23　函數論初歩漫談

清水辰次郎（阪大）

1. 紙上談話會ガ毎週發行トナツテヰルコトハ如何ニソノ活動ガ盛ンダカヲ語ルモノデ甚ダ愉快ナ事ト思フ。然シ同一方面ノ研究家ノ數ガ少イカラデモアルガ、談話會上ノ問題ニツイテ議論百出ノ狀ヲ呈スルコトガ極メテ少イノハ遺憾デアル。筆者ハソンナ意味デ自分ノヤツテヰル事ヲ書キタクハアルガ、後ニユヅツテ、先ヅ最モ普遍的ナ話題ヲ呈出スルツモリナノデアル。

2. 複素變數函數論ノ基礎的ナ部分ハ兎角疎カニサレ勝ナモノト見エテソレラノ部分ガ書物ニ書イテアルノヲ見ルト一寸シタ事ナガラドウモ満足ノイカナイモノガ多イ。或領域デ正規ナ函數 $f(z)$ ガソノ内部ノ一点 z_0 ニテ $f'(z_0)\neq 0$ ナラバ z_0 ヲ通ル曲線ハ $f(z)$ ニヨツテ等角ニ寫像セラレルト云フ定理ハ何レノ書物ニモ載ツテヰルシ、ソノ証明モ大体苦情ハ云ハレナイ。然シナガラ、ソノ逆ニアタル、$f(z)$ ニヨリ等角ニ寫像セラレルナラバ $f(z)$ ハ正則ダト云フ定理ニナルト大低ノ本ハアマリ嚴密デナイ様ニ思ハレル。ソレデハドウシタラ良イカト云フト、眞ノ名案ハナイノダガ、次ノ様ニヤツタラドウカト思フ。尤モコレハ早急ノ間ノ出來事ダカラ、誰カニ、モツト好イ考ヘヲオ持チノ方ガアルダロウト思ツテ實ハソレガ伺ヒタクテ、コレヲ書イテヰル次第デアル。尤モ上記ノ逆ニアタル定理ハ純理論的カ、或ハ極初等的ニカシカノ他ニハアマリ役ニ立タナイモノデ近頃ノ書物ニハ書イテナイモノガ多イ。然シ、トモ角モ基礎的ナ部分ニハチガヒナイ。以下ノ話ハ暑サノ折柄當教室吉田耕作君，角谷靜夫君達ト駄辯リナガラ書イタモノデ人ノ智慧ガ交ツテヰル。然シ反ツテ山ヘ登ツテヰルカモ知レナイ。

何ハ兎モ角 等角寫像ト云フ定義カラ始メネバナルマイ。

一点 z_0 ニテ相交ル二ツノ切線ヲモツ長サノアル単一連續線

$$C_1 : \ z_1(s) = x_1(s) + i y_1(s), \quad z_1(0) = z_2(0) = z_0$$

$$C_2 : \ z_2(s) = x_2(s) + i y_2(s), \quad 0 \leqq s \leqq 1$$

(s ハ z_0 ヨリ測ッタ曲線 C ノ長サ)

ヲ考ヘ、一價函數 $w = f(z)$ ニヨルソレラノ寫像、即チ

$$C_1' : \ w_1(s) = f(z_1(s)), \quad C_2' : \ w_2(s) = f(z_2(s)), \quad 0 \leqq s \leqq 1, \ f(z_0) = w_0$$

ガ切線ヲモツ単一連續曲線ナリト假定スルトキ、C_1', C_2' ノ w_0 ニテナス角ト C_1, C_2 ノ z_0 ニテナス角トガ大キサ及ビ向キニ於テ一致スル 即チ

$$\lim_{s \to 0} \operatorname{Arg} \frac{w_2(s) - w_2(0)}{s} - \lim_{s \to 0} \operatorname{Arg} \frac{w_1(s) - w_1(0)}{s}$$

$$\cancel{= \operatorname{Arg} z_2'(0) - \operatorname{Arg} z_1'(0)}$$ (正誤ヲ見ヨ)

ナラバ上ノ寫像ハ z_0 ニ於テ角ノ不変性ヲ有スルトヨビ、

又 C_1 上ノ一点 Q, C_1' ノ上ノ之ニ対応スル点ヲ P トセバ $\displaystyle\lim_{Q \to z_0} \frac{\overline{P w_0}}{\overline{Q z_0}}$ ガ曲線 C_1 ニ無関係ニ一定有限ナラバ線分ノ不変性ヲ有ストヨブ。

角ノ不変性ト線分ノ不変性ヲ併有スル(一價函數ニ寫像ヲ等角寫像トヨブ。

斯クスレバ一價函數 $f(z)$ ガ或領域ノ内ノ全テノ點ニ於テ等角写像ノ性質ヲモテバ $f(z)$ ハソノ領域ニテ正則ニシテ且 $f(z)\neq 0$ デアル.

