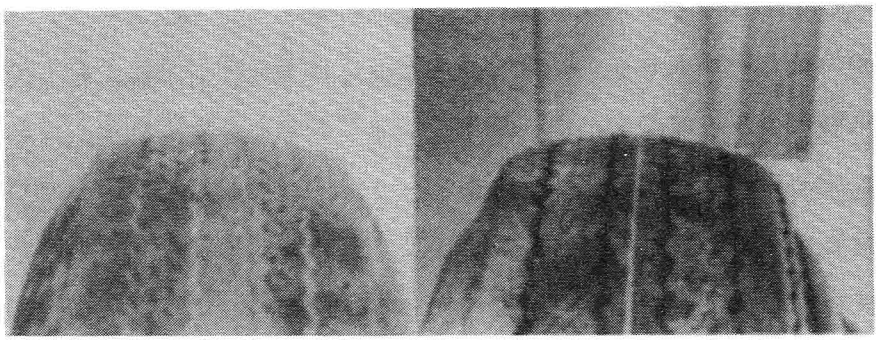
7.2　実車による試験

7.2.1　実験方法

実際の自動車運転時に発生するスキールの特性と発生条件を調べるために，小型乗用車の４輪に同一種類のタイヤを装着してスキールを発生させた．実験に用いたタイヤは市販のバイアスタイヤで摩耗したもの（タイヤＡ）および新品（タイヤＢ）の２種類である．図7.1および表7.1に写真および諸元をそれぞれ示す．

表7.1　実験用タイヤの諸元とスキール周波数

	タイヤ種類とトレッドパターン		リブ幅 mm	トレッドゴム厚mm	溝深さ mm	スキール周波数Hz	
						計算値	実験値
実車試験	A		18	4.4	1.5	2 300	2 200
	B		18	9.7	7.2	680	700
ドラム試験	C		100	10.5	0	660	675
	D		32	10.5	8.0	640	625
	E		18	10.5	8.0	600	600
	F		18	10.5	4.0	600	610



A　　B

図7.1 実車試験用タイヤ

アスファルト舗装した平坦路面上で前輪の舵角を一定に保ちながら円旋回させ，スキールが発生するまで速度を徐々に増加させた．４輪の旋回半径は路面に残ったタイヤの痕跡より測定し，スキール発生時の走行速度は１周に要する時間と旋回半径より求めた．発生したスキールは車体側面に取り付けたマイクロホンと旋回外側の地上に設置したマイクロホンによって測定し，それらをデータレコーダに収録した．これらのデータの分析はＦＦＴアナライザなどにより行った．

7.2.2　実験結果

図7.2に摩耗したタイヤＡのスキールの音圧波形を示す．波形はスキール特有の正弦波状であるが，うなり現象もみられるために，スキールは断続的に複数の部分から発生していると思われる．表7.2はスキール発生時に旋回中の自動車の内側の前輪舵角，走行速度およびスキールの周波数を示す．スキール発生時の走行速度は旋回半径が大きい（すなわち，舵角が小さい）ほど大きい．また，スキールが発生する走行速度はタイヤの摩耗の程度にかかわらず同じである．しかし，摩耗したタイヤＡのスキールの周波数は新品のタイヤＢに比較してかなり高い．

Millerら[6]によれば，アルミ板上でスキールを発生させると，その板の表面に波状または破線状の傷が残ったことから，スキールがタイヤのトレッドゴムの振動であることが確認されたとしている．このことを確認するために，路面に厚さ1mmで幅 1m，長さ 2m の長方形のアルミ板を固定し，その上をスキールが発生している状態で走行させた．図7.3はその痕跡の拡大写真である．タイヤＡを使用し内側前輪の舵角は43°である．傷を細かく観察すると波状，破線状のものが見られる．これらの傷はタイヤのトレッドゴムに付着している小さな砂の粒などがトレッドの横滑りとともに板上に押しつけられてできたもので，トレッドの振動によって波状または破線状になったものと考えられる．これらの傷の波長は約 0.55mm である．この時のタイヤの横すべり速度は実測出来なかったが，後述のタイヤ単体のドラム試験によれば本実験の走行速度（4.5m/s；約16km/h）であればスキールが発生する横すべり速度は表 7.3 より約 1.1m/s である．この波長より周波数を計算すると約 2000Hzとなり，表7.2のスキール周波数（2200Hz）にほぼ一致している．このことから，スキールはタイヤのトレッドゴムの振動によって発生すると考えられる．

表7.2 スキール発生時の内側前輪舵角と走行速度の関係

タイヤ種類	A		B			
内側前輪舵角 deg	43	12.5	43	34	28	9
走行速度 m/s	4.5	8.5	4.5	5.0	5.6	9.8
スキール周波数 Hz	2 200		700			

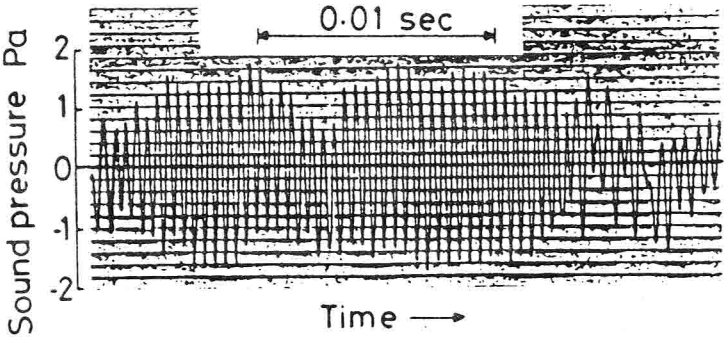


図7.2　スキール音圧波形（タイヤA）

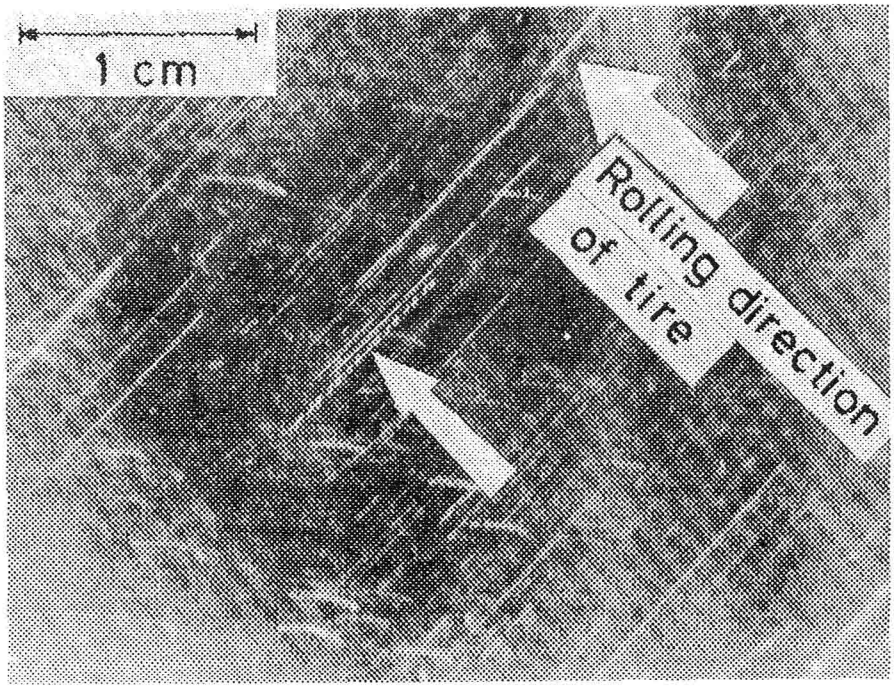


図7.3　アルミ板上のスキールのこん跡

7.3　タイヤ単体によるドラム試験

7.3.1 実験方法

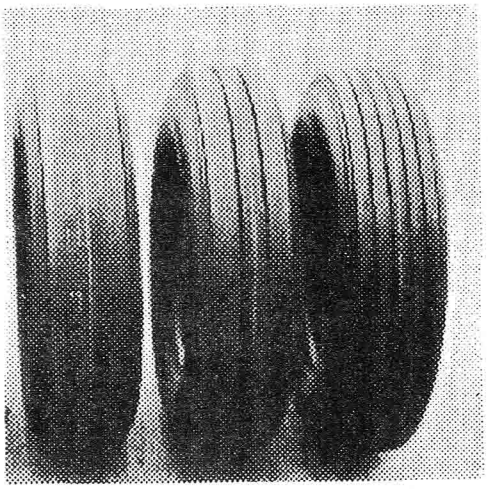
実車による試験では，各タイヤにかかる垂直荷重や路面から受ける横力などを知るには，走行速度や旋回半径から計算しなければならない．そこで，スキール発生条件に及ぼす垂直荷重，走行速度，横すべり角および横力などの関係をより精密に調べるため，タイヤを回転するドラムに押しつけて行うドラム試験を行った．使用した4種類のタイヤの諸元を表 7.1 に，また，タイヤC，D，Eについては，その写真を図 7.4 にそれぞれ示す．いずれも特別製のリム径 13インチのバイアスタイヤで，溝のないプレーンタイヤ（タイヤC）に溝を周方向に彫ってトレッドパターンを作った．タイヤDとEは溝の深さが 8mm で同じであるが，リブの幅を変えてある．タイヤFはタイヤEと同じリブ幅であるが，溝の深さが 4mm である．なお，タイヤD，E，Fのトレッドパターンは直線リブ形であり，タイヤ空気圧は 0.17MPa である．

図 7.5 にドラム試験機および測定装置のブロック図を示す．ドラム試験機は路面に相当する回転ドラムの上をタイヤが転動するもので，ドラム表面にすべり止め（セフティウオーク，３M製）を貼り，摩擦特性を実際の路面に近づけた．スキール測定用のマイクロホンはタイヤの横方向，接地中心から水平に 120cm 離れた高さ 30cm のところに設置した．スキールのほかにタイヤに働く横力，垂直荷重および横すべり角（タイヤの回転方向とドラムの回転方向のなす角度）をデータレコーダに収録した．ならし運転した後，垂直荷重とドラムの回転速度を一定に保ちながら，横すべり角を 0° → 8° → 0° → -8° → 0° と一定角速度で変化させた．垂直荷重は 1470N，1940N および 4410N ，タイヤの走行速度は 30km/h（8.3m/s）～ 60km/h（16.7m/s）である．

7.3.2　実験結果

一定荷重，一定速度のもとで，横すべり角を大きくすると，ある角度でスキールが発生し始め，その後，さらに角度を大きくしてもスキールは持続する．このとき，スキールが発生したことの確認は（1）音圧レベルが急激に上昇する．（2）音圧波形が正弦波状になる．（3）ＦＦＴアナライザによる周波数分析時にスキール周波数のレベルが急激に上昇する．の３点と聴感により行った．

スキールの発生に関係が深いと思われる因子として垂直荷重，横すべり角，横力および横すべり速度などが考えられる．表 7.3 にはスキール発生時のこれらの値を示す．横力は垂直荷重の大きさにほぼ比例する．また，溝のないタイヤCの場合にも他のタイヤと同様



C　　D　　E

図7.4　ドラム試験用タイヤ

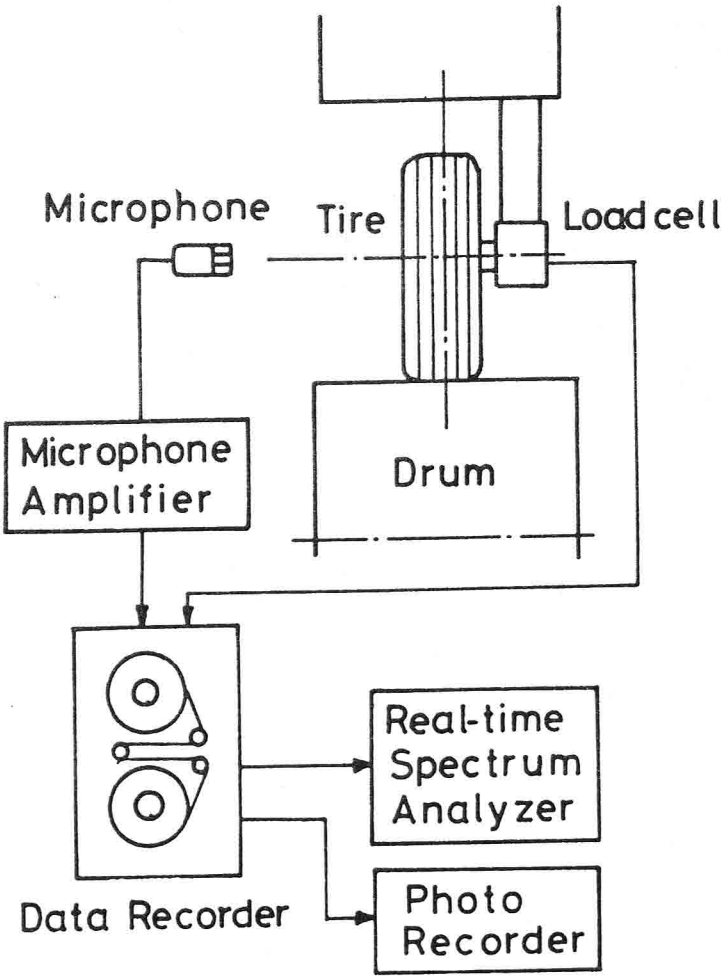


図7.5　ドラム試験機および測定装置のブロック図

にスキールが発生する．スキール発生時の横すべり速度は 1.1～ 1.7m/s で走行速度によって変化するが，垂直荷重，溝深さ，リブ幅やトレッドパターンによってはほとんど変化しない．すなわち，走行速度が30km/hで横すべり速度は約 1.1m/s，50km/hでは約 1.6m/s となり，走行速度が大きいほど横すべり速度が大きくならないとスキールは発生しない．これは走行速度が大きい場合，タイヤのゴムの温度が上昇し，ゴムの摩擦係数が変化するためであると考えられる． Savkoor[44]，Schallamach[45]，Grosch[46]らの実験結果からゴムの温度が上昇するほど，後で検討するスキールの発生条件に非常に関係がある横すべり速度に対する摩擦係数の勾配が正から負となる時の横すべり速度の値が大きくなることが予測される．したがって，走行速度が大きくなるほど横すべり速度も大きくならないとスキールは発生しない．図 7.6 はタイヤEについて，種々の垂直荷重や走行速度における横すべり速度に対する音圧レベルの変化を示したものである．図にはスキールが発生し始める横すべり速度を斜線を入れて示してある．垂直荷重の大きさにかかわらず，音圧レベルは横すべり速度に対し，同じように上昇するが，走行速度が大きいと，横すべり速度が大きくならないと音圧レベルは上昇せず，スキールも発生しない．このことは他のタイヤについても同じ傾向であった．

次に，スキールの周波数について検討する．横すべり角の変化や時間の経過にともなって，スキール周波数は多少変動する．これはトレッドのゴムの弾性特性が垂直荷重や実験中のトレッドゴムの温度上昇によって変化することによると考えられる．そこで，スキールが発生してから 3分後，垂直荷重 2940N ，走行速度 30km/h ，横すべり角 8° におけるスキール周波数を測定した．それらの結果を前述の表 7.1 に示す．タイヤC，D，E，Fともにすべてトレッドゴムの厚さは等しいが，タイヤCには溝がなく，タイヤD，E，Fはリブ幅や溝深さが異なるにもかかわらず，スキール周波数はあまり差がない．この結果は，スキール周波数はリブ幅や溝深さにあまり関係なく，トレッドゴム厚さに依存することを示している．したがって，実車試験において，摩耗したタイヤのスキール周波数が高いのはトレッドの溝が浅いためではなく，トレッドゴムの厚さが小さくなったためであることがわかる．

7.4　スキール発生条件についての理論解析

7.4.1 定常円旋回における力のつり合い

実車試験における結果をドラム試験による結果と比較するために，定常円旋回中の自動

表7.3　スキール発生時の運転条件（ドラム試験）

タイヤ種類	荷重 N	走行速度 km/h	横すべり角 deg	横力 N	横すべり速度 m/s
C	2 940	30	7.5	2 400	1.1
D	2 940	30	8.0	2 250	1.2
E	1 470	30	7.5	1 370	1.1
		50	6.5	1 420	1.6
	2 940	30	7.5	2 110	1.1
		40	7.0	2 250	1.35
		50	6.5	2 160	1.6
		60	6.0	2 110	1.75
	4 410	30	7.5	2 600	1.1
		50	6.5	2 740	1.6
F	2 940	30	7.0	2 250	1.1

