32. Abel's integral equation.

f

佐藤常三（京大）

誰シモ Abel's integral equation ノ解法ハ実際巧妙ナ技巧デアルコトヲシミジミ感ジサセラレルコトト思ヒマス．又物理学上ノ問題デ随分ト此ノ形ニ帰着セシメラレルモノノ多イコトモ経験シマス．扨テコノ基本的デ古典的ナモノハ，

$$(1)\qquad \int_{s=+0}^{x}\frac{\varphi(s)\,ds}{(x-s)^{\alpha}}=f(x)\qquad (0<\alpha<1)$$

デアリマス，此ノ解ハ

$$(2)\qquad \varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{z=+0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{1-\alpha}}$$

デアリマス，一單ニ計算ノミヲ示シマスガ使用スル函数ニハ適当ニ條件ヲ與ヘタモノトシテオキマス ―(2)ヲ発展サセテ

$$(3)\qquad \varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{f(+0)}{x^{1-\alpha}}+\int_{z=+0}^{x}\frac{f'(z)\,dz}{(x-z)^{1-\alpha}}\right)$$

トシタノハ Goursat デアルコトハヨク知ラレテ居マス，右辺ノ積分ヲ更ニ発展サセマスト

$$(4)\qquad \varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{f(+0)}{x^{1-\alpha}}+\frac{f'(+0)}{\alpha}x^{\alpha}+\frac{f''(+0)}{\alpha(\alpha+1)}x^{\alpha+1}+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{f^{(n)}(+0)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}x^{\alpha+n-1}+\frac{1}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}\int_{z=+0}^{x}(x-z)^{\alpha+n-1}f^{(n+1)}(z)\,dz\right)$$

(1)ノ形ノ拡張ヲ考ヘマス．

$$(5)\qquad \int_{s=+0}^{x}(x-s)^{\beta}\varphi(s)\,ds=f(x)\qquad (\beta>-1,\ \beta\neq 0)$$

コレハタシカニ(1)ヲ含ミマス，コノ様ニ $(x-s)$ ノ exponent ニヨッテ，Abel ノ積分方程式ノ拡張ガ Rudolf Rothe; Zur Abelschen Integralgleichung, Math. Zeit

Bd. 33 (1931) pp. 375 — 387 ノ論文ニアリマス．私ハ次ノ如キ擴張ヲ考ヘテ，其ノ結果ニコノ論文ノ内容ヲ辨償シテ了ヒマシタ．　(1) ニ對シテ

$$(A)\qquad \int_{+0}^{x}\int_{+0}^{s}\int_{+0}^{s_1}\cdots\int_{+0}^{s_{n-2}}\frac{\varphi(s_{n-2})}{(x-s)^{\alpha}(s-s_1)^{\alpha_1}\cdots(s-s_{n-2})^{\alpha_{n-2}}}\,ds\,ds_1\cdots ds_{n-2}=f(x)$$

$$(B)\qquad \int_{a+0}^{\tau(x)}\frac{\varphi(s)}{[\tau(x)-s]^{\alpha}}\,ds=f(x)\qquad\qquad (\tau(+0)=a)$$

$$(C)\qquad \int_{+0}^{x}\frac{\varphi(s)\,ds}{[\tau(x)-\tau(s)]^{\alpha}}=f(x)$$

(D)　　(A), (B), (C) ノ混合物

ヲ考ヘタノデアリマス．(B) ハ (C) ニ變換サレマスカラマヅ (C) カラ始メマス．積分變數ヲ

$$\left(\begin{aligned}&\tau(x)=\tau(s)+[\tau(z)-\tau(s)]t\\&\tau'(x)dx=[\tau(z)-\tau(s)]dt\end{aligned}\right.$$

デ $x\to t$ ニ變換シマスト

$$\int_{x=s+0}^{z}\frac{\tau'(x)\,dx}{[\tau(z)-\tau(x)]^{1-\alpha}[\tau(x)-\tau(s)]^{\alpha}}=\int_{+0}^{1}\frac{dt}{(1-t)^{1-\alpha}t^{\alpha}}=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$$

コレヲ利用シテ，全ク古典的ナ場合ノ處理ト同樣ニシマスト，(2) ニ對應シテ

$$(2')\qquad \varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{z=+0}^{x}\frac{f(z)\tau'(z)\,dz}{[\tau(x)-\tau(z)]^{1-\alpha}}$$

(3) ニ對應シテ

$$(3')\qquad \varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left\{[\tau(x)-\tau(+0)]^{\alpha-1}\tau'(x)f(+0)+\tau'(x)\int_{z=+0}^{x}\frac{f'(z)\,dz}{[\tau(x)-\tau(z)]^{1-\alpha}}\right\}$$

(4) ニ對應シテ

$$(4')\qquad \varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left\{\frac{f(+0)}{\tau_{1-\alpha}}+\frac{f_1(+0)}{\alpha}\tau_{\alpha}+\frac{f_2(+0)}{\alpha(\alpha+1)}\tau_{\alpha+1}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{f_n(+0)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}\tau_{\alpha+n-1}+\frac{\tau'(x)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}\int_{z=+0}^{x}f_n'(z)[\tau(x)-\tau(z)]^{\alpha}d\right.$$

但シ $$f_i(z) \equiv \frac{f'_{i-1}(z)}{\tau'(z)}, \quad f_1(z) \equiv \frac{f'(z)}{\tau'(z)}, \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

$$\tau_q \equiv \left[\tau(x)-\tau(+0)\right]^q \tau'(x).$$

勿論冒頭ニ断ハッタ様ニ $f(+0)$, $f_1(+0) \equiv \dfrac{f'(+0)}{\tau'(+0)} \left(= \lim\limits_{z\to+0}\dfrac{f'(z)}{\tau'(z)}\right)$, ----

等ノ存在ガ吟味サレネバナリマセン、以上ノ結果ニ Rothe ノ擴張 (7) ヲ借用デキマス、扨テ (A) ハ

$$\int_{+0}^{s}\int_{+0}^{s_1}\cdots\cdots\cdots ds_1 ds_2 \cdots ds_{n-2} \equiv \Phi(s)$$

トオケバ

$$\int_{+0}^{x}\frac{\Phi(s)}{(x-s)^{\alpha}}ds = f(x)$$

トナルカラ、古典的ノ問題ニ歸着セシメラレマス、コレデ (D) ガ完全ニ処理デキルト思ヒマス。

附記：コノ理論ハ化學上重要ナ応用問題ヲ解決スルモノデ、追テ近日中本論ト共ニ發表シマス。

(4月7日受取)。