



Title	Wronskian二就テ
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 3, p. 3-none
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73845
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

吉田耕作 (阪大)

$f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)$ が一次独立 $\Rightarrow$ シテ且 $\sum_{i=1}^p f_i(x) \neq 0$ ナル整函数トスル. $\log |f_i(x)|$ 従ッテ $v(x) = \max_i \log |f_i(x)|$ ハ subharmonic ナルカヲ F. Riesz の定理ニヨツテ $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}) d\theta \ll \log r$ ナル. $\log r$ ハ convex ナル. 之ヲ $T(r)$ トサケハ $p=2$ ノトキ $T(r) + O(1) = T(r) \frac{f_1}{f_2}$ トナリ 又一般ニ $T(r) > N(r) \frac{f_1}{f_2} + O(1)$ トナルコトガタヤスクワカル. ココニ $T(r), N(r)$ 等ハ Nevanlinna の導入セタ記号ヲアイル. 之等ノ事實ヲ利用シテ H. Cartan の Nevanlinna の基本定理ヲ次ノ如ク拡張シタ. Mathematica (1933)

行列 $\|C_{ij}\|$ ($i=1, \dots, p-1, j=1, 2, \dots, p$) ノ $p-1$ 次ノ subdeterminant ガ全テ 0 ナラバ $T_\lambda = \sum_{j=1}^p C_{\lambda j} f_j$ ($\lambda=1, 2, \dots, p-1$) トラクト

$$(p-1)T(r) \leq \sum_{\lambda=1}^{p-1} N_{p-1}(r, F_\lambda) + S(r),$$

ココニ $N_{p-1}(r, F_\lambda)$ ハ F_λ ノ zero point ノ其絶対値 r ヲ越セヌモノニツキ $\leq (p-1)$ pole zero ハ $\leq (p-1)$ pole zero ノ $p-1$ 次ノ数ハタ個数ヲ示ワツテロカ r 迄ノ積分ヲミタモノデアイル. $S(r)$ ハ其 'interval' sum ガ有限ナルカヨキ r ノ値ヲノゾキ $O(\log T(r) + \log r)$ ヲ満足スルモノ.

Cartan ノ証明ハ奇麗ナルカ 幾分 übersichtlich ナイ小感ガアル. 譬者 $f_1, \dots, f_p$ ノ Wronskian ヲ $W(f_1, \dots, f_p)$ トスルトキ

$$W(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |W(f_1, \dots, f_p)| d\theta$$

$|z|=r$

ヲ上下ニ abschätzen スルトミナ方算テ計算スルト上定理ガ natural に出テクルコトヲ示シタイ. Cartan ノ証明ヲ少シニ modify スルデアイルカ

Carsonノヨリ幾分拡張サレタ形ノ結果ヲ得ル.

4.5.

証明. 1カラチ込ノ integer シ任意ノ順序ニ並ベリモノヲ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ トスレバ $\|C_{ij}\|$ = 対スル假定カ $W(f_1, \dots, f_p) \equiv C(\alpha) W(F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_p})$, ココ = $C(\alpha)$ ハ α ノトリ方ノ $\equiv$ = ヲツテ定ル常数 ($\neq 0, \infty$) テ" α = independent.

従ツテ

$$W(f_1, \dots, f_p) \equiv F_1 \cdots F_p \frac{C(\alpha) W(F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_p})}{F_{\alpha_1} \cdots F_{\alpha_p}} \equiv F_1 \cdots F_p H.$$

ココ = $H(\alpha)$ " sufficient α = independent テ" 且次ノタロクカケル.

$$H \equiv C(\alpha) \begin{vmatrix} \frac{F_{\alpha_1}}{F_{\alpha_1}} & \cdots & \frac{F_{\alpha_p}}{F_{\alpha_p}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{F_{\alpha_1}^{(p+1)}}{F_{\alpha_1}} & & \frac{F_{\alpha_p}^{(p+1)}}{F_{\alpha_p}} \end{vmatrix} \div F_{\alpha_{p+1}} \cdots F_q$$

Abschätzung nach oben. 各 α = 対シ $|F_{\alpha_1}| \leq |F_{\alpha_2}| \leq \cdots \leq |F_{\alpha_p}|$ トシ (即チ α ハ α ノ順序ニ) アラエル $|C(\alpha)|$ ノ max ヲ C トスルト

$$W(r) \leq \sum_{i=1}^q \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F_i| d\theta + \log C + \sum \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{F_{\alpha_1}^{(p+1)}}{F_{\alpha_1}} \cdots \frac{F_{\alpha_p}^{(p+1)}}{F_{\alpha_p}} \right| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F_{\alpha_{p+1}} \cdots F_{\alpha_q}| d\theta$$

