22. Homologiegruppe ト Heegaarddiagramm (承前)

小松醇郎 (阪大)

紙上数学談話会才二号デ閉可符号三次元集合体ノ種類ニ対スル条件ヲ求メタガ其ノ後ノヨリ精密ナ結果及ビ関聯スル問題ヲ述ベヨウ。是ニ就テハ次ノ論文カラ出発スル。

I. Singer, "Threedimentional Manifolds and their Heegaard diagrams," Transact. of the Amer. Math. Soc. 1933, Bd. 35.

K. Reidemeister, „Zur dreidimensionalen Topologie," Hamb. Abhandl. 1933. Bd. 9.

K. Reidemeister, „Heegaarddiagramme und Invarianten von Mannigfaltigkeiten." Hamb. Abhandl. 1934. Bd. 10.

最後ノ論文ハ前二者ノ論文ヲ使ヒ、要スルニ一次元ベッチ数 $p'=0$ ナル集合体ニ就テ、一種ノ topologische Invarianten ヲ與ヘタ事ニ帰スル。

第二号ノ原稿デ Vietorio-Mayer ノ関係式カラ一ツノ Heegaard-diagramm ノ両方ノ Vollbrezeln Σ_1, Σ_2 デ homolog 0 トナル様ナ Σ_3 ノ freie Basis ノ数 γ' ガ此ノ集合体ノベッチ数 p' トナル事ガ分ル。ソコデ Σ_3 ノ Wegegruppe ヲ „abelschmachen" シテ Erzeugende s_i, t_i ノ freie abelsche Gruppe ニスル。t_i ハ Σ_1 デ homolog 0 デアリ、Σ_2 デ homolog 0 トナル曲線 r_i カラ次ノ Relationen ガ生ズル。

$$(1) \qquad r_i = \sum_k g_{ik} s_k + \sum_k h_{ik} t_k \qquad (i=1,2,\dots,p),$$

topologische Abbildung ハ r_i, s_i, t_i ノ Automorphismen デアルカラ Matrix (g_{ik}) ヲ Normalform ニ変ヘテ考ヘルト Matrix (g_{ik}) ノ

Rang ヲ ρ トスレバ $p-\rho=p'$. Min. $p=g$ デアルカラ又 Min. ρ ガ分レバ種数ガ分ル. Matrix (g_{ik}) ノ Invariant Faktor デ 1 ヨリ大ナルモノハ集合体ノ Torsionskoeffizient. 故ニソノ数 γ ハ p ノ如何ニカカハラズ不変. 且 $\rho \geqq \gamma$.

ソレ故 Torsionszahl ヲ與ヘル数(即チ Inzidenz-Matrix ノ Elementalteiler ノウチ 1 ト異ルモノノ数) γ トスレバ Geschlecht g ハ

$$g \geqq p' + \gamma.$$

Matrix (g_{ik}) ノ Elementalteiler 何レモ 1 ヨリ大トスレバ Rang

$$\rho = \gamma, \qquad \text{故ニ} \qquad g = p' + \gamma.$$

又若シ種数 $g=p'$ ダトスレバソノ集合体ハ Torsionskoeffizient ヲ持タナイ, 等ガ言ヘル.

次ニ $g=p'+\gamma$ トナル Mannigfaltigkeiten ヲ調ベルタメニ Relationen (1) ヲ Automorphism デ変形スル. 先ヅ

$$r_i = g_i s_i + \sum_k h_{ik} t_k$$

$$(2) \qquad \begin{cases} g_i > 1 & i = 1, 2, \ldots, \gamma \\ g_i = 1 & i = \gamma+1, \ldots, \rho \\ g_i = 0 & i = \rho+1, \ldots, p \end{cases}$$

ナル Normalgestalt ニ変ヘラレタトスル. r_i ト r_k トノ Schnittzahlen ノ関係ハ

$$(3) \qquad \mathrm{Sch.}(r_i, r_k) = g_i h_{ki} - g_k h_{ik} = 0$$

次ニ Automorphism

(4) $s_i = s_i^* + \sum_k b_{ik} t_k^*$, $t_i = t_i^*$ $(i=1,2,\dots,p)$

茲ニ $b_{ik} = b_{ki}$

ヲ施シテ $h_{ik}=0$ wenn $i=\gamma+1,\dots,p$ ニスル。

$$r_i^* = g_i s_i^* + \sum_k (g_i b_{ik} + h_{ik}) t_k^*$$

デアルカラ、$i \leqq \rho$ ノトキ $b_{ik} = -\dfrac{h_{ik}}{g_i}$ ニトル。(3)式ヨリ $b_{ik}=b_{ki}$、即チ (b_{ik}) Matrix ガ Automorphism ヲ與ヘルタメノ必要且充分ナ条件ガ充タサレル様ニ b_{ik} ノ値ヲ取リ $h_{ik}=0$ $(i=\gamma+1,\dots,p)$ ニスルヲ得ル。故ニ

$$\begin{cases} r_i = g_i s_i + \sum_k h_{ik} t_k & i \leqq \gamma \quad g_i > 1 \\ r_i = s_i & i = \gamma+1,\dots,\rho \\ r_i = \sum_{k=\rho+1}^{p} h_{ik} t_k & i = \rho+1,\dots,p \end{cases}$$

トナル。 $i=\gamma+1,\dots,p$ ノ Henkel ヲ考ヘレバ Relationen

$$\begin{cases} r_i = s_i \\ u_i = \sum_k m_{ik} s_k + t_i \end{cases}$$

u_i ハ Σ_2 デ homolog 0 トナラナイ Σ_3 ノ Basis ニテ同様ニ $u_i^* = u_i + \sum_k m_{ik} r_k$ $r_i^* = r_i$ ヲ施セバ

(5) $$\begin{cases} r_i = s_i \\ u_i = t_i \end{cases}$$

トナル。

此ノ $p-\gamma$ 個ノ Relationen ノ内 q 個ガ Singer ノ意味ノ äquivalent ナ Heegaarddiagramm ニ移ル時増シタ種数トスルト

ラバ q ダケ種数ガ減ゼラレル。即チ

$$g = p' + \gamma + q \qquad q \leqq p - \gamma\text{.}$$

此ノ q ノ決定ガ Heegaarddiagramm ニ就キ本質的ニ難シイモノヲ含ム問題デアル。

此度ノ問題ハ二ツニ分レル。(5) ノ Relationen ハ Homologie ノ性質ヲ表ス。故ニ元ニ戻ツテ Wegegruppe ノ Relationen ノ如何ナルモノガ (5) ノ Relationen ヲ與ヘルカ。等シイ (5) ノ Relationen ヲ與ヘテモ Wegegruppe ノ Relationen ハ異リ得ル。此ノ問題ニハ一般ノ freie gruppe 及ビソノ Automorphismengruppe トノ関係ヲ調ベネバナラナイ。

次ニ Wegegruppe ノ Relationen 等シクテモ尚且ツソレハ äquivalent ナ Heegaarddiagramm ヲ與ヘルトハ限ラナイ。是ガ解決サレレバ所謂 Poincaré ノ Vermutung モ解決サレルデアロウ。此ノ問題ニハ freie gruppe ト Heegaarddiagramm トノ関係ヲ調ベネバナラナイ。　(1934, 8, 18, 信州ニテ)

(8, 21 受取)