OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Derived Fourier series ノ Absolute Summability (A) ニツイテ
Author(s)	高橋, 龍夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 10, p. none-none
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73865
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

28. Derived Fourier series, Absolute Summability (A) ニツイテ

高橋龍夫 (東北大)

紙上談話会第7号デ佐藤徳意氏ガ $f(\theta)$, derived Fourier series

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta)$

, absolute Summability (A) ヲ有限サレテヰルトソレテ (1) ガ absolutely summable (A) ナル為メノ, 充分条件トレテ

(2) $\int_0^{\delta} \frac{|\psi(t)|}{t^2} dt \quad (\delta > 0)$ ユヽニ $\psi(t) = f(x+t) - f(x-t)$

, existence ヲ証明サレタ。ソノ証明ハ (1) ヲ作ツテ Fejér sum ヲ直接計算シテヤルラレテヰル。今年, Proc. Edinburgh Math. Soc. (part 1) デ L. S. Bosanquet ガ通常, Fourier series, absolute Summability ニ対シテ J. M. Whittaker, B. N. Prasad 等ヨリモ一般ノ条件ヲ与ヘテヰル今 derived Fourier series ニ付テ, 吾々ノ問題ヲ Bosanquet ノヤツタ結果ガ, ソノ方法ニ帰着シヤウト試ミテ見ルト, (2) ヨリモット広イ条件ヲ与ヘル事ガ出来ル

今 $\Psi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \psi(u)\, du, \quad \alpha > 0$

$t^{-\alpha} \Psi(t) = \psi_\alpha(t), \quad \psi_0(t) = \psi(t)$ トオク。

(2) ヨリモ $\int_0^{\delta} \frac{|\psi_\alpha(t)|}{t^2} dt$, existence ノ方ガ一般ニ強イ事ハ明ラカデアル (メノ1ラバ)

又 $\int_0^{\delta} \left| \frac{d\left(\frac{\psi_{\alpha+1}(t)}{t}\right)}{dt} \right| dt \leqq \int_0^{\delta} \frac{|\psi'_{\alpha+1}(t)|}{t} dt + \int_0^{\delta} \frac{|\psi_{\alpha+1}(t)|}{t^2} dt$

$= \alpha \int_0^{\delta} \frac{|\psi_\alpha(t) - \psi_{\alpha+1}(t)|}{t} dt + \int_0^{\delta} \frac{|\psi_{\alpha+1}(t)|}{t^2} dt$

デアルカラ α ヲ fix シテオケバ $\int_0^{\delta} \frac{|\psi_\alpha(t)|}{t} dt$, existence ヨリモ $\frac{\psi_\alpha(t)}{t}$ ガ $(0, \delta)$ デ bounded variation ナル事ノ方ガ広イ。ソコデ筆者ハ, 之ガ充分条件ニナル事ヲ示サウ。($\frac{\psi_\alpha(t)}{t}$ ガ bounded variation デアラバ, $\frac{\psi_\beta(t)}{t}$ (但シ $\beta > \alpha$) モ又左様ナル事ハ Bosanquet ヨリ分ツテヰル。) 即チ

定理. $\frac{\psi_2(t)}{t}$ が $(0,5)$ で bounded variation の函数ナルトキハ (1) ハ absolutely summable (A) デアル。

証明ノ件ハ $\int_0^1 \left| \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\pi \psi(t) \frac{x \sin t}{1-2x\cos t+x^2} dt \right| dx$ ノ存在デアル。

之ニハ, $\int_0^1 \left| \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\eta \psi(t) \frac{x \sin t}{1-2x\cos t+x^2} dt \right| dx \quad \left(0<\eta<\frac{\pi}{2}\right)$ ノ existence ヲヘ

三ヘバヨイ。 今

$$K(x,t) = K = \frac{1-x^2}{1-2x\cos t+x^2}$$

$$M(x,t) = M = \frac{x \sin t}{1-2x\cos t+x^2}$$

トオクト

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -2\frac{\partial K}{\partial t} - 2x\frac{\partial^2 K}{\partial x \partial t}$$

トナル事カラ 吾々ノ問題ニオイテ M ヲ含ム計算ガ K ヲ含ム計算ニ reduce ガルト

$$\int_0^1 \left| \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\eta \psi(t) \frac{x \sin t}{1-2x\cos t+x^2} dt \right| dx$$

$$\leqq 2\int_0^1 \left| \int_0^\eta \psi(t) \frac{\partial K}{\partial t} dt \right| dx + 2\int_0^1 \left| \int_0^\eta \psi(t) \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial t} dt \right| dx$$

(i) 第二ノ積分ハ Bodanquet ノ論文中ノ, 添字ノ入ヨウナ計算デオキカヘ, 途中ノ至ル至ルデ又 explicit ニホテルル $\phi_n(t)$ ハ $\frac{\psi_n(t)}{t}$ デオキカハル後ハ同ジデアル。

(ii) 第一ノ積分ヲ取扱フニモ Bodanquet ト同一ノ方法及ビ Estimation ガアテハマル。即チ

$$(3) \quad \left| \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} K(x,t) \right| \begin{cases} \leqq A t^{-2-n} \\ \leqq A(1-x)^{-2} t^{-n} \end{cases} \quad (n \text{ ノ負ニナラヌ整数})$$

(実ハモウ少シ精密ニハルガ之デ充分デアル.) トレ (Bodanquet, Lemma 4)

$$\int_0^t K(x,u)\,du = O(t) \quad \text{カラ (3) ヲ用イ, Induction ニヨルト}$$

$$\int_0^t u^n \frac{\partial^n}{\partial u^n} K(x,u)\,du \begin{cases} \leqq A t^{-1} \\ \leqq A(1-x)^{-2} t \end{cases}$$

ガ得ラレ (i) ト全ク同様ナ置換ガ証明サレル。以上ノ定理ハ直接 M ヲ含ム積分ヲ estimate シテモ未ダ答デアルガ既ニ K ノ estimation ガアルノデ之ニ reduce シ得デアル