



Title	Algebroid function ニツイテ
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 6, p. 2-6
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73852
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

16. Algebroid. function = ツイテ

吉田耕作 (阪大)

Irreducible equation

$$f(x, y) \equiv A_0(x)y^v + A_1(x)y^{v-1} + \dots + A_v(x) = 0,$$

$$A_i(x) \text{ は } \sum_{i=0}^v |A_i(x)| \neq 0 \text{ となる整函数}$$

1 根 $y(x)$ が v 價 algebroid となる。 algebroid = 代数 = Picard
1 定理を擴張スルコトは G. Rémoundos (Ann. Toulouse, 2^e série, 1906), M. Varopoulos (Bull. Soc. math. France, 1925) 等
ヨツテナサレタ。 シカシ有理型函数論 = 於ては Nevanlinna, 第 = 基本
定理, 形 = 於て Picard, 定理 = algebroid = 擴張スルコト = 成功
シタ。 ハ極く最近コトデアツテ H. L. Selberg (Math. Zeitschr. 1930),
Valiron (Bull. Soc. math. Fr. 1931), E. Illich (Crelle 1931) 等
努力 = 見た。 ソレヲ結果ヲ述ベルヲバ

$|x| \leq x$ = 於ては $f(x, a) = 0$ / 根ノ數ヲ multiplicity
ヲ甚定 = ンレテ $n(x, a)$ トシテ $N(x, a) = \int_0^x \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt$
+ $n(0, a) \log x$ ヲ定義スル。

又 $a = \infty$ ナルトキハ $|x| \leq x$ = 於ては $\lim_{y \rightarrow 0} y^v f(x, \frac{1}{y})$ / zero
ノ數ヲ $n(x, \infty)$ トスル。 更 =

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max_i \log |A_i(x)| d\theta = I(x, y)$$

$x = re^{i\theta}$

トスル。

然らば $a_1, a_2, \dots, a_q$ が互に相異なる有限又無限 complex number トスルトキ

$$(1) \quad (q-2\nu) T(x, y) \leq \sum_{i=1}^q N(x, a_i) + S(x)$$

但し $S(x)$ は其 interval sum が有限ナル如キ x の値ヲ除ケバ
 $< O(\log x T(x, y))$

上ノ定理ハ $A(x)$ が一次獨立ナルトキハ H. Cartanノ定理
 (拙著 "Wronskian = 就テ" (紙上談話會第3号))ニヨツテ

$$(2) \quad (q-\nu-1) T(x, y) \leq \sum_{i=1}^q N_{\nu}(x, a_i) + S(x)$$

ト云フ精密ナル形ヲ得ラレド。但し $N_p(x, a_i)$ ハ a_i -pointヲ
 勘定スルトキ $s(>p)$ ple pointハ p 個 = $s(\leq p)$ ple pointハ
 s 個 = 甚カ定シタモ。

H. Cartanハ Mathematica (1933)ニ於テ (2)ヲ述ベ"且ツ
 $A(x)$ ノ間ニ存在スル linear homogeneous relationノ max.
 numberヲ入トスルトキハ

$$(3) \quad (q-\nu-\lambda-1) T(x) \leq \sum_{i=1}^q N_{\nu-\lambda}(x, a_i) + S(x)$$

ガ成立スルダロウト豫想シテタル。既ニ Valeropoulos (前掲論文)
 ガ $f(x, a) = 0$ ノ根ガ有限ナル如キ a ノ個數ハ $\nu + \lambda + 1$ ヲ越
 エナイコトヲ証明シテ居ルカラ (3)ガ成立モラシイデ"アロウ。

筆者ハ "Wronskian = 就テ"トホホ"同様ノ計算ニヨツテ

$$(4) \quad \left\{ (q-\nu-1) \left(1 - \frac{\Delta}{\nu} \right) - \frac{\Delta}{\nu} \right\} T(x) \leq \sum_{i=1}^q N_{\nu-\lambda}(x, a_i) + S(x)$$