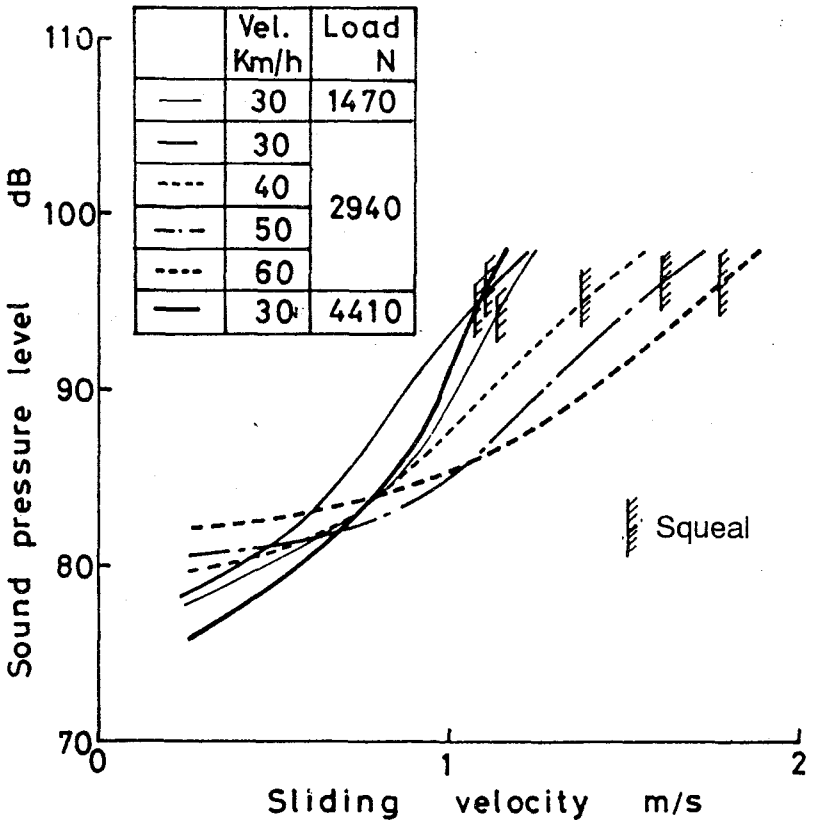


図7.6　種々の走行速度，荷重における横すべり速度と音圧レベルの関係によるスキールの発生領域　（タイヤE）

車に作用する力のつり合いの式[47]を用いて，スキール発生に最も関係があり，実測が困難なタイヤの横すべり速度を計算した．図 7.7 に定常円旋回中の自動車に作用する力を示す．左旋回として，記号を以下のように定める．なお，添字 i =1,2,3,4 はそれぞれ左前輪，右前輪，左後輪，右後輪を表す．

C_i：タイヤに働くコーナリングフォース，

R_i：コーナリングドラグ，

N_i：タイヤにかかる垂直荷重，

T：駆動力，

r_c：自動車の重心点の旋回半径，

ϕ_i：旋回中心から車体の中心線へおろした垂線と各タイヤの旋回半径のなす角，

β_i：タイヤの横すべり角，

β：車体の中心線と重心点の進行方向のなす角（$\equiv\phi$）

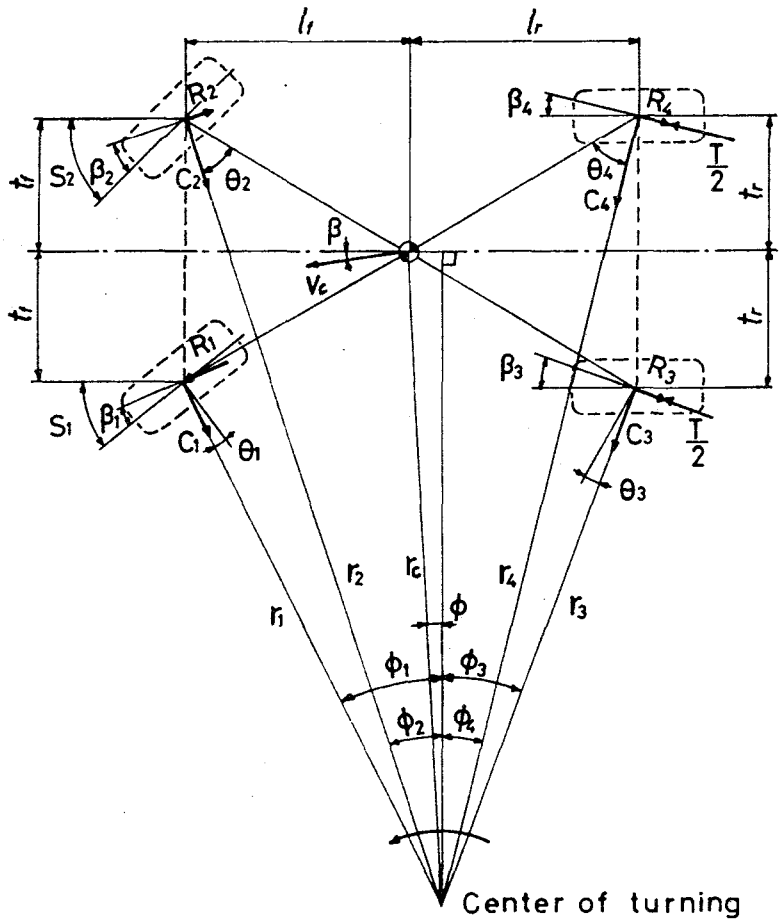


図7.7　定常円旋回中の自動車に働く力

S_1, S_2：前輪の実舵角，

M_c：車両質量，

t_f, t_r：前,後輪のトレッド幅の1／2，

l_f, l_r：重心と前,後輪車軸との水平距離，

h_c：重心の地上高，

V_c：重心点の速度，

K_f, K_r：前,後輪のタイヤの懸架装置を含むばね定数，

r_i：各タイヤの旋回半径，

g：重力の加速度

前後，左右，上下方向の力のつり合いから

$$-C_1\sin\phi_1-R_1\cos\phi_1-C_2\sin\phi_2-R_2\cos\phi_2+C_3\sin\phi_3-R_3'\cos\phi_3$$

$$+C_4\sin\phi_4-R_4'\cos\phi_4+\frac{M_cV_c^2}{r_c}\sin\phi=0 \quad \cdots\cdots (7.1)$$

$$C_1\cos\phi_1-R_1\sin\phi_1+C_2\cos\phi_2-R_2\sin\phi_2+C_3\cos\phi_3+R_3'\sin\phi_3$$

$$+C_4\cos\phi_4+R_4'\sin\phi_4-\frac{M_cV_c^2}{r_c}\cos\phi=0 \quad \cdots\cdots (7.2)$$

ただし，$R_3'=R_3-\frac{T}{2}$，$R_4'=R_4-\frac{T}{2}$

$$N_1+N_2+N_3+N_4=M_cg \quad \cdots\cdots (7.3)$$

前後軸，左右軸，上下軸まわりのモーメントのつり合いから

$$(C_1\cos\phi_1-R_1\sin\phi_1+C_2\cos\phi_2-R_2\sin\phi_2$$

$$+C_3\cos\phi_3+R_3'\sin\phi_3+C_4\cos\phi_4+R_4'\sin\phi_4)\,h_c$$

$$+(N_1-N_2)\,t_f+(N_3-N_4)\,t_r=0 \quad \cdots\cdots (7.4)$$

$$(C_1\sin\phi_1+R_1\cos\phi_1+C_2\sin\phi_2+R_2\cos\phi_2$$

$$-C_3\sin\phi_3+R_3'\cos\phi_3-C_4\sin\phi_4+R_4'\cos\phi_4)\,h_c$$

$$-(N_1+N_2)\,l_f+(N_3+N_4)\,l_r=0 \quad \cdots\cdots (7.5)$$

$$(C_1\cos\phi_1-R_1\sin\phi_1)\,l_f+(C_2\cos\phi_2-R_2\sin\phi_2)\,l_f$$

$$-(C_3\cos\phi_3+R_3'\sin\phi_3)\,l_r-(C_4\cos\phi_4+R_4'\sin\phi_4)\,l_r$$

$$+(C_1\sin\phi_1+R_1\cos\phi_1)\,t_f-(C_2\sin\phi_2+R_2\cos\phi_2)\,t_f$$

$$+(C_3\sin\phi_3-R_3'\cos\phi_3)\,t_r-(C_4\sin\phi_4-R_4'\cos\phi_4)\,t_r=0 \quad \cdots (7.6)$$

さらに，車体を剛体とみなして，4輪が水平面上にあるための条件として，

$$\frac{(N_2-N_1)}{K_f t_f}=\frac{(N_4-N_3)}{K_r t_r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.7)$$

の7つの式がえられる．

コーナリングフォースC_iとコーナリングドラグR_iはタイヤに働く横力F_iから

$$C_i=F_i\cos\beta_i \quad , \quad R_i=F_i\sin\beta_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.8)$$

と表される． Fiala らのモデル[48]などからF_iは以下のように表すことができる．

$$F_i=3\mu_s N_i q\ (1-q)^2+\mu_d N_i q^2\ (3-2q)\ ,\ 0<q<1$$

$$F_i=\mu_d N_i, \quad q\geqq 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.9)$$

なお，$q=G_y l_i^2\dfrac{\tan\beta_i}{6\mu_s N_i}$

ここで，μ_s：最大静止摩擦係数，μ_d：動摩擦係数，l_i：接地長さ，

G_y：トレッドの横弾性係数でリブの横弾性定数[49]K_rを用いると，$G_y=\dfrac{K_r}{b_t l_i}$となる．

後輪の実舵角を無視すると，β_i,ϕ_i,S_1,S_2の間には次式が成り立つ．

$$\beta_1=S_1-\phi_1,\ \beta_2=S_2-\phi_2,\ \beta_3=\phi_3,\ \beta_4=\phi_4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.10)$$

また，幾何学的条件からϕ_iは次のように表される．

$$\phi_1=\tan^{-1}\left(\frac{l_f+r_c\sin\phi}{r_c\cos\phi-t_f}\right), \quad \phi_2=\tan^{-1}\left(\frac{l_f+r_c\sin\phi}{r_c\cos\phi+t_f}\right),$$

$$\phi_3=\tan^{-1}\left(\frac{l_r-r_c\sin\phi}{r_c\cos\phi-t_r}\right), \quad \phi_4=\tan^{-1}\left(\frac{l_r-r_c\sin\phi}{r_c\cos\phi+t_r}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.11)$$

実舵角S_1とS_2の間の関係は旋回半径，車速などによって変化すると思われるが，近似的に低速の旋回時に成り立つ次式を用いる．

$$\cot S_2=\cot S_1-\frac{t_f+t_r}{l_f+l_r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.12)$$

式(7.8)～(7.12)の関係式を式(7.1),(7.2)と(7.4)～(7.6)に代入し，式(7.3),(7.7)を含めた7個の方程式がえられる．車速Vに対して$N_1,N_2,N_3,N_4,T,\phi,r_c$（$S_1$が一定のとき）が数値計算によって求められる．なお，タイヤの横すべり速度v_iは次式によって求める．

$$v_i=\frac{r_i V_c\sin\beta_i}{r_c} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.13)$$

S_1を一定にしてr_cを求めた結果の一例を図 7.8 に示す．計算には以下の数値を用いた
t_f= 0.628m, t_r= 0.623m, h_c= 0.535m, l_f= 1.193m, l_r= 1.147m, K_f= 17.0N/m, K_r= 16.7N/m, M_c= 1000kg.
また，l_i(m)とN_i(N)との関係は実験結果から$l_i^2=8.24\times10^{-4}N_i$を用いた．$\mu_s$は本来，後述の図 7.12 の摩擦係数曲線から種々の走行速度によって変えるべきであるが，実車の旋回試験では走行速度が最高 35km/h であるので，摩擦面温度が 90℃の値 1.08 を用い，μ_dは近似的に 0.8 とした．

図 7.8 において，タイヤが完全にすべる（$q\geqq1$）までは走行速度にかかわらず，旋回半径r_cはほぼ一定であるが，タイヤがすべり始めるとr_cは急激に増大する．

表 7.4 は内側前輪舵角S_1が一定のとき 4 輪すべてが完全にすべり始める走行速度および各タイヤの横すべり速度の計算結果を示す．なお，S_1=43° の時のみ，タイヤが完全にすべり始める直前の横すべり速度もあわせて示してある．S_1=43° の結果からわかるよう

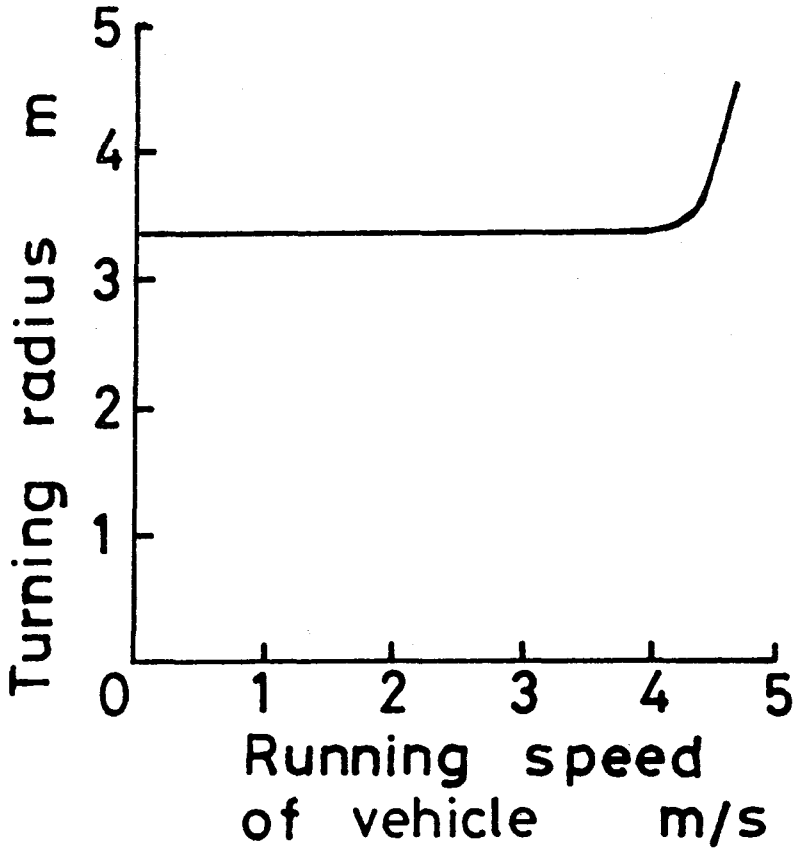


図7.8 走行速度と旋回半径の関係 （S_1= 43°）

に，横すべり速度はタイヤ全体がすべらないときは非常に小さな値である．しかし，走行速度が増大して，4輪ともすべると横すべり速度は急激に増大する．これらの横すべり速度はドラム試験におけるスキール発生時のそれよりも大きい．とくにS_1が小さい場合，横すべり速度は大きくなる．このことは実車試験でタイヤが完全にすべる場合，ドラム試験におけるスキール発生条件を満たしていることを示している．また，タイヤが完全にすべってスキールを発生する走行速度も表 7.2 の実測値とほぼ一致しており，スキールの発生条件を計算により求めることが可能である．

7.4.2　スキール発生の1自由度振動モデル

スキールはアルミ板上のスキールの痕跡やスキール周波数などの検討結果から，タイヤトレッドのエレメントが路面から摩擦力をうけ，断続的にすべりを生じて発生すると考えられる．そこで図 7.9 に示すようにトレッドのリブ1本の接地部分が振動すると考え，運

表7.4　完全にすべり始める時の走行速度と横すべり速度の計算結果

内側前輪舵角 S_1 deg	走行速度 V_c m/s	横すべり速度 m/s			
		v_1	v_2	v_3	v_4
43	4.4	1.63	1.85	2.06	2.06
43	(4.35)	(0.04)	(0.04)	(0.02)	(0.02)
34	5.1	1.81	1.95	2.19	2.19
28	5.7	2.14	2.25	2.47	2.47
12.5	8.5	2.76	2.79	3.06	3.06
9	10.3	3.49	3.50	3.66	3.66

（　）内はすべり始める直前の値

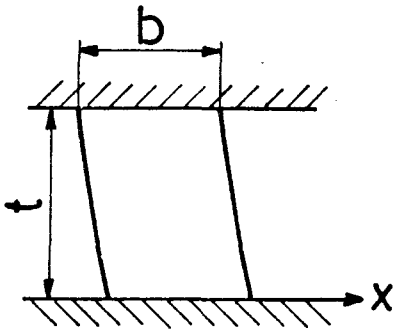


図7.9　リブ1本の振動モデル

動方程式をたてると式（7.14）のようになる．

$$M_t \ddot{x} + C_t \dot{x} + K_t x = \frac{N_t}{n} \mu (v - \dot{x}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.14)$$

ここで，x：横方向変位，M_t：リブ１本の接地部分の質量，$M_t = b_t l_t t \rho_t$，b_t：トレッドのリブ幅，l_t：トレッドの接地長さ，t：酒井[49]によるとtは溝深さとしているが，実際振動する部分の長さであることから，図 7.10 に示すタイヤ断面図において，トレッドがサイドウオールのゴム層の上についているものとみなし，この層より上の部分が振動するものと仮定した．したがってトレッドゴム厚さからトレッドゴムの上部のカーカスに拘束され振動しない部分（2mm）を除いた値とした．

ρ_t：ゴムの密度，C_t：リブの減衰係数，K_t：リブの横方向弾性定数[49]，

$K_t = \dfrac{E_t b_t l_t}{\left\{ t \left(\dfrac{9}{2} + \dfrac{4t^2}{b_t^2} \right) \right\}}$，$E_t$：ゴムの弾性係数，$N_t$：垂直荷重，$n$：リブの本数，

