全国紙上数学談話会第2号

4. 線形常微分方程式ノDecompositionニ就テ

中野秀五郎（一高）

Math. Zt. 33 (1931) ニテ G. Mammana ガ Decomposizione delle espressioni differenziali lineari homogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari ナル表題ニテ次ノ定理ヲ証明シタ.

定理

$$\text{(A)} \qquad L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0$$

ニテ $p_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ ガ区間 (a,b) デ連續且real ナルトキハ

$$\text{(B)} \qquad L(y) \equiv \left(\frac{d}{dx} + \alpha_1(x)\right) \cdots\cdots \left(\frac{d}{dx} + \alpha_n(x)\right) y$$

ナル形ニ分解デキル. 但シ此所ニ $\alpha_i(x)$ $(i=1,2,\cdots n)$ ハ (a,b) デ連續デハアルガ一般ニハ complex ナル値ヲトル. 又コノ分解方法ハ無限通リアル.

（注意：$\alpha_i(x)$ ガ real ナル如キ分解ハ區間ヲ與ヘタトキ, 即チ im Grossen ニテハ一般ニ存在セズ. 此レ即チ筆者ノ云フ Volleigentlichkeitsproblem ヲ生ズル所以デアル）

上定理ノ Mammana ノ証明ハ冗長複雑, 讀ム者ヲ

読ム者ヲシテ腹立タシサヲ感ゼシメル. 然カモ証明ノ中ニ上記微分方程式(A)ハ(a,b)ニテ有限コシカ零点ヲ有セザルガ如キ解ヲ有スルコトヲ仮定シテヰル. 筆者ハココニ(A)ノ係数$p_i(x)$ガ real ナルガ如キ仮定ヲ除キ, 一般ニ$p_i(x)$ガ(a,b)デ連続且 complex ナル仮定ノ下ニ(B)ナル Decomposition ノ可能ナルコトヲ遥カニ簡単ニ証セント欲ス.

証明. 微分方程式(A)ガ(a,b)デ零点ヲ有サザル解$u(x)$ヲ有スルコトヲ証スレバ可ナリ. 如何トナレバ然ルトキハ

$$L(y)\equiv\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+q_1(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}+\cdots+q_{n-1}\right)\left(\frac{d}{dx}-\frac{u'(x)}{u(x)}\right)y$$

ナル形ニ分解デキル. 後ハ前 Factor ニ同様ノ推理ヲ行フコトニヨツテ(B)ニ達スル. (注意: $p_i(x)$ヲ real ト仮定スルトキハ$u(x)$ハ一般ニ complex ドナルヲ以テ$q_i(x)$ハ complex トナリテ, 最早ヤ同様ノ推理ヲ施シ難クナル. 此レ Mammana ノ証明ノ複雑ナル原因デアル.)

コノ証明ハ次ノ如ク二段ニ考ヘルノガ便利デアル.

1°) 先ヅ(A)ノ任意ノ一ツノ解$u_1(x)$ニ対シ常ニコレト区間(a,b)デ共通ノ零点ヲ有サザル解$v(x)$ガ無限ニ存在スルコトヲ証セン. $u_1(x)$ハ勿論区間(a,b)デ$\not\equiv 0$ナル解ナル可キヲ以テ其レノ零点ハ(a,b)内ニ集積セズ. 従ツテ零点ハ高々 abzählbar ナリ. $u_1(x)$ノ(a,b)内ニ於ケル総テノ零点ヲ今$t_1, t_2, \dots, t_m, \dots$トスル. 微分方程式(A)ノ

order ハ n ナルヲ以テ $u_1(x)$ ト共ニ互ニ独立ナル解 $u_2(x)$, $u_3(x)$, ……, $u_n(x)$ ヲ有シ, Abel ノ定理ニヨリ其ノ Wronskian ハ (a,b) ニテ零点ヲ有サズ. 従ッテ $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ ハ (a,b) 内ニテハ共通ノ零点ヲ有サズ. 従ッテ今

$$(C') \quad (z_2+iz_2')u_2(t_i)+(z_3+iz_3')u_3(t_i)+\cdots+(z_n+iz_n')u_n(t_i) = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,m,\cdots)$$

$(z_2, z_2', \cdots, z_n, z_n'$ ハ real ト考ヘル$)$

トスクトキハ コノ方程式ヨリ $2(n-1)$ 次元空間

$$R(z_2, z_3, \cdots, z_n, z_2', z_3', \cdots, z_n')$$

ニ於ケル $2(n-2)$ 次元平面ト考フルコトヲ得. 然カモ其数ハ高々 abzählbar ナルヲ以テ $2(n-1)$ 次元空間ノ measure 0 ナル点ヲ除イテハ常ニ

$$(z_2+iz_2')u_2(t_i)+\cdots\cdots+(z_n+iz_n')u_n(t_i) \neq 0 \qquad (i=1,2,\cdots,m,\cdots)$$

ナリ. 故ニカカル z, z' ニ対シテ

$$v(x) = (z_2+iz_2')u_2(x)+\cdots\cdots+(z_n+iz_n')u_n(x)$$

トヲケバ $v(x)$ ハ A ノ解ニシテ $u(x)$ ノ零点ニテ零トナラズ.

