26. 有理函数ニツイテ

清水辰次郎 (阪大)

全有限平面デ meromorphic ナ函数 $f(z)$ ニ対シテ

$$A_1(r,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{|f'(z)|}{(1+|f(z)|^2)^2}\rho\,d\rho\,d\theta,\qquad z=\rho e^{i\theta}.$$

トオケバ

$$\int_\varepsilon^r\frac{A_1(t,f)}{t}\,dt=T(r,f)+O(1)$$

デアル。コノ $T(r,f)$ ハ R. Nevanlinna ガ有理型函数ノ理論ニ導入シタ函数デアル。筆者ハ数学輯報 1927, 第6巻, 第1号 129 頁デ $f(z)$ ガ有理函数ナラバ $A_1(r,f)$ ガ有界トナリ, 逆ニ $A_1(r,f)$ ガ有界ナラバ $f(z)$ ガ有理函数トナルコトヲ示シタ。コレハ $T(r,f)=O(\log r)$ ガ有理函数デアルタメニ必要且十分ダトイフ Nevanlinna ノ定理ヨリ直グ出ルノダガ, 有理函数ニ対シテハ $A_1(r,f)$ ノ方ガ $T(r,f)$ ヨリ簡単ナ意味ヲモツテヰルノダカラ直接ニ $A_1(r,f)$ ノ性質ヲ使ツテ証明スルノガ順序ダト思ハレル。

$f(z)=\dfrac{P_1(z)}{P_2(z)}$, ($P_1(z), P_2(z)$ ハ有理整函数) トオケバ

$$A_1(r,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{|P_1'P_2-P_1P_2'|^2}{(|P_1|^2+|P_2|^2)^2}\rho\,d\rho\,d\theta\leqq\frac{1}{\pi}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}{}''\,\rho\,d\rho\,d\theta+\frac{1}{\pi}\int_{r_0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{K}{\rho^4}\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$z=\rho e^{i\theta}$$

コヽニ K, r_0 ハ十分大キイ常数デアル。何者、$P_1(z), P_2(z)$ ノ次数ヲ夫々 n_1, n_2 トスレバ $n_1\neq n_2$ ナルトキハ明カニ $P_1'P_2-P_1P_2'$ ノ次数ハ $|P_1|^2+|P_2|^2$ ノ次数ヨリ少クトモ 2 低ク, $n_1=n_2$ ナルトキモ $P_1'P_2-P_1P_2'$ ノ最高次ノ項ガ消エルタメ少クトモ 2 低イ。ヨツテ r_0, K ヲ十分大キクトツテオケバヨイ。コレヨリ

$$A_1(r,f)=O(1)$$

次ニ $A_1(x,f)$ ガ有界ナラバ $f(z)$ ハ有理函數デナケレバナラヌコトヲ示サウ。假リニ $f(z)$ ガ有理函數デナイトスレバ ∞ ハ $f(z)$ ノ孤立眞性特異點トナルカラ $f(z)$ ガ領域ヲ領域ニ寫像スルトニフ性質ヲ使ヘバ Weierstrass ノ定理カラ適當ニ α_0 ヲトレバ $f(z)=\alpha_0$ ガ ∞ 近傍デ無限ニ多クノ根ヲモツヨウニスルコトガ出來ル。（例ヘバ竹内端三先生ノ岩波講座、楕円函數論 IV, 163–165頁）。モットモ上ノコトハ Picard ノ定理カラ直グ得ラレルノダガ成ル可ク初等的ニ証明シナイト面白クナイノデ Weierstrass ノ定理ヲ使ツタノデアル。（ $\alpha_0 \neq \infty$ トスルコトモデキル）

シカルニ、一方、任意ノ $\alpha\ (\neq\infty)$ ニ対シテ $L_\alpha(f)=\dfrac{|\alpha|^2 f+\alpha}{|\alpha|\,(f-\alpha)}$ トオケバ

$$\frac{|dL_\alpha(f)|}{1+|L_\alpha(f)|^2}=\frac{|\alpha|^2\,(1+|\alpha|^2)\,|df|}{|\alpha|^2\,|f-\alpha|^2+\left||\alpha|^2 f+\alpha\right|^2}$$

$$\begin{aligned}|\alpha|^2|f-\alpha|^2+\left||\alpha|^2f+\alpha\right|^2&=|\alpha|^2(f-\alpha)(\bar f-\bar\alpha)+(|\alpha|^2f+\alpha)(|\alpha|^2\bar f+\bar\alpha)\\&=|\alpha|^2(1+|\alpha|^2)(1+|f|^2)\end{aligned}$$

デアルカラ

$$\frac{|dL_\alpha(f)|}{1+|L_\alpha(f)|^2}=\frac{|df|}{1+|f|^2}\qquad \therefore\quad A_1(x,L_\alpha(f))=A_1(x,f)$$

（實ハ、L_α ハ Riemann sphere ノ上デ考ヘレバ α ニ相當スル點ヲ ∞ ニ相當スル點ヘモツテユク、球自身ノ回轉デアル）

ヨツテ筆者ノ前掲論文 123頁 Theorem I ニヨリ

$$A_1(x,f)=A_1(x,L_\alpha(f))=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left.\frac{\partial\log(1+|L_\alpha(f)|^2)}{\partial x}\right|_{z=xe^{i\theta}} r\,d\theta+n(x,\alpha)$$

$A_1(x,f)$ ハ beschränkt ダカラ、コレヨリ（$A_1(x,f)\leqq K$）

$$\int_{R_0}^{R}(K-n(x,\alpha))\,d\log x\geqq\left[\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}\log(1+|L_\alpha(f)|^2)_{z=re^{i\theta}}\,d\theta\right]_{x=R}-\Big[\;\;''\;\;\Big]_{x=R_0}$$

右辺ノ第一項ハ $\geqq 0$ ダカラ

$$\int_{R_0}^{R}(K-n(x,\alpha))\,d\log x\geqq C(f,\alpha,R_0)$$

$C(f,\alpha,R_0)$ ハ f,α,R_0 ノミニ関係スル常數。コヽデ $\alpha=\alpha_0$ トレバ矛盾ガオコル。$n(x,\alpha)\uparrow\infty$ ナラバ