μ：タイヤと路面の間の摩擦係数で相対すべり速度 $v - \dot{x}$ の関数，

v：タイヤの横すべり速度，$[\dot{\ }]$：時間についての微分を表す．

7.4.3 タイヤトレッド部の摩擦特性

式（7.14)によって，スキールの発生を検討するのに，タイヤトレッド部分の摩擦特性を知っておく必要がある．前述のタイヤ単体によるドラム試験結果から，スキールが発生するときのタイヤの横すべり速度は走行速度によって，かなり異なっていた．この理由として，走行速度の増大にともなう摩擦面温度上昇によって摩擦特性が変化することをあげた．

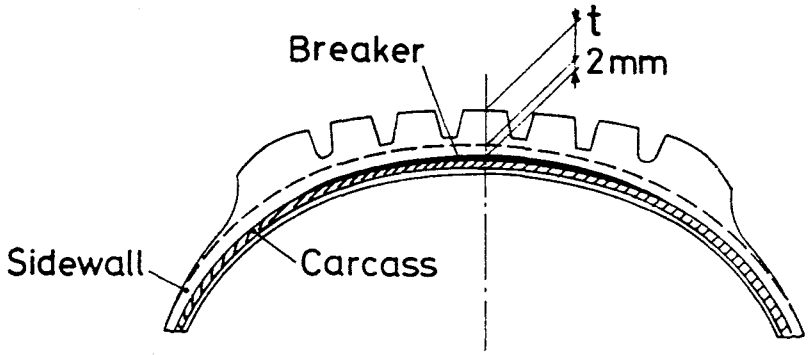


図7.10　タイヤの断面図

そこで，ゴムの摩擦特性が温度によってどのように変化するか，タイヤのトレッドのカーカス部を除いたゴムを用いて実験を行った．図7.11にその装置を示す．ドラム試験の場合と同様に，回転円板（ S45C製，直径 120mm，厚さ 23mm ）の円周面にすべり止め（セフティウオーク，3M製）を貼りつけ，この円周面に片持ちはりに取り付けたトレッドゴムを一定荷重で押しつけた．摩擦係数は片持ちはり固定用の支柱に貼ったひずみゲージにより求めた．摩擦面温度は直接測定することが困難なので，トレッド摩擦面から約1mm内側にクロメルアルメル熱電対を埋め込んで測定した．摩擦面温度を均一に保つため，加熱器によって雰囲気温度と摩擦面温度とを同一にした．図7.12は摩擦面温度が 50 ～ 130℃，すべり速度が 0.4 ～ 2.5m/s に対する摩擦係数の実験結果を示す．温度上昇にともない，摩擦係数は小さくなる．また，摩擦係数の勾配はすべり速度の増大にともない，正→負→正となり，高温になるにつれてスキール発生に関係のある摩擦係数の勾配が正から負になるときのすべり速度は大きくなる傾向にある．得られた図 7.12 の摩擦係数を以下のような相対すべり速度 v_r $(\equiv v-\dot{x})$ の三次の多項式で表す．

$$\mu\ (v_r)=\mu_0+\mu_1 v_r+\mu_2 v_r^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.15)$$

式（7.15)の係数 μ_0～μ_2 は図 7.12 の実験結果から最小自乗法によって決定した．図 7.12 の実線は各温度における式（7.15)の計算結果を示す．式（7.15）を式（7.14)に代入すると次式がえられる．

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\alpha_0+\alpha_1\dot{x}+\alpha_2\dot{x}^2+\alpha_3\dot{x}^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.16)$$

ここで，$\alpha_0=\dfrac{N_t}{M_t n}\ (\mu_0+\mu_1 v+\mu_2 v^3)$

$$\alpha_1=-\frac{N_t}{M_t n}\left\{\mu'(v)+\frac{nC_t}{N_t}\right\},\quad \alpha_2=\frac{3\mu_2 v N_t}{M_t n},\quad \alpha_3=-\frac{N_t}{M_t n}\mu_2$$

$$\mu'\ (v)=\left\{\frac{d\mu\ (v_r)}{dv_r}\right\}_{v_r=v},\quad \omega_0=\sqrt{\frac{K_t}{M_t}}$$

スキールは振幅が一定値に収束する安定解である必要がある．式（7.16）から，位相振幅徐変化法を用いて，安定解をもつ条件を求めると次式のようになる．

$$\alpha_1>0,\ \alpha_3<0 \text{ すなわち，} \mu_2>0\ ,\mu'\ (v)+\frac{nC_t}{N_t}<0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.17)$$

また，そのときの振幅 u は次式で表される．

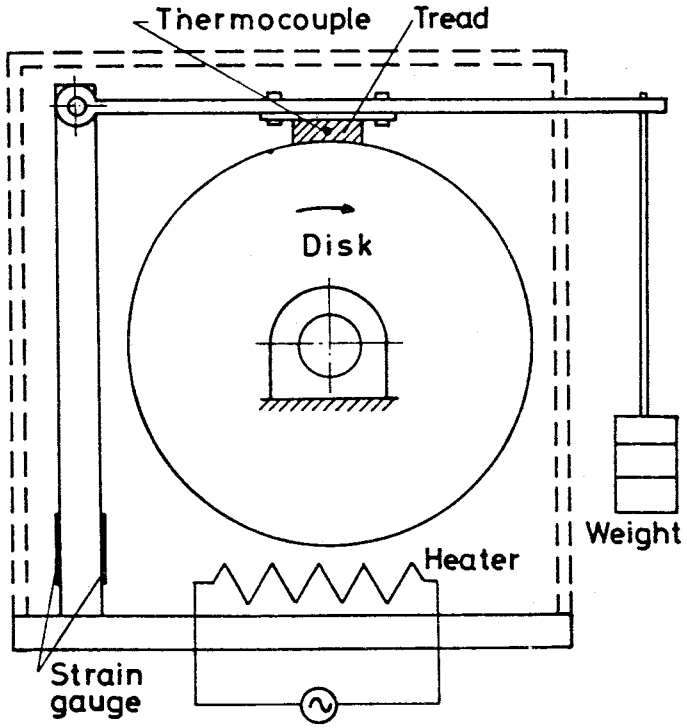


図7.11　トレッドゴムの摩擦係数実験装置

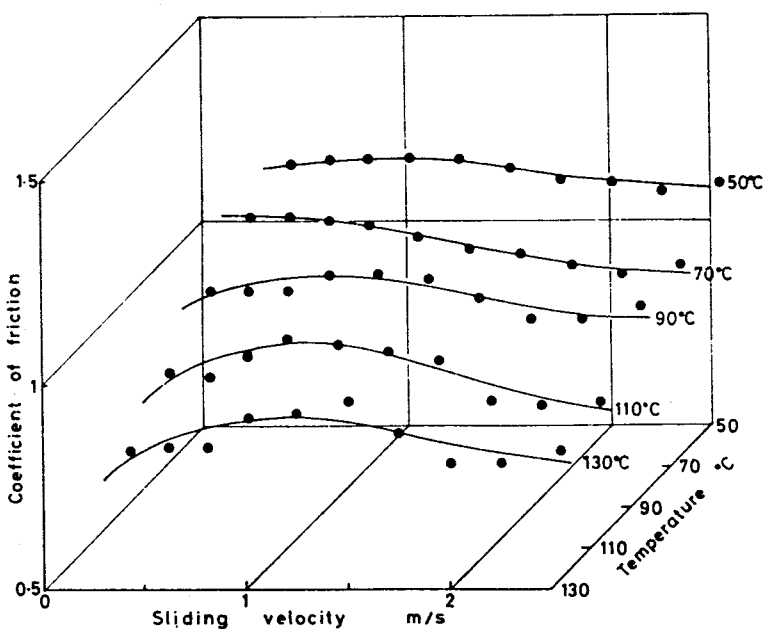


図7.12　種々の温度におけるすべり速度と摩擦係数の関係

$$u=\frac{1}{\omega_0}\sqrt{-\frac{4\alpha_1}{3\alpha_3}}=\frac{1}{\omega_0}\sqrt{-\frac{4}{3\mu_2}\left\{\mu'(v)+\frac{nC_t}{N_t}\right\}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.18)$$

図 7.13 はタイヤE，垂直荷重 1470N について種々の温度における摩擦係数の値を用いて，式（7.18）から計算した振幅を示す．なお，垂直荷重 4410N については例として130℃のときのみ示しているが他の温度についても同じ傾向である．また，計算にはE_t=5.88MPa，ρ_t=1.05×10³ kg/m³を用い，C_tはスキール周波数でリブを加振しておき，加振器をリブからとりはずしたときの減衰波形から求めた 1.98Ns/m を用いた．横すべり速度がある値になると自励振動が発生し，急激に振幅が増大する．また，温度が上昇するにつれて，自励振動が発生し，最大振幅となる横すべり速度は大きくなるが，垂直荷重によってはほとんど変化しない．これは式（7.18）におけるnC_t/N_t が比較的小さな値であり，振幅がほぼμ_2 と $\mu'(v)$ の値によって決定されるためである．したがって，式（7.17）のnC_t/N_t を無視するとスキールの発生条件は$\mu_2>0$，$\mu'(v)<0$となって，ゴムの摩擦特性によってのみ決定されることになる．このことはスキールの発生条件がタイヤのトレッドパターン，摩耗の程度，リブ幅および垂直荷重には関係なく，走行速度によって変化する（摩擦面温度の変化によってゴムの摩擦特性が変化する）実験結果に一致している．また，自励振動が発生しても，振幅がある程度大きくならないとスキールを感知できないことを考えると振幅が大きくなり最大振幅に近くなる横すべり速度は表7.3に示すスキール発生の横すべり速度とほぼ一致している．

最後にスキール周波数について検討する．式（7.16）の非線形項は $\dot{x}$ のみの関数であるから，スキール周波数は固有振動数$f_e=\omega_0/2\pi$ に近似的に等しい．f_eを計算した結果を前述の表7.1に示している．これらの計算結果はいずれのタイヤにおいても実験値とよく一致している．また，リブ幅b_tが大きくなるとスキール周波数はわずかに高くなるが，本実験に用いたタイヤではt^2/b_t^2 が比較的小さいので，f_eはほぼt に反比例することになり，スキール周波数はリブ幅よりむしろ主にトレッドゴムの振動部分の厚さによって決定される．さらに，このことを確認するため，摩擦係数測定装置を用い，トレッド部のゴム厚さを変えてスキールを発生させ，その周波数を調べた．使用したトレッド部のゴムの寸法はb_t= 20 mm，l_t=40 mm である．図 7.14 はその結果を示している．図中，f_eの計算結果を実線で示しているが，実験結果とよく一致している．

以上のような摩擦係数の実験結果，スキール周波数およびリブ１本の運動方程式の検討結果から，タイヤのトレッド部分が路面から摩擦力を受け，断続的にすべりを生じて自励

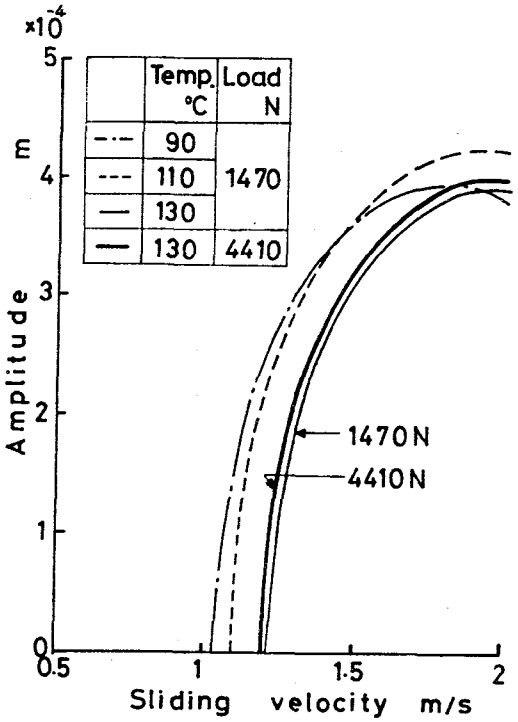


図7.13　種々の温度，荷重におけるすべり速度と振幅の関係
（タイヤEについての計算結果）

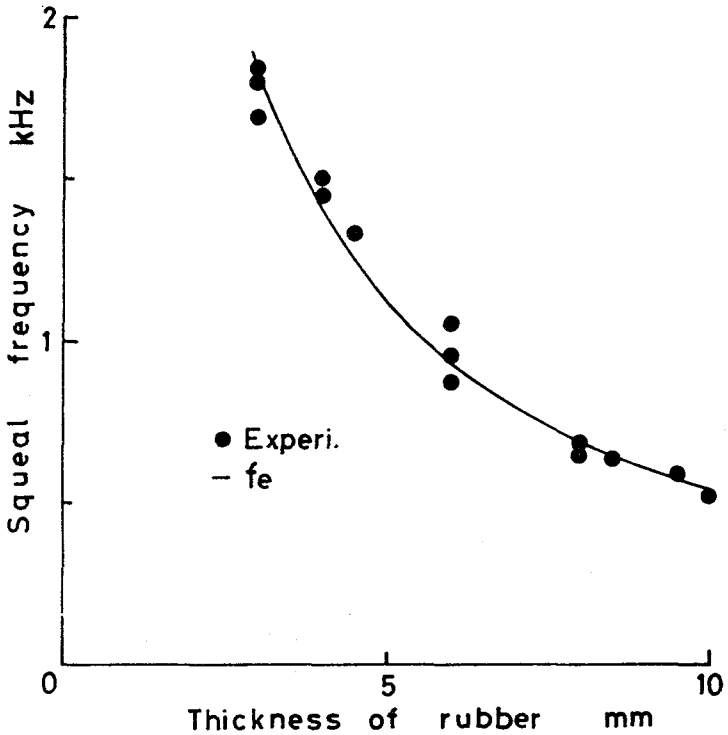


図7.14　ゴムの厚さとスキール周波数の関係

振動を発生し，スキールが発生することが明らかになった．

7.5 結　言

自動車の急旋回時におけるタイヤのスキールに関する実車試験，タイヤ単体試験，トレッドゴム実験による結果ならびに定常円旋回中の4輪モデルやトレッドリブ1本のモデルによる理論解析を検討した結果，以下のような結論が得られた．

（1）　スキールはタイヤの横すべり速度がある値（ 1.1～1.7m/s ）に達すると発生する．この値はタイヤのトレッドパターンや垂直荷重によってはほとんど変化しないが，走行速度が増大すると大きくなる．この原因は走行速度が増大すると摩擦面温度が上昇し，ゴムの摩擦特性が変化するためであると考えられる．

（2）　アルミ板上のタイヤの痕跡からスキールはタイヤのトレッド部分の路面との摩擦による自励振動によって発生することがわかった．その周波数は溝深さやリブ幅にはあまり影響されず，トレッドゴムの振動部分の厚さによって決定され，ほぼゴム厚さに反比例する．したがって，タイヤの摩耗が大きくなるとスキール周波数は高くなる．

（3）　トレッドのリブ1本についての運動方程式から，スキールの発生条件は主にゴムの摩擦特性によって決定されることが明らかになった．また，計算結果によって求められたスキール周波数は実験結果に一致した．

（4）　実車でのスキールはその運転条件を見ると，タイヤが四輪ともすべっている時に発生している．これは定常円旋回中の四輪モデルにより計算された各タイヤの横すべり速度が急激に増大する速度がドラム試験結果とほぼ一致することからも確認できる．

第8章　円筒ころ軸受のきしり音の発生機構

8.1　緒言

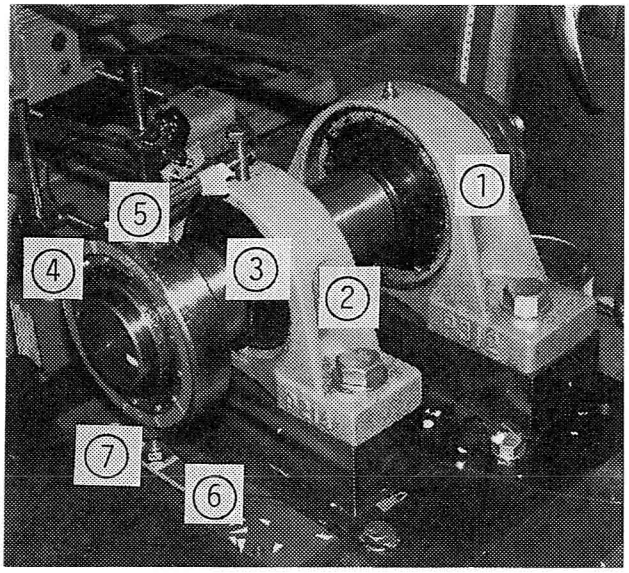
グリース潤滑された金属に発生する摩擦音の例として，円筒ころ軸受に発生するきしり音の発生機構について解明した．円筒ころ軸受はグリース潤滑するために，一定期間経過すると，ある特定の回転数範囲で［きしり音］と呼ばれる文字通り［きしる］ような高周波の鳴き音が発生する場合がある．きしり音は軸受本来の機能を低下させるものではないが，その周波数が高いこともあり，非常に不快感を与える．きしり音に関して，飯田[10]，伊藤[11]，小林ら[12]が研究している．飯田によると，きしり音の周波数は外輪の半径方向の固有振動数に一致すると報告されている．一般に，円筒ころ軸受はハウジングに組み込んで使用される場合が多い．組み込まれた玉軸受の騒音については，五十嵐[13]，長松ら[50]が研究している．これらの研究では，組み込んだ場合でも，単体と同様，外輪の固有振動数にほぼ等しい周波数の騒音が発生している．きしり音の発生が非常に不安定であるため，きしり音の特性が完全に解明されているとはいえない．本章では，軸受が単体およびハウジングに組み込まれた２つの場合について，きしり音の特性を実験的に検討した．さらに，ころと外輪の連成を考慮した数値モデルを作成し，きしり音の発生防止の手がかりとなるきしり音の周波数について理論的に検討した．

