OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	線形常微分方程式ノ解ノ Topologische Abbildungen ニ就テ
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 5, p. 1-5
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73849
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

13. 線形常微分方程式ノ解ノ Topologische Abbildungen ニ就テ.

中野秀五郎(一高)

本年四月数物ノ年会ニ於テ、筆者ハ南雲氏トノ共同研究トシテ、二ツノ任意ノ二階線形斉次微分方程式ガ

$$(1)\qquad \begin{cases} y=\alpha(t)z \\ x=\varphi(t) \end{cases} \qquad (\alpha(t)\neq 0,\ \varphi'(t)\neq 0)$$

ナル如キ変換ニテ互ニ他ニ移リ得ル總テノ場合ヲ決定セリ. 筆者ガ此處ニ記カント欲スルコトハ、二ツノ線形微分方程式ニ就テ

$$(2)\qquad \begin{cases} y=\varphi(t,z) \\ x=\psi(t,z) \end{cases}$$

ナル如キ (x,y)-面ト (t,z)-面トノ Topologische Abbildung ニヨリ一方ノ微分方程式ノ解ガ他方ノ解ニ abbilden サレル時ハ、変換 (2) ハ如何ナル条件ヲ満足スベキカトイフコトナリ.

1. 第一階微分方程式ノ場合.

二ツノ第一階線形微分方程式ノ一般解ヲ夫々

$$(3)\qquad C\,u(x)+h(x)$$

$$(4)\qquad C\,v(x)+k(x) \qquad (C:\ \text{arbitrary constant})$$

解 $h(x)$ ニ解 $k(x)$ ガ対應スルモノトス.

ズ"(3) ヲ

$$(5)\qquad \begin{cases} y=u(x)z_1+h(x) \\ x=t_1 \end{cases} \qquad (u(x)\neq 0 \text{ ナルコトハ明カナリ})$$

ナル変換ニテ

$$(6)\qquad z_1=C$$

引ク

$$\begin{cases} y = v(x) z_2 + k(x) \\ x = t_2 \end{cases} \quad (v(x) \neq 0 \text{ ナルコト ニ 0ノ カ ナリ})$$

$$z_2 = C$$

キ ニ (6) ト (8) トヲ Topologische Abbildung ニヨリテ他ノ変形

横軸ニ平行ナ直線ヲ横軸ニ平行ナ直線ニ変換スベキヲ以テ

$$\begin{cases} z_2 = \varphi(z_1) \\ t_2 = \psi(t_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = \varphi^{-1}(z_2) \\ t_1 = \psi^{-1}(t_2) \end{cases}$$

ナルベカラズ. 此処ニ $\varphi(z_1)$, $\psi(t_1)$ ハ増加又ハ減少連続函数ナリ

gische Abbildung (2) ニ

$$\begin{cases} y = v\{\psi(t)\} \varphi\left\{\dfrac{z - k(t)}{u(t)}\right\} + k(t) \\ x = \psi(t) \end{cases}$$

ザルベカラズ ト云フ形ノ条件ニ過ス。

階微分方程式ノ場合

分方程式ニ一点ヲ, ノ近傍ニ於テ

$$\begin{cases} y = \alpha(x) z \\ x = \varphi(t) \end{cases} \qquad \xi - \varepsilon < x < \xi + \varepsilon \text{ ニテ } \alpha(x) \neq 0,\ \varphi'(t) \neq 0$$

変換ニテ

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$

変シ得ル. 故ニ一ツノ未ニ階微分方程式ノ解が topologisch ニ

サレルトラバ, 其ノ変換ハ (9) ノ如キ変換ニヨリ (10) ノ如キ形ノ

ノ Topologisch Abbildung ニ変形サレル. 然シ (11) ノ形ノ微分

ハ横軸ニ垂直トラザル直線トリ, 然ルヲ直線ヲ直線ニ[illegible]

