



Title	Derived Fourier series ノ Absolute Summability (A) ニツイテ
Author(s)	高橋, 龍夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 10, p. none-none
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73865
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

28. Derived Fourier series, Absolute Summability(A)
ニツイテ 高橋 龍夫 (東北大)

紙上談話会 第7号ニ 佐藤 徳意氏ガ $f(\theta)$, derived Fourier series

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta)$$

absolute summability (A)ヲ研究セリテ非ル。ソレニ (1)ガ absolutely summable (A)ニル 爲メ δ , 充分条件トシテ

$$(2) \int_0^{\delta} \frac{|\psi(t)|}{t^2} dt \quad (\delta > 0) \quad \text{ユ、} \psi(t) = f(t+t) - f(t-t)$$

existence 証明セリ。ソノ証明ハ (1)ガ 作リテノ Poisson sum
ヲ直接計算シテヤラレテアル。今年, Proc. Edinburgh Math. Soc.
(part 1)ニ $L. B. Bosanquet$ ガ 通常, Fourier series, absolute summabilityニ対シテ $J. M. Whittaker, B. M. Prasad$ 等ヨリモ一般, 条件ヲ与テアル
今 derived Fourier seriesニ付テ, 吾ガ 問題ヲ Bosanquet, ヤリノ 結果ガ
ハツ 方法ニ 帰着セヤウト 試ミテ見ルト (2)ヨリモ 充分条件ヲ 与ヘル事ガ 出キル

$$\text{今 } \Psi_{\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \psi(u) du, \quad \alpha > 0$$

$$t^{-\alpha} \Psi(t) = \psi_{\alpha}(t), \quad \psi_0(t) = \psi(t) \text{ トス。}$$

(2)ヨリモ $\int_0^{\delta} \frac{|\psi_{\alpha}(t)|}{t^2} dt$, existence, 方ガ 一般ニ 華ニ 明ラキテアル ($\alpha > 1+\epsilon$)

$$\begin{aligned} \text{又 } \int_0^{\delta} \left| \frac{d(\frac{\psi_{\alpha+1}(t)}{t})}{dt} \right| dt &\leq \int_0^{\delta} \frac{|\psi_{\alpha+1}'(t)|}{t} dt + \int_0^{\delta} \frac{|\psi_{\alpha+1}(t)|}{t^2} dt \\ &= \alpha \int_0^{\delta} \frac{|\psi_{\alpha}(t) - \psi_{\alpha+1}(t)|}{t} dt + \int_0^{\delta} \frac{|\psi_{\alpha+1}(t)|}{t^2} dt \end{aligned}$$

テアルカラ α ヲ fixシテハ $\int_0^{\delta} \frac{|\psi_{\alpha}(t)|}{t} dt$, existence ヨリモ $\frac{\psi_{\alpha}(t)}{t}$ ガ $(0, \delta)$ ニ
bounded variation, 且 $\psi_{\alpha}(t)$ ガ 連続ニアルトイフ事, 方ガ 成ル。ソコニ 筆者ハ, 之ガ
充分条件ニル事ヲ示サシ。 ($\frac{\psi_{\alpha}(t)}{t}$ ガ bounded variationニラハ, $\frac{\psi_0(t)}{t}$ (但シ $\beta > \alpha$)
又 左様ニル事。 Bosanquet ヨリ分リテ非ル。 即チ

定理. $\frac{\psi_u(t)}{t}$ が $(0, \delta)$ で bounded variation の函数 $\psi = +$ なる如き ψ が $\psi(0) = 0$ の ψ は absolutely summable (A) である。

証明の事、 $\int_0^1 \left| \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\pi \psi(t) \frac{x \sin t}{1-2x \cos t + x^2} dt \right| dx$ が存在する。

之より、 $\int_0^1 \left| \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\eta \psi(t) \frac{x \sin t}{1-2x \cos t + x^2} dt \right| dx$ ($0 < \eta < \frac{\pi}{2}$) の existence がある。

$$K(x, t) = K = \frac{1-x^2}{1-2x \cos t + x^2}$$

$$M(x, t) = M = \frac{x \sin t}{1-2x \cos t + x^2}$$

トオカト

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial K}{\partial t} - 2x \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial t}$$

トオカト 吾々、問題 = オカト M の合の計算が K の合の計算 = reduce する。

$$\int_0^1 \left| \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\eta \psi(t) \frac{x \sin t}{1-2x \cos t + x^2} dt \right| dx$$

$$\leq 2 \int_0^1 \left| \int_0^\eta \psi(t) \frac{\partial K}{\partial t} dt \right| dx + 2 \int_0^1 \left| \int_0^\eta \psi(t) \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial t} dt \right| dx$$

(i) 第一、積分、Bosanguet、論文の中、添字、 n を $n+1$ とおきかへ、途中、 Ψ_u 、 Ψ_u と ψ_u 又 explicit = 出さず $\psi_u(t)$ 、 $\frac{\psi_u(t)}{t}$ とおきかへた後、同じである。

(ii) 第一、積分を取扱、 ψ = ψ Bosanguet と同一、方法及び Estimation がアハマル。即ち

$$(3) \left| \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} K(x, t) \right| \begin{cases} \leq A t^{-2-n} \\ \leq A(1-x)^{-2-n} \end{cases} \quad (n \text{ 頁} = n+1 \text{ 又 整数})$$

(実、 ψ の少シ精密 = ψ が ψ である) トレ (Bosanguet, Lemma 4)

$$\int_0^t K(x, u) du = O(t) \text{ から (3) を用いて, Induction = 出る}$$

$$\int_0^t u^n \frac{\partial^n}{\partial u^n} K(x, u) du \begin{cases} \leq A t^{-1} \\ \leq A(1-x)^{-2} t \end{cases}$$

か得られ (i) と全く同様 + 置換で証明される。以上、定理、直接 M の合の積分を estimate して出される筈であるが 既に K の estimation がアハマル之 = reduce して出される。