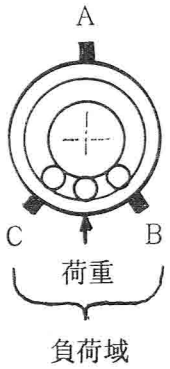
8.2　実験装置および方法

8.2.1 単体の軸受

試験軸受は NU314（内径 70 mm，外径 150 mm，幅 35 mm）を使用した．ころは13個（直径 20 mm，長さ 20 mm）であり，ラジアルすきまはきしり音が発生しやすいように103μmと大きくしてある．

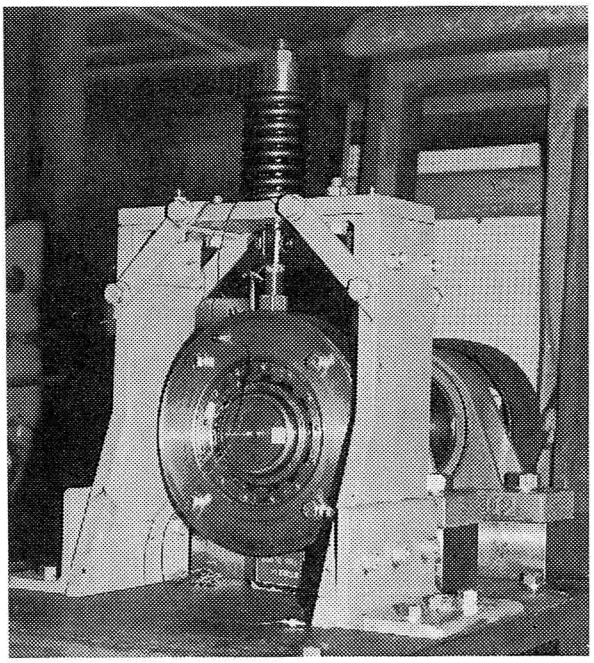
実験装置を図8.1に示す．２つの玉軸受 UCP312①とUCP214②によって支持された軸 ③に試験軸受の内輪④が固定されている．外輪⑤には板バネ⑥に固定された荷重調整用ボルト⑦によって下から荷重が加えられる．荷重の大きさは板バネ⑥に貼ったひずみゲージのひずみ量から換算して求めた．音圧は軸の中心線上で軸受端面より約 20cmに設置した1/2インチマイクロホンによって測定した．きしり音と外輪の振動は密接な関係にあると考えられるので，外輪の振動加速度を小型･軽量の加速度ピックアップによって測定した．





① 玉軸受
② 玉軸受
③ 軸
④ 試験軸受（内輪）
⑤ 試験軸受（外輪）
⑥ 荷重用板バネ
⑦ 荷重調節用ボルト

図8.1　単体の軸受の実験装置と加速度ピックアップの位置



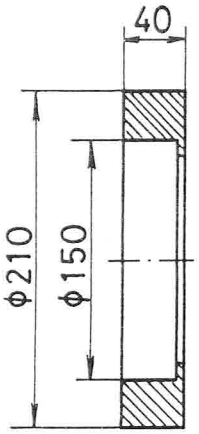


図8.2　ハウジングに組み込まれた軸受の実験装置とハウジングの寸法

測定位置は外輪の真上（A），ころの負荷域*への入り口（B）および出口（C)である．なお，軸の回転方向は図において，時計まわりの方向である．グリースは当初アルバニアNo.2を使用したが，きしり音が発生しにくいので，アンドックＣを用いた．封入量は約30gである．きしり音発生には1400rpmで約40～50時間かかったが，いったん発生し始めると，後は実験開始後数分程度で再び発生した．きしり音の発生位置を調べるために，音響インテンシティを測定し，インテンシティフローによって音源位置を求めた．

8.2.2　ハウジングに組み込まれた軸受

図8.2は実験装置とハウジングの寸法を示す．外輪を組み込んだハウジングは支持棒を介してコイルばねによってフレームから吊り下げられている．なお，ハウジングの内径を外輪直径に対して-12μmのしまりばめにした．荷重の大きさはコイルばねのたわみ量から換算して求めた．

8．3　実験結果

8.3.1　単体の軸受

図 8.3(a),(b)は荷重 980Nで軸の回転数を400～1500rpmまで100rpm ごとに変化させた時の音圧および外輪(A) 点の半径方向振動加速度を周波数分析した結果を示す．なお，音圧や振動加速度は変動が大きいので，周波数分析結果はすべてアベレージングをかけてある．まず，音圧は低回転では，レベルも低く1kHz前後の低周波成分が支配的である．回転数が増加するにつれて，レベルも増大し，1000rpmを超えるときしり音が発生し始め，4～6kHz成分のレベルが高くなる．1300rpm以上では，この周波数成分のレベルがさらに高くなり，これがきしり音の周波数と思われる．一方，図8.3(b)の(A)点の振動加速度についてみると，音圧の場合と異なり，きしり音発生時においても，4～6kHz のきしり音に相当する成分のレベルはあまり高くならず，むしろ，8kHz付近のレベルが高くなっている．この傾向は，(B)および(C)点の振動加速度についても同様であった．

図8.4は1400rpmにおける音圧波形である．音圧レベルの高いきしり音が間欠的に発生しているのがわかる．図8.5はピックアップを外輪（A)点の軸方向に貼りつけて，回転数を400～1400rpmまで200rpmごとに変化させた時の外輪の軸方向振動加速度の周波数分析結果である．回転数に関係なく，2650および 7650Hzのレベルが高くなっている．

＊　軸受は下から荷重が加えられているので，図のＢからＣの部分に負荷が分布している．回転は時計まわりであるので，ころが公転してＢに入る所を負荷域の入り口，Ｃを負荷域からの出口と呼んでいる．

以上のように，軸方向振動の周波数成分は回転数によりほとんど変化しない．一方，音圧や外輪の半径方向振動ではレベルや周波数は回転数によって変化する．そこで，これらの周波数を詳しく調べるために，低回転の500rpmときしり音発生時の1400rpmにおける，音圧と(A),(B)および(C)点の半径方向振動加速度の周波数分析結果を図8.6に示す．音圧では

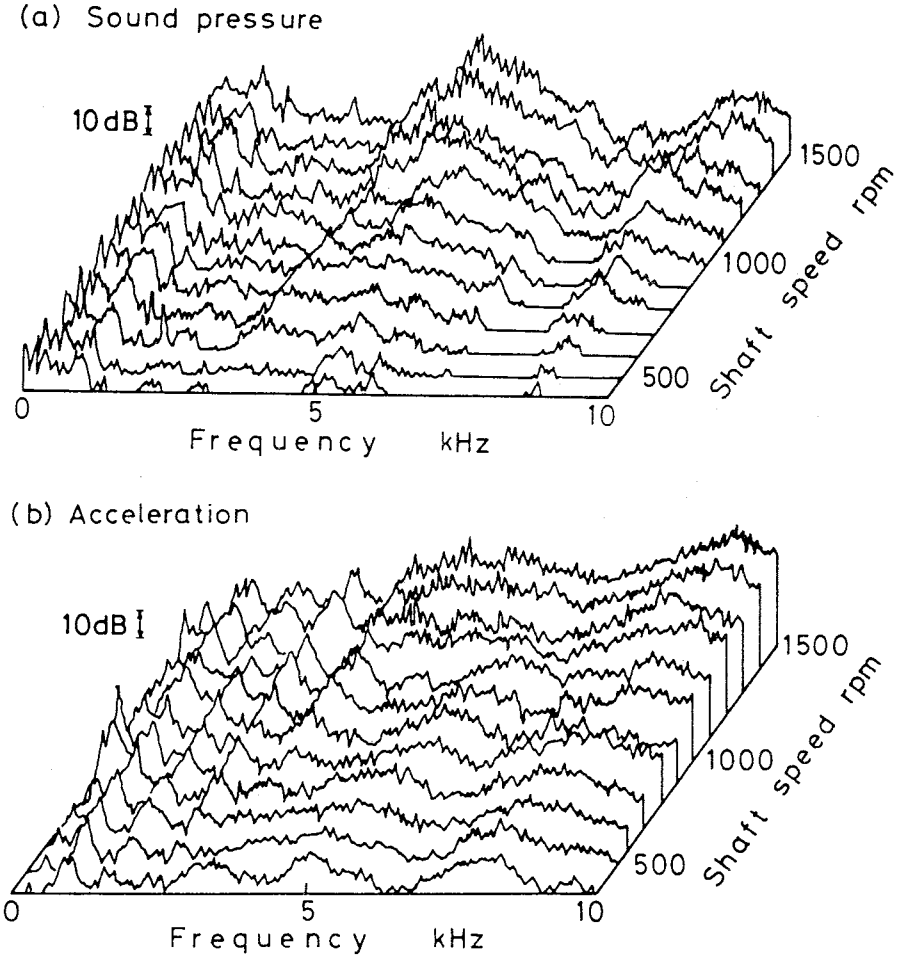


図8.3　回転数による音圧と外輪（A）点の半径方向振動加速度の周波数分析結果

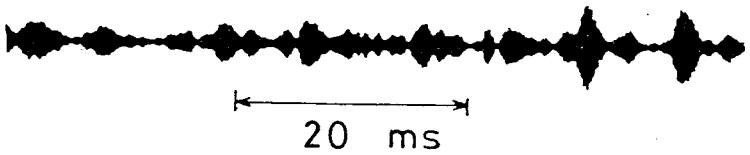


図8.4 きしり音の音圧波形

1400rpm においてきしり音の周波数成分である4～6kHzのレベルが500rpmに比較して著しく増大している．振動では(A)点で検出された約1kHzのピークを除いて振動ピックアップの位置による差は少ない．図8.6には，これらのピーク周波数の振動モードをナローバンドパスフィルター用いて調べた結果もあわせて示す． 500rpmにおける半径方向振動では1kHz,

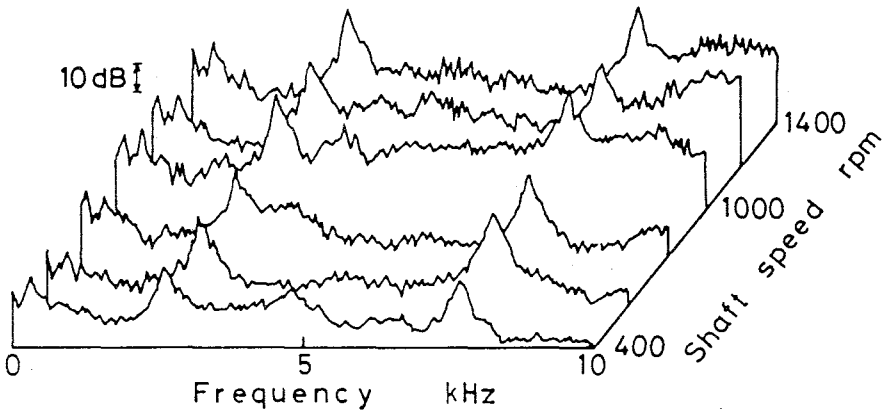


図8.5 回転数による外輪（A）点の軸方向振動加速度の周波数分析結果

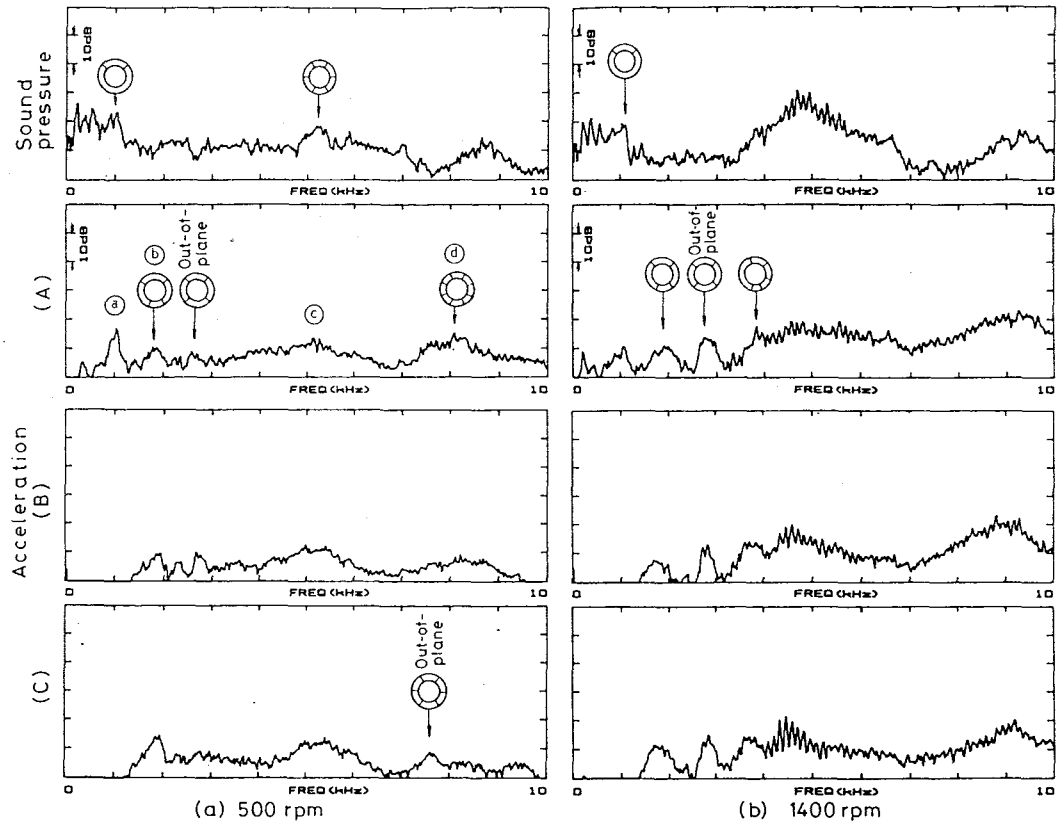


図8.6 音圧および外輪の半径方向振動加速度の周波数分析結果

1.6～1.9kHz，5kHzおよび8kHz付近のピーク周波数は節直径がそれぞれ１～４本のモードの半径方向曲げ振動（In-plane vibration）である．また，軸方向振動の2.7kHzおよび7.5kHz付近のピーク周波数は節直径が２および３本のモードの軸方向曲げ振動（ Out-of-plane vibration）である．しかし，1400rpmでは，4～6kHzのきしり音に相当する周波数の変動が激しく，そのモードは測定できなかった．

図8.7(a)は図8.3(b)の(A)点の振動について，ピーク周波数が回転数によってどのように変化するかを示した．図 8.7(b) は外輪のみフリーの状態にして，ハンマリング加振した