猶普通ハ $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ ヲ考ヘ z ガ C_1 上ヲ z_0 ニ近ヅケバコノ極限値ガ C ニ無関係ニ一定ニ存在スルカラ $f(z)$ ガ存スルトミルノ論法デアルガ, z ガ z_0 ニ近ヅクノハ切線ノアル線ニ沿フテノ時ダケシカ假定シテヰナイ. $f(z)$ ノ存在ニハ $|z-z_0|$ ナル任意ノ近ヅキ方デナケレバナラナイカラ上ノ事ダケデハ少シ言語ガ足ラナイ様ニ思フ.

猶角ノ不変性カラ

$$\lim \mathrm{Arg}\frac{w_1(\Delta)-w_1(0)}{\Delta}-\lim \mathrm{Arg}\frac{z_1(\Delta)-z_1(0)}{\Delta}$$

ガ曲線 C_1 ニ関セズ一定デアルカラ, C_1 ニ関セス

$$\lim_{\Delta\to 0}\mathrm{Arg}\frac{w_1(\Delta)-w_1(0)}{z_1(\Delta)-z_1(0)}$$

ガ存在シテ一定シテヲリ, 又同ジク線分ノ不変性カラ, C_1 ニ関セス

$$\lim_{\Delta\to 0}\left|\frac{w_1(\Delta)-w_1(0)}{z_1(\Delta)-z_1(0)}\right|$$

ガ存在(有限)シテ一定デアル.

ヨッテ $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{w_1(\Delta)-w_1(0)}{z_1(\Delta)-z_1(0)}$ ガ C_1 ノ如キ曲線上ニテ $z\to z_0$ ナルトキハ C_1 ニ関セズ一定。ヨッテ今 C_1 トシテ x 軸, y 軸ニ夫々平行ナ線分ヲ考ヘ z ヲソレニ沿フテ z_0 ニ近ヅケルコトニヨッテ(普通ノ如クシテ)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad w=u+iv$$

ヲ得ル. 即チ u_x, u_y, v_x, v_y ガ領域内全テノ點デ存在

Cauchy—Riemann ノ條件ヲ滿足スルノデアル。依ツテ Looman-Menchoff ノ定理（之ハ初等的ニハ u_x, u_y, v_x, v_y ノ連續性又ハ u, v ノ全微分可能性ヲ假定シテ証明セラレルノデアルガ，連續性ナシデ成立スルコトハ Looman ニヨツテ証明ガ与ヘラレタガ後 Ridder 其他ノ人々ハソノ証明ニ欠点ヲ指摘シタ．然シ Ridder 自身モ証明ヲ与ヘ得ナカツタ後ニ Menchoff ガ 1932 年 Looman ノ欠点ヲ補ヒ完全ナ証明ヲ与ヘ S. Saks ガ其"積分論"ナル書物ニ発表シタ）依テ我々ハココデ上ノ定理ヲ Looman-Menchoff ノ定理ト呼バウ）ニヨツテ $f(z)$ ハソノ領域ニテ正則デアル。$f(z_0) \neq 0$ ナルコトハ，既ニ $f(z)$ ノ正則性ガワカツタ上ハ角ノ不変性カラ明デアル。

併シ Looman-Menchoff ノ定理ハ大シタ面倒ナモノデハナイガ実変数函数論ノ知識ヲ多少使用セネバナラズ初等的トハイハレ

依テ上ノ結果ハ初等的ナ函数論ノ本ニ書クワケニハイカナイダラウ。

u_x, u_y, v_x, v_y ガ領域ニテ連續ダトミツ假定ヲ入レルナラ角ノ不変性丈デ充分デアル。

然シドウモ等角ナラ正則ダトミフ定理ニ $u_x, u_y \cdots$ 等ノ連續性ヲモ假定スルノハ幾何学的性質ノ他ニ何カ餘計ナ假定ヲスル様デ気持チガワルイ。

尤モ連續性ヲ全部假定シナクトモ u_x, u_y ノイヅレカ一ツ v_x, v_y ノイヅレカ一ツ，都合ニツ丈假定スレバ宜シイ。或ハ更

假定ヲ減ジテ u 及ビ v ノ全微分可能性 ($\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \to 0$ ナルトキ $\varepsilon \to 0$) ヲ假定スレバヨイ。

