全国紙上数学談話会才9号

24. 新著紹介

吉田耕作（阪大）

Arné Beurling: Thése pour le doctorat, "Études sur un probléme de majoration," Upsal, 1933

最近入手シタモノデス。普通ノ単行本デナイ様デスカラ御紹介スルノモ無駄デナイダロウト思ヒマス。

酷暑ノ事デスカラ、ザット目ヲ通シタ丈デスガ、函数論近来ノ快著ト感激シ其感激ノ消エナイ中ニ。尚筆者ハFock書店ノ手ヲ通シテ買ッタノデスガ 4.5 Mark デシタ。

内容ハ Harmonische Majorant ノ理論。"或領域ニ於テ調和ナ函数≠const ハ其最大値ヲ此領域ノ内部ニ於テトリ得ナイ"トユフ簡単ナ principle ガ函数論ノ多クノ問題ニ於テ如何ニ有力ナ効果ヲ発揮シテヰルカハ周知ノ通リデス。従ッテ或條件ヲ満足スル調和函数（例ヘバ其領域ト boundary value トニ或程度ノ制限ヲ与ヘラレタ——其制限ノ程度ニヨッテハ、之ニヨッテ調和函数ガ unique ニ定ラナイカモシレマセン、ソノトキハ此制限ノ下ニアル調和函数ノ class）ノ majoration（之ヲ上或ハ下カラ押ヘル実函数ヲ見出スコト）ニ関スル理論ガ精シク出来レバ其函数論ニ対スル寄与ノ大キナコトハ言フ迄モアリマスマイ。現ニ Beurling ハ其一般論ノ Quelques applications トシテ（Ahlfors ト独立ニ）Denjoy ノ Vermutung 及ビ（E. Schmidt ト独立ニ）

Milloux ノ constant ヲ極メテ自然ニ且簡単ニ出シテヲリマス。

重要ナ結果ハ定理1,2及ビ Lemma

初メニイクツカノ定義ヲ与ヘトキマス。D ヲ単一連結ニシテ且其境界ガ少クトモ二点ヲ含ムトシマス。Riemann ノ写像定理ニヨッテ, D ヲ, 其内部ノ任意ノ一点 z_0 ガ原点ニ写サレル様ニ, 単位円 $|w|<1$ ニ等角ニ写スコトガ出来マス。此ノ写像函数ヲ $w=f(z;z_0,D)$ トスレバ $G(z;z_0,D)=\log|f(z;z_0,D)|$ ガ所謂 Green ノ函数デス。又 γ ヲ D ノ境界上ノ或 point set トシタトキ, D 内デ調和デ且其 Randwert ガ γ デハ 1 其以外デハ 0 デアル様ナ函数ヲ $\omega(z;\gamma,D)$ トシマス。勿論 ω ハ上ノ Randwert ニヨッテ unique ニ定ルモノトシマス。

D ニ於ケル調和函数ノ majoration ノ問題ノ多クガ, G ヤ ω ノ majoration ノ問題ニ reduce サレルコトハ言フ迄モアリマセン。定理1及ビ2ハ G, ω ノ majoration ヲ極メテ巧ミニ且 elegant ニ解イテヰルノデアリマス。ソレニツイテ紹介シマセウ。

先ヅ, 調和函数デスカラ, G ヤ ω ハ conform invariant デス。即チ或函数ニヨッテ D ガ D^* ニ schlicht ニ写サレタトスルトキ z, z_0, γ ノ Bild ヲ z^*, z_0^*, γ^* トスレバ

$$G(z;z_0,D)=G(z^*;z_0^*,D)$$
$$\omega(z;\gamma,D)=\omega(z^*;\gamma^*,D^*)\,。$$

猶, (z,z_0,γ,D) ト (z^*,z_0^*,γ^*,D^*) ノ如ク互ニ schlicht Bild ニナッテヰル点, point set, 領域等ヲ互ニ homologue デアルト云フコトニシマス。今 z, z_0 ヲ D 内ニ横ハリ且長サノアル曲線 C

