



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | Schwarz ノ 定理ノ 簡單ナ 証明                                                        |
| Author(s)    | 佐藤, 徳意                                                                      |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1934, 7, p. 11-14                                                |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/73856">https://doi.org/10.18910/73856</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## 20. Schwarz の定理, 簡単 + 証明

11

佐藤 徳彦 (北大)

先月末から今月一週間はカケテ、札幌で中等教員講習会が行われ、  
シタカ、吉田先生が、講義で Schwarz の一般化された二次多項式が  
零である様+連続函数の一次多項式に近づくことを証明する。際、  
函数は二次、簡単+性質の Lemma 2 を使った。アルト、アルト、アルト、  
逢会：於て提出された、証明の要は、信局通、証明法を分解し  
タモノ、タモノ、デ、此形、タモノ、解、タモノ、解、タモノ、解、タモノ、解

Lemma 1.

函数  $f(x)$  は  $(a, b)$  で定義された連続函数である。 $(a, b)$ 、各点  $x$  で  
 $f(x)$  が定義され、  
 $0 < h < \delta(x)$

それ、それ、それ

$$f(x+h) + f(x-h) \geq 2f(x)$$

これは「 $f(x)$  は convex である」。

証明

$x_1 < x < x_2$  とする

$$f(x) \leq \frac{x-x_2}{x_1-x_2} f(x_1) + \frac{x_1-x}{x_1-x_2} f(x_2)$$

これは「 $f(x)$  は凸である」。

1)  $f(x_1) = f(x_2) = 0$  とする。

12.

$f(x) \leq 0 \Rightarrow \exists \lambda, \exists \varepsilon f(x) > 0 + \lambda x$  カ"ア"ハ"

$f(x) = \max_{x_1, x_2} (x_1, x_2) = \max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2)$  カ"ア"ハ"

$x_0$  1. 2. 3.  $f(x_0) = M (= \max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2))$  カ"ア"ハ"

$$x_0 < x_2 \quad (\because M > 0)$$

$\exists \varepsilon > 0$  カ"ア"ハ"  $0 < h < \delta(x_0)$  カ"ア"ハ"

$$f(x_0 + h) < M = f(x_0)$$

$$f(x_0 - h) \leq M = f(x_0)$$

カ"ア"ハ"  $\varepsilon > 0$  カ"ア"ハ"

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) < 2f(x_0)$$

カ"ア"ハ"  $\varepsilon > 0$  カ"ア"ハ"

$$f(x) \leq 0$$

11) 一般の場合.

$$\varphi(x) = f(x) - \left[ \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} f(x_2) \right]$$

カ"ア"ハ"  $\varepsilon > 0$  カ"ア"ハ"

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$$

カ"ア"ハ"  $\varepsilon > 0$  カ"ア"ハ"  $0 < h < \delta(x)$  カ"ア"ハ"

$$\varphi(x + h) + \varphi(x - h) \geq 2\varphi(x)$$

カ"ア"ハ"  $\varepsilon > 0$   $\text{Rp}$  1) 1 場合 = カ"ア"ハ"

$$\varphi(x) \leq 0$$

$$\text{カ"ア"ハ" } f(x) \leq \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} f(x_2)$$

Lemma 2.

13.

$f(x)$  が  $(a, b)$  で "convex" かつ "concave" かつ連続函数ならば  $f(x)$  は一次函数なり。

証明、簡単であるから略す。

$f^{(2)}(x)$  を以て一般化カルタニ二次函数を表す。

$$\text{即ち} \quad f^{(2)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

定理、

$f(x)$  が  $(a, b)$  で "定義" かつ連続函数で、 $(a, b)$  において  $f^{(2)}(x)$

が有し  $f^{(2)}(x) \geq 0$

とある。此の場合  $f(x)$  は  $(a, b)$  で "convex" なり。

証明

i)  $f^{(2)}(x) > 0$  なる時、

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) > 0, \quad 0 < h < \delta(x).$$

故に Lemma 1 により  $f(x)$  は  $(a, b)$  で "convex" である。

ii)  $f^{(2)}(x) \geq 0$  なる時

$$f_n(x) \equiv f(x) + \frac{1}{n} x^2 \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\text{と置く。} \quad f_n^{(2)}(x) = f^{(2)}(x) + \frac{1}{n} > 0$$

従って、 $f_n(x)$  は i) の場合、条件がすべて満足される。従って

$f_n(x)$  は i) の場合、条件がすべて満足される。故に  $f_n(x)$  は  $(a, b)$

で "convex" なり。従って  $x_1, x_2 \in (a, b)$  である。勝手な

14.

二乗ノ二乗ノ直ニ次ノ関係ガ成立スル。

$$f_n(x_1) + f_n(x_2) \geq 2f_n\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

$$\text{即 } f(x_1) + f(x_2) + \frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2) \geq 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{2}{n}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$$

又、 $n \rightarrow \infty$  として得ル。

$$f(x_1) + f(x_2) \geq 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

又、 $f(x)$  が  $(a,b)$  で convex ナル事ヲ示シ得ル。

依テ定理ノ証明ナル。

同様ニ之ヲ次ノ系ヲ得ル。

系。

定理ニ於テ  $f''(x) \leq 0$  トスル  $f(x)$  乃  $(a,b)$  で ~~convex~~ concave ナリ。

定理ノ系トヨリ Lemma 2 ヲ用フル。次、Schwarz, 定理ヲ得。

定理。

$f(x)$  が  $(a,b)$  で定義ナル連続函数デ  $f''(x)$  ヲ有シ

$(a,b)$  内ニ於テ  $f''(x) = 0$  ナルトキ  $f(x)$  乃  $(a,b)$  で一次函数

ナリ。

(9.8.18 受取)