



Title	Derived Fourier 級数ノ Absolute Summability (A) ニ就イテ
Author(s)	佐藤, 徳意
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 7, p. 7-8
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73855
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

19. Derived Fourier 級数 / absolute summability
(A) = 就て 佐藤徳寛 (北大)

最近 高橋龍夫氏が数物記事 3, Vol. 16, 7 (1934) = 7
The absolute summability (A) of the conjugate Fourier
series / 題 = 7 ソレ / 研究ヲ発表サレタ。筆者、derived
Fourier 級数 / absolute summability (A) / 判定条件ヲ
求メル方法 = 角虫レヲミタイト思フ。

$f(\theta)$, Lebesgue / 意味 = 7 可積分ナ週期函数 (週期 $[-\pi, \pi]$)
Fourier 級数ヲ

$$(1) \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

トスルトキ

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta)$$

7 (1) / conjugate Fourier 級数トズヒ

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta)$$

7 (1) / derived Fourier 級数トズ。

コノ級数 / absolute summability (A) / 判定条件ヲ
直接ノ定義ヨリ求メルニハ Poisson' 和ヲ作ラサレハ"ナラナイ"
ガ供シコトデ"ハ 間接的デ"ハアルカ"ステ" = (2) / Poisson' 和カ"求
メテ平ルノデ"アルカラソレヲ用ヒテイテカウトスルノデ"アル。

今

$$(4) \quad P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta)$$

$$(5) \quad P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta)$$

トヲクトキハ (5) ハ 4 次級数ニテニク、如クナル (高橋氏 或ハ Bruck 論文)

$$P(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \frac{x \sin(\alpha - \theta)}{1 - 2x \cos(\alpha - \theta) + x^2} d\alpha$$

$P(x)$ ハ $0 \leq x < 1$ テ "4 次級数" 級数ニテアルカラコノ区間テ "各点ニテ項別微分ガ" テ"キル。依テ (4) カラ

$$(b) \quad P'(x) = P(x)$$

而ニテ (3) ' absolute summability (A) ヲ断定スルニハ、

$$\int_0^{x_1} |P'(x)| dx \quad 0 < x_1 < 1$$

ガ有界ナルコトヲ示ストヨイ。然ルニ (b) = ヲリニハ

$$\int_0^{x_1} |P''(x)| dx \quad 0 < x_1 < 1$$

ガ有界ニテ"アルコトヲ示シ" 自反スル。即チ

$$\int_0^{x_1} \left| \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\pi} \psi(t) \frac{x \sin t}{1 - 2x \cos t + x^2} dt \right| dx < K, \quad 0 < x_1 < 1$$

$$\psi(t) = f(\theta + t) - f(\theta - t)$$

K : const.

コノ考ヘハ conjugate derived Fourier 級数或ハ n th derived Fourier 級数ハモソノニマ持ツテ行ケル

ニクニ決定条件ヲ一ツ求メテニル。

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} \left| \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\pi} \psi(t) \frac{x \sin t}{1 - 2x \cos t + x^2} dt \right| dx \\ &= \int_0^{x_1} \left| \int_0^{\pi} \psi(t) \frac{2(2 \cos t - 3x + x^3) \sin t}{(1 - 2x \cos t + x^2)^3} dt \right| dx \end{aligned}$$

積分ノ順序交換ニテ

$$\left(\int_0^{\pi} |\psi(t)| \left\{ \int_0^{x_1} \left| \frac{2(2 \cos t - 3x + x^3) \sin t}{(1 - 2x \cos t + x^2)^3} \right| dx \right\} dt \right)$$

トナル、今 $\int_0^{x_1} \left| \frac{2(2\cos t - 3x + x^3)\sin t}{(1 - 2x\cos t + x^2)^3} \right| dx$

9.