コレハ別段新シイ方法デハナイガ角ノ不變性ハ $\Theta_1 - \Theta_2 = \theta_1 - \theta_2$, 即チ $\Theta = \theta + c$, c ハ常數, ナルコトデアルカラ

$$tg\,\Theta = \frac{dv}{du} = \frac{v_x + v_y \frac{dy}{dx}}{u_x + u_y \frac{dy}{dx}} = \frac{v_x + v_y\, tg\,\theta}{u_x + u_y\, tg\,\theta} = tg(\theta + c).$$

コノ関係ハ θ ノスベテノ real ナ値ニ対シテ成立スルカラ complex ナ θ ニ対シテモ成立スル。$\theta = s + it$ トオキ, s ヲ固定シテ $t \to +\infty$ トスレバ $(v_x + iv_y)/(u_x + iu_y) = i$. コレヨリ $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ (Cauchy-Riemann) ヲ得ル。上ノ Θ ト θ トノ関係ハ等角寫像性カラ眞ノ變換ニ違ヒナイカラ $\begin{vmatrix} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{vmatrix} \neq 0$, 即チ Cauchy-Riemann ノ関係式カラ $|f'(z)| \neq 0$。

トコロガ領域ノ任意ノ点ニテ u, v ガ全微分可能 (u_x, u_y, v_x, v_y ガ連續ナラバ勿論 u, v ハ全微分可能) デ且ツ Cauchy-Riemann ノ関係式ヲ満足スレバ $f(z)$ ガ存在スル事ハ普通ノ書物ニ証明サレテヰル通リデ良イ。(高木貞治先生：岩波講座、解析概論 364頁)

即チ u, v ガ或領域ノスベテノ点デ全微分可能ナルトキ、ソコデ角ノ不變性ヲモテバ $f(z)$ ハソノ領域デ正則デアル。

Cauchy-Riemann ノ関係式トイヘバ、ソレヲ満足スルコトガ $u+iv$ ガ正則ナルタメニ充分デアルトイフコトヲ或ル書物デハ $\Delta y : \Delta x \to m$ ナルトキ

$$\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \to \frac{u_x + m u_y + i(v_x + m v_y)}{1 + im} = u_x + i v_x$$

ダト証明シテヰル。然シコレハ $\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ ニテ $\Delta z \to 0$ ナラシメルトキ切線ヲ有スル曲線ニ沿ツタモノデ、$f'(z)$ ガ存在スルコトヲ云フニハ任意ニ $\Delta z \to 0$ ナラシメタトキモ考ヘナケレバナラナイ。

領域内デ Cauchy-Riemann ノ関係式ガ成立スレバ、互ニ直角ナ方向ノ微分係数ガ存在シテ一致スレバソコデ正則ナルコトハ -ooman-Menchoff ノ定理デ明カダカラ、領域ノ場合ハ切線ノアル曲線ニ沿ツタトキダケ極限ガ一致スレバ十分ナコトハワカルガ一点 z_0 ニ於テ考ヘルトキ 切線ノアル曲線ニ沿ヘバ $\lim_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=k$ トイフコトヨリ $f'(z_0)$ ノ存在ガワカルダロウカ。答ハ然リト云ヘル。

何故ナラモシ或点集合デ $\Delta z\to 0$ ナルトキ $\lim_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ ガ存在シナイカ又ハ k ト異ナレバソノウチカラ適当ナ点列 $\{z_i\}$ ヲエラビ $\dfrac{f(z_0+\Delta z_i)-f(z_0)}{\Delta z_i}\to l \neq k$ ナラシメルコトガデキル。($\Delta z_i = z_i - z_0$, $\Delta z_i\to 0$)

$\{z_i\}$ ノ部分列 $\{z_{n_i}\}$ ヲエランデ、コレガスベテ z_0 ヲ通リ、且ツ z_0 デ切線ヲモツ曲線 C ノ上ニノツテヰル様ニスルコトガ出来レバ

$$\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ z_0+\Delta z \text{ on } C}}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=k,\quad \lim_{\Delta z_{n_i}}\frac{f(z_0+\Delta z_{n_i})-f(z_0)}{\Delta z_{n_i}}=l$$

