



Title	或積分方程式ノ固有値問題
Author(s)	河口, 商次
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 10, p. a-c
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73866
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

29. 或積分方程式・固有値問題

河 口 商 次 (北大)

吾同家が見レハ"言成"ツマラナイコレカモ矢口レナイカ"幾何学"見方
 カ起ツタ問題ヲ"幾"文南スヲ採シラモ見当ラナイノテ"吾同家"目カ
 カヲオ借りニタト思"ツテ"コノ紙ホシオ借りスル。

問題ハ Hilbert ノ三種類積分方程式

$$\varphi(x) = A(x)\varphi(x) + \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy$$

= 関スルモノヲ"此方程式ヲ linear operator ト見做シ

$$\varphi(x) = L\varphi(x)$$

ト考ヘル。ソノトキ $\varphi(x)$ ト $f(x)$ トカ"常数ノヒツテ"異ルコトガアルカ。則

$$(1) \quad \frac{1}{\lambda}\varphi(x) = A(x)\varphi(x) + \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy$$

ノ固有値問題ヲ"アル。特ニ $A(x)$ カ"常数ヲ"アルナラハ"コノ問題ハ
 Fredholm 積分方程式ノ固有値問題トナル。又 λ カ"常数ヲ"ナク
 $A(x)$ = 常数カ"掛ツタモノヲ"アレハ"

$$A(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy$$

トナツテ之ハ Hilbert カ"既ニ"言論ニ"テナル。然レニ (1) = 関シラハ
 誰モヤツテ平ナイ様ナノテ"今迄"得タ結果ヲ述ベ供セテ未解決
 部分ヲ提示シヨウ。先ツ"今迄"得タ結果ハ

$$(1) \quad \text{一般ニ} \text{固有値即チ } D\left(\frac{\lambda K(x,y)}{\lambda A(x) - 1}\right) = 0 \text{ ノ根カ"必ス"存}$$

在スルトハ限ラナイ。 $A(x) \equiv \text{const.}$ ノトキテ"サヘサウテ"アルカラ

(2) (1)が恒等的零でない連続解シモツ為ニハ λ が固有値デ"アルコトが"必要十分デ"アル。

証明スルニハ (1)ヲ変形スルハ " $\frac{\lambda K(x,y)}{\lambda A(x)-1}$ " ヲ未知ニスル同ニ次方程式ニナルカラソレニ Fredholm 型 言命ヲ具備適用スルバヨイ。

(3) λ が固有値デ" $D\left[\frac{\lambda K(x,y)}{\lambda A(x)-1}\right]$ ノ階数カ"零デ"アルハ (1)ノ解ハ n 個ノ函数 $f_i(x)$ デ"

$$f(x) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(x)$$

ト表ハサレル。

(4) 固有値ハ $K(x,y)$, $\bar{K}(x,y) = K(y,x)$ ニ対シテ同一デ"アル。階数モ等シイ

(5) λ ヲ $K(x,y)$ ノ一ツノ固有値, μ ヲ $\bar{K}(x,y)$ ノ一ツノ固有値スレバソレヲニ対応スル固有函数 $f(x)$, $\bar{f}(x)$ ノ間ニハ

$$\int_a^b f(x) \bar{f}(x) dx = 0$$

即チ直交関係カ"アル。

(証明)

$$\frac{1}{\lambda} f(x) = A(x) f(x) + \int_a^b K(x,y) f(y) dy$$

$$\frac{1}{\mu} \bar{f}(x) = A(x) \bar{f}(x) + \int_a^b \bar{K}(x,y) \bar{f}(y) dy$$

ホ一式ニ $\bar{f}(x)$ ヲホニ式ニ $f(x)$ ヲ乘ヅルニ相乗積ニ"積分スルハ

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\right) \int_a^b f(x) \bar{f}(x) dx = 0$$

$\lambda \neq \mu$ デ"アルカラ証明デ"キタコトニナル。之カラ次ノ事カ"エヘル。

c.

(6) $K(x, y)$ が対称ならハ"固有値ノ與ナル固有函数ハ直交スル。

(7) $A(x)$, $K(x, y)$ が共=実テ" $K(x, y)$ が対称テ"アルハ"ソノ固有値ハ必ス"実テ"ナケレハ"ナラナイ。

(証明) 複素数 λ が固有値テ"アルハ"共軛数 $\bar{\lambda}$ モ亦固有値ニナリソレヲ=対スル固有函数 $f(x)$, $\bar{f}(x)$ モ亦 $\bar{\lambda}$ = 共軛テ"アル。然ルニ (6) = ヨツテ $\lambda \neq \bar{\lambda}$ テ"アルカラ $f(x)$, $\bar{f}(x)$ トハ直交スル。シハ矛盾デ"アル。

大体以上ノコトハ簡單ニ証明出來ルノテ"アルカ" $K(x, y)$ が"実テ"対称テ"アルトモ固有値カ"存在スルカト"ウカハ一寸証明出來ナイ。即チ $D\left[\frac{\lambda K}{\lambda A - 1}\right]$ カ" λ ノ整函数ヲ"ゲイカラ Hilbertノ理論トハ同ニ"ヤウニハ行カナイカト思ハレル。又固有函数ヲ" $K(x, y)$ ヲ展開スルコトモ簡單ニハ行カナイ様ニテ"

$$\sum_n \left(\frac{1}{\lambda_n} - A(x) \right)^2 f_n^2(x) \leq \int_a^b K^2(x, y) dy$$

之ハ証明テ"キル。コノ也 Hilbertノ理論ト同ニ"様ニ理論カ"出來ハ"都合ヨイテ"アル。以上未解決ノ部分ニ對シテ解答ヲ求メタイ。

(9.9.7 受取)