然カモ横軸ニ垂直ナラザルモノハ、又横軸ニ垂直ナラザルモノヘ abbilden サレルヲ以テ、連続性ニヨリ、横軸ニ垂直ナル直線ハ又横軸ニ垂直ナル直線ヘ abbilden サレル。ソレニ Topologische Abbildung ハ射影幾何ノ定理ニヨリ

$$y = \frac{c_1 + c_2 z + c_3 t}{b_1 + b_2 t}$$

$$x = \frac{a_1 + a_2 t}{b_1 + b_2 t}$$

ナル変換ニ限ル。故ニ元ノ Topologische Abbildung ハ

$$(11) \qquad \begin{cases} y = \alpha(x) z + \beta(x) \\ x = \varphi(t) \end{cases} \qquad \left(\alpha(x) \neq 0,\ \varphi'(t) \neq 0 \right)$$

ナル形ノ変換ナラザルベカラズ。然レコレハ一点ノ近傍ニノミ話ナルモ各点ノ近傍ニテ (11) ノ如キ変換ナレバ、元ノ Topologische Abbildung ハ恒ニ (11) ノ如キ変換ナラザルベカラズ。

逆ニ (11) ノ如キ形ノ変換ニヨリ任意ノ二階微分方程式ガ他ノ任意ノ二階微分方程式ニ変形シ得ルトハ必ズシモ云ヘズ。其ガ変形シ得ル場合ハ盲腸ニ述ベタル如ク本年四月ノ年会ニテ発表セル所ナリ。

3. 二ノn階微分方程式ノ場合

二ツノ二n階微分方程式ヲ互ニ abbilden スル Topologische Abbildung ニ於テ一点 (x_0, y_0) ガ (t_0, z_0) ニ abbilden サレ、(x_0, y_0) ヲ通ル一解 $h(x)$ ガ (t_0, z_0) ヲ通ル解 $k(t)$ ニ abbilden サレクトスル。今 (x_0, y_0) ヲ通リ $h(x)$ ト (n−1) 回ノ切触ヲナス解 $u(x)$ ノ Bild ヲ $v(t)$ トスレバ、$v(t)$ ハ $k(t)$ ト (t_0, z_0) ニ於テヤハリ (n−1) 回ノ切触ヲナス。此ガ何トナレバ若シ然ラズトセバ、即チ $v(t)$ ガ $k(t)$ ト (t_0, z_0) ニ於テ n−1 回以下ノ切触ヲナストセバ、(t_0, z_0) ノ近傍ニテ点 (t_0, z_0) ヲヨギリ $v(t)$ ト $k(t)$ トノ間ニ挟マレル解ハ少クトモ ∞^2 ノ自由度ヲ有ス。然ルニ此ノ Bild トシテ

(x_0, y_0) ヲ通リ $u_1(x)$ ト $h(x)$ トノ間ニ挟マレル一列解ノ自由度ハ ∞^1 個、故ニ相解ニ必ズシモ相異ル解ガ対応セズ。従ッテ Topologische Abbildung ニ予備ス為ニテ (x_0, y_0) ヲ通リ $h(x)$ ト $n-2$ 回ノ切触ヲスル一解 $u_2(x)$ ノ Bild $v_2(t)$ (t_0, z_0) ヲ通リ $k(t)$ ト $n-2$ 回ノ切触ヲナス。然ルニ一般ニ $h(x)$ 或ハ $k(t)$ ト (x_0, y_0) 或ハ (t_0, z_0) ニテソクトモ $n-2$ 回ノ切触スル解ハ夫々

$$(12) \qquad \begin{cases} C_1[u_2(x)-h(x)]+C_2[u_1(x)-h(x)]+h(x) \\ C_1[v_2(t)-k(t)]+C_2[v_1(t)-k(t)]+k(t) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} C_1, C_2 \text{ : arbitrary} \\ \text{constants} \end{array}\right)$$