デ結ビマス。C ノ長サヲ l_C。凡ユル C ノトリ方ニ対スル l_C ノ borné superieur ヲ $l(z, z_0; D)$ トシ又 D ノ area ヲ πR_D^2 トシテ $\rho(z, z_0; D) = \frac{l(z, z_0; D)}{R_D}$ ヲ定義シマス。D ト homologue ナ D^* ニ於ミテ同ジク

$$\rho(z^*, z_0^*; D^*) = \frac{l(z^*, z_0^*; D^*)}{R_{D^*}}$$

ヲ計算シマス。凡ユル D^* ニ対スル $\rho(z^*, z_0^*; D^*)$ ノ borné superieur ヲ $d(z, z_0; D)$ トシマシテ以テ domain D ニ於ケル二点 z, z_0 ノ距離トト定義シマス。borné superieur ヲトツタノデスカラ此ノ距離ハ conform invariant デス。

$$d(z, z_0; D) = d(z^*, z_0^*; D^*)$$

同様ニシテ conform invariant ナ距離 $d(z, \gamma; D)$ ガ定義サレマス

然ラバ

> 定理 1 及ビ 2。
>
> (1) $$e^{-d^2(z, z_0; D)} = 1 - e^{2G(z; z_0, D)}$$
>
> (2) $$e^{-d^2(z, \gamma; D)+1} \geqq \omega(z; \gamma, D)$$
>
> 特ニ γ ガ D ノ境界上ノ或 arc ナラバ
>
> (3) $$e^{-d^2(z, \gamma; D)} \leqq \frac{\pi}{2}\omega(z; \gamma, D)$$

$\boxed{\text{注意}}$ ミンドウイフ風ニ majoration ニ使フカトミフコトハ d ノ定義ノ仕方カラ明デセウ。一例シノベテミルト，(z^*, z_0^*, D^*) (z, z_0, D) トガ homologue ナラバ，定義ニヨツテ

$$\frac{|z^* - z_0^*|}{R_{D^*}} \leqq \frac{l(z^*, z_0^*; D^*)}{R_{D^*}} \leqq d(z, z_0; D)$$

デスカラ，(1)ニヨツテ

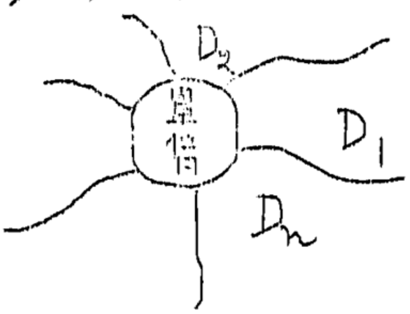
$$e^{-\left(\frac{|z^*-z_0^*|}{R_{D^*}}\right)^2} \geq e^{-\left(\frac{l(z^*,z_0^*;D^*)}{R_{D^*}}\right)^2} \geq 1-e^{2G(z;z_0,D)}$$

即チ無限ニ多クノ仕方デGトWノmajorationガ出来ルノデス。——Dデschlichtナ函数ガ一ツミツカレバソレデ一ツノmajorationガ出来ル。

Lemmaハ冒頭ニ述ベタ様ナ非常ニ一般ナ制限ノモトニアル調和函数ノclassノmajorationニツイテノ一ツノprincipleヲ陳述シテヰルノデ簡単ニ其ノ證明ヲ導ヘシ難イカラ止メトキマセウ。唯之カラ導カレル沢山ノ定理ノ中ノ一ツノcorollaryトシテMillouxノ定理ガ得ラレルコトヲ御注意シトキマセウ。