ガ成立スルコトヲ証シ得タ。

定義 = ヲツテ $0 \leq \lambda \leq \nu - 1$ テ"アルカラ

六

$$(q - \nu - 1) \left(1 - \frac{\lambda}{\nu}\right) - \frac{\lambda}{\nu} \geq \frac{1}{\nu} (q - \nu - \lambda - 1)$$

テ"アル. (4) "一般式 = (3) ヲリハ 悪イカ" (2) 及び "Varopoulos
ノ定理, Nevanlinna ノ第一基本定理等ヲ含ム. 又 或ル場合 = ハ,
(1), (3) ヲリハ 遙カニ 精密 テ"アル.

(4) ノ 証明 第一段. $a_1, a_2, \dots, a_q$ ハ 全テ 有限 ト シテ ヲイ.

anon $a_1, a_2, \dots, a_q$ ト 異ル $b (= \text{finite})$ ヲ ヲツテ 来テ $F(x, y)$
 $= (y - b)^\nu f(x, \frac{y}{y - b})$ ヲ 取リ 扱 1" ヲイカラ.

$\lambda =$ 対スル 假定カテ $\sum_{i=1}^p |g_i(x)| \neq 0$, $p = \nu - \lambda + 1$, ヲ
満足スル 一次 獨立 + 整 函 數 $g(x) =$ ヲツテ

$$h_i(x) = \sum_{j=1}^p a_{ij} g_j(x), \quad i = 0, 1, \dots, \nu$$

ト 異ル 從ツテ $f(x, y) \equiv \sum_{i=1}^p p_i(y) g_i(x)$, $p_i(y) = a_{0i} y^\nu + a_{1i} y^{\nu-1}$
 $+ \dots + a_{\nu i}$. 故ニ 1"カラ q マテ", integer ヲ 任意ノ 順序ニ 並
べテ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ ト スル トキ $f(x, a_{\alpha_p}), f(x, a_{\alpha_{p+1}}), \dots, f(x, a_{\alpha_q})$
(74) λ 個ヲ 除イテ 何レノ $f(x, a_{\alpha_i}) \in f(x, a_{\alpha_1}), \dots, f(x, a_{\alpha_{p-1}})$
ト 一次 獨立 テ"アル. 何者 $y =$ ツイテ ν 次ノ polynomial

$$\Delta(y) = \begin{vmatrix} p_1(a_{\alpha_1}) & \dots & p_p(a_{\alpha_1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_1(a_{\alpha_{p-1}}) & \dots & p_p(a_{\alpha_{p-1}}) \\ p_1(y) & \dots & p_p(y) \end{vmatrix}$$

ハ λ 個ノ max. number ト シテ 假定カテ $\neq 0$. 且 $\Delta(a_{\alpha_i}) = 0$, $i = 1,$
 $p-1$ ヲイカ.

第 ν 段 以下 α ハ $|f(x, a_{\alpha_1})| \leq |f(x, a_{\alpha_2})| \leq \dots$

、如クナツテオルトスル。即チ α ハ x ノ函數。然ラバ上ニ述ベタ ν -次
獨立性ノ定義カラ、 $j \geq \nu+1$ ナリ

$$(5) \quad |g_j(x)| \leq k |f(x, a_{\alpha_j})| \leq K \cdot \max_l |g_l(x)|$$

ココニ k, K ハ $a/\equiv \equiv$ ヲツテ定マリ $|x| \rightarrow \infty$ ノトキ borné 。從ツテ

$$\sum_{l=1}^q |g_l(x)| \neq 0 \Rightarrow f(x, a_{\alpha_j}) \neq 0, j \geq \nu+1. \quad \text{又}$$

$$(6) \quad T(x, y) + O(1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(x, a_{\alpha_j})| d\theta, j \geq \nu+1$$

$$(\text{即チ} = T(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max_l \log |g_l(x)| d\theta + O(1))$$