但シ $\log^+ |a| = \begin{cases} \log |a|, & |a| > 1 \\ 0, & |a| \leq 1 \end{cases}$ 又右ニ第三項ノ $\sum$ " アラエル α ノトリ方 =

對スル sum ヲ表ハス. 従ツテ コノ第三項ハ $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \left(\frac{F_{\alpha_1}^{(p+1)}}{F_{\alpha_1}} \right)^{\theta_1} \cdots \left(\frac{F_{\alpha_p}^{(p+1)}}{F_{\alpha_p}} \right)^{\theta_p} \right| d\theta$ ノタロク

キモノノ有限コノ sum テ" 上カラ abschätzen サレル. 1 従ツテ Nevanlinna

ノ定理 = ヲリ 其 internal sum カ有限ナル如キ个ノ値ヲ除イテ此第三項

$$O(\log r + \log \sum_{i \neq j}^{i+j \leq r} T(r, \frac{f_i}{f_j})) < O(\log r + \log T(r)) \text{ --- 冒頭、注意. } \times$$

又 $\|C_{ij}\|$ = 対スル假定及 C の α のエラヒ" カラ

$$|f_i| \leq K(C) |F_{\alpha_j}|, \quad i=1, \dots, p; \quad j=p+1, \dots, q$$

$\Rightarrow \Rightarrow K(C) \|C_{ij}\|$ の $\Rightarrow$ ヲツテ 定ル 正数ヲ" α = independent. 従ツテ

$$(q-p)T(r) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F_{\alpha_{p+1}} \cdots F_{\alpha_q}| d\theta. \text{ 故 } \Rightarrow$$

$$W(r) \leq \sum_{i=1}^q N(r, F_i) - (q-p)T(r) + S(r).$$

Abschätzung nach unten. $q, \|C_{ij}\|$ 等" 上ノモノト異ナラズモ
ヨイ。但シ同シ" 條件ヲ満足スルコト。記述ノ簡單ノ爲" α 等" ツイテモ
上ト同シ" notation ヲ用フルカ。

$$W(r) = \sum_{i=1}^q \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F_i| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{H} \right| d\theta$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |H| d\theta \leq O(1) + N(r, \frac{1}{H}), \quad \Rightarrow \Rightarrow N(r, \frac{1}{H}) \text{ " meromorphic function } \frac{1}{H},$$

$\alpha \leq r$ = 定ムル zero point' 数ヲ logarithmic = 積分ニタテ"アル。 α ノト" カラ $F_{\alpha_{p+i}}, i > 0$ " 0 = ナラヌカラ $\Rightarrow$ zero point' 数ハ H ' 分母ノ determinant' pole' 数ノミヲ言固ヘ" ルトヨイ。 ヲツテ $N(r, \frac{1}{H}) \leq \sum_{i=1}^q N_{p-1}(r, F_i), \quad \text{AP4}$

$$W(r) \geq O(1) + \sum_{i=1}^q (N(r, F_i) - N_{p-1}(r, F_i))$$

其ノクテ Cartan' 定理, 持テ張ラ" 得ル, role de Wronskien

$$(q-p)T(r) \leq \sum_{i=1}^q N(r, F_i) - W(r).$$

急ノ爲" $N(r, F_i)$ " $p \leq r$ = 定ムル F_i ' zero' 数' log. integration テ"アリ
 Jensen' 公式 = ヲツテ $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(x)| d\theta = O(1) + N(r, F_i) - N(r, \frac{1}{F_i})$

正誤 — 第三号 Wronskian = 京元 (吉田 耕作)

3 頁 1 行 $\sum_{i=1}^p f_i(x) \neq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^p |f_i(x)| \neq 0 =$

3 頁 9 行 $i=1, 2, \dots, p \Rightarrow i=1, 2, \dots, q =$

4 頁 2 行 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q =$

4 頁 6 行 $\frac{C(\alpha) W(F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_p})}{F_{\alpha_1} \dots F_{\alpha_p}} \Rightarrow \frac{C(\alpha) W(F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_q})}{F_{\alpha_1} \dots F_{\alpha_q}} =$

最後行 $O(1) + N(Y, F_i) - N(Y, \frac{1}{F_i}) \Rightarrow O(1) + N(Y, g) - N(Y, \frac{1}{g}) =$

前号取急イタ為 = 淨書ニテ ナイ 原稿カラ 寄シタ為 コシナ = 多ク、正

誤ヲ シナケレバ ナラナイ 本誌 = ナツテ 申言アリ マセニテ シタ — 吉田 耕作