最後ニ(2)ノ応用トシテDenjoy-Ahlforsノ定理ノ導キ方ヲ御紹介シトキマセウ。

<u>假定</u>。單位円ノ周上カラ出テ∞ニ向ヒ凡有限ノ所デ二ツ宛互ニ交ラヌn個ノcurveニヨツテ$|z|>1$ガn個ノdomain $D_1, D_2, \cdots, D_n$ニ分ケラレタトシマス。整函数$f(z)$ガ之等ノcurve及ビ單位円周上デ$|f(z)|<1$トシ満且各D_iノ内部ニ夫々$\log|f(z_i)|\geq$サルガ如キ点z_iガ少クトモ一ツ宛アルトシマス。



<u>定理</u>。円周$|z|=R$ガ各D_iカラ切リトル部分ヲ夫々γ_iトシγ_iノ上ニ於ケル$|f(z)|$ノmaxヲ$M_i(R)$トスレバ$i=1,2,\cdots,n$ニ対

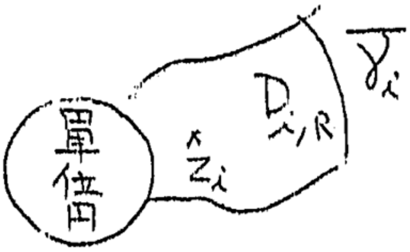
$$(4)\quad \left\{ \underset{\underline{\lim}}{\log} M_i(R) \geq \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{\pi}{\alpha_i(R)}}, \quad R > R_0 \geq \max_i |z_i| \right.$$

ヲ満足スル如キ実函数 $\alpha_i(R)\geqq 0$ ガ存在スル。

(Denjoy-Ahlfors ノ定理ガ (4) ニ含マレテヰルコトハ少クトモ一ツノ $\alpha_i(R)\leqq\frac{2}{n}$ ダカラ明デセウ)

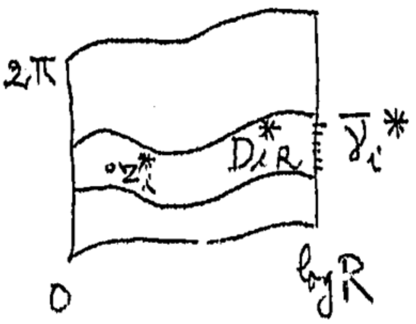
<u>補(4)ノ証明。</u> $R>\underset{i}{\mathrm{Max}}|z_i|$ トシ円周 $|z|=R$ ニヨツテ D_i カラ切リトラレタ部分ノ中単一連結ニシテ z_i ヲ含ム domain ヲ $D_{i,R}$ トシマス。$D_{i,R}$ ノ Rand ニナツテヰル γ_i ノ部分ヲ $\bar{\gamma}_i$ トスレバ、明カニ $D_{i,R}$ ニ於テ $\omega(z;\bar{\gamma}_i,D_{i,R})\log M_i(R)\geqq\log|f(z)|$ ガ成立シマスカラ (2) 及ビ $\log|f(z_i)|\geqq e$ ニヨツテ

$$(5)\quad \log M_i(R)\geqq e^{d^2(z_i,\bar{\gamma}_i;D_{i,R})}$$



次ニ右辺ヲ下カラ majorate (minorate?) スル為ニ $z^*=\log z$ ニヨツテ $D_{i,R};\ i=1,2,\dots,n$ ノ Vereinigungmenge ヲ面積 $\leqq 2\pi\log R$ ナル (帯状) domain ニ schlicht ニ写シマス。$D_{i,R}$ ノ area ヲ $\pi\alpha_i(R)\log R$ トスレバ明カニ

$$(6)\quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(R)\leqq 2,\qquad \alpha_i(R)\geqq 0$$



先ノ注意ニヨツテ

$$(7)\quad d^2(z_i,\bar{\gamma}_i;D_{i,R})\geqq\frac{(\log R-\log|z_i|)^2}{\alpha_i(R)\log R}$$

ヨツテ $R_0\geqq\max_i|z_i^2|$, $R>R_0$ ナラバ (5), (6), (7) カラ

$\log M_i(R)\geqq\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_i(R)}}$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(R)\leqq 2$ ヲ得ル。C.Q.F.D.