OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Derived Fourier 級数ノ Absolute Summability (A) ニ就イテ
Author(s)	佐藤, 徳意
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 7, p. 7-8
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73855
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

19. Derived Fourier 級数, absolute summability

(A) ニ就テ　　佐藤徳意 (北大)

最近高橋龍夫氏ガ数物記事 3, Vol. 16, 7 (1934) ニテ The absolute summability (A) of the conjugate Fourier series, 題ニテソレノ研究ヲ発表サレタ. 筆者ハ derived Fourier 級数, absolute summability (A), 判定條件ヲ求メル方法ニ興味ヲイダイタ.

$f(\theta)$, Lebesgue, 意味ニテ可積分ナ週期函数 (週期 $[-\pi, \pi]$) ノ Fourier 級数ヲ

$$(1) \qquad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

トスルトキ

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta)$$

ヲ (1) ノ conjugate Fourier 級数トイヒ

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta)$$

ヲ (1) ノ derived Fourier 級数トイフ.

コノ級数ノ absolute summability (A), 判定條件ヲ直接ノ定義ヨリ求メルニハ Poisson ノ如ク作ラナケレバナラナイガ, 供ニコノテハ間接的ナテハアルガステニ (2) ノ Poisson ノ如ガ求ノテヰルノテアルカラソレヲ用ヒテ行カウトスルノテアル.

今ヲ

$$(4) \qquad P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}(b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta)$$

$$(5) \qquad P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta)$$

トヲクトキハ(5)ハ4次数ニテ次ノ如クナル(高橋氏或ハ Prasad ノ論文)

$$P(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{x\sin(\alpha-\theta)}{1-2x\cos(\alpha-\theta)+x^2}\,d\alpha$$

$P(x)$ ハ $0\leqq x<1$ テ"4次数ノ級数デアルカラコノ区間テ"各項ニテ項別微分ガデキル. 依テ(4)カラ

$$(b)\qquad P'(x)=P(x)$$

而シテ(3)ノ absolute summability (A) ヲ断定スルニハ.

$$\int_0^{x_1}|P(x)|\,dx \qquad 0<x_1<1$$

ガ有界ナルコトシホストヨイ. 然ルニ(b)ニヨリ之ハ

$$\int_0^{x_1}|P''(x)|\,dx \qquad 0<x_1<1$$

ガ有界テ"アルコトヲ求メレバ一般ス ル. 即チ

$$\int_0^{x_1}\left|\frac{d^2}{dx^2}\int_0^{\pi}\psi(t)\frac{x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}dt\right|dx<K,\quad 0<x_1<1$$

$$\psi(t)=f(\theta+t)-f(\theta-t)$$

K : const.

コノ考ヘハ conjugate derived Fourier 級数或ハ nth derived Fourier 級数ヘモソノママ持ツテ行ケル

次ニ判定條件ヲーツ求メテミル.

$$\int_0^{x_1}\left|\frac{d^2}{dx^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\frac{x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}dt\right|dx$$

$$=\int_0^{x_1}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}\right|dt\,dx$$

積分ノ順序交換シテ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\psi(t)|\left\{\int_0^{x_1}\left|\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}\right|dx\right\}dt$$

トナル、今 $\int_0^{x_1}\left|\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}\right|dx$

ヲ考ヘル: $t_1\ (0<t_1<\frac{\pi}{2})$ ヲ $t_1=\cos^{-1}\frac{x_1(3-x_1^2)}{2}$

トスレバ $0\leqq t\leqq t_1$ ニ於テハ

$$\int_0^{x_1}\left|\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}\right|dx$$

$$=\int_0^{x_1}\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}dx=\frac{(1-x_1^2)\sin t}{(1-2x_1\cos t+x_1^2)^2}-\sin t$$

$$\leqq\frac{(1+x_1)\sin t}{(1-x_1)^3}\leqq\frac{2\sin t}{\left\{\frac{3}{2}(1-\cos t_1)\right\}^{\frac{3}{2}}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}$$

$$\leqq 6\sqrt{3}\frac{1}{t^2}\quad\left((1-x_1)^3>0,\ 0<x_1<1\ \text{デアルカラ}\ 2(1-\cos t_1)<3(1-x_1)^2\right)$$

モシ t ガ $t_1<t\leqq\frac{\pi}{2}$ デアッテ x' ガ $0<x'<1$ デ且ツ次ノ方程式

$$\cos t=\frac{x'(3-x'^2)}{2}$$

ヲ満ストキニハ

$$\int_0^{x_1}\left|\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}\right|dx$$

$$=\int_0^1\left|\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}\right|dx=\int_0^{x'}\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}dx$$

$$-\int_{x'}^{t}\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}dx$$

$$=2\frac{(1-x'^2)\sin t}{(1-2x'\cos t+x'^2)^2}-\sin t\leqq 2\frac{(1-x'^2)\sin t}{(1-x')^4}$$

$$\leqq 3\sqrt{3}\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\leqq 12\sqrt{3}\frac{1}{t^2}$$

$$\int_0^{x_1}\left|\frac{d^2}{dx^2}\int_0^{\pi}\psi(t)\frac{x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}dt\right|dx$$

$$=\int_0^{x_1}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}dt\right|dx$$

$$+\int_0^{x_1}\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\psi(t)\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}dt\right|dx$$

$\frac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$ デハ $\frac{2(2\cos t-3x+x^3)}{(1-2x\cos t+x^2)^3}$ ガ有界デアルカラ右辺ノ第二項ハ有界．又第一項ハ先ノ計算ニヨリ

$$\int_0^{x_1}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}dt\right|dx$$

$$\leqq\left(\int_0^{t_1}+\int_{t_1}^{\frac{\pi}{2}}\right)|\psi(t)|\left\{\int_0^{x_1}\left|\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}\right|dx\right\}dt$$

$$\leqq 18\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\psi(t)|}{t^2}dt$$

コレヨリ次ノ定理ヲ得．

定理　モシ積分

$$\int_0^{\delta}\frac{|\psi(t)|}{t^2}dt$$

ガ存在スルトキハ ~~divergent~~ derived Fourier 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(b_n\cos n\theta-a_n\sin n\theta)$$

ハ absolute summable (A) デアル．

(9.8.18 受取)