2°) 次ニ斯ル $u_1(x), v(x)$ ニ対シテ $\alpha u_1(x)+\beta v(x)$ ガ (a,b) ニテ零点ヲ有セザル如キ α, β ガ存在スルコトヲ証セン. (注意: $u_1(x)$ ト $v(x)$ ガ共ニ real ナルトキハ $u_1(x)+iv(x)$ ト置ケバ可ナリ. 此レハ Mammana ノ証明法

中ノ唯一ノ方法ニシテ，又此レガ $p_i(x)$ ヲ real ヨリ脱シテ complex ナラシメル機会ヲ与ヘナカツタ原因ナラント筆者ハ思フ）

1°）ニ於ケルト同様 t_i $(i=1,2,\cdots,m,\cdots)$ ヲ以テ $u_1(x)$ ノ (a,b) 内ノ總テノ零点ヲ表ハスモノトス。然ルトキハ次ノ如キ高々 abzählbar ノ閉区間

$$l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_m,\ \cdots$$

ヲ作ルコトヲ得，即チ

1. l_i ハ閉区間ニシテ (a,b) ノ内部ニ含マレル
2. l_i ハ $t_1, t_2, \cdots$ ノ何レノ点ヲモ含マズ
3. t_i 以外ノ (a,b) 内ノ点ハ l_i $(i=1,2,\cdots)$ ノ何レカニ含マレル。（斯ル l_i ノ系ノ存在スルコトハ明ナリ）

然ルトキハ $u_1(x)$ ハ l_i 上ニテ零点ヲ有セザルヲ以テ

$$\frac{v(x)}{u_1(x)}$$

ハ l_i ニテ連續且連續的ニ微分可能ナリ。從ツテ今 $w(x)=\dfrac{v(x)}{u_1(x)}$ トシテ $w(x)$ ヲ Gaussian plane 上ニテ考フルトキハ l_i ノ Bild トシテ有限ノ長サヲ有スル curve ヲ得ル。斯ルモノハ Gaussian plane 上ニテ measure 0 ナリ。又 l_i ハ abzählbar ナルヲ以テ $l_1, l_2, \cdots$ ノ Gaussian plane 上ノ Bild ノ Vereinigung ノ measure ハ又 0 ナリ。從ツテ Gaussian plane w 上ノ measure 0 ナル点ヲ除イテハ $l_1, l_2, \cdots l_m, \cdots$ 上ノ x ニ対シテハ

$$v(x) - w u_1(x) \neq 0$$

ナリ. 又 $v(x_i) \neq 0$, $u_1(x_i) = 0$ ヨリ全テノ (a, b) 上ノ点ニ対シテ $v(x) - w u_1(x) \neq 0$ ナリ. 故ニ斯ル w ニ対シテ $u(x) = v(x) - w u_1(x)$ トスレバ $u(x)$ ハ (A) ノ解ニシテ (a, b) ニテ零点ヲ有サズ. 以上 1°) 及ビ 2°) ヨリ容易ニ次ノコトガワカル. 即チ

$$u(x) = (z_1 + i z_1') u_1(x) + (z_2 + i z_2') u_2(x) + \cdots\cdots$$

$$+ (z_n + i z_n') u_n(x)$$

トスレバ $2n$ 次元空間 $R(z_1, z_2, \cdots, z_n, z_1', z_2', \cdots, z_n')$ ノ measure 0 ナル点ヲ除イテハ (a, b) 内ニテ恒ニ $u(x) \neq 0$ ナリ; コレニテ定理ハ完全ニ証明セラレタリ.

以上ノ証明法ニヨリ X ノトル stetiger Körper ニ対シテ $p_i(x)$ 及ビ $q_i(x)$ ガ恒ニソノ Oberkörper ノ値ヲトリ得ルトスレバ (A) ハ恒ニ (B) ニ decompose デキルコトガ容易ニ理解デキルデアラウ. 任意ノ stetiger Körper ニ対スル微分方程式ニ関スル筆者ノ研究ハ何レ機ヲ見テ発表スルデアラウ

(9.7.14 受取)