第三段 $f(x, a_{\alpha_p}), \dots, f(x, a_{\alpha_q})$ ノ中 $f(x, a_{\alpha_1}), \dots,$

$f(x, a_{\alpha_{p-1}})$ ト一次獨立ナモノハ第一段ニヨリ少クトモ $(q-\nu)$ 個アル。

コレヲウチ、絶對値最小ノモノヲ $f(x, a_{\beta})$ トシ、殘リヲ $f(x, a_{\beta_{p+1}}), \dots,$

$f(x, a_{\beta_q})$ トスル。然ラハ"

$$W(g_1, g_2, \dots, g_p) \equiv K(\alpha) W(f(x, a_{\alpha_1}), f(x, a_{\alpha_2}), \dots,$$

$$\dots, f(x, a_{\alpha_{p-1}}), f(x, a_{\beta}))$$

ココニ W 〃 wronskian ヲ示シ $K(\alpha) \neq 0, \infty$ 且ツ $K(\alpha) = O(1)$

ナル。故ニ "Wronskian = 就テ" = 於テ同様に、計算ニヨリテ

$$\sum_{i=1}^q N(x, a_i) - \sum_{i=1}^q N_{\nu-\lambda}(x, a_i) - \sum_{s=p+1}^q N(x, a_{\beta_s})$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(g_1, g_2, \dots, g_p) d\theta$$

$$\leq \sum_{i=1}^q N(x, a_i) + S(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=p+1}^q \log |f(x, a_{\beta_i})| d\theta$$

從ツテ

(7)

$$\sum_{i=p}^{q-1} K(i) \leq \sum_{i=1}^q N_{\nu-\lambda}(x, a_i) + S(x).$$

$$\text{且ニ} \quad K(i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(x, a_{\alpha_i})| d\theta - N(x, a_{\alpha_i})$$

第四段。 (5) $\Rightarrow$ $\exists \tau \quad N(x, a_{\alpha_i}) = 0, \quad i \geq \nu+1. \quad \exists \tau$
 (7) / 左辺ハ (6) $= \exists$

$$(8) \sum_{i=p}^{\nu} K(i) + (q-\nu-1) T(x) + O(1)$$

トコロカ $\sum_{i=1}^q K(i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F_1 \cdots F_q| d\theta - N(x, F_1 F_2 \cdots F_q)$
 $= O(1) \quad (\text{Jensen, 公式})$

テ"アル。 且ツ (6) $= \exists \tau \quad \sum_{i=\nu+1}^q K(i) = (q-\nu) T(x) + O(1)$ テ"アルカラ

$$(9) \sum_{i=1}^{\nu} K(i) = -(q-\nu) T(x) + O(1)$$

又定義カラ 明カ $= K(1) \leq K(2) \leq \cdots \leq K(q)$ テ"アルカラ (9) $= \exists$

$$(10) \sum_{i=p}^{\nu} K(i) \geq \frac{\lambda}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} K(i) \geq -\frac{\lambda}{\nu} (q-\nu) T(x) + O(1)$$

(7), (8), (10) $\exists$

$$[(q-\nu-1) - \frac{\lambda}{\nu}(q-\nu)] T(x) \leq \sum_{i=1}^q N_{\nu-\lambda}(x, a_i) + S(x)$$

コレ Bp4 (4) テ"アル

c. q. f. d.

注意 Algebroid ト云フコトハソレ程 essential = 使ツテナイ。

$g_1, g_2, \dots, g_p$ linear combination $F_1, F_2, \dots, F_q$ = ツキ 第一段 = 於
 ケルカ如キ linear independence, 條件カ 満足サレテキルカラ

$$((q-\nu-1)(1-\frac{\lambda}{\nu}) - \frac{\lambda}{\nu}) T(x) \leq \sum_{i=1}^q N_{\nu-\lambda}(x, F_i = 0) + S(x)$$

$$T(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max_{\substack{z \\ |z|=r}} \log |g_i(z)| d\theta.$$

(9. 8. 6.)