ニテ表ハサレル。然シテコレラハ互ニ他ニ affilden サレル。然ルニ Wronskian

$$\begin{vmatrix} u_2(x)-h(x) & u_1(x)-h(x) \\ u_2'(x)-h'(x) & u_1'(x)-h'(x) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} v_2(t)-k(t) & v_1(t)-k(t) \\ v_2'(t)-k'(t) & v_1'(t)-k'(t) \end{vmatrix}$$

ハ夫々 $x=x_0$, 或ハ $t=t_0$ ヲ除イテハ x_0 或ハ t_0 ノ近傍ニテ零トナラズ。故ニ(12)ハ夫々 $x=x_0$, 或ハ $t=t_0$ ナルガ如キ点ヲ除イタ (x_0, y_0) 或ハ (t_0, z_0) ノ近傍ニ於テ3ツ宛ノ微分方程式ノ解ニテ今考ヘル所ノ Topologische Abbildung ニヨリ互ニ他ニ affilden サレル。故ニ z_1 ニヨリ元ノ Topologische Abbildung (x_0, y_0) ノ近傍 $(x-x_0)$ ナル点ヲ除イテハ(11)ナル形ニテ表ハサル。故ニ連続性ヨリ $x=x_0$ ナル点ニ対シテモ (x_0, y_0) ノ近傍ニテ(11)ナル形ニテ表ハサル。尚又任意ノ点ノ近傍ニ於テ(11)ナル形ニテ表ハサレルコトニテ考ヘル所ノ Topologische Abbildung ハ(11)ナル形ノ変換ナラザルベカラズ。又 z_1 ニ於テ(11)ヲ誘導セル径路ヨリ此ノ際 $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\varphi(t)$ ガ n 回微分可能ナルコトモ容易ニ推察サレル。以上2,3ヲ綜合シテ次ノ定理ヲ得ル。

定理; ニツノ次 $n(\geq 2)$ 階微分方程式ノ解ヲ互ニ affilden スル Topologische Abbildung ハ

$$\begin{cases} y=\alpha(x)z+\beta(x) \\ x=\varphi(t) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \alpha(x)\neq 0,\ \varphi'(t)\neq 0. \\ \alpha(x), \beta(x), \varphi(t) \text{ : } n \text{ 回微分可能} \end{array}\right)$$

ナル変換ニ限ル

第二階以上、即チ一般ニ第n階微分方程式ニ就テ、如何ナル場合ニ上述ノ如キ変換ニテ他ノ第n階微分方程式ニ abbilden サレルカハ筆者ノ今研究中ノ所ナリ。

1934, 7, 31.
(8, 2 受取)

正誤 ― 線形微分方程式ノ Topologische Abbildungen
ニ就テ ― 中野秀五郎 (第5号)

2頁 $\begin{cases} z_2=\varphi(z_1) \\ t_2=\psi(t_1) \end{cases}$ $\begin{cases} z_1=\varphi^{-1}(z_2) \\ t_1=\psi^{-1}(t_2) \end{cases}$

$\begin{cases} y=\cdots\cdots \\ x=\psi(t) \end{cases}$

ヲ

$\begin{cases} z_2=\varphi(z_1) \\ t_2=\psi(t_1,z_1) \end{cases}$ $\begin{cases} z_1=\varphi^{-1}(z_2) \\ t_1=\psi^{-1}(t_2,z_2) \end{cases}$

$$y=v\left\{\psi\left(t_1,\frac{z-k(t)}{u(t)}\right)\right\}\varphi\left\{\frac{z-k(t)}{u(t)}\right\}+k(t)$$

$$x=\psi\left(t_1,\ \frac{z-k(t)}{u(t)}\right)$$

$\psi(t,z)$ ハ t ニ関シテ単増加或ハ減少連続函数、z ニテ連続、従ツテ t,z ニ関シテ連続ナリ (南雲氏ニヨル)

2頁 (9)、$y=\alpha(x)z$ ヲ $y=\alpha(x)z+\beta(x)$ トス