トナツテ矛盾ガオコル。ヨツテ「 」ガ可能ナルコトヲ証明スレバヨイ。

z_0 ノ近傍ヲ z_0 ヲ頂点トスル 8個ノ 45° ノ角ニワケル。$\{z_i\}$ ノ点ガ、コレラノ辺ノドレカ一ツノ上ニ無限個アレバソノ辺ヲ C トトレバヨイ。ソレ以外ノ時ハ少クトモ一ツ $\{z_i\}$ ノ点ヲ無限個ソノ内部ニ含ム角ガアル。コノ角ヲ A_1 トシソノ内部ノ $\{z_i\}$ ノ点ヲ z_{n_1} トスル。z_{n_1} カラ A_1 ノ二辺ニ平行ナ線ヲ引キ A_1 ノ二辺トデ平行四辺形ヲ作ル。A_1 ノ二等分線デコノ平行四辺形ヲ二分スル。スルトソノウチ少クトモ一ツハ $\{z_i\}$ ノ点ヲ無限個含ム。コノ A_1 ノ二等分角ヲ A_2 トシ A_2 ノ内部ニ z_{n_2} ヲ $|z_{n_2}|<\dfrac{|z_{n_1}|}{2}$ デ且ツ先ノ平行四辺形ニ属スルヨウニトル。以下同様ニ $z_{n_3}, z_{n_4}, \cdots$ ヲトリ、折線 $z_{n_1}z_{n_2}\cdots$ ニ近イ曲線ヲ作ルト z_0 ニテ切線ヲモツ単一曲線デ且ツ $\{z_{n_i}\}$ ガスベテソノ上ニノツテ

ナル曲線Cヲ作ルコトガデキル。(長サモアルヨウニデキル)

倍、モトノ等角寫像ノ問題ニ立戻ッテ見レバ角ノ不變性ト線分ノ不変性トカラ任意ノ切線ノアル(長サアル)曲線ニ沿ッテ

$$\lim_{s\to 0}\frac{w(s)-w(0)}{z(s)-z(0)}$$

ガ存在スルカラ如何ナル点列デモ $\Delta z\to 0$ ナラバ

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

ガ存在スルコト、即チ $f'(z_0)$ ガ存在スルコトガ云ヘル。

等角寫像ノ性質ヲモツスベテノ点デ $f'(z)$ ガ存在スルカラ領域内デ等角寫像ノ性質ヲモテバソコデハ正則トナルコトガワカル。($f'(z_0)\neq 0$ ナルコトモ云ヘル)

コノ証明ナラ初等的ダガ厳密ニヤレバ少シ長クハカヽルガ函數論ノ最初ノ方ニ書ケナイダロウカ。

最後ニ、或一点ニ於テ $\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ ノ極限値ガ任意ノ切線ノアル曲線ニ沿ッテ一定ナラバ $f'(z_0)$ ノ存在ハワカッタガ、z_0 ヲ通ル直線ニ沿ッテ上ノ極限値ガ常ニ存在シテ一致シテモ $f'(z_0)$ ハ存在スルトハ限ラナイ。例ヘバ $z_0=x_0+iy_0$ ヲ通ル拋物線 $y-y_0=2(x-x_0)^2$ ト $y-y_0=\frac{1}{2}(x-x_0)^2$ トノ間デ、($z\to z_0$ ノトキニハ 0 ニナルガ、)任意ノ値ヲトリ、又上ノ二ツノ拋物線ノ外デハ常ニ0トナル函數ヲ正則函數ニ加ヘテオイテモ直線ニ沿ッテ $z_0+\Delta z\to z_0$ ナルトキ $\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ ノ極限ハカハラナイ。Δz ガ十分小サケレバ、直線デ近ヅクトキハ拋物線ヲハナレテシマフカラ。

正誤 8p. 9行 正規 ヲ 正則 ニ改ム

9p. 14行. 14行全体ヲ $= \lim_{s\to 0}\mathrm{Arg}\frac{z_2(s)-z_2(0)}{s} - \cancel{\lim_{s\to 0}\mathrm{Arg}\frac{z_1(s)-z_1(0)}{s}}$

$= \lim_{s\to 0}\mathrm{Arg}\frac{z_1(s)-z_1(0)}{s}$ ト改ム。