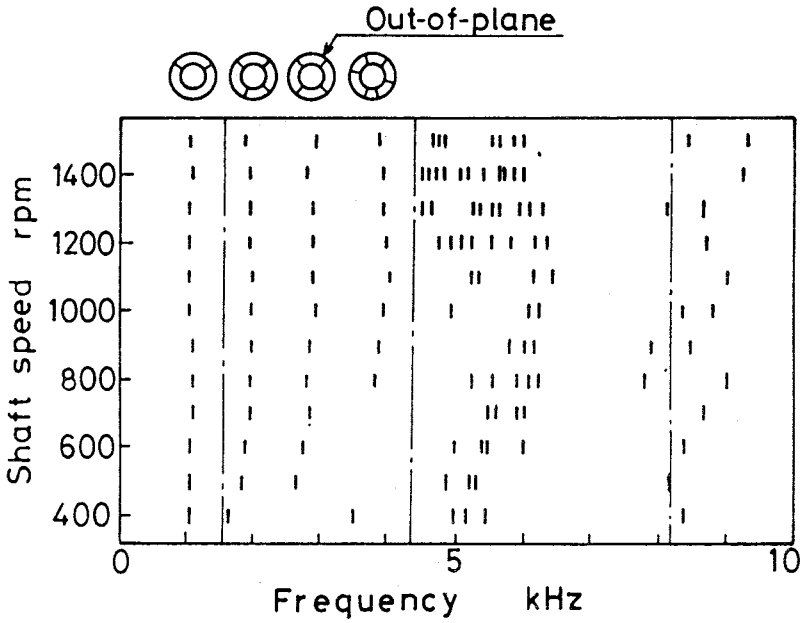


図8.7(a)　回転数による外輪（Ａ）点の振動加速度ピーク周波数の変化

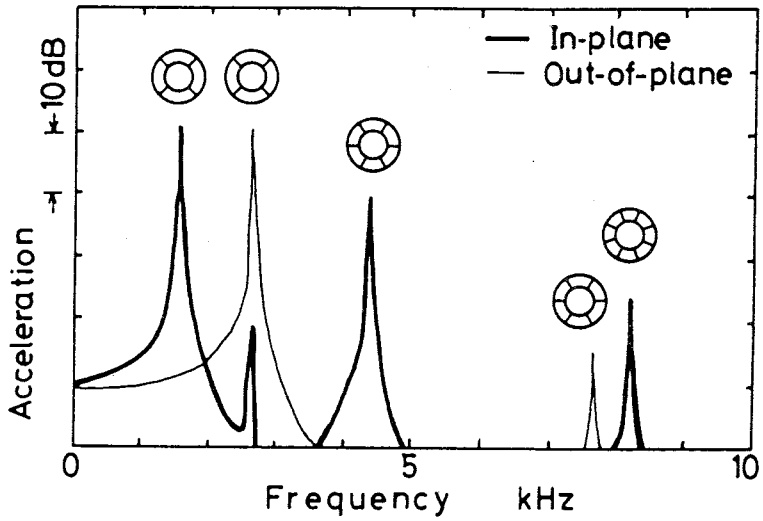


図8.7(b) ハンマリング加振による外輪の固有振動数

時の外輪の半径方向および軸方向の固有振動数とその振動モードを示す．きしり音が発生する1000rpm 以上では，その周波数成分が 4～6kHz の間で変動するのに対して，他のピーク周波数は回転数によってほとんど変化しない．また，軸方向振動は外輪の軸方向固有振動数とほぼ一致しているが，きしり音の周波数とは一致しない．図 8.7(a),(b)より，きしり音の周波数に一致する外輪の固有振動数は見あたらない．さらに，外輪の自由振動では発生しない節直径が１本のモードの振動が発生している．したがって，測定された外輪の振動は外輪単体の振動ではなく，ころと外輪が接触して連成するために生じると思われる．つぎに，きしり音の周波数に及ぼす荷重および保持器の影響を調べた．図8.8は1400rpmで荷重を490～1470Nまで245Nごとに変えた場合のきしり音の周波数分析結果を示しているが，荷重によってきしり音の周波数はほとんど変化しない．図8.9は内，外径は保持器と同一で厚さが異なるリングを保持器の両側から重ね合わせて，保持器の重量を変えたときのきしり音の周波数分析結果を示す．付加重量がない保持器の固有振動数4525Hzが，付加重量3.82Nでは3600Hzと減少するにもかかわらず，きしり音の周波数成分に付加重量による影響はほとんどみられない．図8.10は保持器の材質を従来の黄銅からベークライトに変えたときのきしり音の周波数分析結果を示す．ベークライトの保持器の固有振動数は700Hzであり，黄銅の4525Hzに比べて非常に低い．しかしながら，きしり音の周波数はほとんど変化しない．

以上の結果より，きしり音の周波数に荷重の大きさ，保持器の材質はほとんど影響しないことがわかった．

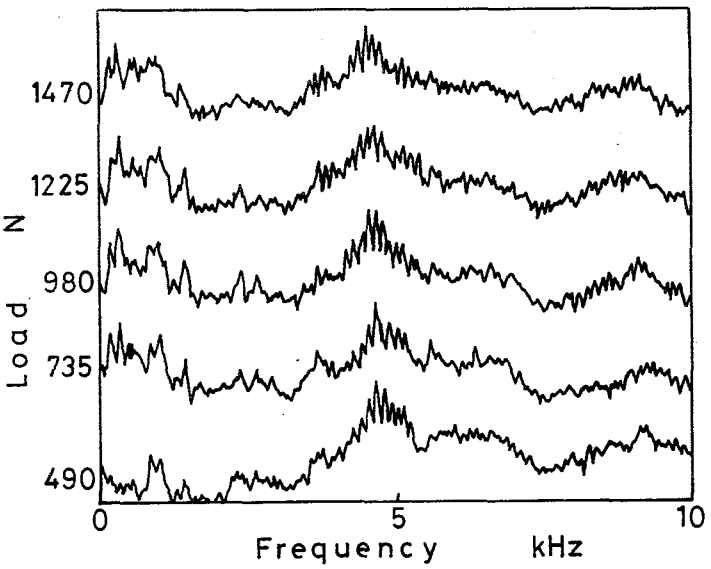


図8.8　荷重を変えた時の音圧の周波数分析結果

さらに，ころの自転すべりなどを調べるために，平野ら[51]による方法を利用して，ころの自転速度の変化を測定した．すなわち，磁化したころを１個，軸受に組み込んで，そのころの回転によって外輪のまわりに巻かれたコイルに励起される電流の大きさから自転速度を測定した．その結果，従来の研究[52]のように，ころが負荷域に入る直前で自転すべりは最大になり，負荷域を出るところで零近くになった．きしり音の発生位置を調べるために，音響インテンシティを計測した．図8.11(a)に示すように，測定点は軸受端面から1cmの位置で軸心を中心にして2cmおきに縦横7点ずつ合計49点である．各点で2方向（図のX，Y方向）のインテンシティを測定して，インテンシティフローを求めた．

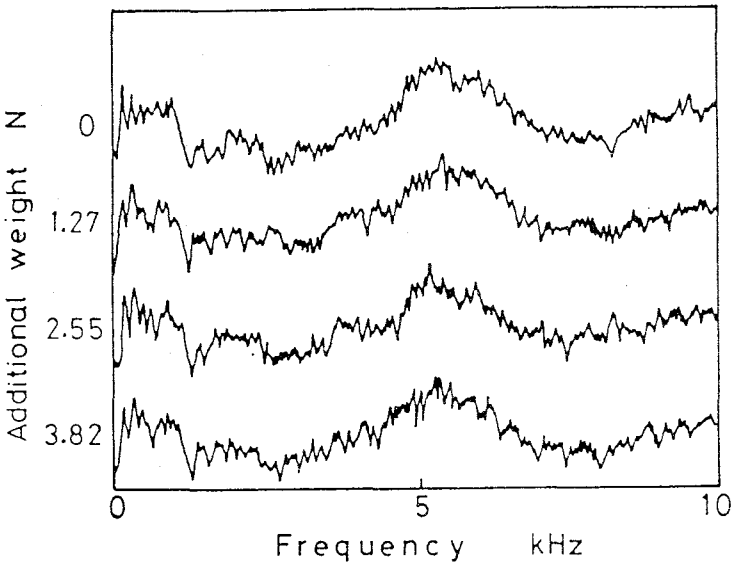


図8.9　保持器重量を変えた時の音圧の周波数分析結果

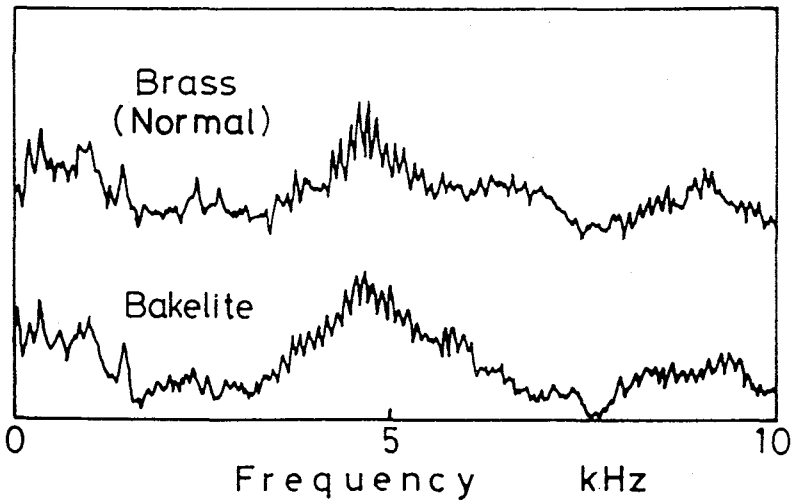


図8.10　保持器材質を変えた時の音圧の周波数分析結果

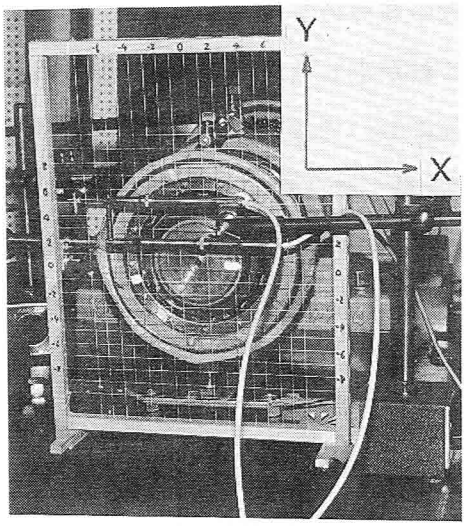
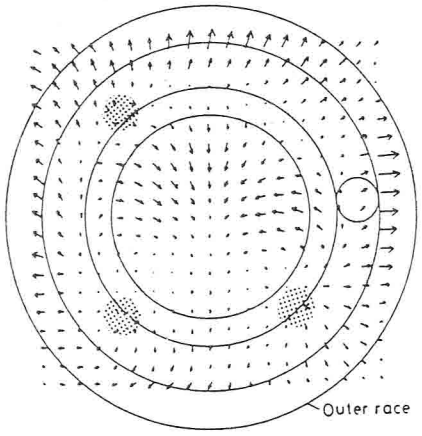


図8.11(a)　インテンシティ計測



(b)きしり音発生時のインテンシティフロー

（　▒　発生位置）

図8.11(b)はきしり音の主な周波数である4.5～6kHzにおけるインテンシティフローを示す．きしり音は図中下方の２箇所および上方から発生している．これらの位置はいずれも，内輪と外輪の間である．つまり，下方の位置はころの負荷域への入口および出口であり，ころの内，外輪との接触，すべりなどによりきしり音が発生する．一方，上方の位置では遠心力によって，ころが外輪と接触するためにきしり音が発生するものと考えられる．

8.3.2　ハウジングに組み込まれた軸受

図8.12は荷重980N，軸の回転数を900～2000rpmまで変化させた時の音圧をアベレージングをかけて周波数分析した結果を示す．低回転では，1kHz前後の低周波が支配的であるが，

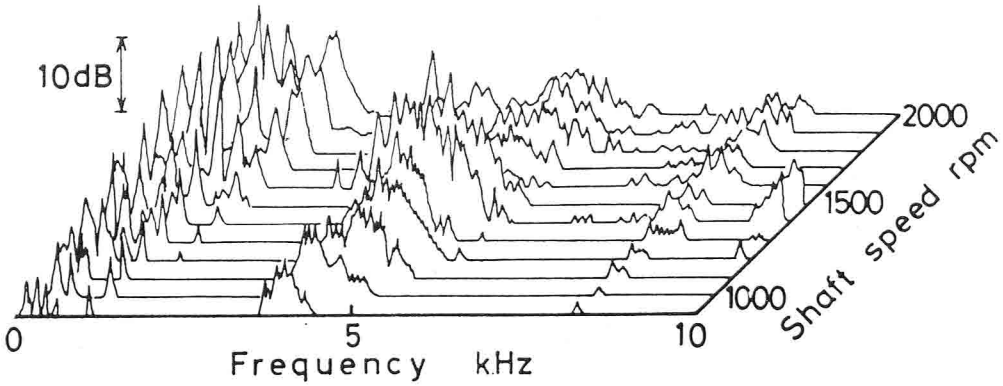


図8.12　回転数による音圧の周波数分析結果

1000rpmを超えると，きしり音が発生し始め，5kHz付近の成分のレベルが高くなる．1300～1500rpmでは，この成分のレベルがさらに高くなり，これがきしり音の周波数であると思われる．これらの周波数を詳しく調べるために，1400rpmにおいてきしり音発生時の音圧ときしり音発生時にころに油を注入して，きしり音が発生しなくなった時の音圧の周波数分析結果を図8.13に示す．きしり音発生時にはきしり音の周波数成分である5kHzのレベルは増大している．一方，きしり音が発生しなくなった時には，低周波成分のレベルはほぼ同一

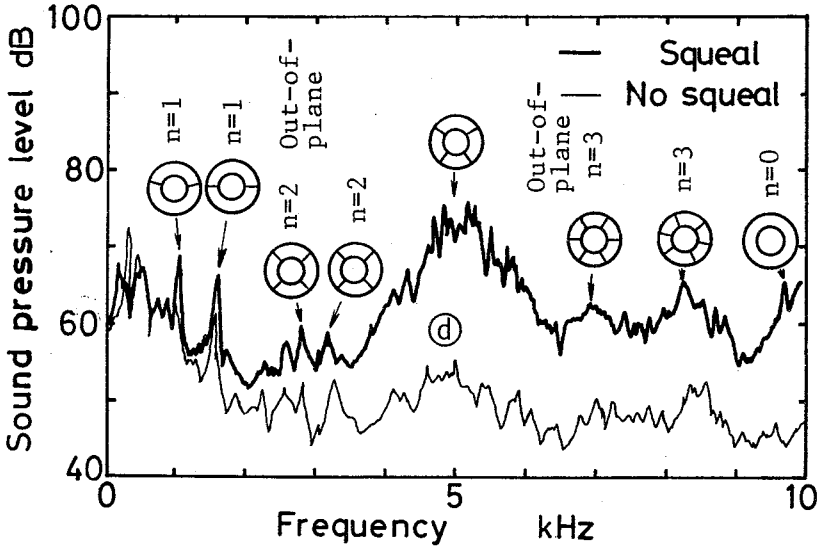


図8.13　きしり音発生時と発生しない時の音圧の周波数分析結果

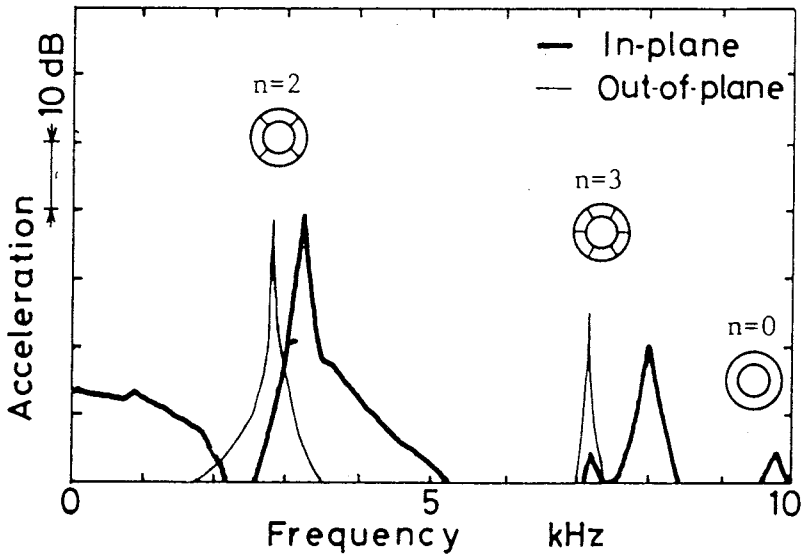


図8.14　ハンマリング加振による外輪を含むハウジングの固有振動数

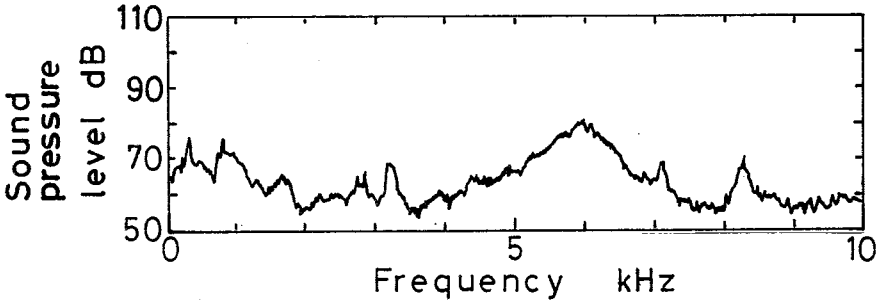


図8.15　高い周波数のきしり音が発生した時の音圧の周波数分析結果

であるが，5kHzのレベルは，20dB以上も低い．さらに，ハウジングの振動モードをナローバンドパスフィルタを用いて調べた結果も同図に示す．ここで，n は節直径の数を表す．これらのピーク周波数とハウジングおよび外輪の固有振動数の関係を調べる．図8.14は外輪を組み込んだハウジングをフリーの状態にして，ハンマリングした時の半径および軸方向の固有振動数と振動モードを示す．半径方向の$n=0$ モードおよび半径，軸方向の$n=2$および3 のモードの固有振動数は図8.13のピーク周波数にほぼ一致している．さらに，図8.7(b)に示された外輪のみの固有振動数は図8.13には存在していない．この結果，しまりばめでハウジングに組み込まれた軸受の場合，外輪とハウジングを一体とした振動を考える必要があることがわかる．また，図8.7(b),8.13および8.14より，5kHzのきしり音の周波数はこれらのいずれの周波数にも一致しない．図8.15は回転数1400rpm,荷重980Nと図8.13とほぼ同じ条件で，高周波のきしり音が発生した時の音圧の周波数分析結果である．きしり音の周波数は約6kHzであり，図8.13のものよりも高い．これらの結果，約5kHzおよび6kHzの２種類のきしり音が発生することがわかった．また，ハウジングに組み込まれた軸受のきしり音の周波数は外輪を含むハウジングや外輪の固有振動数には一致しない．さらに，図8.7(b)に示すハウジングや外輪の自由振動では発生しない$n=1$ のモードの振動が発生していることがわかった．したがって，きしり音はころと外輪が接触して連成するために発生し，接触剛性の大きさによって，周波数の異なる２種類のきしり音が発生するものと思われる．

