



Title	或種ノ組合セ函數方程式ニ就イテ
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 1, p. none-none
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73837
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

2. 或ル種ノ組合セ函數方程式 ニ就イテ

南雲道夫

今カラ十數年前ニ 東北數學雜誌ノ沖三卷ニ於テ 野澤修三郎氏が
 On some functional equations ト題サレテ 或ル種ノ組合セ函數
 方程式ヲバ ホボ統一的研究サレタ。然シナガラ數據ハ 形式的ニ
 運算ヲ無反省ニホドコサレテ居ルノデ 論理ノ嚴密ヲ缺キ ナホ微積分ヲバ
 勝手ニ用ヒラレタ 筆者ハ之ニ對シ 約三年前ニ 共立社ノ續軌近高等數
 學講座(雜錄) 氏ノ研究ノ特殊ナ場合ヲバ 只ノ連續性ヤ純單調性ノミヲ
 假定シテ論ジタ 所ニ數據氏ノ研究デハ

$$f(\varphi(x_1, \dots, x_l; y_1, \dots, y_m); z_1, \dots, z_n) \\
 = g(x_1, \dots, x_l; \psi(y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_n))$$

ト云ウ函數方程式ガ基礎的ナ役目ヲシテ居ル (上ノ l, m, n ガ一般ニハ等シ
 リナイ事ガ 注目スベキ点デアル) 筆者ハ上ノ函數方程式ヲバ ナルベ
 キ一般的ナ假定ノ下ニ於テ 連續群ノ問題ニ變換シテ見タノデアル (ソノ方
 法ハ全ク elementary デアル)

極テ函數方程式

$$(A) \quad f(\varphi(x, y), z) = g(x, \psi(y, z))$$

ニ於テ 各變數 x, y, z ハ夫々 X, Y, Z ナル三個, metrische
 Räumeニ屬スル任意ノ点トシ 函數 f, g, φ, ψ ノ取ル値(?)ニ或ル
 一ツノ metrischer Raum R ノ点デアルト假定スル (同一ノ R !)
 更ニ X, Y, Z, R ハ im Kleinen kompaktト假定スル

次=方程式 $f(r, z) = r'$ 及 $g(x, r) = r'$ ($r' \in R$)
 ハ夫々(聯立=アラス 各別々=) r =ツイテハ常=一義的=解ケ x ヲ z
 =ツイテハ多義的 或ハ一義的=解ケルモノトスル

又方程式 $\varphi(x, y) = r$ 及 $\psi(y, z) = r$ ($r \in R$)
 モ夫々(各別々=) x, y, z ノイヅレ=ツイテモ 多義的 或ハ一義的=解
 ケルモノト仮定スル

尚ホ函数 f, g, φ, ψ ハスベテ ソノ定義サレタ範圍 ($x \in X, y \in Y, z \in Z, r \in R$) = 於テ連續(勿論一義)函数デアルト仮定スル

以上ノ假定=ヨリ結局 函数方程式 (A) ハ R デ定義サレタ連續群ノ組
 合セノ法則ヲ表ハス方程式

$$(B) \quad H(H(r, r'), r'') = H(r, H(r', r''))$$

= 變換サレル ($r, r', r'' \in R$) $H(r, r')$ ハ連續デアル

即チ $r = \alpha(x), r' = \beta(y), r'' = \gamma(z)$ ハ X, Y, Z ヲ R へ
 ノ一意連續寫像(逆ハ一意トキマラヌ) デ T_1, T_2 ハ R ヲ R 自身へノ可逆
 的一意連續寫像トシテ

$$(C) \quad \begin{aligned} f(r, z) &= H(T_1 r, \gamma(z)) & g(x, r') &= H(\alpha(x), T_2 r') \\ \varphi(x, y) &= T_1^{-1} H(\alpha(x), \beta(y)) & \psi(y, z) &= T_2^{-1} H(\beta(y), \gamma(z)) \end{aligned}$$

デアル 又 $H(r, r') = r''$ ハ R 内デ常= r ヲ $r' =$ 付一義的=解ケル

(証明) 亦一段 (A) = 於テ $y = t$ ($t \in Y$) トオキ

$$\varphi(x, t) = \varphi_1(t), \quad \psi(t, z) = \psi_2(z) \quad \text{トオケバ}$$

$$f(\varphi_1(x), z) = g(x, \psi_2(z))$$

$\varphi_1(x)$ ヲ $\psi_2(x)$ ハ夫々 X, Y ヲ R へノ一意連續寫像デアル

$$(1) f(r, z) = h(r, \psi_2(z))$$

$$(2) g(x, r') = h(\varphi_1(x), r')$$

ナル形 f, g が表ハセル 但シ $h(r, r')$ ハ r, r' 、各々ニツイテ、
連続一意函数デ ソノ逆モ一意連続デアール

所ガ $h(r, r')$ ハ R 内部デ *im Kleinen* デ (r, r') ニツキ一様ニ
連続ナル事ガ証明出来ルカラ $h(r, r')$ ハ (r, r') ニツイテ連続デアール

ホ二段 (A) = 於テ $z = c$ トオキ $f(r, c) = T_1 r$ 及ビ
 $\psi(y, c) = \psi_1(y)$ トオケバ

$$(3) T_1 \varphi(x, y) = g(x, \psi_1(y)) = h(\varphi_1(x), \psi_1(y))$$

但シ T_1 ハ R ヲ R 自身ヘ、可逆一意連続写像デアリ $\psi_1(y)$ ハ Y ヲ R
ヘ、一意連続写像デアール

次ニ (A) = 於テ $x = a$, $g(a, r') = T_2 r'$, $\varphi(a, y) = \varphi_2(y)$
トオケバ

$$(4) T_2 \psi(y, z) = f(\varphi_2(y), z) = h(\varphi_2(y), \psi_2(z))$$

但シ T_2 ハ R ヲ 其自身ヘ、可逆一意連続写像デ $\varphi_2(y)$ ハ Y ヲ R ヘ、
一意連続写像デアール

ホ三段 (A) = 於テ $x = a$ $z = c$ トオケバ

$$(5) T_1 \varphi_2(y) = T_2 \psi_1(y)$$

トナル ヲコデ

$$h(T_1^{-1} r, T_2^{-1} r') = H(r, r')$$

$$T_1 \varphi_1(x) = \alpha(x) = r$$

$$T_2 \psi_1(y) = T_1 \varphi_2(y) = \beta(y) = r'$$

$$T_2 \psi_2(z) = \gamma(z) = r''$$

トオケバ結局 (A)ハ (1)(2)(3)(4)(5) = ヨツテ (B) トナリ、 f, g, φ, ψ
 ハ (C) ナル形ニアラハセル $H(\gamma, \gamma')$ 、連続性ヲ α, β, γ 、一意連続
 性ナドモ 容易ニワカル事デアール

之デ証明ハ了ツタ

数藤氏ノ場合ニ於ケル如ク X, Y, Z ガ R ヨリモ高次元ノ空間 (R ヲ
 有限ナ次元ノ空間トスル中) トシテ 此ノ問題ヲ利用シテ種々ナ函数方程式
 ヲバ連続群ノ問題ニ変換スル事が出来ルデアロウ 筆者ハ読者ト共ニ
 ソノ問題ニ向ツテ オモムロニ歩ヲ進ノント欲シテ居マス 又此ノ問題ハ
 X, Y, Z ガ discrete ナ集合ニテアツテモ勿論同様ニ成立スル

以上 六月三十日