ヲ考ヘル、 $t_1 (0 < t_1 < \frac{\pi}{2}) \Rightarrow t_1 = \cos^{-1} \frac{x_1(3-x_1^2)}{2}$

トスレバ" $0 \leq t \leq t_1$ = 於テハ、

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} \left| \frac{2(2\cos t - 3x + x^3)\sin t}{(1 - 2x\cos t + x^2)^3} \right| dx \\ &= \int_0^{x_1} \frac{2(2\cos t - 3x + x^3)\sin t}{(1 - 2x\cos t + x^2)^3} dx = \frac{(1-x_1^2)\sin t}{(1-2x_1\cos t + x_1^2)^2} - \sin t \\ &\leq \frac{(1+x_1)\sin t}{(1-x_1)^3} \leq \frac{2\sin t}{\left\{\frac{3}{2}(1-\cos t_1)\right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq 6\sqrt{3} \frac{1}{t^2} \left((1-x_1)^3 > 0, 0 < x_1 < 1 \text{ テ"アルカラ } 2(1-\cos t_1) < 3(1-x_1)^2 \right)$$

モ" t カ" $t_1 < t \leq \frac{\pi}{2}$ テ"アルテ x' カ" $0 < x' < 1$ テ"且ツ"次ノ方程式"

$$\cos t = \frac{x(3-x^2)}{2}$$

ヨリ x ラレトキ = ハ

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} \left| \frac{2(2\cos t - 3x + x^3)\sin t}{(1 - 2x\cos t + x^2)^3} \right| dx \\ &= \int_0^1 \left| \frac{2(2\cos t - 3x + x^3)\sin t}{(1 - 2x\cos t + x^2)^3} \right| dx - \int_{x'}^1 \left| \frac{2(2\cos t - 3x + x^3)\sin t}{(1 - 2x\cos t + x^2)^3} \right| dx \\ &= 2 \frac{(1-x'^2)\sin t}{(1-2x'\cos t + x'^2)^2} - \sin t \leq 2 \frac{(1-x'^2)\sin t}{(1-x')^4} \\ &\leq 3\sqrt{3} \frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} \leq 12\sqrt{3} \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\lambda_1} \left| \frac{d^2}{d\lambda^2} \int_0^{\pi} \psi(t) \frac{\lambda \sin t}{1-2\lambda \cos t + \lambda^2} dt \right| d\lambda \\
&= \int_0^{\lambda_1} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(t) \frac{2(2\cos t - 3\lambda + \lambda^3) \sin t}{(1-2\lambda \cos t + \lambda^2)^3} dt \right| d\lambda \\
&\quad + \int_0^{\lambda_1} \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \psi(t) \frac{2(2\cos t - 3\lambda + \lambda^3) \sin t}{(1-2\lambda \cos t + \lambda^2)^3} dt \right| d\lambda
\end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ へ $\frac{2(2\cos t - 3\lambda + \lambda^3)}{(1-2\lambda \cos t + \lambda^2)^3}$ が有界 であるから積分
 の各項は有界、又第一項は先の計算より

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\lambda_1} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(t) \frac{2(2\cos t - 3\lambda + \lambda^3) \sin t}{(1-2\lambda \cos t + \lambda^2)^3} dt \right| d\lambda \\
&\leq \left(\int_0^{\lambda_1} + \int_{\lambda_1}^{\frac{\pi}{2}} \right) |\psi(t)| \left\{ \int_0^{\lambda_1} \left| \frac{2(2\cos t - 3\lambda + \lambda^3) \sin t}{(1-2\lambda \cos t + \lambda^2)^3} \right| d\lambda \right\} dt \\
&\leq 18\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\psi(t)|}{t^2} dt
\end{aligned}$$

コレヨリ次の定理を得.

定理 モー積分

$$\int_0^{\delta} \frac{|\psi(t)|}{t^2} dt$$

が存在スルとき $\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta)$ derived Fourier 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta)$$

は absolute summable (A) である.

(9.8.18 復取)