8．4　理論解析

実験結果によれば，きしり音の周波数は外輪の軸方向振動，保持器の種類にほとんど影響されず，主にころと内，外輪の連成振動に関係があることがわかった．そこで，内輪は

軸と一体となっているので振動しないものとし，ころと外輪の半径方向振動の連成を考えて系の固有振動数を求めてみる．

8.4.1　外輪または外輪を含むハウジングの基礎方程式

軸受の外輪または外輪を含むハウジングを半径 R，厚さh，幅b の円環と近似する．図8.16に示すように円環の半径および円周方向をr および ϕ にとる．中央面における r，ϕ 方向の平衡位置からの変位を w，v とするとき，中央面からの r の位置 における変位 w_r，v_r を線形近似し，

$$w_r = w,\quad v_r = v + \alpha r \qquad \cdots\cdots \qquad (8.1)$$

とおく．このw_r，v_r を用い，せん断変形および回転慣性を考慮して円環の運動方程式を導くとv，w，α に関して次式がえられる．[53]

$$\xi(v^{**}+w^{*}) - \frac{D}{R^2}\alpha^{**} + \eta\left(\alpha - \frac{v}{R} + \frac{w^{*}}{R}\right) + Rp_{\phi} = \rho_r h\left(Rv'' + \frac{h^2\alpha''}{12}\right) \qquad (8.2)$$

$$\eta\left(\alpha^{*} - \frac{v^{*}}{R} + \frac{w^{**}}{R}\right) - \xi(v^{*}+w) + \frac{D}{R^2}\alpha^{*} + Rp_r = \rho_r R h w'' \qquad \cdots\cdots \qquad (8.3)$$

$$\frac{D}{R}\left(-\frac{v^{**}}{R} - \frac{w^{*}}{R} + \alpha^{**}\right) - R\eta\left(\alpha - \frac{v}{R} + \frac{w^{*}}{R}\right) + Rm_{\phi} = \frac{\rho_r h^3}{12}(v'' + R\alpha'') \qquad (8.4)$$

ここで，$(\ )' = \dfrac{\partial(\ )}{\partial t}$，$(\ )^{*} = \dfrac{\partial(\ )}{\partial \phi}$，$\xi = \dfrac{N}{R} + \dfrac{D}{R^3}$，$D = \dfrac{E_r h^3}{12}$，

$\eta = k^2 G_r h\left(1 + \dfrac{h^2}{12R^2}\right)$，$N = Eh$，　E_r, G_r：縦,横弾性係数，k^2：せん断修正係数，ρ_r：密度，

p_r, p_{ϕ}：単位幅当たりの r, ϕ 方向に働く外力，m_{ϕ}：単位幅当たりの中央面に働く曲げモーメント．

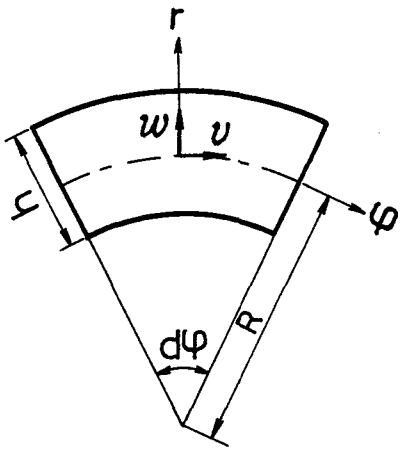


図8.16 円環の座標系と変位

8.4.2　ころの運動方程式

外輪と接触しているl個の負荷域のころを考える．ころと内外輪の接触状態を近似的にばね定数k_iのばねで置き換える．これらの模式図を図8.17に示す．質量mのi番目 のころが外輪$\phi=\phi_i$の 位置で接触し，ころの平衡位置からのr 方向の変位を u_iとすると，ころのr 方向の運動方程式は次式のように表される．

$$m u_i'' + k_i u_i - k_i\{(w)_{\phi=\phi_i} - u_i\} = 0 \quad (i=1,\cdots,l) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8.5)$$

ここで，$(w)_{\phi=\phi_i}$：$\phi=\phi_i$における円環の変位 w．

また，l個のころによって，円環に作用するr 方向の単位幅当たりの外力p_{r1}は次式のように表される．

$$p_{r1} = -\sum_{i=1}^{l} k_i\{(w)_{\phi=\phi_i} - u_i\}\delta(\phi-\phi_i)/(Rb) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8.6)$$

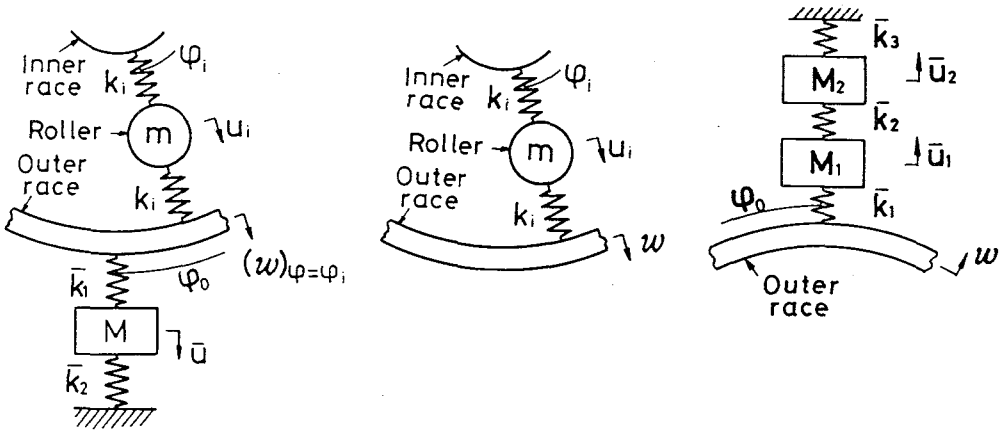
ここで，δ：　Diracのデルタ関数．

外輪またはハウジングにラジアル荷重を加えるための荷重装置が取り付けられている．

(i)　　単体の軸受

荷重装置は図8.17(a)に示すように，質量M ，ばね定数$\overline{k}_1$，$\overline{k}_2$ に置き換えられる．荷重装置が外輪の$\phi=\phi_0$ の位置に取りつけられ，その平衡位置からの変位を$\overline{u}$ とすると式(8.5) と同様，次のような運動方程式がえられる．

$$M\overline{u}'' + \overline{k}_2\overline{u} - \overline{k}_1\{(w)_{\phi=\phi_0} - \overline{u}\} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8.7a)$$



（a）　単体軸受　　（b）ハウジングに組み込まれた軸受

図8.17　ころと外輪との連成モデル

(ii)　ハウジングに組み込まれた軸受

荷重装置は図8.17(b)に示すような質量M_1, M_2, ばね定数 $\overline{k}_1$, $\overline{k}_2$, $\overline{k}_3$ のばねに置き換える．荷重装置が外輪の$\phi=\phi_0$ の位置に取りつけられ，その平衡位置からのM_1, M_2 の変位をそれぞれ$\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ とするとき，以下の運動方程式がえられる．

$$M_1\overline{u}_1'' + \overline{k}_2(\overline{u}_1-\overline{u}_2)-\overline{k}_1\{(w)_{\phi=\phi_0}-\overline{u}_1\}=0$$

$$M_2\overline{u}_2'' + \overline{k}_3\overline{u}_2+\overline{k}_1(\overline{u}_2-\overline{u}_1)=0 \quad \cdots\cdots \quad (8.7b)$$

荷重装置によって外輪に作用するr 方向の外力 p_{r2}は

$$p_{r2}=-\overline{k}_1\{(w)_{\phi=\phi_0}-\overline{u}_1\}\delta(\phi-\phi_0)/(Rb) \quad \cdots\cdots \quad (8.8)$$

と表され，式(8.3)のp_rは次式となる．

$$p_r=p_{r1}+p_{r2} \quad \cdots\cdots \quad (8.9)$$

きしり音発生時には，非負荷域においてグリース抵抗によって自転数が減少したころが負荷域に入る直前に自転すべりは最大となる．さらに，負荷域に入ってころと外輪の間に摩擦力が生じ，急激にころがりが回復するために，自転すべりは減少する．したがって，図8.18 に示すようにi 番目のころと外輪の間に摩擦力F_iが作用すると仮定する．この摩擦力F_iはころと外輪の間の摩擦係数をμとすれば

$$F_i=-\mu k_i\{(w)_{\phi=\phi_i}-u_i\} \quad \cdots\cdots \quad (8.10)$$

と表され，円環の円周方向に外力p_ϕが加わる．すなわち，

$$p_\phi=-\sum_{i=1}^{l}F_i\delta(\phi-\phi_i)/(Rb) \quad \cdots\cdots \quad (8.11)$$

さらに，円環に摩擦力F_iによる曲げモーメントm_ϕも加わる．

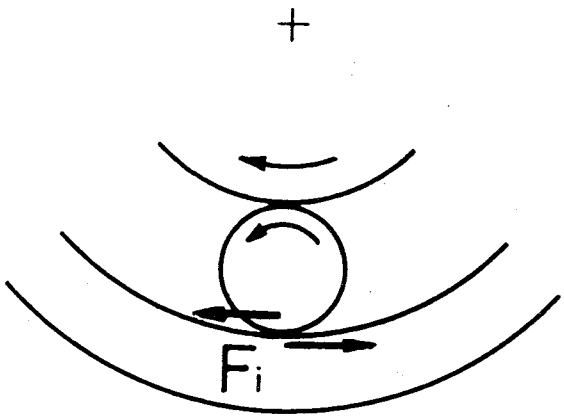


図8.18　摩擦力が作用する場合のモデル

$$m_\phi=\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{l}F_i\,\delta(\phi-\phi_i)/(Rb) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8.12)$$

以上のように式 (8.5),(8.7)および式(8.2)～(8.4)に式(8.11),(8.12)を代入してえられる方程式がころと円環の半径方向の運動方程式となる.

8.4.3 ころと円環との連成振動の運動方程式

いま，式(8.2)～(8.4)の解 v，w，α を次式のようにおく.

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}\{v_{n1}(t)\cos n\phi+v_{n2}(t)\sin n\phi\}$$

$$w=\sum_{n=0}^{\infty}\{w_{n1}(t)\cos n\phi+w_{n2}(t)\sin n\phi\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8.13)$$

$$\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\{\alpha_{n1}(t)\cos n\phi+\alpha_{n2}(t)\sin n\phi\}$$

ここで，n は円環の節直径の数を表す.

式(8.2)～(8.4)に代入してえられた式に，さらに $\cos n\phi$ あるいは $\sin n\phi$ をかけ0～2π にわたって積分すると $n=0\sim\infty$ について次式がえられる.

$$C_{n1}v_{n1}+C_{n2}w_{n2}+C_{n3}\alpha_{n1}+P_{\phi c}=\rho_r h(Rv_{n1}''+h^2\alpha_{n1}''/12) \quad \cdots\cdots \quad (8.14)$$

$$C_{n1}v_{n2}-C_{n2}w_{n1}+C_{n3}\alpha_{n2}+P_{\phi s}=\rho_r h(Rv_{n2}''+h^2\alpha_{n2}''/12) \quad \cdots\cdots \quad (8.15)$$

$$-C_{n2}v_{n2}+C_{n4}w_{n1}+C_{n5}\alpha_{n2}+P_{rc}=\rho_r Rhw_{n1}'' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8.16)$$

$$C_{n2}v_{n1}+C_{n4}w_{n2}-C_{n5}\alpha_{n1}+P_{rs}=\rho_r Rhw_{n2}'' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8.17)$$

$$C_{n3}v_{n1}-C_{n5}w_{n2}-C_{n3}R\alpha_{n1}+M_{\phi c}=\rho_r h^3(v_{n1}''+R\alpha_{n1}''/12) \quad \cdots\cdots \quad (8.18)$$

$$C_{n3}v_{n2}+C_{n5}w_{n1}-C_{n3}R\alpha_{n2}+M_{\phi s}=\rho_r h^3(v_{n2}''+R\alpha_{n2}''/12) \quad \cdots\cdots \quad (8.19)$$

ここで,

$$P_{rc}=\frac{R}{\pi\varepsilon_n}\int_0^{2\pi}p_r\cos n\phi\,d\phi\ ,\quad P_{rs}=\frac{R}{\pi\varepsilon_n}\int_0^{2\pi}p_r\sin n\phi\,d\phi$$

$P_{\phi c}$，$P_{\phi s}$，$M_{\phi c}$，$M_{\phi s}$ は上式の p_r のかわりに p_ϕ，m_ϕ を代入して求められる．また，上式の積分は式(8.9),(8.11),(8.12)を代入して解析的に求められる.

例えば，P_{rc} は

$$P_{rc}=-\frac{1}{\pi\varepsilon_n b}\left[\sum_{i=1}^{l}k_i\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(w_{m1}\cos m\phi_i+w_{m2}\sin m\phi_i)-u_i\right\}\cos n\phi_i\right.$$

$$\left.+\overline{k}_1\left\{\sum_{m=0}^{\infty}(w_{m1}\cos m\phi_0+w_{m2}\sin m\phi_0)-\overline{u}\right\}\cos n\phi_0\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8.20)$$

となる．

$\varepsilon_n=1$（$n\neq 0$）または 2（$n=0$），$C_{n1}=-\left(n^2\xi+\dfrac{\eta}{R}\right)$,

$C_{n2}=n\left(\xi+\dfrac{\eta}{R}\right)$, $C_{n3}=\dfrac{n^2D}{R^2}+\eta$, $C_{n4}=-\left(\xi+\dfrac{n^2\eta}{R}\right)$, $C_{n5}=n\left(\dfrac{D}{R^2}+\eta\right)$

なお，$n=0$ のときは式(8.14)～(8.19)のうち式(8.15),(8.17),(8.19)は除く．

ころは本来公転し，ころと外輪が接触する位置ϕ_iは時間の関数であるので変化しているが，計算を容易にするために，ある瞬間を考えるとϕ_iは一定とみなせる．この仮定のもとで，ころと外輪が連成したときの固有振動数を求める．

いま，

$$v_{n1}=v_{n1}{}^*e^{\lambda t},\ v_{n2}=v_{n2}{}^*e^{\lambda t},\ \cdots\cdots,\ \alpha_{n2}=\alpha_{n2}{}^*e^{\lambda t},\ u_i=u_i{}^*e^{\lambda t},$$

$$\overline{u}=\overline{u}^*e^{\lambda t},\ \overline{u}_1=\overline{u}_1{}^*e^{\lambda t},\ \overline{u}_2=\overline{u}_2{}^*e^{\lambda t} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (8.21)$$

とおき，式(8.21)を式(8.5),(8.7),(8.14)～(8.19)に代入してえられる特性方程式から固有振動数を求めることができる．えられたλの虚数部は固有振動数を，実数部は減衰をそれぞれ表し，実数部が正の場合には発振することになる．きしり音が発生する場合は発振する固有振動数となると考えられる．

8.4.4　計算結果

(i)外輪または外輪を含むハウジングの固有振動数

外力p_ϕ, p_r, $m_\phi=0$ として，式(8.3)～(8.5)に式(8.14)を代入して固有振動数を求めることができる．表8.1はこれらの計算結果とB.Bickfordら[54]の式によって求められた軸方向固有振動数および図8.7(b),8.14での実験結果を示している．外輪の固有振動数の計算に用いた値は$R=6.91$cm，$h=1.23$cm，$b=3.5$cm．外輪を含むハウジングの固有振動数の計算では，$R=8.43$cm，$h=4.15$cm，$b=4.0$cm．なお，$E_r=206$ GPa，$k^2=\pi^2/12$ である．この表において計算値と実験値はほぼ一致し，外輪のような非常に厚い円環に対しても式(8.2)～(8.4)が適用できることが確認された．

(ii) ころと外輪との連成系の固有振動数

(a) 単体の軸受：まず，きしり音が発生しないときに相当するものとして，摩擦力を考慮しない場合の固有振動数を求める．振動モードの数n を多くとれば固有振動数を正確に求められるが，精度，計算時間を考えた結果，ここでは$n=0$～5 とした．3個のころが負荷域にあり，2番目のころと軸受の荷重装置が軸受の最下点にある場合を考える．2番

表8.1　外輪またはハウジングを含む外輪の固有振動数

		モード	計算値 Hz	実験値 Hz
外輪	半径方向曲げ振動 (In-plane vibration)	n=2	1587	1575
		n=3	4364	4375
		n=4	8064	8150
	軸方向曲げ振動 (Out-of-plane vibration)	n=2	2675	2650
		n=3	7539	7625
外輪を含むハウジング	半径方向曲げ振動 (In-plane vibration)	n=2	3212	3225
		n=3	7898	8000
		n=0	9757	9825
	軸方向曲げ振動 (Out-of-plane vibration)	n=2	2857	2850
		n=3	7213	7250

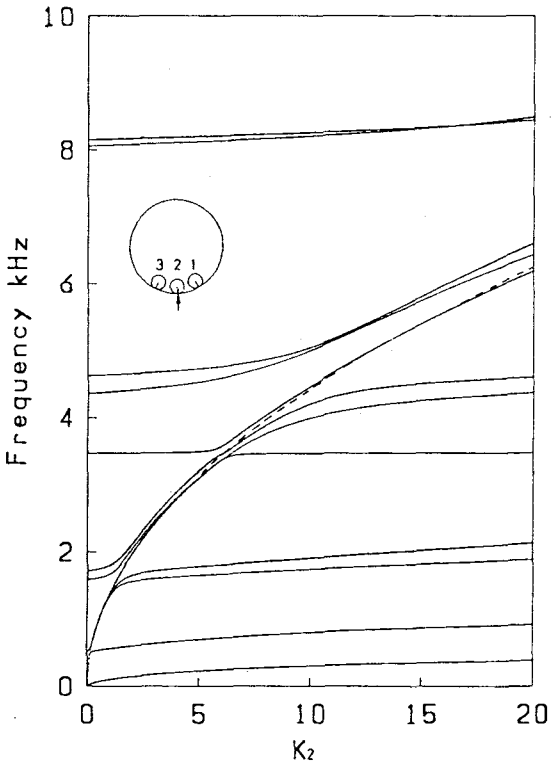


図8.19 摩擦力のない場合のK_2と固有振動数の関係
（細線：系の固有振動数，　破線：ころのみの固有振動数）

目のころの無次元化したばね定数$K_2=k_2R^3/(Db)$と固有振動数を計算した結果が図8.19である．なお，他のころのばね定数は，まず，図8.8の結果から荷重の大きさによって変化しないと仮定して，$K_1=K_3=K_2$とし，荷重装置のばね定数$\overline{K}_1$，$\overline{K}_2$の値は荷重装置（$M=0.1$ kg）の固有振動数の実測値から求めた$\overline{K}_1=\overline{K}_2=12.3$を用いた．また，図には外輪との連成を無視してえられるころの固有振動数$f_{r0}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k_i}{m}}$を破線で示している．さらに，$K_2=10.0$における外輪の振動モードを図8.20に示す．

摩擦力がない場合，発振する固有振動数は存在しない．きしり音が発生しない低回転における実験結果（図8.6(a)）と図8.20を比較してみる．節が外輪の真下にある振動モードの固有振動数（例えば，307，1737Hz）は実験では生じていない．これは，ころが転動するために，負荷域には節が生じにくくなることによると考えられる．節が真下にない振動モードについては，計算値と実験値はほぼ一致している．すなわち，図8.6(a)の⒜，⒝，⒟はそれぞれ，795，1902，8258Hzに，ころの固有振動数に近い⒞は4208，4452，5029Hz

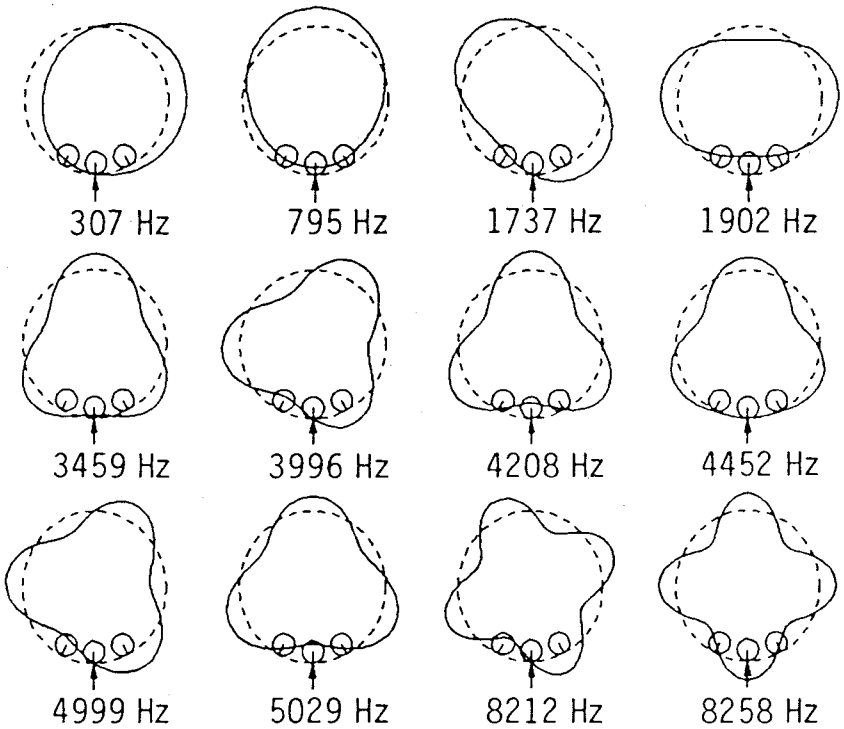


図8.20　外輪の振動モード　（$K_2=10.0$）

に対応する．3459Hzは図8.7(a)に示すように回転が高くなるにつれて現れる．節が外輪の真下にない振動モードについて，外輪の最大振幅を1.0としたときのころの振幅u_1～u_3 および荷重装置の振幅$\overline{u}$ を表8.2に示す．ころの固有振動数に近い固有振動数ほどころの振幅は大きくなる．なお，3500Hz付近の固有振動数は荷重装置の振幅$\overline{u}$ が大きく，荷重装置の固有振動数である．

次に，きしり音発生時に相当する摩擦力を考慮した場合のK_2と固有振動数の関係を計算した結果が図8.21である．摩擦係数の値μ はころのすべりなどによって一部に金属接触も固有振動数の範囲を示す．また，発振する固有振動数の振動モードをλ の実数部を除いて

表8.2　外輪の最大振幅を1.00とした時のころおよび荷重装置の振幅

Freq. Hz	795	1902	3459	4208	4452	5029	8258
$u_1=u_3$	0.23	0.41	0.50	0.12	5.26	0.64	0.06
u_2	0.19	0.61	0.23	4.40	1.67	1.74	0.20
$\bar{u}$	0.19	0.71	3.82	0.97	0.02	0.47	0.11

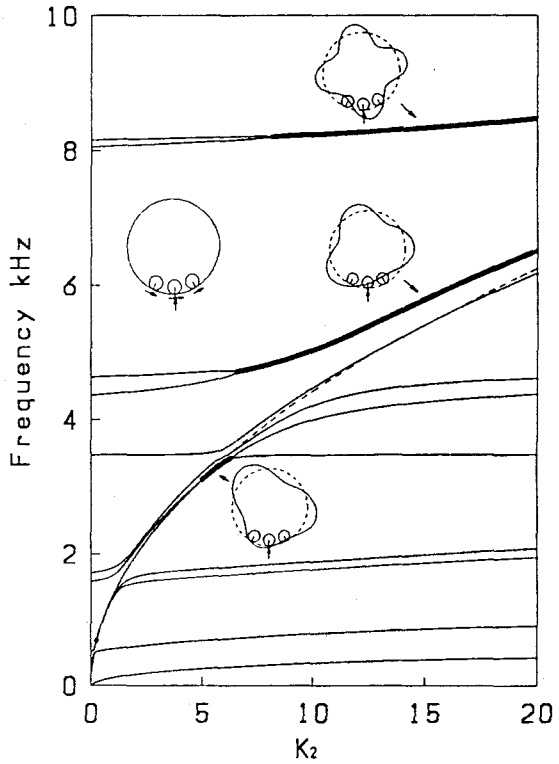


図8.21　摩擦力が作用する場合の固有振動数　（細線：系の固有振動数，実線：発振する固有振動数，破線：ころのみの固有振動数）

計算した結果($t=0$のとき)も示している．表8.3には外輪の最大振幅を1.0としたときのこ生じると考えられるので0.5を用いた．この図で，太線はλ の実数部が正となる発振するろの振幅u_1～u_3 および荷重装置の振幅$\overline{u}$ を示している．

発振する固有振動数は3kHz付近，4.5～6kHz，8kHz付近で生じている．3kHz付近では外輪の振幅に比べて，ころの振幅は非常に大きく，ころの振動が主である．4.5～6kHz，8kHzは外輪の異なる二つのモードの連成によって生じるが，ころの固有振動数に近い4.5～6kHzで

表8.3　外輪の最大振幅を1.00とした時のころおよび荷重装置の振幅

K_2	5.0	15.0	
Freq. Hz	3110	5758	8325
u_1	2.83	3.42	0.36
u_2	6.64	3.31	0.37
u_3	7.16	3.06	0.39
$\bar{u}$	0.48	0.25	0.11

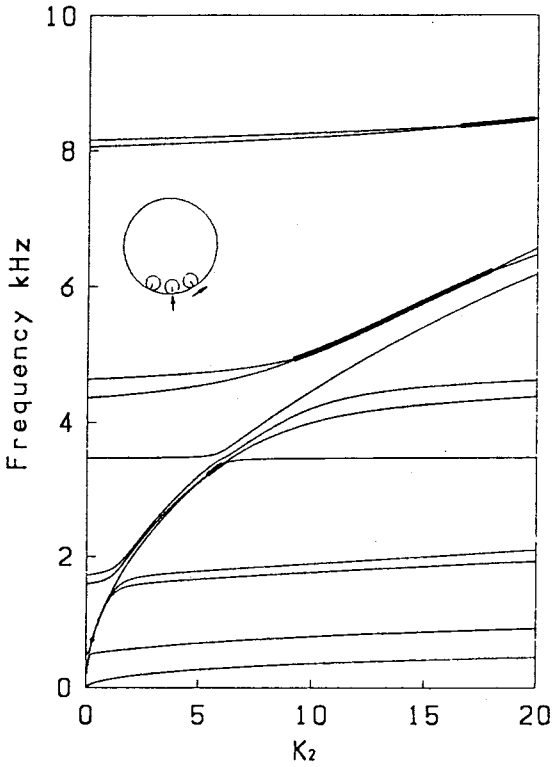


図8.22　ころ１個のみ摩擦力が作用する場合の固有振動数
（細線：系の固有振動数，太線：発振する固有振動数）

はころの振幅が大きい．　実験結果（図8.6(b)）では，きしり音の主な周波数成分は4～6kHzにわたっている．転動するころと外輪の間の接触状態が変化することから，ころのばね定数も変動することが十分考えられる．K_2が10～20まで変動するとすれば，計算結果でえられる発振する4.5～6kHzの固有振動数は実験結果に一致する．これに対して，きしり音の主な周波数以外のピーク周波数は実験ではあまり変動しなかった．計算結果においても，ばね定数の変化に対して，ほとんど変化しない．また，実験ではきしり音が発生するとき，その主な周波数成分の半径方向振動レベルは音圧に比べて高くなかった．この結果は計算における4.5～6kHzの発振する固有振動数で，外輪もある程度振動するがころの振動がより大きくなることに対応している．（表8.3，5758Hz）

負荷域入口直前でころの自転すべりが大きくなることから，摩擦力が負荷域入口の１個のころのみに働くとして計算した発振する固有振動数を図8.22に太線で示す．図8.21に比べて，きしり音の発生域が小さくなっていることがわかる．

(b) ハウジングに組み込まれた軸受：　きしり音発生時に相当する摩擦力を考慮した場合のK_2（$=k_2R^3/(Db)$）と固有振動数の関係を図8.23に示す．なお，単体の軸受の場合と比較するために，ばね定数を無次元化する場合，R, D, b は軸受単体の値を用いた．また，$\mu=0.5$，他のころのばね定数は$K_1=K_3=K_2$とし，荷重装置のばね定数$\overline{K}_1, \overline{K}_2$の値は荷重装置（$M_1=0.98$kg，$M_2=0.55$kg）の固有振動数の実測値から求められた10.0，15.0を用い，$\overline{K}_3$はコイルばねのばね定数5.12×10^{-2}を用いた．また，ハウジングとの連成を無視して求められるころのみの固有振動数は$f_{r0}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2k_i}{m}}$と表され，図8.23のA－A曲線のようになり，振動モードは図のようになる．表8.4には，円環の最大振幅を1.0としたときのころの振幅u_1～u_3および荷重装置の振幅$\overline{u}_1$，$\overline{u}_2$を示している．

発振する固有振動数は200Hz，3～4.8kHz，5.6～6.2kHzおよび 8kHz付近で生じている．軸受単体のようにK_2が 10～20と変動することを考慮すれば，計算結果の4.5～4.8kHz，5.6～6.2kHzは実験結果の図8.13および8.15のきしり音の主な周波数に一致し，この周波数では外輪の振幅に比べて，ころの振幅は非常に大きい（表8.4）．また，発振する8kHzの振動はハウジングの異なる二つのモードの連成によって生じるが，きしり音としてほとんど生じない．きしり音の主な周波数成分であるころの固有振動数に近い図8.23の枠の部分を拡大したのが図8.24である．4.5～4.8kHzの振動モードは節が４個に対して，5.6～6.2kHz

表8.4　円環の最大振幅を1.0とした場合のころおよび荷重装置の振幅

K_2	5.0		8.0	18.0	
Freq. Hz	197	3042	4013	5930	7977
u_1	1.33	7.78	21.5	26.9	0.59
u_2	0.39	10.5	14.7	20.7	0.70
u_3	0.76	12.7	10.6	16.2	0.66
$\bar{u}_1$	0.85	0.15	0.03	0.01	0.01
$\bar{u}_2$	0.87	0.04	0.00	0.00	0.00

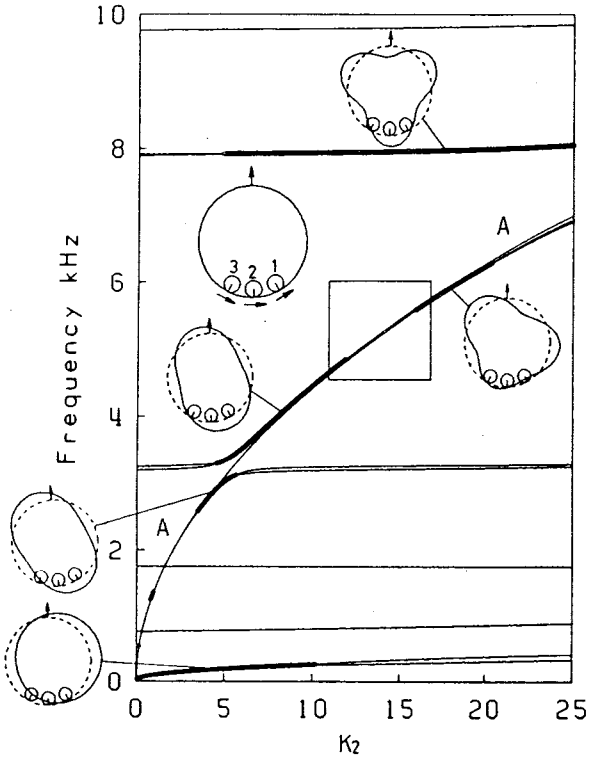


図8.23　摩擦力が作用する場合の固有振動数
（細線：系の固有振動数，太線：発振する固有振動数）

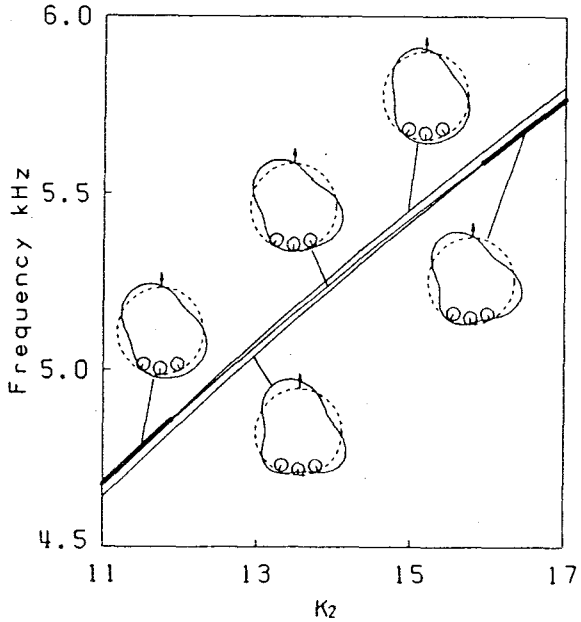


図8.24　図8.23の枠の部分の拡大図

では6個になり，2種類の異なる発振周波数が生じる．

このように，摩擦係数の大きさやころの位置によるばね定数の変化などによって，発振する周波数の範囲は変動するが，ころと外輪を含むハウジングの連成によって，ころの固有振動数付近で発振する固有振動数がきしり音の主な周波数にほぼ一致することがわかった．

8.5　結論

円筒ころ軸受から発生するきしり音の周波数について実験的，理論的に検討した結果，次のような結論がえられた．

（1）きしり音の主な周波数成分は広範囲にわたっているが，従来の研究と異なって，軸受単体の場合，ハウジングに組み込まれた場合のいずれにおいても，外輪の半径方向の固有振動数に一致しない．また，その周波数成分は荷重の大きさ，保持器の材質によって変化しない．

（２）負荷域におけるころと外輪の間の摩擦力を考慮し，さらに解析を容易にするために回転しているころがある瞬間には静止していると仮定して，ころと外輪または外輪を含むハウジングの円環との連成振動を考えると発振する固有振動数が求められる．この発振する固有振動数がきしり音の主な周波数にほぼ一致した．すなわち，きしり音の主な周波数はころのみの固有振動数付近で発振する，ころと外輪の連成による固有振動数であると考えられる．

第9章　総　括

9.1　総括

本研究は摩擦により発生する摩擦音の発生機構の解明について，鋼製の厚い回転円板の円周面に先端が半球状の鋼製の片持ちはりを一定荷重で押しつける（ピン－円板）方式による基礎的な試験装置を製作した．これを用いて，種々の実験条件により，乾性摩擦における摩擦音の発生機構を解明した．さらに，これらの基礎的な研究でえられた結果を適用して，急カーブを走行中の自動車から発生するタイヤのスキールノイズおよびグリース潤滑された比較的大型の円筒ころ軸受から発生するきしり音の発生機構についても解明した．

本研究でえられた結果を要約すると以下のとおりである．

第１章は緒論であり，摩擦音の現在までの研究結果を概説し，また本研究の目的と意義について述べた．

第２章においては，本研究のために試作した円周面が研削加工された厚い鋼製の回転円板と鋼製の片持ちはりを用いた乾性摩擦による摩擦音発生装置の概要を説明した．さらに，この装置を用いて行った実験によって次のような結果がえられた．

本研究での実験装置では，円板は厚くて振動しにくいので，摩擦音ははりの振動により発生している．乾性すべり摩擦により発生する音には音圧レベルが低い［こすれ音］と正弦波状の波形で音圧レベルの高い［鳴き音］の２種類に分類できる．摩擦係数が小さい時にはこすれ音が発生し，円板とはりとの間の摩擦・摩耗が進行し，摩擦面がなめらかになると摩擦係数も増大し，鳴き音が発生することを明らかにした．こすれ音の周波数構成は摩擦面のあらさなどの低周波成分のほかにはりの横振動および縦振動の固有振動数成分が含まれている．鳴き音には，その周波数がはりの横振動の一次の固有振動数およびその倍音からなる［一次モードの鳴き音］およびはりの横振動の高次の固有振動数にほぼ一致する［高次モードの鳴き音］が発生することを明らかにした．一次モードの鳴き音は摩擦係数がすべり速度に対して，負の勾配を持つことにより発生する．高次モードの鳴き音は長いはりで固有振動数が低い時に発生し，はり先端と円板との摩擦面積がある程度大きくなり，一次モードの鳴き音が減衰した後，はりの縦振動が大きくなるか，あるいはこすれ音の状態で縦振動が大きくなる場合に発生することがわかった．この周波数ははりの縦振動の固有振動数により近い横振動の固有振動数である．はりの横振動および縦振動の連成を考慮

した非線形運動方程式を数値計算した結果，実験結果とほぼ一致し，高次モードの鳴き音の発生機構をより明確にできた．

第３章においては，第２章で用いた円板の表面あらさの他に研削加工の切り込み２種類変え，合計３種類のあらさを作成した．この表面あらさは周波数分析の結果ほぼランダムなあらさとみなすことができた．円板の回転数を変えて，あらさの大きさが摩擦音へ及ぼす影響を検討した．この結果，摩擦音は主にはりの横振動の一次の固有振動数成分から成っており，第２章で述べた［こすれ音］に相当している．その音圧レベルは回転数の1.2～2.2乗，表面あらさの0.8～1.2乗にそれぞれ比例して増大することがわかった．表面あらさおよび回転数の増大にともなって，はりは円板から離脱するが，音圧レベルにはあまり影響を及ぼさない．また，はりの横振動および縦振動を連成させた運動方程式に強制力として，包絡あらさ曲線からえられる表面あらさを代入して計算した横振動加速度レベルは実験結果にほぼ一致した．

さらに，はりを円筒波の音響放射体と考え，振動加速度から音圧への変換率を計算した結果，変換率は実験結果に一致し，音圧レベルははりの横振動加速度の微分（振動加速度×周波数）に比例することがわかった．この変換率を用いて，はりの振動加速度から音圧レベルを計算によって予測できることを明らかにした．

第４章においては，円板の表面あらさに周期性がある場合，円板の回転数による摩擦音への影響を検討した．表面あらさが大きくなると，はりの円板からの離脱などの非線形性により，あらさ周波数とはりの横振動の一次や高次の固有振動数との共振のほかに，高調波共振，分数調波共振，高分数調波共振などが現れることがわかった．発生する摩擦音は周波数分析結果からこすれ音の一種であることがわかった．はりの横振動および縦振動を連成させた運動方程式にあらさを強制力として計算した結果，これらの非線形振動を求めることができた．また，表面あらさが小さく，はりと円板との離脱がないときには，これらの非線形振動は発生しないことが明らかになった．

さらに，はりを長くして固有振動数を低くすると，あらさ周波数とはりの横振動の一次と二次の固有振動数の和・差が共振する和差調波共振という特徴ある振動が発生することがわかった．はりの横振動に変位および速度の非線形性を考慮した運動方程式の解析より，和差調波振動の発生には摩擦係数の速度勾配の影響が大きいことが明らかになった．これは，実験結果とも良く一致することが確認された．また，差調波振動より和調波振動が発生しにくいことが実験および計算から確認された．

第５章においては，円板の回転速度が比較的高速で発生した［鳴き音］が低速度に至るまでの速度特性について，実験および理論解析について検討を行った．
一次モードの鳴き音は低速度になると，そのまま鳴き音が継続する場合，stick-slip振動による音およびびびり音に変化する場合の３種類に分かれることがわかった．びびり音は第６章で述べた旋削におけるびびり発生時の音とほぼ同一である．しかし，高次モードの鳴き音では，低速になると鳴き止み，こすれ音になった．stick-slip運動を考慮したはりの運動方程式を数値計算することにより，摩擦係数が相対速度零で孤立点がある場合にはstick-slipによる音が発生し，連続の場合には鳴き音が継続することを明らかにした．

第６章においては，はりを円板に対して傾けて摩擦させた場合に発生する摩擦音を実験的，理論的に検討した．はりの傾斜角が正の場合（はりを円板の回転方向に傾ける）には［こすれ音］および［鳴き音］が発生し，負の場合には旋削時のびびりのような激しい振動を伴った［びびり音］が発生した．はり傾斜角が正の場合，傾斜角の増大につれて，はりの横振動の各モードの固有振動数が高くなり，はりが長くなると，傾斜角による周波数の増加の比率が大きくなることがわかった．鳴き音は傾斜角が大きくなると発生しにくくなる．はり傾斜角が負の場合，摩擦面のわずかなおうとつなどによる強制力が加わり，はりは円板の回転方向に食い込まれるように変形した．このために，はりと円板は離脱を繰り返し，これがはりの固定台の軸方向固有振動数に一致し，音圧レベルの高いびびり音が発生することがわかった．はりと円板との弾性接触（接触荷重が変位の3/2乗に比例すると仮定）を考慮したはりの横振動の運動方程式を数値解析すると，実験結果とよく一致することを明らかにした．

第７章においては，自動車が急カーブを走行中によく発生するタイヤのスキールノイズを取り上げて，その発生機構の解明を行った．実験としては，実車による試験，タイヤ試験機によるタイヤ単体の試験さらにタイヤのトレッドゴムによる摩擦特性実験を行った．
これらより，スキールはタイヤのトレッド部分と路面との摩擦による自励振動であることがわかった．スキールの発生する速度はタイヤの横すべり速度がある値以上になると発生するが，この値はタイヤのトレッドパターンや荷重によっては，ほとんど変化せず，走行速度が増大すると大きくなるが，これは摩擦面温度の上昇によるゴムの摩擦係数の変化によることを明らかにした．スキールの周波数はタイヤの溝の深さやリブ幅にはあまり影響されず，トレッドゴムの振動部分の厚さによって決まることがわかった．さらにトレッドのリブ１本についての運動方程式からスキールの発生条件はトレッドのゴムの摩擦特性に

よって決定され，計算結果によって求められたスキール周波数も実験結果に一致した．また，実車でのスキールはタイヤ4輪とも横すべりを起こす時に発生し，それは定常円旋回中の4輪モデルより計算された各タイヤの横すべり速度が急激に増大する速度がドラム試験結果とほぼ一致することからも確認できた．

第8章においては，グリース潤滑された円筒ころ軸受から発生する［鳴き音］の一種である［きしり音］の発生機構を実験および理論から検討した．軸受単体とした装置と実際の条件に近い状態としてハウジングに組み込んだ装置の2種類の装置を作成し，発生するきしり音の周波数について，実験および理論解析をおこなった．その結果，きしり音の周波数は広い範囲にわたっているが，従来の研究結果である（きしり音の周波数＝外輪の半径方向の固有振動数）には一致しなかった．また，周波数成分は荷重の大きさ，保持器の材質には影響しないことがわかった．理論計算では，負荷域におけるころと外輪の間の摩擦力を考慮し，回転しているころがある瞬間には静止していると仮定して，ころと外輪または外輪を含む円環との連成振動の運動方程式を求めた．この計算により求められた固有振動数はきしり音の周波数にほぼ一致した．すなわち，きしり音の主な周波数はころと外輪との連成による固有振動数であることを明らかにした．

9．2　鳴き音の防止方法

一般的に鳴き音を防止する決定的な方法はいまだに開発されていない．しかしながら，以上の研究結果から鳴き音は摩擦面が完全に密着して表面が光沢をおびてくると発生しやすくなる．これは，酸化面が繰り返し摩擦により破壊されて定常摩耗になり，接触面積も増加し摩擦係数が大きくなり，かつ相対すべり速度に対する摩擦係数の勾配が負になりやすくなるためと考えられる．しかしながら，多自由度系においては，各振動モード間の連成により，摩擦係数が一定である程度大きければ，相対すべり速度に対する摩擦係数の勾配が負でなくても鳴き音が発生する場合もある．

以下に考えられる鳴き音の防止方法を示す．

(1)摩擦特性を変える：摩擦係数を小さくする．すなわち，接触面間に油または固体潤滑剤などを注入する（固体潤滑剤の例では，自動車のブレーキ鳴きの防止やワイパーブレードのびびり防止剤などがある）．または，接触面が完全に密着しないように，接触面に小さな溝を多数つけるのも一方法である．（これは自転車のバンドブレーキのバンドや自動車のディスクブレーキのパッドにも利用されている）．

(2)減衰係数を大きくする：運動方程式からもわかるように，減衰係数および摩擦係数を含む減衰項が全体として負にならなければ，鳴き音は発生しない．このためには，摩擦係数が負であっても，減衰係数が大きければ，全体として正となるので鳴き音は発生しない．

(3)摩擦物体の構造や諸元を変えて，摩擦振動系の固有振動数が発振しないようにする：特に第8章での軸受の外輪などの連続体では無限の固有振動数が存在する．したがって，これらの周波数が連成して自励振動が発生する可能性は高い．しかし，設計変更などによって，鳴き音が発生しないようにする，または，不快感を与えないような周波数範囲に鳴き音の周波数を変更することは可能である．

参考文献

(1) Helmholtz, H., *Sensation of Tone*, (1954), Dover.

(2) Rayleigh, J.W.S., *The Theory of Sound*, 2nd ed., (1894), Dover.

(3) Spurr, R.T., *Wear*, 4 (1961), 150.

(4) Fosberry, R.A.C., *MIRA Report*, No.1957/3, (1957)

(5) 池村澄男・近森順, 自動車技術, 24-3 (1970-3), 226.

(6) Miller, R.F. and Slaby, J.G., Deutschekautschuk-Gesellscaft, (1960).

(7) Stappenbeck, H., *VDI-Z*, 96-6, (1954), 171.

(8) Rudd, M.J., *J. sound & Vibr.*, 46-3 (1976), 381.

(9) 大矢多喜雄・政村辰也・服部四土主・大木隆, 機械学会講演論文集, No.780-14, (1978-10), 151.

(10) 飯田幸作, 潤滑, 4-3 (1959), 114.

(11) 伊藤制儀, 潤滑, 4-4 (1959), 178.

(12) 小林政弘・栗田昌弘, 潤滑, 17-9 (1972), 554.

(13) 五十嵐昭男, 機械学会論文集, 27-178 (1961), 963.

(14) Bowden, F.P. and Tabor, D., The Friction and Lubrication of Solids Part1, (1950), Oxford

(15) 亘理厚・杉本隆尚, 機械学会論文集, 29-200 (1963), 769.

(16) 高野英資, 機械学会論文集, 33-253, (1967) 1352.

(17) 高野英資, 機械学会論文集, 33-253, (1967) 1363.

(18) 高野英資, 機械学会論文集, 38-316, (1972) 3149.

(19) 高野英資・石橋達弥, 機械学会論文集, 38-316 (1972), 3158.

(20) 杉本隆尚, 自動車技術, 35-4 (1981), 427.

(21) 杉本隆尚, 潤滑, 28-12 (1983), 922.

(22) Jarvis, R.P. and Mills.B., *Proc. Inst. Mech. Engr.*, Pt.1, 178-32 (1963-64), 847.

(23) Baglin, R. and Coutel, R., *Letters in Applied and Engineering Science*, 1-6 (1975), 571.

(24) Klepp, H.J., *Z. Angew. Math.u. Phys.*, 20 (1969), 537.

(25) 田中健一, 機械学会講演論文集, No.206 (1969), 117.

(26) 田中健一, 機械学会講演論文集, No.700-17 (1970), 29.

(27) Nayak, P.R., *J of Sound & Vibr.*, 22-3 (1972), 297.

(28) Carson, R.M. and Johnson, K.L., *Wear*, 17-1 (1971), 59

(29) Johnson, K.L. and Gray, G.G., *Proc. Inst.Mech. Eng.*, 189 13/75 (1975), 45.

(30) Ishida, K., *JSME semi Int. Symp. Papers*, (1967), 161.

(31) 西村源六郎・高橋浩一, 中央大学80周年記念論文集, (1965), 295.

(32) 高橋浩一, 中央大学理工学部紀要, 14 (1971), 75.

(33) 高橋浩一, 中央大学理工学部紀要, 16 (1973), 53.

(34) Skudrzyk, E., *The Fundations of Acoustics*, (1971), 429, Springer Verlag.

(35) Bailey, J.R. and Fahy, F. J., *Trans. ASME*, Ser.B, 90-1 (1972), 139.

(36) Laird, D.T. and Cohen, H., *J. Acoust. Soc. Am.*, 24-1 (1952), 46.

(37) 中村貫太郎, 機械学会論文集, 33-245 (1967), 160.

(38) 寺内喜男・日高照晃・長嶋光雄, 機械学会論文集, 33-247 (1967), 465.

(39) 山本敏男・安田仁彦・鄭 信雄, 機械学会論文集, 46-411, C (1980), 1327.

(40) 安田仁彦・林 伸和, 機械学会論文集, 48-426, C (1982), 166.

(41) Chu, H.N. and Herrmann, G., *J. Appl. Mech.*, 23 (1956), 532.

(42) 土井静男, 新版・工作機械の振動, (1964), 63, 誠文堂新光社.

(43) Moore, D.F., *Wear*, 61 (1980), 273.

(44) Savkoor, A.R., *11th FISITA*, B12, (1966).

(45) Schallamach, A., *Wear*, 1 (1958), 384.

(46) Grosch, K.A., *Proc. Royal Society*, Ser.A, 274 (1963), 21.

(47) 近藤政市, 基礎自動車工学, 前期編, (1965), 養賢堂.

(48) 酒井秀男, 自動車技術, 30-11, (1976), 968.

(49) 酒井秀男, 自動車技術, 24-3, (1970), 289.

(50) 長松昭男・福田雅穂, 機械学会論文集, 43-376 (1972), 4661.

(51) 平野富士夫・田上寛男, 潤滑, 5-3 (1960), 175.

(52) 転がり軸受工学編集委員会，転がり軸受工学，(1975),192，養賢堂.

(53) Mirsky, I. and Herrmann, G., *J. Acoust. Soc. Am.*, 29-10 (1957), 1116

(54) Bickford,W.B. and Maganty,S.P., *J. Sound & Vibr.* 108-3 (1986), 503.

謝　辞

本論文の作成にあたり懇切な御指導と御鞭撻を賜りました大阪大学工学部　岸田敬三教授ならびに御査読の上貴重な御教示を頂きました大阪大学工学部　井川直哉教授，森勇蔵教授，梅野正隆教授に心から御礼申し上げます．

本論文をまとめるにあたり終始多大な御指導を賜りました京都大学工学部　中井幹雄助教授に心から御礼申し上げます．

また，京都大学工学部精密工学教室　中井研究室の千田哲也氏（現：運輸省船舶技術研究所），千葉喜一氏（現：住友重機械工業），川上慶三氏（現：松下電器産業），井上優氏（現：ミノルタカメラ）には，共同研究者として，多大の御協力をいただきました．ここに記して感謝の意を表します．

タイヤスキールの実験につきましてはブリヂストンの坂本雅彦氏，福岡紀幸氏，高橋二三男氏の御協力をいただきました．また，円筒ころ軸受の実験につきましては，光洋精工の孝橋徹氏に御助言をいただきました．ここに厚く御礼申し上げます．

なお，京都大学工学部精密工学教室　中井研究室の高萩敏男氏（現：大阪産業大学短期大学部）を始め卒業生の諸氏にはいろいろと御協力をいただきました．御礼申し上げます．

さらに，大阪産業大学ならびに同短期大学部 学長の室田明先生には，本論文作成にあたり数々のご配慮をいただきました．ここに厚く御礼申し上げます．

最後に，研究の遂行に際しまして，種々ご配慮をいただきました大阪産業大学短期大学部の諸先生方に厚く御礼申し上げます．